

TEORİK FİZİK DERSLERİ

Dizinin Kurucusu : AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

Dizinin Yöneticisi : ÇETİN CANSOY

«Teorik Fizik Dersleri» şimdilik 3 ü Lisans ve 9 u Lisansüstü düzeyinde 12 cild metin kitabı ile 15 cild çözümlü problem kitabından oluşan bir dizi olarak plânlanmış bulunmaktadır.

METİN KİTAPLARI :

Lisans Düzeyinde

1. **Fizikte Matematik Metotlar**; A.Y.Özemre (1. baskısı *İTÜ Yayınları No. 826*, 1971; 2. baskısı, *İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları Sayı No. 173*).
2. **Klâsik Teorik Mekanik**; A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 132*, 1976; 2. baskı *No. 158*, 1981).
3. **Kuvantum Mekanîği.**

Lisansüstü Düzeyinde

4. **Klâsik Elektrodinamiğe Giriş**; A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 180*, 1983).
5. **Isı Teorisi**; A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 140*, 1977).
6. **Özel Rölâtivite Teorisi.**
7. **Gravitasyonun Rölâivist Teorileri**; A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 168*, 1982).
8. **Kozmolojiye Giriş**; A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 161*, 1981).
9. **İleri Kuvantum Teorisi.**
10. **Çekirdek Teorisi**; Ç.Cansoy (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 143*, 1978).
11. **Alan Teorilerine Giriş.**
12. **Temel Tâneçikler Teorisi.**

ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTAPLARI :

Dizinin tasarlanan 15 adet Çözümlü Problem Kitabından hâlen yayınlanmış, baskıda ya da hazırlanmakta olanlar şunlardır :

- 1/II **Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı**; E.Rıza (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 169*, 1982).
- 2/I **Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı**; A.Y.Özemre ve Ş.Zebitay (*HAZIRLANIYOR*).
- 3/I **Kuvantum Mekanîği Çözümlü Problem Kitabı**; E.Rıza (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 171*, 1982).
- 5/I **Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı**; A.Y.Özemre ve E.Rıza (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 147*, 1978).
- 10/I **Çekirdek Teorisi Çözümlü Problem Kitabı**; Ç.Cansoy (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 183*, 1983).

TEORİK FİZİK DERSLERİ

CİLD 10/1

ÇEKİRDEK TEORİSİ ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTABI

Doç. Dr. ÇETİN CANSOY

Istanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ

1983

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

YAYINLARINDAN

Sayı : 3094

FEN FAKÜLTESİ

Sayı : 183

TEORİK FİZİK

Sayı : 19

© 1983 - Her hakkı İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesine aittir.

*İ. Ü. Fen Fakültesi
Matematiksel Fizik Anabilim Dalı
Mensubu Arkadaşlarıma*

ÖNSÖZ

Bu kitap «Teorik Fizik Dersleri» dizisinde evvelce yayımlanan «Çekirdek Teorisi» ders kitabının tamamlayıcısı olarak hazırlanmıştır. Bu sebepten, bölüm başlıkları adı geçen kitaptakilerle aynıdır. Kitapta ayrıntıları ile çözülmüş 51 problem bulunmaktadır. Problemlerin çözümlerinde biliniyor farz edilen formüller «Çekirdek Teorisi» ders kitabında bulunmaktadır. Bu sebepten, bu kitap adı geçen kitapla birlikte kullanılmalıdır. Zaten problemlerden 31 i bahis konusu kitabın bölüm sonlarında verilmiştir. Geri kalan 20 problem başka kaynaklardan derlenmiştir. Problemlerin çözümünde çok kullanılan sayısal büyüklüklerin başlıcaları EK : I deki cetvellerde verilmiştir.

Bir önceki ilk kitabım için olduğu gibi bu kitabı da hazırlamaya beni teşvik ettiği ve cesaretlendirdiği için Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Başkanı Prof. Dr. Ahmed Yüksel Özemre'ye en samimî teşekkürlerimi burada ifâde etmeyi borç bilirim.

Kitabın dizgi, prova ve baskı işlemleri sırasında büyük emekleri geçmiş olan Fen Fakültesi Matbaasının bütün elemanlarına gösterdikleri dikkat ve gayretler için samimî teşekkürlerimi ifâde etmekten haz duymaktayım.

Bayazıt, Mart 1983

Çetin Cansoy

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
I. BÖLÜM : Çekirdeklerin Nitel Özellikleri	1
II. BÖLÜM : Çekirdeklerin Genel Özellikleri	18
III. BÖLÜM : Alçak Enerjilerde İki Nükleonlu Sistemler	33
IV. BÖLÜM : Çekirdek Modelleri	87
V. BÖLÜM : Çekirdek Reaksiyonları	103
VI. BÖLÜM : Alfa Parçalanması	113
EK: I : Cetveller	130
BİBLİYOGRAFYA	131
ERRATA	132

ERRATA

<u>Sayfa</u>	<u>Satır</u>	<u>Yanlış</u>	<u>Doğru</u>
108	12	VI.3.	V.3.
111	4*	$e^{i\delta_l} - e^{i\delta_l}$	$e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}$

I. BÖLÜM

ÇEKİRDEKLERİN NİTEL ÖZELLİKLERİ

I.1. ${}^8\text{Be}$ in (a) ${}^7\text{Li} + {}^1\text{H}$, (b) ${}^6\text{Li} + {}^2\text{H}$, (c) ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ parçalanmalarına karşı kararlılığını araştırınız.

ÇÖZÜM :

Eğer bir çekirdeğin kütlesi, herhangi iki parçaya ayrıldığı zaman bu parçaların kütlelerinin toplamından küçükse çekirdek bu parçalara ayrılmaya karşı kararlıdır. Ek I deki cetvellere bakarak aşağıdaki sonuçlara varılır :

$$(a) M({}^7\text{Li}) + M({}^1\text{H}) = 7,016004 + 1,007825 = 8,023829 \text{ u}$$

$$M({}^8\text{Be}) = 8,005308 \text{ u}$$

$$M({}^8\text{Be}) < M({}^7\text{Li}) + M({}^1\text{H}) \text{ olduğundan kararlıdır.}$$

$$(b) M({}^6\text{Li}) + M({}^2\text{H}) = 6,015125 + 2,014102 = 8,029227 \text{ u}$$

$$M({}^8\text{Be}) < M({}^6\text{Li}) + M({}^2\text{H}) \text{ olduğundan kararlıdır.}$$

$$(c) M({}^4\text{He}) + M({}^4\text{He}) = 4,002603 + 4,002603 = 8,005206 \text{ u}$$

$$M({}^8\text{Be}) \cong M({}^4\text{He}) + M({}^4\text{He}) \text{ olduğundan uç uca kararsızdır.}$$

I.2. Bir protonun hem pozitron parçalanmasına, hem de elektron yutulmasına karşı kararlı olduğunu gerçekleştiriniz.

ÇÖZÜM :

$p \rightarrow n + e^+$ parçalanması için :

$$M(n) + M(e^+) = 1,008665 + 0,0005486 = 1,0092136 \text{ u}$$

$$M(p) = 1,0072765 \text{ u}$$

$$M(p) < M(n) + M(e^+) \text{ olduğundan kararlıdır.}$$

$p + e^- \rightarrow n$ yutulması için :

$$M(p) + M(e^-) = 1,0072765 + 0,0005486 = 1,0078251 \text{ u}$$

$$M(n) = 1,008665 \text{ u}$$

$M(p) + M(e^-) < M(n)$ olduğundan kararlıdır.

I.3. ${}^9\text{Be}$, 6 MeV enerjisindeki α -parçacıkları ile bombardıman ediliyor. ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ reaksiyonu sonunda ${}^{12}\text{C}$ nin temel hâlin üzerinde 4,43; 7,66 ve 9,63 MeV lik üç uyarılmış enerji seviyesi bulunmuştur. Buna göre reaksiyondan ileri doğrultuda çıkan nötronların enerjilerinin 11,52; 6,84; 3,25 ve 0,70 MeV olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme; Karbon çekirdeğinin geri tepmesi ihmâl edilemez).

ÇÖZÜM :

Çekirdek reaksiyonlarındaki kütle değişimleri özel rölâtivite teorisi ile hesaplandığı için enerjinin korunumu ilkesi bu teoriye göre yazılmalıdır. Bir parçacığın kinetik enerjisi T ve sükûnet kütlesi M olduğuna göre özel rölâtivite teorisinde toplam enerjisi $E = T + Mc^2$ olur. Buna göre ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ reaksiyonunda enerjinin korunumu ilkesi

$$E_{\text{Be}} + E_{\alpha} = E_n + E_C + E_u$$

veya

$$T_{\alpha} + (M_{\text{Be}} + M_{\alpha}) c^2 = T_n + T_C + (M_n + M_C) c^2 + E_u$$

şeklinde yazılabilir. Burada E_u karbon çekirdeğinin uyarılma enerjisidir. Bu reaksiyondan açığa çıkan enerji

$$Q = [M_{\text{Be}} + M_{\alpha} - (M_n + M_C)] c^2$$

oldüğundan, enerjinin korunumunu ifâde eden denklem

$$T_{\alpha} + Q = T_n + T_C + E_u$$

şeklini alır. Diğer yandan, momentumun korunumu ilkesi

$$\mathbf{p}_{\alpha} = \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_C$$

şeklinindedir. Bu üç momentum vektörü bir düzlem üzerindedir. \mathbf{p}_{α} vektörü ile \mathbf{p}_n vektörü arasındaki açı θ ve \mathbf{p}_C vektörü arasındaki ters yöndeki açı φ olsun. O hâlde, \mathbf{p}_n ile \mathbf{p}_C vektörleri arasındaki açı $\theta + \varphi$ dir ve $\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_C = \mathbf{p}_{\alpha}$ denkleminin \mathbf{p}_{α} vektörü doğrultusundaki ve bu vektöre dik doğrultudaki izdüşümleri

$$\nu_n \cos \theta + \nu_C \cos \varphi = p_{\alpha}$$

$$\nu_n \sin \theta - \nu_C \sin \varphi = 0$$

şeklinindedir. Reaksiyondan ileri doğrultuda çıkan nötronlar için $\theta = 0$ ve geri

tepen karbon çekirdekleri için de $\varphi = \pi$ olur. Bu şartlar altında ikinci denklem özdeş olarak sağlanır ve birinci denklem de

$$p_n - p_C = p_\alpha$$

veya

$$p_n - p_\alpha = p_C$$

şeklini alır. Bu denklemin her iki yanının karesi alınarak

$$p_n^2 + p_\alpha^2 - 2p_n p_\alpha = p_C^2$$

bulunur ve rölâivistik olmayan hızlar için

$$2M_n T_n + 2M_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{2M_n T_n} \sqrt{2M_\alpha T_\alpha} = 2M_C T_C$$

veya

$$M_n T_n + M_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{M_n M_\alpha T_\alpha} \sqrt{T_n} = M_C T_C$$

elde edilir. Karbon çekirdeğinin T_C geri tepme kinetik enerjisi, enerjinin korunumu denklemi aracılığı ile yok edilirse

$$M_n T_n + M_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{M_n M_\alpha T_\alpha} \sqrt{T_n} = M_C(T_\alpha + Q - T_n - E_u)$$

veya

$$(M_n + M_C) T_n - 2\sqrt{M_n M_\alpha T_\alpha} \sqrt{T_n} - [(M_C - M_\alpha) T_\alpha + M_C(Q - E_u)] = 0$$

elde edilir. $\sqrt{T_n}$ ye göre ikinci dereceden olan bu denklemin diskriminantı

$$\Delta = M_n M_\alpha T_\alpha + (M_n + M_C) [(M_C - M_\alpha) T_\alpha + M_C(Q - E_u)]$$

veya

$$\Delta = M_C [(M_n + M_C - M_\alpha) T_\alpha + (M_n + M_C) (Q - E_u)]$$

şeklindedir. Buna göre

$$\sqrt{T_n} = \frac{\sqrt{M_n M_\alpha T_\alpha} + \sqrt{\Delta}}{M_n + M_C}$$

sonucuna varılır. Burada $p_n = \sqrt{2M_n T_n} > 0$ olması gerektiğinden $\sqrt{\Delta}$ nın işareti + seçilmiştir.

Artık Ek I deki cetvellerden yararlanarak T_n nin sayısal değerleri hesaplanabilir :

$$Q = [9,012185 + 4,002603 - (1,008665 + 12)] 931,5016$$

$$Q = 5,7035843 \text{ MeV}$$

$$\Delta = 12 [(13,008665 - 4,002603) 6 + 13,008665 (5,7035843 - E_u)]$$

$$\Delta = 12 (128,23239 - 13,008665 E_u)$$

$$\sqrt{M_n M_\alpha T_\alpha} = 4,92175917$$

değerleri yerlerine yazılırsa

$$\sqrt{T_n} = 0,378344678 + \sqrt{9,093132576 - 0,9224620666 E_u}$$

elde edilir. Bu son bağıntıdan aşağıdaki sonuçlar hesaplanır :

E_u (MeV)	T_n (MeV)
0	11,52
4,43	6,84
7,66	3,25
9,63	0,70

I.4. Bir trityum hedefi 0,4 MeV enerjisindeki döteronlarla bombardıman edilmektedir. ${}^3H(d, n){}^4He$ reaksiyonundan çıkan nötronlar döteronların geliş doğrultusu ile θ açısı yaptığına göre $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ve 180° doğrultularında çıkan notronların enerjilerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Enerjinin korunumu ilkesi (Bak. prob. 3)

$$E_t + E_d = E_n + E_\alpha$$

veya

$$T_d + (M_t + M_d) c^2 = T_n + T_\alpha + (M_n + M_\alpha) c^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu reaksiyondan açığa çıkan enerji

$$Q = [M_t + M_d - (M_n + M_\alpha)] c^2$$

olduğundan, enerjinin korunumunu ifâde eden denklem

$$T_d + Q = T_n + T_\alpha$$

şeklini alır. Diğer yandan, momentumun korunumu ilkesi

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_\alpha$$

veya

$$\mathbf{p}_d - \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_\alpha$$

şeklindedir. Son denklemin her iki yanının skaler karesi alınırsa

$$p_n^2 + p_d^2 - 2p_d p_n \cos \theta = p_\alpha^2$$

bulunur, ve rölâivistik olmayan hızlar için

$$2M_n T_n + 2M_d T_d - 2 \sqrt{2M_d T_d} \sqrt{2M_n T_n} \cos \theta = 2M_\alpha T_\alpha$$

elde edilir. Helyum çekirdeğinin T_α geri tepme kinetik enerjisi, enerjinin korunumu denklemi aracılığı ile yok edilirse

$$M_n T_n + M_d T_d - 2 \sqrt{M_d M_n T_d} \cos \theta \sqrt{T_n} = M_\alpha (T_d + Q - T_n)$$

veya

$$(M_n + M_\alpha) T_n - 2 \sqrt{M_d M_n T_d} \cos \theta \sqrt{T_n} - [(M_\alpha - M_d) T_d + M_\alpha Q] = 0$$

veya

$$T_n - 2 \frac{\sqrt{M_d M_n T_d}}{M_n + M_\alpha} \cos \theta \sqrt{T_n} - \frac{(M_\alpha - M_d) T_d + M_\alpha Q}{M_n + M_\alpha} = 0$$

sonucuna varılır. Bu denklem $\sqrt{T_n}$ ye göre ikinci derecedendir. Ek I deki cetvellere bakarak

$$Q = [3,01605 + 2,014102 - (1,008665 + 4,002603)] 931,5016$$

$$Q = 17,590476 \text{ MeV}$$

ve

$$T_n - 2 \times 0,17988567 \cos \theta \sqrt{T_n} - 14,208598 = 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü de

$$\sqrt{T_n} = 0,17988567 \cos \theta + \sqrt{0,03235885 \cos^2 \theta + 14,208598}$$

şeklindedir. Karekökün işareti $p_n > 0$ şartına göre seçilmiştir. Bu son bağıntıdan aşağıdaki sonuçlar hesaplanır :

θ	T_n (MeV)
0°	15,631
30°	15,432
60°	14,903
90°	14,208
180°	12,916

I.5. Kütlesi M_h olan ve başlangıçta sükûnette bulunan bir hedef çekirdek, kinetik enerjisi T ve kütlesi M olan parçacıklar tarafından bombardıman edilmektedir. Bombardıman parçacığı hedef tarafından yutulduğuna göre, bileşik çekirdeğin E_u uyarılma enerjisi ile T kinetik enerjisi arasındaki bağıntıyı bulunuz.

ÇÖZÜM :

Enerjinin korunumu ilkesi

$$E + E_h = E_b + E_u$$

veya

$$T + (M + M_h) c^2 = T_b + M_b c^2 + E_u$$

şeklinde yazılabilir. Burada T_b bileşik çekirdeğin kinetik enerjisi ve E_u da bileşik çekirdeğin uyarılma enerjisidir. Bu reaksiyondan açığa çıkan enerji

$$Q = (M + M_h - M_b) c^2$$

olduğundan, enerjinin korunumunu ifâde eden denklem

$$T + Q = T_b + E_u$$

veya

$$E_u = Q + T - T_b$$

şeklini alır. Diğer yandan, momentumun korunumu ilkesi

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_b \quad \text{veya} \quad p^2 = p_b^2$$

şeklindedir ve rölâivistik olmayan hızlar için

$$2MT = 2M_b T_b$$

veya

$$T_b = \frac{M}{M_b} T$$

şeklini alır. T_b nin bu ifâdesi enerjinin korunumu denkleminde yerine yazılırsa

$$E_u = Q + \frac{M_b - M}{M_b} T$$

bulunur. Diğer yandan, $M + M_h \cong M_b$ olduğundan

$$E_u = Q + \frac{M_h T}{M + M_h}$$

sonucuna varılır.

1.6. Bir önceki problemi (yâni, prob. 5 i) rölâivistik hızlar için çözünüz, ve elde edeceğiniz sonucu rölâivistik olmayan hızlar için tartışınız.

ÇÖZÜM :

Laboratuar sisteminde çarpışmadan önceki toplam enerji

$$\varepsilon = E + E_h$$

şeklindedir. Kütle merkezi sisteminde çarpışmadan sonraki toplam enerji ise

$$\varepsilon' = E_b' + E_u'$$

şeklindedir. Kütle merkezi sisteminden laboratuvar sistemine rölâivistik hızlar için bir Lorentz dönüşümü ile geçilebilir. Enerji-momentum dördü vektörünün büyüklüğü Lorentz dönüşümüne göre invaryant olduğu için

$$\frac{\varepsilon'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2$$

yazılabilir. Burada \mathbf{p}' kütle merkezi sistemindeki toplam momentumdur ve kütle merkezinin tanımına göre $\mathbf{p}' = 0$ dir. \mathbf{p} ise laboratuvar sistemindeki toplam momentumdur ve çarpışmadan önce bombardıman parçacığının momentumuna eşittir, çarpışmadan sonra da bileşik çekirdeğin \mathbf{p}_b momentumuna eşittir. O hâlde:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_b' = 0 \quad \text{ve} \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_b$$

olduğundan

$$\varepsilon' = M_b c^2 + E_u' \quad \text{ve} \quad \varepsilon = E + M_h c^2$$

yazılabilir. Bu değerler yukarda yerlerine yazılırsa

$$\frac{(M_b c^2 + E_u')^2}{c^2} = \frac{(E + M_h c^2)^2}{c^2} - p^2$$

veya

$$\frac{(M_b c^2 + E_u')^2}{c^2} = 2M_h E + M_h^2 c^2 + \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = M^2 c^2$$

olduğundan

$$\frac{(M_b c^2 + E_u')^2}{c^2} = 2M_h E + (M^2 + M_h^2) c^2$$

veya

$$E_u' = c \sqrt{2M_h E + (M^2 + M_h^2) c^2} - M_b c^2$$

sonucuna varılır. Bu son bağıntıda $E = T + M c^2$ yazılırsa

$$E_u' = c \sqrt{2M_h T + (M + M_h)^2 c^2} - M_b c^2$$

elde edilir. Bu bağıntı, kütle merkezi sisteminde bileşik çekirdeğin uyarılma enerjisini, bombardıman parçacığının laboratuvar sistemindeki enerjisi cinsinden vermektedir.

Rölativistik olmayan hızlar için yukardaki formül

$$E_u' = -M_b c^2 + (M + M_h) c^2 \sqrt{1 + \frac{2M_h T}{(M + M_h)^2 c^2}}$$

şeklinde yazılarak aşağıdaki yaklaşık şekle konulabilir :

$$E_u' \cong -M_b c^2 + (M + M_h) c^2 \left[1 + \frac{M_h T}{(M + M_h)^2 c^2} \right]$$

$$E_u' \cong (M + M_h - M_b) c^2 + \frac{M_h T}{M + M_h}$$

$$E_u' \cong Q + \frac{M_h T}{M + M_h}$$

Bu yaklaşık sonuç, bir önceki problemde elde edilen sonuçla aynıdır. Böylece, rölativistik olmayan hızlar için kütle merkezi sistemindeki uyarılma enerjisinin laboratuvar sistemindeki uyarılma enerjisine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Şüphesiz rölativistik hızlar için $E_u' \neq E_u$ dur.

I.7. Kütlesi M_2 olan bir çekirdek, kütlesi M_1 ve hızı v_1 olan bir parçacık tarafından bombardıman edilmektedir. Meydana gelen çekirdek reaksiyonundan kütleleri M_3, M_4 ve hızları da v_3, v_4 olan parçacıklar çıkmaktadır. Hızlar rölativistik olmadığına ve reaksiyon andoerjik olduğuna göre bombardıman parçacığının, ancak $v_3 = v_4$ şartı sağlandığı takdirde,

$$T_{es} = \frac{M_3 + M_4}{M_3 + M_4 - M_1} Q$$

bağıntısı ile verilen eşik enerjisine sahip olduğunu gösteriniz. Burada Q , reaksiyon esnasında yutulan (absorplanan) enerjidir.

ÇÖZÜM :

Enerjinin korunumu ilkesi

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

veya

$$T_1 + (M_1 + M_2) c^2 = T_3 + T_4 + (M_3 + M_4) c^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu reaksiyonda yutulan enerji

$$Q = [M_3 + M_4 - (M_1 + M_2)] c^2$$

olduğundan, enerjinin korunumunu ifâde eden denklem

$$T_1 = T_3 + T_4 + Q$$

veya

$$T_1 = \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} M_4 v_4^2 + Q$$

şeklini alır. Diğer yandan, momentumun korunumu ilkesi

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$$

veya

$$\mathbf{p}_1 = M_3 \mathbf{v}_3 + M_4 \mathbf{v}_4$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi

$$\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$$

vaz edelim. Bu son bağıntı kullanılarak enerjinin ve momentumun korunumunu ifade eden denklemler

$$T_1 = \frac{1}{2} (M_3 + M_4) v_3^2 + M_4 \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} M_4 u^2 + Q$$

$$\mathbf{p}_1 = (M_3 + M_4) \mathbf{v}_3 + M_4 \mathbf{u}$$

şekillerinde yazılabilirler. Momentumun korunumunu veren ikinci denklemin her iki yanının skaler karesi alınırsa

$$T_1 = \frac{p_1^2}{2M_1} = \frac{1}{2M_1} [(M_3 + M_4)^2 v_3^2 + 2M_4 (M_3 + M_4) \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u} + M_4^2 u^2]$$

veya

$$\frac{M_1}{M_3 + M_4} T_1 = \frac{1}{2} (M_3 + M_4) v_3^2 + M_4 \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u} + \frac{M_4^2}{2(M_3 + M_4)} u^2$$

bulunur. Eğer bu son denklem enerjinin korunumu denkleminde taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{M_3 + M_4 - M_1}{M_3 + M_4} T_1 = \frac{M_3 M_4}{2(M_3 + M_4)} u^2 + Q$$

veya

$$T_1 = \frac{M_3 M_4}{2(M_3 + M_4 - M_1)} u^2 + \frac{M_3 + M_4}{M_3 + M_4 - M_1} Q$$

sonucuna varılır. Bir andoerjik reaksiyonun eşik enerjisi diye başlangıçta sükûnette bulunan bir hedef çekirdeği bombardıman eden parçacığın reaksiyonu mümkün kılan minimum kinetik enerjisine denir. O hâlde :

$$\frac{dT_1}{du} = 0 \quad \text{için} \quad T_1 = T_{es}$$

olmalıdır. Böylece

$$\frac{dT_1}{du} = \frac{M_3 M_4}{M_3 + M_4 - M_1} u = 0 \quad \text{için} \quad u = 0$$

ve

$$\frac{d^2T_1}{du^2} = \frac{M_3 M_4}{M_3 + M_4 - M_1} > 0$$

olduğundan

$$T_{es} = \frac{M_3 + M_4}{M_3 + M_4 - M_1} Q$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, $u = 0$ şartı $\mathbf{u} = 0$ veya $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_4$ şartı ile eşdeğerlidir.

I.8. Kütleli M_2 olan bir çekirdek veya hedef parçacık, kütleli M_1 ve hızı \mathbf{v}_1 olan bir parçacık tarafından bombardıman edilmektedir. Meydana gelen reaksiyondan kütleleri M_3, M_4, \dots, M_n ve hızları da $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n$ olan parçacıklar çıkmaktadır. Reaksiyon andoerjik olduğuna göre rölâivistik hızlar için bombardıman parçacığının, ancak $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_4 = \dots = \mathbf{v}_n$ şartları sağlandığı takdirde,

$$T_{es} = \frac{c^2}{2M_2} \left[\left(\sum_{i=3}^n M_i \right)^2 - (M_1 + M_2)^2 \right]$$

bağıntısı ile verilen eşik enerjisine sahip olduğunu gösteriniz. Bu problemin, bir önceki problemin (yâni, prob. 7 nin) hem rölâivistik hızlar hâline, hem de reaksiyondan çok sayıda parçacıklar çıkması hâline teşmili olduğuna dikkat ediniz. Böylece, reaksiyondan iki parçacık çıkması hâlinde sonucun prob. 7 deki sonuçla hemen hemen aynı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Laboratuar sisteminde çarpışmadan önceki toplam enerji

$$\varepsilon = E_1 + E_2 = E_1 + M_2 c^2$$

şeklindedir. Kütle merkezi sisteminde çarpışmadan sonraki toplam enerji ise

$$\varepsilon' = E_3' + E_4' + \dots + E_n' = \sum_{i=3}^n E_i'$$

şeklindedir. Diğer yandan, laboratuar sistemindeki toplam momentum

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \dots + \mathbf{p}_n$$

dir ve kütle merkezi sistemindeki toplam momentum ise $\mathbf{p}' = 0$ dir. Dörtlü enerji-momentum vektörünün büyüklüğü Lorentz dönüşümüne göre invaryant olduğu için

$$\frac{\epsilon'^2}{c^2} = \frac{\epsilon^2}{c^2} - p^2$$

veya

$$\frac{\epsilon'^2}{c^2} = \frac{(E_1 + M_2 c^2)^2}{c^2} - p_1^2$$

yazılabilir. Diğer yandan, E_1 ile p_1 arasında

$$\frac{E_1^2}{c^2} - p_1^2 = M_1^2 c^2$$

bağıntısı vardır ve bu bağıntı yardımı ile bir önceki bağıntı

$$\frac{\epsilon'^2}{c^2} = \frac{(E_1 + M_2 c^2)^2 - E_1^2}{c^2} + M_1^2 c^2$$

veya

$$\frac{\epsilon'^2}{c^2} = M_2 (2E_1 + M_2 c^2) + M_1^2 c^2$$

veya

$$\frac{\epsilon'^2}{c^2} = 2M_2 E_1 + (M_1^2 + M_2^2) c^2$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $E_1 = T_1 + M_1 c^2$ bağıntısı bu son bağıntıda yerine yazılırsa

$$\frac{\epsilon'^2}{c^2} = 2M_2 T_1 + (M_1 + M_2)^2 c^2$$

sonucuna varılır. Diğer yandan,

$$E_i' = c \sqrt{p_i'^2 + M_i^2 c^2}$$

olduğundan

$$\frac{\epsilon'}{c} = \sum_{i=3}^n \sqrt{p_i'^2 + M_i^2 c^2}$$

yazılabilir ve

$$2M_2 T_1 + (M_1 + M_2)^2 c^2 = \left(\sum_{i=3}^n \sqrt{p_i'^2 + M_i^2 c^2} \right)^2$$

sonucuna varılır. Eşik enerjisinin tanımı

$$(T_1)_{\text{minimum}} = T_{\text{eş}}$$

olduğu için

$$2M_2 \frac{\partial T_1}{\partial p_i'} = 2 \left(\sum_{i=3}^n \sqrt{p_i'^2 + M_i^2 c^2} \right) \frac{p_i'}{\sqrt{p_i'^2 + M_i^2 c^2}} = 0$$

veya

$$p_i' = 0 \quad \text{veya} \quad p_3' = p_4' = \dots = p_n' = 0$$

şartları elde edilir. O hâlde,

$$2M_2 T_{eş} + (M_1 + M_2)^2 c^2 = \left(\sum_{i=3}^n M_i c \right)^2$$

veya

$$T_{eş} = \frac{c^2}{2M_2} \left[\left(\sum_{i=3}^n M_i \right)^2 - (M_1 + M_2)^2 \right]$$

sonucuna varılır. Bu sonuç

$$T_{eş} = \frac{c^2}{2M_2} \left[\sum_{i=3}^n M_i - (M_1 + M_2) \right] \left(\sum_{i=3}^n M_i + M_1 + M_2 \right)$$

şeklinde de yazılabilir. Diğer yandan, reaksiyonda yutulan enerji

$$Q = c^2 \left[\sum_{i=3}^n M_i - (M_1 + M_2) \right]$$

olduğundan, eşik enerjisinin ifâdesi

$$T_{eş} = \frac{Q}{2M_2} \sum_{i=1}^n M_i$$

şeklini alır. Çarpışmadan sonra i ninci parçacığın laboratuvar sistemindeki momentumu, kütle merkezi sistemindeki momentumu ve enerjisi cinsinden Lorentz dönüşümü yardımı ile

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i' + \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{V} \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{p}_i' + E_i' \right)$$

şeklinde ifâde edilebilir. Burada $i=3,4,\dots, n$ dir. $p_i' = 0$ şartları $\mathbf{p}_i' = 0$ şartlarını ve $E_i' = M_i c^2$ bağınıları verir. O hâlde, son bağıntı

$$\mathbf{p}_i = \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{V} M_i c^2 = \gamma \mathbf{V} M_i$$

veya

$$\frac{\mathbf{p}_3}{M_3} = \frac{\mathbf{p}_4}{M_4} = \dots = \frac{\mathbf{p}_n}{M_n} = \gamma \mathbf{V}$$

şartlarını verir. Burada γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

bağıntısı ile verilir ve V kütle merkezinin laboratuvar sistemine göre hızıdır. Diğer yandan,

$$p_i = \frac{M_i v_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}$$

olduğundan

$$\frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \frac{p_i}{M_i} = \gamma V$$

veya her iki yanın karesinin tersini alarak

$$\frac{1}{v_i^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2 V^2} = \frac{1}{V^2} - \frac{1}{c^2}$$

veya

$$v_i = V, \quad v_l = V$$

sonucuna varılır. Bu sonuç eşik enerjisi şartlarını

$$v_3 = v_4 = \dots = v_n = V$$

şeklinde verir.

Reaksiyondan iki parçacık çıkması halinde eşik enerjisi

$$T_{eş} = -\frac{c^2}{2M_2} [(M_3 + M_4)^2 - (M_1 + M_2)^2]$$

veya

$$T_{eş} = \frac{Q}{2M_2} (M_1 + M_2 + M_3 + M_4)$$

şeklini alır. Eğer $M_3 + M_4 \cong M_1 + M_2$ olduğuna dikkat edilirse

$$T_{eş} \cong \frac{M_3 + M_4}{M_3 + M_4 - M_1} Q$$

bulunur. Bu da prob. 7 deki sonuçla aynıdır.

1.9. Bir serbest elektronun civarında bir elektron-pozitron çifti yaratabilmesi için bir fotonun eşik enerjisinin $4mc^2$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Problem 8 de elde edilen

$$T_{e\bar{e}} = \frac{c^2}{2M_2} \left[\left(\sum_{i=3}^n M_i \right)^2 - (M_1 + M_2)^2 \right]$$

formülünde bombardıman parçacığı olan fotonun sükûnet kütlesi $M_1 = 0$ ve hedef parçacığı olan elektronun sükûnet kütlesi $M_2 = m$ dir. Reaksiyondan hedef elektronla birlikte biri elektron, diğeri de pozitron olan iki parçacık daha çıkar. Böylece $M_3 = M_4 = M_5 = m$ yazılmalıdır. O hâlde

$$T_{e\bar{e}} = \frac{c^2}{2m} [(3m)^2 - m^2]$$

$$T_{e\bar{e}} = \frac{c^2}{2m} (9m^2 - m^2) = \frac{8m^2 c^2}{2m} = 4mc^2$$

sonucuna varılır.

I.10. Kütlesi M olan bir çekirdek enerjisi $h\nu$ olan bir fotonu yutuyor. Bu olayda çekirdekte meydana gelen uyarılma enerjisi nedir? Küçük foton enerjileri için uyarılma enerjisinin yaklaşık olarak $h\nu$ ye eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Problem 6 da elde edilen

$$E_u' = c \sqrt{2M_h T + (M_f + M_h)^2 c^2} - M_b c^2$$

formülünde bombardıman parçacığı olan fotonun sükûnet kütlesi $M_f = 0$, hedef parçacığı olan çekirdeğin sükûnet kütlesi $M_h = M$, yutulmadan sonra uyarılmış çekirdeğin sükûnet kütlesi $M_b = M$ ve fotonun enerjisi $E = T = h\nu$ olduğundan

$$E_u' = c \sqrt{2Mh\nu + M^2 c^2} - Mc^2$$

veya

$$E_u' = Mc^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2h\nu}{Mc^2}} - 1 \right)$$

sonucuna varılır. Küçük foton enerjileri için

$$E_u' \cong Mc^2 \left(1 + \frac{h\nu}{Mc^2} - 1 \right)$$

veya $E_u' \cong h\nu$ bulunur.

I.11. Bir protonun, sükûnette olan diğer bir protonla çarpıştığı zaman bir proton-antiproton çifti yaratabilmesi için $6M_p c^2$ değerinde bir minimum kinetik enerjiye sahip olması gerektiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Problem 8 de elde edilen

$$T_{eş} = \frac{c^2}{2M_2} \left[\left(\sum_{i=3}^n M_i \right)^2 - (M_1 + M_2)^2 \right]$$

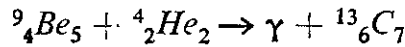
formülünde bombardıman parçacığı olan protonun sükûnet kütlesi $M_1 = M_p$ ve hedef parçacığı olan protonun sükûnet kütlesi $M_2 = M_p$ dir. Reaksiyondan, bombardıman ve hedef parçacıkları olan iki protonla birlikte biri proton, diğeri antiproton olan iki parçacık daha çıkar. Böylece $M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_p$ yazılmalıdır. O hâlde

$$T_{eş} = \frac{c^2}{2M_p} [(4M_p)^2 - (2M_p)^2]$$

$$T_{eş} = \frac{c^2}{2M_p} (16M_p^2 - 4M_p^2) = \frac{12M_p^2 c^2}{2M_p} = 6M_p c^2$$

sonucuna varılır.

I.12. Eğer



reaksiyonu mümkün olsaydı, α parçacığının kinetik enerjisi 5 MeV olduğuna göre, neşredilen γ ışınının mümkün en büyük enerjisi ne olurdu?

ÇÖZÜM :

${}^9\text{Be} (\alpha, \gamma) {}^{13}\text{C}$ reaksiyonunda enerjinin korunumu

$$E_{Be} + E_\alpha = E_\gamma + E_C$$

denklemini ve momentumun korunumu da

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_C$$

denklemini ile verilir. Momentumun korunumu denklemini

$$\mathbf{P}_C = \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{P}_\gamma$$

şeklinde yazıp her iki yanın skaler karesini alırsak

$$p_C^2 = p_\alpha^2 + p_\gamma^2 - 2 p_\alpha p_\gamma \cos \varphi$$

elde ederiz. Burada φ , neşredilen γ ışınının yayılma doğrultusunun α parçacığının geliş doğrultusu ile yaptığı açıdır. $E_{Be} + E_\alpha = \text{sâbit}$ olduğundan, $E_\gamma + E_C = \text{sâbit}$ olur ve $E_\gamma = \text{maksimum}$ olabilmesi için $E_C = \text{minimum}$ olmalıdır. Diğer yandan,

$$E_C = c \sqrt{p_C^2 + M_C^2 c^2}$$

olduğundan, $E_C = \text{minimum}$ olabilmesi için $p_C^2 = \text{minimum}$ olmalıdır. Halbuki $cp_\gamma = E_\gamma$ bağıntısı dikkate alınır, ancak $\varphi = 0$ için

$$p_C^2 = (p_\alpha - p_\gamma)^2 = \text{minimum}$$

olur ve bu bağıntı momentumun korunumu denklemi olarak alınmalıdır. Şimdi bu bağıntıyı

$$c^2 p_\gamma^2 - 2cp_\alpha cp_\gamma + c^2 p_\alpha^2 = c^2 p_C^2$$

şeklinde yazalım ve sonra da

$$cp_\gamma = E_\gamma, \quad c^2 p_\alpha^2 = E_\alpha^2 - M_\alpha^2 c^4, \quad c^2 p_C^2 = E_C^2 - M_C^2 c^4$$

ifâdelerini yerlerine koyalım :

$$E_\gamma^2 - 2 \sqrt{E_\alpha^2 - M_\alpha^2 c^4} E_\gamma + E_\alpha^2 - M_\alpha^2 c^4 = E_C^2 - M_C^2 c^4$$

bulunur ve diğer yandan, enerjinin korunumu denkleminden

$$E_C^2 = E_\gamma^2 + E_\alpha^2 + E_{Be}^2 - 2E_\alpha E_\gamma - 2E_{Be} E_\gamma + 2E_{Be} E_\alpha$$

yazılabilir. Son iki denklemin karşılaştırılmasından

$$- 2 \sqrt{E_\alpha^2 - M_\alpha^2 c^4} E_\gamma - M_\alpha^2 c^4 = E_{Be}^2 - 2E_\alpha E_\gamma - 2E_{Be} E_\gamma + 2E_{Be} E_\alpha - M_C^2 c^4$$

veya hedef ${}^9\text{Be}$ çekirdeği için

$$E_{Be} = M_{Be} c^2$$

olduğundan

$$2(M_{Be} c^2 + E_\alpha - \sqrt{E_\alpha^2 - M_\alpha^2 c^4}) E_\gamma = 2M_{Be} c^2 E_\alpha + (M_{Be}^2 + M_\alpha^2 - M_C^2) c^4$$

sonucuna varılır. α bombardıman parçacığı için E_α toplam enerjisi ile T_α kinetik enerjisi arasında

$$E_\alpha = T_\alpha + M_\alpha c^2$$

veya

$$E_\alpha^2 = 2M_\alpha c^2 T_\alpha + T_\alpha^2 + M_\alpha^2 c^4$$

bağıntısı olduğundan

$2[(M_{Be} + M_{\alpha})c^2 + T_{\alpha} - \sqrt{2M_{\alpha}c^2 T_{\alpha} + T_{\alpha}^2}] E_{\gamma} = 2M_{Be}c^2 T_{\alpha} + [(M_{Be} + M_{\alpha})^2 - M_C^2] c^4$
elde edilir. Diğer yandan, reaksiyondan açığa çıkan enerji

$$Q = (M_{Be} + M_{\alpha} - M_C) c^2$$

olduğundan

$$2[(M_{Be} + M_{\alpha})c^2 + T_{\alpha} - \sqrt{2M_{\alpha}c^2 T_{\alpha} + T_{\alpha}^2}] E_{\gamma} = 2M_{Be}c^2 T_{\alpha} + Q(M_{Be} + M_{\alpha} + M_C) c^2$$

veya

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2M_{\alpha}c^2 T_{\alpha} + T_{\alpha}^2} - T_{\alpha}}{(M_{Be} + M_{\alpha})c^2}\right) E_{\gamma} = \frac{M_{Be} T_{\alpha}}{M_{Be} + M_{\alpha}} + \frac{1}{2} Q \left(1 + \frac{M_C}{M_{Be} + M_{\alpha}}\right)$$

sonucuna varılır.

Ek I deki cetvellere bakarak

$$M_{Be} c^2 = 8394,864747 \text{ MeV}$$

$$M_{\alpha} c^2 = 3728,431099 \text{ MeV}$$

$$(M_{Be} + M_{\alpha}) c^2 = 12123,29585 \text{ MeV}$$

$$Q = 0,011434 \times 931,5016 = 10,650789 \text{ MeV}$$

bulunur. Bu sayısal değerler yukardaki genel formülde yerlerine yazılırsa

$$\left(1 - \frac{188,1561829}{12123,29585}\right) E_{\gamma} = 0,6924573 \times 5 + 0,999561 \times 10,650789$$

$$E_{\gamma} = \frac{3,4622865 + 10,64611072}{0,984479783} = \frac{14,10839724}{0,984479783}$$

$$E_{\gamma} = 14,33 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır. Bu sonuç rölâtivistik hızlar için bulunmuştur. Rölâtivistik olmayan hızlar için $c \rightarrow \infty$ ve $M_{Be} + M_{\alpha} \cong M_C$ olarak

$$E_{\gamma} \cong \frac{M_{Be}}{M_C} T_{\alpha} + Q$$

veya

$$E_{\gamma} \cong \frac{9 \times 5}{13} + 10,651 \approx 14,112 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır. İki hesap arasındaki fark 0,22 MeV dir.

II. BÖLÜM

ÇEKİRDEKLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

II.1. Çok incelikli yapılmış elektron saçılması deneyleri, bir çekirdeğin gerçekten hemen hemen sâbit bir yoğunluğa sahip bir küre şeklinde olduğunu ve etrafının da yoğunluğu azalarak sıfıra düşen bir ince kabukla sarıldığını göstermektedir. Yoğunluğun maksimum değer yarısına düştüğü küre yüzeyinin yarıçapı c ile ve yoğunluğun maksimum değer yüzde 90'ından yüzde 10'una düştüğü geçiş bölgesini oluşturan kabuğun kalınlığı s ile gösterilsin. Bu büyüklükler fm cinsinden olarak

$$c = 1,12 A^{1/3} - 0,94 A^{-1/3} \quad (1)$$

$$s = 2,5 \pm 0,3 \quad (2)$$

bağıntıları ile verilmiştir. Böylece, eşdeğer üniform dağılımın yarıçapı

$$R_u = 1,12 A^{1/3} + 2,35 A^{-1/3} - 2,07 A^{-1} \quad (3)$$

bağıntısı ile bellidir. Çekirdeklerdeki yoğunluk dağılımı sadece c ve s gibi iki parametre ile belli olduğundan, bu dağılım aşağıdaki basit fonksiyonla verilebilir :

$$r < c - \frac{1}{2} t \quad \text{için : } \rho = \rho_0,$$

$$c - \frac{1}{2} t < r < c + \frac{1}{2} t \quad \text{için : } \rho = \frac{\rho_0}{t} \left(c + \frac{1}{2} t - r \right)$$

$$r > c + \frac{1}{2} t \quad \text{için : } \rho = 0,$$

burada ρ_0 , çekirdeğin merkezindeki yoğunluktur ve bütün çekirdekler için aynı olduğu kabul edilmektedir. $t \ll c$ olduğuna göre (1) ve (3) bağıntılarına benzeyen

$$c = a A^{1/3} - \frac{t^2}{12a} A^{-1/3} \quad (1')$$

ve

$$R_u = a A^{1/3} + \frac{5t^2}{24a} A^{-1/3} \quad (3')$$

bağıntılarını çıkarınız; burada $a = \left(\frac{4}{3} \pi \rho_0\right)^{-1/3}$ tür ve hesaplarda t^2/c^2 den daha küçük terimler ihmâl edilecektir. Aynı zamanda $t = 1,25 s$ ve $\rho_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$ olduğunu gösteriniz. (1') bağıntısını (1) bağıntısı ile karşılaştırarak $s \cong 2,84 \text{ fm}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Çekirdeğin kütlesi

$$m = \int_V \rho(r) d\tau = 4\pi \int_0^{c + \frac{1}{2}t} \rho(r) r^2 dr$$

integrali ile hesaplanabilir. Böylece

$$m = 4\pi \rho_0 \left[\int_0^{c - \frac{1}{2}t} r^2 dr + \frac{1}{t} \int_{c - \frac{1}{2}t}^{c + \frac{1}{2}t} \left(c + \frac{1}{2}t - r\right) r^2 dr \right]$$

veya

$$m = 4\pi \rho_0 \left[\int_0^{c - \frac{1}{2}t} r^2 dr + \frac{1}{t} \left(c + \frac{1}{2}t\right) \int_{c - \frac{1}{2}t}^{c + \frac{1}{2}t} r^2 dr - \frac{1}{t} \int_{c - \frac{1}{2}t}^{c + \frac{1}{2}t} r^3 dr \right]$$

yazılabilir. Buradaki integrasyonlar yapılırsa

$$m = 4\pi \rho_0 \left\{ \frac{1}{3} \left(c - \frac{1}{2}t\right)^3 + \frac{1}{3t} \left(c + \frac{1}{2}t\right) \left[\left(c + \frac{1}{2}t\right)^3 - \left(c - \frac{1}{2}t\right)^3 \right] - \frac{1}{4t} \left[\left(c + \frac{1}{2}t\right)^4 - \left(c - \frac{1}{2}t\right)^4 \right] \right\}$$

veya kısaltmalar yapılırsa

$$m = 4\pi \rho_0 \left[\frac{1}{3} \left(c - \frac{1}{2}t\right)^3 + \left(c + \frac{1}{2}t\right) \left(c^2 + \frac{1}{12}t^2\right) - \left(c^3 + \frac{1}{4}ct^2\right) \right]$$

bulunur. Eğer ardışık kısaltmalara devam edilirse

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho_0 c^3 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{t^2}{c^2}\right) \quad (4)$$

sonucuna varılır.

Diğer yandan, çekirdeğin merkezine nazaran ikinci istatistik momenti

$$\mu_2 = \int_V r^2 \rho(\mathbf{r}) d\tau = 4\pi \int_0^{c + \frac{1}{2}t} \rho(r) r^4 dr$$

integrali ile hesaplanabilir. Böylece

$$\mu_2 = 4\pi \rho_0 \left[\int_0^{c - \frac{1}{2}t} r^4 dr + \frac{1}{t} \int_{c - \frac{1}{2}t}^{c + \frac{1}{2}t} \left(c + \frac{1}{2}t - r\right) r^4 dr \right]$$

veya

$$\mu_2 = 4\pi \rho_0 \left[\int_0^{c - \frac{1}{2}t} r^4 dr + \frac{1}{t} \left(c + \frac{1}{2}t\right) \int_{c - \frac{1}{2}t}^{c + \frac{1}{2}t} r^4 dr - \frac{1}{t} \int_{c - \frac{1}{2}t}^{c + \frac{1}{2}t} r^5 dr \right]$$

yazılabilir. Buradaki integrasyonlar yapılırsa

$$\mu_2 = 4\pi \rho_0 \left\{ \frac{1}{5} \left(c - \frac{1}{2}t\right)^5 + \frac{1}{5t} \left(c + \frac{1}{2}t\right) \left[\left(c + \frac{1}{2}t\right)^5 - \left(c - \frac{1}{2}t\right)^5 \right] - \frac{1}{6t} \left[\left(c + \frac{1}{2}t\right)^6 - \left(c - \frac{1}{2}t\right)^6 \right] \right\}$$

veya kısaltmalar yapılırsa

$$\mu_2 = 4\pi \rho_0 \left[\frac{1}{5} \left(c - \frac{1}{2}t\right)^5 - \left(c + \frac{1}{2}t\right) \left(c^4 + \frac{1}{2}c^2t^2 + \frac{1}{80}t^4\right) - \left(c^5 + \frac{5}{6}c^3t^2 + \frac{1}{16}ct^4\right) \right]$$

bulunur. Eğer ardışık kısaltmalara devam edilirse

$$\mu_2 = \frac{4\pi}{5} \rho_0 c^5 \left(1 + \frac{5}{6} \frac{t^2}{c^2}\right)$$

sonucuna varılır.

Çekirdeğin üniform yoğunluğu ρ_u olduğuna göre eşdeğer üniform dağılımın yarıçapı R_u

$$m = 4\pi \rho_u \int_0^{R_u} r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho_u R_u^3$$

$$\mu_2 = 4\pi \rho_u \int_0^{R_u} r^4 dr = \frac{4\pi}{5} \rho_u R_u^5$$

bağıntıları ile tarif edilir. Bu bağıntılardan ve (4) ile (5) bağıntılarından

$$\frac{\mu_2}{m} = \frac{3}{5} R_u^2 = \frac{3}{5} c^2 \frac{1 + \frac{5}{6} \frac{t^2}{c^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{t^2}{c^2}}$$

veya

$$R_u = c \left(1 + \frac{5}{6} \frac{t^2}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{t^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

bulunur. Eğer t^2/c^2 den daha küçük terimler ihmâl edilirse

$$R_u \cong c \left(1 + \frac{5}{12} \frac{t^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{8} \frac{t^2}{c^2}\right)$$

veya

$$R_u = c \left(1 + \frac{7}{24} \frac{t^2}{c^2}\right) \quad (6)$$

elde edilir.

Atomik kütle birimi cinsinden $m \cong A$ alınabilir. Diğer yandan, $a = \left(\frac{4}{3} \pi \rho_0\right)^{-1/3}$ tarifini kullanarak (4) bağıntısı

$$a^3 A = c^3 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{t^2}{c^2}\right)$$

veya

$$c \left(1 + \frac{1}{4} \frac{t^2}{c^2}\right)^{1/3} = a A^{1/3}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer t^2/c^2 den daha küçük terimler ihmâl edilirse

$$c \left(1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{c^2}\right) \cong a A^{1/3}$$

veya

$$c^2 - a A^{1/3} c + \frac{1}{12} t^2 \cong 0$$

elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemden c çözümlerse

$$c \cong \frac{1}{2} \left(a A^{1/3} + \sqrt{a^2 A^{2/3} - \frac{1}{3} t^2} \right)$$

veya

$$c \cong \frac{1}{2} a A^{1/3} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{t^2}{3a^2 A^{2/3}}} \right)$$

bulunur. Eğer t^2/a^2 den daha küçük terimler ihmâl edilirse

$$c \cong \frac{1}{2} a A^{1/3} \left(2 - \frac{t^2}{6a^2 A^{2/3}} \right)$$

veya

$$c \cong a A^{1/3} - \frac{t^2}{12a} A^{-1/3} \quad (1')$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, (6) bağıntısı

$$R_u \cong c + \frac{7}{24} \frac{t^2}{c} \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir ve (1') bağıntısından

$$\frac{t^2}{c} \cong \frac{t^2}{a} A^{-1/3}$$

yazılabildiğinden, (6) bağıntısı

$$R_u \cong a A^{1/3} - \frac{t^2}{12a} A^{-1/3} + \frac{7t^2}{24a} A^{-1/3}$$

veya

$$R_u \cong a A^{1/3} + \frac{5t^2}{24a} A^{-1/3} \quad (3')$$

son şeklini alır. Diğer yandan,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{t} \left(c + \frac{1}{2} t - r \right)$$

bağıntısında $\rho/\rho_0 = \varepsilon$ için $r = r_\varepsilon$ koyarak

$$\varepsilon t = c + \frac{1}{2} t - r_\varepsilon$$

veya

$$r_e = c + (0,5 - \epsilon) t$$

elde edilir. Bu bağıntıdan

$$r_{0,1} = c + 0,4 t \quad \text{ve} \quad r_{0,9} = c - 0,4 t$$

bağıntıları elde edilir. Çekirdek yoğunluğunun azaldığı geçiş bölgesini oluşturan kabuğun s kalınlığı

$$s = r_{0,1} - r_{0,9} = 0,8 t$$

olarak bulunur ve buradan $t = 1,25 s$ elde edilir. (1) ve (1') bağıntıları karşılaştırılırsa $a = 1,12$ fm ve $t^2/12a = 0,94$ fm bulunur. (3) ve (3') bağıntılarındaki katsayıların uygunluğu $,5t^2/24a = 2,5 \times 0,94 = 2,35$ fm ile gerçekleşir. Diğer yandan,

$$t = \sqrt{0,94 \times 12a} = \sqrt{0,94 \times 12 \times 1,12} \cong 3,5544 \text{ fm}$$

ve

$$s = 0,8t \cong 2,8435 \text{ fm}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi a^3} = \frac{3}{4\pi (1,12)^3} \cong 0,17 \text{ fm}^{-3}$$

sonucuna varılır.

II.2. Eğer bir çekirdeğin yük dağılımı üniform, şekli bir dönelelipsoid ise, ve a yarıekseni simetri eksenine ve b yarıekseni de ona dik olan eksen ise,

$$Q = \frac{1}{e} \int_V \rho(\mathbf{r}) (3z^2 - r^2) d\tau$$

bağıntısını kullanarak bu çekirdeğin elektrik kuvadrupol momentinin

$$Q = \frac{2}{5} Z(a^2 - b^2)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Çekirdeğin yük dağılımı üniform olduğundan $\rho(\mathbf{r}) = \text{sâbit} = \rho$ ve

$$Q = \frac{\rho}{e} \int_V (3z^2 - r^2) d\tau$$

yazılabilir. (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarından (r', ϕ, z) silindirik koordinatlarına geçiş için

$$r' = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

dönüşüm denklemleri kullanılabilir, ve

$$r^2 = r'^2 + z^2, \quad d\tau = r' dr' d\varphi dz$$

yazılabilir. Böylece

$$Q = \frac{\rho}{e} \int_V (2z^2 - r'^2) d\tau = 2\pi \frac{\rho}{e} \iint_B (2z^2 - r'^2) r' dr' dz$$

elde edilir; burada B , iki katlı belirli integralin alındığı bölgedir ve çekirdeğin V hacmini sınırlayan dönelelipsoidin silindirik koordinatlardaki

$$\frac{r'^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

şeklindeki denklemi ile belirlenmiştir. O hâlde, B integrasyon bölgesinin sınırını belirleyen elipsin üst yarısının denklemi

$$r' = r'(z) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - z^2}$$

olduğuna göre

$$Q = 4\pi \frac{\rho}{e} \int_0^a \int_0^{r'(z)} (2z^2 - r'^2) r' dr' dz$$

veya

$$Q = 4\pi \frac{\rho}{e} \left[2 \int_0^a z^2 dz \int_0^{r'(z)} r' dr' - \int_0^a dz \int_0^{r'(z)} r'^3 dr' \right]$$

yazılabilir. İntegrasyonlar yapılırsa

$$Q = 4\pi \frac{\rho}{e} \left[\int_0^a r'^2(z) z^2 dz - \frac{1}{4} \int_0^a r'^4(z) dz \right]$$

veya

$$Q = 4\pi \frac{\rho}{e} \left[\frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - z^2) z^2 dz - \frac{b^4}{4a^4} \int_0^a (a^2 - z^2)^2 dz \right]$$

veya

$$Q = 4\pi \frac{b^2}{a^2} \frac{\rho}{e} \left[\int_0^a (a^2 z^2 - z^4) dz - \frac{b^2}{4a^2} \int_0^a (a^4 - 2a^2 z^2 + z^4) dz \right]$$

veya

$$Q = 4\pi \frac{b^2}{a^2} \frac{\rho}{e} \left\{ \left[\frac{1}{3} a^2 z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right]_0^a - \frac{b^2}{4a^2} \left[a^4 z - \frac{2}{3} a^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_0^a \right\}$$

veya

$$Q = 4\pi ab^2 \frac{\rho}{e} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) a^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) b^2 \right]$$

veya

$$Q = \frac{8\pi}{15} ab^2 \frac{\rho}{e} (a^2 - b^2) \equiv \frac{2}{5} \frac{4\pi ab^2}{3} \frac{\rho}{e} (a^2 - b^2)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, çekirdeğin toplam elektrik yükü

$$Ze = \frac{4\pi}{3} ab^2 \rho$$

ile verildiğinden

$$\frac{4\pi ab^2}{3} \frac{\rho}{e} = Z$$

bağıntısı elde edilir ve Q nun ifâdesinde yerine yazılırsa

$$Q = \frac{2}{5} Z(a^2 - b^2)$$

sonucuna varılır.

II.3. $R = 1,2 A^{1/3}$ ve $Q = \frac{2}{5} Z (a^2 - b^2)$ bağıntılarını kullanarak $^{176}_{71}\text{Lu}$ ve $^{119}_{50}\text{Sn}$ çekirdeklerinin büyük ve küçük yarıksenlerinin boylarını bulunuz. ^{176}Lu için $Q = +8b$, ^{119}Sn için $Q = -8b$ ve $1b = 100 \text{ fm}^2$ dir.

ÇÖZÜM :

Çekirdeğin ortalama yarıçapı olarak büyük ve küçük yarıksen uzunluklarının ortalaması alınabilir ve

$$\frac{a+b}{2} = R = 1,2 A^{1/3} \text{ veya } a+b = 2,4 A^{1/3}$$

yazılabilir. O hâlde,

$$Q = \frac{2}{5} Z (a + b) (a - b) = 0,4 \times 2,4 Z A^{1/3} (a - b)$$

veya

$$Q = 0,96 Z A^{1/3} (a - b)$$

yazılabilir.

$^{176}_{71}\text{Lu}$ için :

$$800 = 0,96 \times 71 \times (176)^{1/3} (a - b), \quad a + b = 2,4 \times (176)^{1/3}$$

veya

$$a - b = 2,09438 \text{ fm}, \quad a + b = 13,44979 \text{ fm}$$

veya

$$a = 7,772 \text{ fm}, \quad b = 5,678 \text{ fm}$$

bulunur. $^{119}_{50}\text{Sn}$ için :

$$800 = 0,96 \times 50 \times (119)^{1/3} (b - a), \quad b + a = 2,4 \times (119)^{1/3}$$

veya

$$b - a = 3,38844 \text{ fm}, \quad b + a = 11,80484 \text{ fm}$$

veya

$$a = 4,208 \text{ fm}, \quad b = 7,597 \text{ fm}$$

bulunur.

H.4. Üç özdeş parçacığa ait antisimetrik dalga fonksiyonunun

$$\Psi = \Phi(1,2,3) + \Phi(2,3,1) + \Phi(3,1,2) - \Phi(1,3,2) - \Phi(3,2,1) - \Phi(2,1,3)$$

şeklinde olduğunu ispat ediniz.

ÇÖZÜM :

1, 2 ve 3 sayıları ile işaretlenmiş parçacıkların herhangi bir şekilde sıralanmalarına permütasyon adı verilir ve bu permütasyonların sayısı $3! = 6$ dır. Her sıralanmada yan yana iki parçacığın yer değiştirmesine de inversiyon adı verilir. (1, 2, 3) şeklindeki sıralanmaya da tabii permütasyon adı verilir. Altı permütasyondan beşi tabii permütasyondan itibaren ardışık inversiyonlar ile elde edilebilir. Çift sayıda inversiyonlar ile elde edilebilen permütasyonlara çift, ve tek sayıda inversiyonlar ile elde edilebilen permütasyonlara da tek permütasyon adı verilir. Böylece, (1, 2, 3), (2, 3, 1) ve (3, 1, 2) permütasyonları çift ve (1, 3, 2), (3, 2, 1) ve (2, 1, 3) permütasyonları tektir. Parçacıkları bir daire üzerinde sıralarsak çift permütasyonlar $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ şeklinde bir dairesel permütasyon ve tek permütasyonlar da $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ şeklinde ters yönde bir dairesel permütasyon meydana

getirir, Çift permütasyonlara ait Φ dalga fonksiyonlarının toplamını F ile ve tek permütasyonlara ait Φ dalga fonksiyonlarının toplamını da G ile gösterirsek

$$F(1, 2, 3) = \Phi(1, 2, 3) + \Phi(2, 3, 1) + \Phi(3, 1, 2)$$

$$G(1, 2, 3) = \Phi(1, 3, 2) + \Phi(3, 2, 1) = \Phi(2, 1, 3)$$

yazılabilir. Herhangi bir inversiyon için veya parçacıklardan herhangi ikisi aralarında yer değiştirdiğinde F fonksiyonu G ye ve G fonksiyonu da F ye dönüşür; çünkü, böyle bir işlem için tek permütasyonlar çift permütasyonlara ve çiftler de teklere dönüşür. Meselâ, 2 ile 3 parçacığı aralarında yer değiştirirse

$$F(1, 3, 2) = G(1, 2, 3), \quad G(1, 3, 2) = F(1, 2, 3)$$

olur. Bu sebepten,

$$\Psi(1, 2, 3) = F(1, 2, 3) - G(1, 2, 3)$$

bağıntısı ile tarif edilen bir Ψ fonksiyonu parçacıklardan herhangi ikisinin aralarında yer değiştirmesi ile işaret değiştirir. Meselâ, 2 ilâ 3 parçacığı aralarında yer değiştirirse

$$\begin{aligned} \Psi(1, 3, 2) &= F(1, 3, 2) - G(1, 3, 2) = G(1, 2, 3) - F(1, 2, 3) = \\ &= - [F(1, 2, 3) - G(1, 2, 3)] = - \Psi(1, 2, 3) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde, üç özdeş parçacığa ait antisimetrik dalga fonksiyonu $\Psi = \Phi(1, 2, 3) + \Phi(2, 3, 1) + \Phi(3, 1, 2) - \Phi(1, 3, 2) - \Phi(3, 2, 1) - \Phi(2, 1, 3)$ şeklinde olmalıdır.

II.5. $\psi(x, y, z, s_z) = \Phi(x, y, z) (a \alpha + b \beta)$ dalga fonksiyonu, spini (θ, φ) küresel koordinatları ile verilen doğrultuda olan bir parçacığı tasvir ettiğine göre $m = +1/2$ için

$$a = C \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2}, \quad b = C \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}$$

olduğunu gösteriniz; burada C keyfî bir sâbittir. $m = -1/2$ için hesapları tekrarlayınız ve $\chi_{1/2}, \chi_{-1/2}$ spinörlerinin ortonormal şekillerini bulunuz.

ÇÖZÜM :

Spinin keyfî doğrultudaki bileşenin özdeğerleri ve özvektörleri bulunabilir. (θ, φ) küresel koordinatları

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) \sin \theta + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

vektörü ile verilen bir keyfî doğrultu belirler. s spin vektör operatörü yerine

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}$$

bağıntısı ile yeni bir $\boldsymbol{\sigma}$ vektör operatörü tarif etmek daha elverişlidir. Böylece, spinin \mathbf{e}_1 doğrultusundaki bileşeni

$$s_r = \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} \hbar \sigma_r$$

şeklinde olur. Buradaki σ_r operatörü

$$\sigma_r = (\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi) \sin \theta + \sigma_z \cos \theta$$

bağıntısı ile bellidir. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ operatörleri için Pauli spin matrisleri kullanılırsa

$$\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cos \varphi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin \varphi = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \sin \theta + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos \theta$$

veya

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

elde edilir. Diğer yandan, s_r operatörüne ait

$$s_r \chi = \hbar m \chi$$

özdeğer denklemi σ_r operatörüne ait

$$\sigma_r \chi = 2m \chi$$

özdeğer denklemini verir. Buradaki χ özvektörü

$$\chi = a \boldsymbol{\alpha} + b \boldsymbol{\beta} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

şeklindedir. O hâlde, özdeğer denklemi

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2m \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

veya

$$(\cos \theta - 2m) a + e^{-i\varphi} \sin \theta b = 0$$

$$e^{i\varphi} \sin \theta a - (\cos \theta + 2m) b = 0$$

denklemlerine dönüşür. a ve b sıfırdan farklı olduklarından, a ve b ye göre lineer homogen sistemin katsayılar determinantı sıfır olmalıdır :

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - 2m & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -(\cos \theta + 2m) \end{vmatrix} = 0$$

Bu bağıntıdan

$$-\cos^2 \theta + 4m^2 - \sin^2 \theta = 0$$

veya

$$m = \pm \frac{1}{2}$$

sonucuna varılır. $m = 1/2$ için a ve b ye göre lineer homogen sistem

$$(\cos \theta - 1) a + e^{-i\varphi} \sin \theta b = 0$$

$$e^{i\varphi} \sin \theta a - (\cos \theta + 1) b = 0$$

veya

$$\frac{a}{b} = \frac{e^{-i\varphi} \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \cos \theta}{e^{i\varphi} \sin \theta} = \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi} 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

veya

$$\frac{a}{b} = \frac{e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2}}$$

şeklini alır. Bu bağıntı, C keyfî bir sâbit olmak üzere,

$$\frac{a}{e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{b}{e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2}} = C$$

şeklinde yazılabilir ve aranan sonuçları verir :

$$a = C e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad b = C e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Diğer yandan, χ spinörünün normalizasyon şartı

$$\chi^\dagger \chi = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

olduğundan, $C = 1$ bulunur.

$m = -1/2$ için a ve b ye göre lineer homogen sistem

$$(\cos \theta + 1) a + e^{-i\varphi} \sin \theta b = 0$$

$$e^{i\varphi} \sin \theta a - (\cos \theta - 1) b = 0$$

veya

$$\frac{a}{b} = -\frac{e^{-i\varphi} \sin \theta}{1 + \cos \theta} = -\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{1 - \cos \theta}{e^{i\varphi} \sin \theta} = -\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi} 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

veya

$$\frac{a}{b} = \frac{-e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

şeklini alır. Buradan

$$1 + \frac{|a|^2}{|b|^2} = 1 + \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{|a|}{|b|} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

veya $|a|^2 + |b|^2 = 1$ normalizasyon şartını kullanarak

$$|b| = \cos \frac{\theta}{2}, \quad |a| = \sin \frac{\theta}{2}$$

sonuçları elde edilir. Diğer yandan, a/b yi veren bağıntı ile karşılaştırarak

$$a = -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad b = e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}$$

sonuçlarına varılır.

Sonuç olarak, $\chi_{1/2}$ ve $\chi_{-1/2}$ spinörlerinin ifâdeleri

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

şeklinindedir. Bu spinörler aşağıdaki ortonormallik şartlarını sağlarlar :

$$\chi_{1/2}^+ \chi_{1/2} = \chi_{-1/2}^+ \chi_{-1/2} = 1, \quad \chi_{1/2}^+ \chi_{-1/2} = \chi_{-1/2}^+ \chi_{1/2} = 0$$

Böylece, küresel koordinatlarda dalga fonksiyonu

$$\psi(r, \theta, \varphi, s_r) = \Phi(r, \theta, \varphi) \chi_m(\theta, \varphi)$$

şeklını alır.

II.6. $A = 14$ kütle sayısına sahip üç izobardan $^{14}_6C_8$ ün temel hâline ait enerji seviyesi ile $^{14}_7N_7$ ün birinci uyarılmış hâline ait enerji seviyesi arasındaki farkın 2,15 MeV ve $^{14}_7N_7$ ün birinci uyarılmış hâline ait enerji seviyesi ile $^{14}_8O_6$ ün temel hâline ait enerji seviyesi arasındaki farkın da 2,80 MeV olduğu deneysel olarak bulunmuştur. Bu üç hâl bir izospin tripleti meydana getirir. Bu enerji farklarının tamamen Coulomb alanının etkisi ve nötron ile proton arasındaki kütle farkından meydana geldiğini gösteriniz ve deneysel değerlerle karşılaştırınız. (Burada $r_0 = 1,3335$ fm değerini kullanınız.)

ÇÖZÜM :

Çekirdek üniform olarak elektrikle yüklü ve R yarıçaplı bir küre olarak düşünülürse toplam Coulomb enerjisi

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R}$$

şeklinde olur. Diğer yandan, çekirdeğin yarıçapını veren

$$R = r_0 A^{1/3}$$

bağıntısı kullanılırsa ve

$$a_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \quad (1)$$

vaz edilirse Coulomb enerjisinin ifâdesi

$$E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2)$$

şeklını alır. (1) bağıntısı

$$a_c = 0,6 \frac{e^2}{mc^2} \frac{1}{r_0} mc^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada e^2/mc^2 elektronun klâsik yarıçapı ve mc^2 de elektronun sükûnet kütlelerinin enerji eşdeğeridir. Ek I deki cetvellerden yararlanarak

$$a_c = 0,6 \times \frac{2,817938}{1,3335} \times 0,5110034 \cong 0,648 \text{ MeV}$$

bulunur. $^{14}_7N_7$ çekirdeği için $2Z = A$ dır. Böylece, $^{14}_6C_8$ ile $^{14}_7N_7$ çekirdeklerine ait (2) bağıntısı ile verilen Coulomb enerjilerinin farkı

$$\Delta E_c^- = a_c \frac{Z^2 - (Z-1)^2}{A^{1/3}} = a_c \frac{2Z-1}{A^{1/3}} = a_c \frac{A-1}{A^{1/3}} \quad (3)$$

şeklindedir. Benzer şekilde, $^{14}_7N_7$ ile $^{14}_8O_6$ çekirdeklerine ait (2) bağıntısı ile verilen Coulomb enerjilerinin farkı da

$$\Delta E_c^+ = a_c \frac{(Z+1)^2 - Z^2}{A^{1/3}} = a_c \frac{2Z+1}{A^{1/3}} = a_c \frac{A+1}{A^{1/3}} \quad (4)$$

şeklindedir. (3) ve (4) bağıntılarında $A = 14$ yazarak

$$\Delta E_c^- = 0,648 \times \frac{13}{2,41014} = 0,648 \times 5,39387 = 3,495 \text{ MeV}$$

$$\Delta E_c^+ = 0,648 \times \frac{15}{2,41014} = 0,648 \times 6,2237 = 4,033 \text{ MeV}$$

bulunur. $^{14}_7N_7$ çekirdeği $^{14}_6C_8$ çekirdeğindeki bir nötronun bir protona dönüşmesiyle oluşur ve nötronun kütlesi protonun kütlesinden daha büyük olduğundan $M_n - M_p$ kadar bir kütle azalması vardır. O hâlde, $^{14}_6C_8$ ile $^{14}_7N_7$ çekirdeklerine ait toplam enerji farkı

$$\Delta E^- = \Delta E_c^- - (M_n - M_p) c^2$$

ve benzer şekilde, $^{14}_7N_7$ ile $^{14}_8O_6$ çekirdeklerine ait toplam enerji farkı da

$$\Delta E^+ = \Delta E_c^+ - (M_n - M_p) c^2$$

şeklindedir. Böylece, Ek I deki cetvellerden yararlanarak

$$\Delta E^- \cong 3,495 - 1,293 \cong 2,20 \text{ MeV}, \quad \text{ve} \quad \Delta E^+ \cong 4,033 - 1,293 = 2,74 \text{ MeV}$$

sonuçlarına varılır. Deneysel değerler $\Delta E^- = 2,15 \text{ MeV}$ ve $\Delta E^+ = 2,80 \text{ MeV}$ dir.

III. BÖLÜM

ALÇAK ENERJİLERDE İKİ NÜKLEONLU SİSTEMLER

III.1. İki parçacıklı bir sistem için izafi hareketin momentumunun kütle merkezi sisteminde parçacıklardan her birinin sahip olduğu momentuma eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Parçacıkların kütleleri m_1 ve m_2 , kütle merkezi sistemindeki hızları v_1' ve v_2' , momentumları da $p_1' = m_1 v_1'$ ve $p_2' = m_2 v_2'$ olsun. Kütle merkezi sisteminde sistemin toplam momentumu sıfır olduğundan

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0 \quad (1)$$

veya

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0 \quad (2)$$

yazılabilir. Diğer yandan, kütle merkezi sisteminde 1 parçacığının 2 parçacığına göre izafi hızı

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' \quad (3)$$

şeklindedir. (2) ve (3) bağıntılarından v_1' ve v_2' hızları

$$v_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad v_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad (4)$$

şeklinde çözülebilir. Kütle merkezi sisteminde sistemin toplam kinetik enerjisi

$$T' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (5)$$

şeklindedir. (4) bağıntıları yardımı ile (5) bağıntısı

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir.

$$m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \quad (7)$$

bağıntısı ile m indirgenmiş kütlesi tarif edilirse (6) bağıntısı

$$T' = \frac{1}{2} m v^2 \quad (8)$$

şeklinde ve (4) bağıntıları da

$$\mathbf{p}_1' = m \mathbf{v}, \quad \mathbf{p}_2' = -m \mathbf{v} \quad (9)$$

şekillerinde yazılabilir. (8) bağıntısı sadece v izafî hızına bağlı olduğundan izafî hareketin kinetik enerjisini ifâde etmektedir. O hâlde, izafî hareketin momentumu

$$p_i = \sqrt{2mT'} = m v$$

veya

$$\mathbf{p}_i = m \mathbf{v} \quad (10)$$

şeklindedir. Böylece, (9) bağıntıları (10) bağıntısı yardımı ile

$$\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_i$$

veya

$$p_1' = p_2' = p_i$$

şeklinde yazılabilir. Bu da aranan sonuçtur.

III.2. m_1 kütlesine sahip parçacıklar m_2 kütlesine sahip parçacıklar tarafından saçılmaktadır. Eğer $m_2 < m_1$ ise, maksimum saçılma açısının laboratuvar sisteminde $\arcsin(m_2/m_1)$ ve kütle merkezi sisteminde $90^\circ + \arcsin(m_2/m_1)$ olduğunu gösteriniz. Eğer $m_1 < m_2$ ise, maksimum saçılma açısının her iki sistemde de 180° olduğunu gösteriniz. Uygulama: Eğer döteronlar protonlar tarafından saçılırlarsa maksimum saçılma açısının, yaklaşık olarak, laboratuvar sisteminde 30° ve kütle merkezi sisteminde 120° olduğunu gösteriniz. Fakat protonlar döteronlar tarafından saçılırsa maksimum saçılma açısının her iki sistemde de 180° olduğunu gösteriniz. Ayrıca, nötronlar protonlar tarafından saçıldığı zaman laboratuvar sisteminde maksimum saçılma açısının $86^\circ 59' 35''$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Önce laboratuvar sistemini düşünelim. Laboratuvar sisteminde 1 ve 2 parçacıklarının hızları çarpışmadan önce, müttekabilen, \mathbf{u}_1 ve sıfır, çarpışmadan sonra da \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 olsun. O hâlde, laboratuvar sisteminde momentumun korunumu

$$m_1 \mathbf{u}_1 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

veya

$$a = m_2/m_1$$

vaz edilerek

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + a \mathbf{v}_2 \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan, laboratuvar sisteminde 1 parçacığının 2 parçacığına göre izafî hızı

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (2)$$

bağıntısı ile verilir. (2) bağıntısının her iki yanını a ile çarpılıp (1) bağıntısı ile taraf tarafa toplanırsa \mathbf{v}_2 hızı yok edilir ve

$$\mathbf{u}_1 + a\mathbf{v} = (1 + a) \mathbf{v}_1$$

veya

$$a \mathbf{v} = (1 + a) \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 \quad (3)$$

bağıntısı bulunur. Elâstik çarpışma için $v^2 = u_1^2$ olduğunu hatırlayarak (3) bağıntısının her iki yanının skaler karesi alınır

$$a^2 u_1^2 = u_1^2 + (1 + a)^2 v_1^2 - 2(1 + a) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1$$

veya

$$2(1 + a) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = (1 - a^2) u_1^2 + (1 + a)^2 v_1^2$$

veya

$$2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = (1 - a) u_1^2 + (1 + a) v_1^2$$

elde edilir. Laboratuvar sisteminde saçılma açısı $\theta_{lab} = \angle(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ ile tarif edildiğinden,

$$2u_1 v_1 \cos \theta_{lab} = (1 - a) u_1^2 + (1 + a) v_1^2$$

veya

$$\cos \theta_{lab} = \frac{1}{2} \left[(1 - a) \frac{u_1}{v_1} + (1 + a) \frac{v_1}{u_1} \right] \quad (4)$$

sonucuna varılır. θ_{lab} açısının değişim aralığı olan $0 \leq \theta_{lab} \leq 180^\circ$ aralığı için $\cos \theta_{lab}$, $1 \geq \cos \theta_{lab} \geq -1$ aralığında değiştiği için, $\cos \theta_{lab}$ bahis konusu aralıkta azalan bir fonksiyondur. O hâlde, $\theta_{lab} =$ maksimum için $\cos \theta_{lab} =$ minimum olur. İncelemeyi kolaylaştırmak için (4) bağıntısında $y = \cos \theta_{lab}$ ve $x = u_1/v_1$ vaz edilirse

$$y = \frac{1}{2} \left[(1 - a) x + \frac{1 + a}{x} \right] \equiv f(x) \quad (5)$$

yazılabilir.

Önce $m_2 < m_1$ veya $a < 1$ hâlini inceleyelim. $a < 1$ için (4) bağıntısından $1 \geq \cos \theta_{lab} > 0$ veya $0 \leq \theta_{lab} < 90^\circ$ bulunur. (5) bağıntısının x e göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınırsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 - a - \frac{1+a}{x^2} \right) \equiv f'(x) \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+a}{x^3} \equiv f''(x) \quad (7)$$

elde edilir. Daima $x > 0$ olduğu göz önünde tutulursa $f'(x) = 0$ denkleminin çözümü

$$x_m = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

şeklinde olur. Böylece

$$f''(x_m) = (1-a) \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} > 0$$

ve

$$y_{\min} = f(x_m) = \sqrt{1-a^2} \quad (8)$$

sonuçlarına varılır. $m_1 < m_2$ veya $a > 1$ hâli için (6) bağıntısına göre daima $f'(x) < 0$, yâni, $f(x)$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. O hâlde, $f(x)$ fonksiyonunun bir minimumu yoktur ve $y = \cos \theta_{lab}$ ifâdesi, $\theta_{lab} = 180^\circ$ için $y_{\min} = -1$ değerini alır. (8) bağıntısında y ve a nın değerleri yerlerine yazılırsa $m_2 < m_1$ için

$$\text{minimum } \cos \theta_{lab} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2}$$

veya

$$\sin \theta_{lab} = \frac{m_2}{m_1} \quad (8')$$

veya

$$\text{maksimum } \theta_{lab} = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \quad (m_2 < m_1) \quad (9)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan,

$$\text{maksimum } \theta_{lab} = 180^\circ \quad (m_1 < m_2) \quad (10)$$

sonucunu yukarda elde etmiştik.

Şimdi de kütle merkezi sistemindeki maksimum saçılma açısını bulalım. Kütle merkezi sistemindeki saçılma açısının laboratuvar sistemindeki saçılma açısı cinsinden

$$\theta_{km} = \theta_{lab} + \arcsin \left(\frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{lab} \right) \quad (11)$$

bağıntısı ile verildiği bilinmektedir. \arcsin ün içerisi birden küçük veya en fazla bire eşit olmalıdır. O hâlde,

$$\frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{lab} \leq 1$$

veya

$$\sin \theta_{lab} \leq \frac{m_2}{m_1}$$

yazılabilir ve bu bağıntı (8') bağıntısı ile tutarlıdır. Böylece, $m_2 < m_1$ için (8') veya (9) bağıntısı (11) de yerine yazılarak

$$\text{maksimum } \theta_{km} = \arcsin \frac{m_2}{m_1} + \arcsin \left(\frac{m_1}{m_2} \frac{m_2}{m_1} \right)$$

veya

$$\text{maksimum } \theta_{km} = 90^\circ + \arcsin \frac{m_2}{m_1} \quad (m_2 < m_1) \quad (12)$$

sonucuna varılır. $m_1 < m_2$ için (11) bağıntısında $\theta_{lab} = 180^\circ$ koyarak

$$\text{maksimum } \theta_{km} = 180^\circ + \arcsin \left(\frac{m_1}{m_2} \sin 180^\circ \right)$$

veya

$$\text{maksimum } \theta_{km} = 180^\circ \quad (m_1 < m_2) \quad (13)$$

elde edilir

(9), (10), (12) ve (13) bağıntıları döteronlarla protonlara uygulanırsa, döteronlar protonlar tarafından saçıldıkları zaman $m_2/m_1 \cong 1/2$ olduğundan, (9) bağıntısına göre

$$\theta_{lab} \cong \arcsin (1/2) = 30^\circ$$

ve (12) bağıntısına göre

$$\theta_{km} \cong 90^\circ + \arcsin (1/2) = 120^\circ$$

sonuçlarına varılır. Eğer protonlar döteronlar tarafından saçılırlarsa $m_2/m_1 \cong 2 > 1$ olduğundan, (10) ve (13) bağıntılarına göre maksimum saçılma açıları her iki sistemde de 180° olur.

Nötronlar protonlar tarafından saçıldıkları zaman (9) bağıntısında Ek I deki cetvellerden $M_p c^2 = 938,2796$ MeV ve $M_n c^2 = 939,5731$ MeV yazarak

$$\theta_{\text{lab}} = \arcsin \frac{M_p}{M_n} = \arcsin \frac{938,2796}{939,5731} = \arcsin 0,9986233 = 86,9932^\circ$$

veya $\theta_{\text{lab}} = 86^\circ 59' 35''$ sonucuna varılır.

III.3. $r < R$ için $V = -V_0$, $r > R$ için $V = 0$ şeklindeki bir kare kuyu potansiyeli kullanıldığı takdirde döteronun temel hâline ait dalga fonksiyonunun radyal kısmı

$$r < R \text{ için : } u = A_1 \sin \kappa r, \quad r > R \text{ için : } u = A_2 e^{-\alpha r} \quad (1)$$

şeklindedir. Burada A_1 ve A_2 normalizasyon sâbitlerinin

$$A_1^2 = \frac{2\alpha}{1 + \alpha R}, \quad A_2^2 = \frac{2\alpha}{(1 + \alpha R)(\alpha^2 + \kappa^2)} e^{2\alpha R} \quad (2)$$

bağıntıları ile ve κ ve α sâbitlerinin de

$$\alpha^2 = \frac{M}{\hbar^2} B, \quad \kappa^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 - B) \quad (3)$$

bağıntıları ile verildiği bilinmektedir. Bu verilenleri kullanarak döterondaki nötron ile protonun birbirlerinin kuvvet menzillerinin içerisinde ve dışında bulunma ihtimâllerini hesaplayınız. Ayrıca, $B = 2,2245$ MeV, $R = 2,0755$ fm ve $V_0 = 34,392$ MeV deneysel değerlerini kullanarak bahis konusu ihtimâllerin sayısal değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM :

Döterondaki nükleonlardan birinin diğerine göre izafî küresel koordinatları (r, θ, φ) olduğuna göre dalga fonksiyonu

$$\psi = \frac{1}{r} u(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{r} u(r) Y_{00} = \frac{u(r)}{\sqrt{4\pi} r}$$

şeklindedir. Böylece, nükleonlardan birinin diğerinin kuvvet menzili içinde bulunma ihtimâli

$$w_{i\varphi} = \int_{V_{i\varphi}} |\psi|^2 d\tau = \frac{1}{4\pi} \iint d\Omega \int_0^R \frac{1}{r^2} u^2 r^2 dr = \int_0^R u^2 dr \quad (4)$$

integrali ile hesaplanabilir. Burada $V_{i\varphi}$, R yarıçaplı kürenin içindeki bölgeyi temsil etmektedir. Benzer şekilde, nükleonlardan birinin diğerinin kuvvet menzili dışında bulunma ihtimâli

$$w_{\text{dış}} = \int_{V_{\text{dış}}} |\psi|^2 d\tau = \frac{1}{4\pi} \iint d\Omega \int_R^\infty \frac{1}{r^2} u^2 r^2 dr = \int_R^\infty u^2 dr \quad (5)$$

integrali ile hesaplanabilir. Burada $V_{\text{dış}}$, R yarıçaplı kürenin dışındaki bütün uzayı temsil etmektedir. Dalga fonksiyonunun radyal kısmı olan u , (1) bağıntıları yardımı ile (4) ve (5) ifâdelerinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w_{\text{iç}} &= A_1^2 \int_0^R \sin^2 \kappa r dr = \frac{1}{2} A_1^2 \left(\int_0^R dr - \int_0^R \cos 2\kappa r dr \right) \\ &= \frac{1}{2} A_1^2 \left(R - \frac{1}{2\kappa} \sin 2\kappa R \right) \\ w_{\text{dış}} &= A_2^2 \int_R^\infty e^{-2\alpha r} dr = \frac{1}{2\alpha} A_2^2 \left[e^{-2\alpha r} \right]_\infty^R = \frac{A_2^2}{2\alpha} e^{-2\alpha R} \end{aligned}$$

veya

$$w_{\text{iç}} = \frac{A_1^2}{2\alpha} \left(\alpha R - \frac{\alpha}{2\kappa} \sin 2\kappa R \right), \quad w_{\text{dış}} = \frac{A_2^2}{2\alpha} e^{-2\alpha R} \quad (6)$$

sonuçlarına varılır. $r = R$ için (1) bağıntılarındaki u radyal fonksiyonları ve bunların du/dr türevleri u fonksiyonunun sürekliliğini sağlamak üzere aynı olmalıdır; böylece

$$A_1 \sin \kappa R = A_2 e^{-\alpha R}, \quad \kappa A_1 \cos \kappa R = -\alpha A_2 e^{-\alpha R} \quad (7)$$

süreklilik bağıntıları elde edilir. (7) bağıntıları taraf tarafa bölünürse

$$\kappa \cot \kappa R = -\alpha \quad (8)$$

bağıntısı bulunur. (8) bağıntısı $\text{tg } \kappa R = -\kappa/\alpha$ şeklinde yazılır ve

$$\sin 2\kappa R \equiv \frac{2 \text{tg } \kappa R}{1 + \text{tg}^2 \kappa R}$$

özdeşliğinde yerine yazılırsa

$$\sin 2\kappa R = \frac{-2\alpha\kappa}{\alpha^2 + \kappa^2}$$

veya

$$-\frac{\alpha}{2\kappa} \sin 2\kappa R = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \kappa^2} \quad (9)$$

sonucuna varılır. (2) ve (9) bağıntıları yardımı ile (6) bağıntılarından

$$w_{i\dot{s}} = \frac{1}{1 + \alpha R} \left(\alpha R + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \kappa^2} \right) \quad (10)$$

ve

$$w_{dış} = \frac{1}{1 + \alpha R} \frac{\kappa^2}{\alpha^2 + \kappa^2} \quad (11)$$

sonuçlarına varılır. (10) ve (11) bağıntıları $w_{i\dot{s}} + w_{dış} = 1$ şartını özdeş olarak sağlarlar. (3) bağıntılarından

$$\alpha^2 + \kappa^2 = \frac{M}{\hbar^2} V_0 ,$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \kappa^2} = \frac{B}{V_0} = \frac{2,2245}{34,392} = 0,06468$$

ve

$$\frac{\kappa^2}{\alpha^2 + \kappa^2} = 1 - \frac{B}{V_0} = 0,93532$$

elde edilir. M , nötron-proton sisteminin indirgenmiş kütesinin yarısıdır ve yaklaşık olarak nötron ve protonun kütlelerinin aritmetik ortalamasıdır. Buna göre, Ek I'deki cetvellere bakarak $\hbar^2/M = 41,4714 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$ olduğu görülür. O hâlde

$$\alpha^2 = \frac{B}{\hbar^2/M} = \frac{2,2245}{41,4714} = 0,053639 \text{ fm}^{-2}$$

veya

$$\alpha = 0,23160 \text{ fm}^{-1}$$

ve

$$\alpha R = 0,2316 \times 2,0755 = 0,4806858$$

bulunur. Bu değerleri (10) ve (11) bağıntılarında yerlerine yazarak

$$w_{i\dot{s}} = \frac{1}{1,4806858} (0,4806858 + 0,06468) = 0,36832$$

$$w_{dış} = \frac{0,93532}{1,4806858} = 0,63168$$

sonuçlarına varılır.

III.4. Döteronun temel hâlinin izospininin sıfır olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Döteronun dalga fonksiyonu

$$\Psi = \psi_{\text{uzay}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{izospin}}$$

şeklinde yazılabilir. İzafî koordinatlarda ψ_{uzay} fonksiyonu döteronun temel hâli için

$$\psi_{\text{uzay}} (1, 2) = \frac{u(r)}{r} = \frac{u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

şeklinde olduğu için simetriktir. Döteronun temel hâli için toplam açısal momentumu $I = 1$ olduğundan, döteronu oluşturan nükleonların spin fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ile gösterilirse ψ_{spin} spin fonksiyonu

$$\psi_{\text{spin}} (1,2) = \alpha_1 \alpha_2 \text{ veya } \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \text{ veya } \beta_1 \beta_2$$

şeklinde bir simetrik fonksiyondur. İzospin formalizminde nötronlar ve protonlar nükleonların yük hâlleri adı verilen iki kuvantum hâli olduğundan, nötron ile protona özdeş parçacıklar gözü ile bakılır. O hâlde, döteronun Ψ dalga fonksiyonu antisimetrik olmalı ve

$$\Psi (1, 2) = - \Psi (2, 1)$$

şartını sağlamalıdır. Bu sebepten ve ψ_{uzay} ve ψ_{spin} fonksiyonları simetrik olduğundan, ψ_{izospin} fonksiyonu antisimetrik olmalıdır. Döteronu oluşturan nükleonların izospin fonksiyonları $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ ile gösterilirse antisimetrik ψ_{izospin} fonksiyonu

$$\psi_{\text{izospin}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1)$$

şeklinindedir. Diğer yandan, döteronun toplam izospini

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\tau}^{(1)} + \boldsymbol{\tau}^{(2)}]$$

şeklinindedir ve her iki yanın skaler karesi alınırsa

$$\mathbf{T}^2 = \frac{1}{4} [(\boldsymbol{\tau}^{(1)})^2 + (\boldsymbol{\tau}^{(2)})^2 + 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}]$$

yazılabilir ve bu ifâde

$$(\boldsymbol{\tau}^{(1)})^2 \psi_{\text{izospin}} = (\boldsymbol{\tau}^{(2)})^2 \psi_{\text{izospin}} = 3 \psi_{\text{izospin}}$$

bağıntılarını göz önüne alarak

$$\mathbf{T}^2 \psi_{\text{izospin}} = \frac{1}{4} (6 + 2 \boldsymbol{\tau}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \psi_{\text{izospin}}$$

şeklinde yazılabilir. Antisimetrik ψ_{izospin} fonksiyonu

$$\tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} \psi_{\text{izospin}} = -3 \psi_{\text{izospin}}$$

bağıntısını gerçeklediğinden ve aynı zamanda

$$\mathbf{T}^2 \psi_{\text{izospin}} = T(T+1) \psi_{\text{izospin}}$$

olduğundan

$$T(T+1) = \frac{1}{4} (6 - 6) \equiv 0$$

veya

$$T = 0$$

sonucuna varılır.

III.5. α parçacıkları atom numarası Z olan bir çekirdek tarafından saçılmaktadır. Klâsik tesir kesiti formülünü kullanarak, diferansiyel saçılma tesir kesitinin α parçacıklarının E enerjisi ve θ saçılma açısı cinsinden ifâdesini bulunuz.

ÇÖZÜM :

Geliş doğrultuları birbirlerine paralel olan bir α parçacıkları demetinin atom numarası Z olan bir çekirdek üzerine düştüğü farz edilsin. Çekirdeğin koordinat sisteminin O başlangıç noktasında bulunduğu farz edilsin ve α parçacıklarının geliş doğrultu ve yönünde olan ve O dan geçen eksen z eksenini olarak seçilsin. Yarıçapı b çarpışma parametresine eşit ve eksenini z olan dönel silindir içinden gelen parçacıklar tepesi O , eksenini z ve tepe katı açısı Ω olan dönel koninin içine saçılırlar. Silindirin dik kesitinin yüzölçümü

$$\sigma = \pi b^2 \quad (1)$$

bağıntısı ile bellidir. Silindirin bir ana doğrusu boyunca gelen parçacığın çarpışma parametresi b dir ve Ω katı tepe açısına sahip koninin bir ana doğrusu boyunca saçılır ve saçılma açısı θ dir; yâni, koninin ana doğrusu ile z eksenini arasındaki açı θ dir. O hâlde, koninin Ω katı tepe açısının büyüklüğü

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

bağıntısı ile bellidir. Böylece, klâsik diferansiyel tesir kesiti (1) ve (2) bağıntılarının kullanılması ile

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \theta d\theta}$$

veya

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{d(b^2)}{d\theta} \right| \quad (3)$$

şeklinde olur. Şüphesiz θ saçılma açısı b çarpışma parametresinin bir fonksiyonudur, veya b çarpışma parametresi θ saçılma açısının $b = b(\theta)$ şeklindeki

bir fonksiyonudur. Parçacığın saçılma esnasında kat ettiği yörüngenin bulunması ile $b = b(\theta)$ fonksiyonu tâyin edilebilir ve (3) bağıntısı yardımı ile de diferansiyel saçılma tesir kesiti bulunabilir.

Çekirdek ile α parçacığından oluşan sistemin indirgenmiş kütlesi $m = M_\alpha M_c / (M_\alpha + M_c)$ olduğuna ve kütle merkezi sisteminde α parçacığının izafî hızı \mathbf{v} olduğuna göre, momentumu $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ ve yörünge açısal momentumu da $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ olur. α parçacığına etki eden kuvvet \mathbf{F} ise parçacığın hareket denklemi

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4)$$

şeklinde olur. Parçacığın açısal momentumunun zamana göre küllî türevi alınır

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

olduğundan,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = m \mathbf{v} \times \mathbf{v} \equiv 0$$

bulunur ve (4) bağıntısının yukarıda yerine yazılması ile

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5)$$

sonucuna varılır. Çekirdek ile α parçacığı arasındaki etkileşme kuvveti Coulomb kuvveti olup $V = V(r)$ şeklindeki merkezî bir potansiyelden

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

bağıntısı ile türer. Bu ifade (5) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r} \equiv 0 \quad (6)$$

veya

$$\mathbf{L} = \text{sâbit} \quad (7)$$

sonucuna varılır. O hâlde, α parçacığının açısal momentumu bütün yörüngesi boyunca sâbittir, yâni korunur. $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ nin yörünge boyunca sâbit kalması

yörüngenin bir düzlem eğri olduğunu kanıtlar. Şüphesiz $|\mathbf{L}| = L$ büyüklüğü de yörünge boyunca sâbittir.

Şimdi artık α parçacığının yörüngesini tâyin edebiliriz. Parçacığın düzlem kutupsal koordinatlardaki yer vektörü $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_1$ dir ve (r, φ) ile gösterilen düzlem kutupsal koordinatlarda $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ orthonormal koordinat vektörleri

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{d\varphi} = \mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{d\varphi} = -\mathbf{e}_1 \quad (8)$$

türev bağıntılarını sağlarlar. Bu türev bağıntılarının kullanılması ile parçacığın momentumu

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_1 + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_2 \right) \quad (9)$$

ve açısal momentumu da

$$\mathbf{L} = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{N} \quad (10)$$

şeklinde ifâde edilebilir. Burada $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{N}$ yörünge düzleminin normal birim vektörüdür ve sâbittir. Böylece, açısal momentumun korunumu

$$m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = L = \text{sâbit}$$

bağıntısı ile ifâde edilir. Buradaki L sâbitinin değeri, parçacığın geliş doğrultusundaki hızının v_∞ asimtotik değeri ve b çarpışma parametresi cinsinden

$$L = m v_\infty b$$

bağıntısı ile bellidir. O hâlde, açısal momentumun korunumunun ifâdesi

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = v_\infty b \quad (11)$$

şeklini alır. Diğer yandan, enerjinin korunumu

$$T + V = E = \text{sâbit}$$

veya (9) bağıntısından $T = m v^2/2$ yi hesaplayarak ve Coulomb potansiyelinin $V(r) = Z'Z e^2/r$ şeklindeki ifâdesini yerine yazarak

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{Z'Z e^2}{r} = E = \text{sâbit} \quad (12)$$

şeklinde ifâde edilebilir. E sâbitinin değeri, hızın asimtotik değeri cinsinden

$$E = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 \quad (13)$$

bağıntısı ile bellidir, çünkü potansiyel sonsuzda sıfır olur. v_{∞} un değeri (13) bağıntısından çözülüp (11) bağıntısında yerine yazılırsa

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = b \sqrt{\frac{2E}{m}} \equiv C \quad (14)$$

sonucuna varılır. Şimdi $u = 1/r$ vaz edelim. Böylece, $r = 1/u$ olur ve türev alarak

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$$

bulunur. (14) bağıntısından

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{C}{r^2} = C u^2 \quad (15)$$

yazılabilir ve bu da bir önceki bağıntıda yerine yazılırsa

$$\frac{dr}{dt} = -C \frac{du}{d\phi} \quad (16)$$

sonucuna varılır. (15) ve (16) bağıntıları (12) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} m \left[C^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{u^2} C^2 u^4 \right] + Z' Z e^2 u = E$$

veya

$$\frac{1}{2} m C^2 \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] + Z' Z e^2 u = E$$

elde edilir. Bu bağıntıdaki C yerine (14) bağıntısı ile belli olan değeri yazılırsa

$$\frac{1}{2} m C^2 = \frac{1}{2} m b^2 \frac{2E}{m} = b^2 E$$

olduğundan ve her iki yanı $2Eb^2$ ile bölerek

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] + \frac{Z' Z e^2}{2 E b^2} u = \frac{1}{2b^2} \quad (17)$$

sonucuna varılır. Şimdi de

$$\alpha \equiv \frac{Z' Z e^2}{2E} \quad (18)$$

vaz edelim, buradaki α parametresi uzunluk boyutuna sahiptir. (18) bağıntısı (17) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] + \frac{\alpha}{b^2} u = \frac{1}{2b^2} \quad (19)$$

elde edilir. Şimdi (19) bağıntısının her iki yanının φ ye göre türevi alınırsa

$$\frac{1}{2} \left(2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} \right) + \frac{\alpha}{b^2} \frac{du}{d\varphi} = 0$$

bulunur ve bu bağıntının da her iki yanını $du/d\varphi$ ile bölünürse

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{\alpha}{b^2} = 0 \quad (20)$$

sonucuna varılır. (20) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$u = A \cos (\varphi - \varphi_0) + B$$

şeklindedir. Burada A ve φ_0 diferansiyel denklemin homogen kısmının integrasyon sâbitleridir ve sınır şartlarından tâyin edilebilir. B ise diferansiyel denklemin sâbit ikinci tarafı yardımı ile tâyin edilebilir. (20) denklemi ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir ve iki integrasyon sâbiti verir; fakat (20) denklemi birinci mertebeden olan (19) denkleminde elde edildiği için gerçekte bir keyfi integrasyon sâbiti vardır ve diğeri (19) denklemi yardımı ile hesaplanabilir. Eğer $\varphi = 0$ için $du/d\varphi = 0$ sınır şartını koşarsak $\varphi_0 = 0$ bulunur ve

$$u = A \cos \varphi + B, \quad \frac{du}{d\varphi} = -A \sin \varphi, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -A \cos \varphi$$

elde edilir. Bu bağıntılar (20) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$-A \cos \varphi + A \cos \varphi + B + \frac{\alpha}{b^2} = 0$$

veya

$$B = -\frac{\alpha}{b^2}$$

bulunur. B sâbitini yukarıda yerine yazarsak

$$u = A \cos \varphi - \frac{\alpha}{b^2}, \quad \frac{du}{d\varphi} = -A \sin \varphi$$

elde edilir. Bu bağıntılar da (19) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \left[A^2 \sin^2 \varphi + \left(A \cos \varphi - \frac{\alpha}{b^2} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{b^2} \left(A \cos \varphi - \frac{\alpha}{b^2} \right) = \frac{1}{2b^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(A^2 - 2A \frac{\alpha}{b^2} \cos \varphi + \frac{\alpha^2}{b^4} \right) + A \frac{\alpha}{b^2} \cos \varphi - \frac{\alpha^2}{b^4} = \frac{1}{2b^2}$$

$$A^2 - \frac{\alpha^2}{b^4} = \frac{1}{b^2}$$

$$A = \frac{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{b^2}$$

bulunur ve böylece

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{b^2} \cos \varphi - \frac{\alpha}{b^2} \quad (21)$$

sonucuna varılır. Bu denklem parçacığın yörüngesinin düzlem kutupsal koordinatlardaki denklemidir ve bir hiperbolü gösterir. (21) denkleminde φ çözülecek olursa

$$\varphi(r) = \arccos \frac{\frac{b^2}{r} + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \quad (22)$$

elde edilir. (22) denkleminin belirlediği hiperbolün asimtotları arasındaki açının büyüklüğü

$$2[\varphi(\infty) - \varphi(r_{\min})]$$

dir. Hâlbuki yukarıda φ_0 integrasyon sâbiti $\varphi(r_{\min}) = 0$ şartı sağlanacak şekilde sıfır seçilmişti. O hâlde, asimtotlar arasındaki açı $2\varphi(\infty)$ dur ve θ saçılma açısı da

$$\theta = \pi - 2\varphi(\infty)$$

bağıntısı ile verilir. Bu bağıntıdan

$$\varphi(\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

veya

$$\cos \varphi(\infty) = \sin \frac{\theta}{2}$$

bulunur. (22) bağıntısından

$$\cos \varphi(\infty) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}$$

yazılabildiğinden

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\alpha}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2}} \quad (23)$$

sonucuna varılır. (23) bağıntısından α/b çözümlerse

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \equiv \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

veya

$$b = a \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \quad (24)$$

sonucuna varılır. Böylece, çarpışma parametresi saçılma açısının bir fonksiyonu olarak bulunmuş olur. (24) bağıntısından

$$b^2 = a^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2} \equiv a^2 \left(1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2} \right) - a^2$$

veya

$$b^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - a^2 \quad (25)$$

yazılabilir. (25) bağıntısının türevini alarak

$$\frac{d(b^2)}{d\theta} = a^2 \frac{-2}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

veya

$$\frac{d(b^2)}{d\theta} = -a^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \quad (26)$$

sonucuna varılır. Bu sonuç (3) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{2 \sin \theta} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

veya

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

veya

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (27)$$

bulunur. Eğer (18) bağıntısı (27) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z'Z e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (28)$$

sonucuna varılır. (28) bağıntısı ilk defa Rutherford (1911) tarafından bulunduğu için Rutherford formülü adını almıştır. α parçacığı için $Z' = 2$ dir.

III.6. Nötron-proton sistemi için yazılmış Schrödinger denkleminin radyal kısmı olan

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{M^2}{\hbar^2} (E - V) u - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \quad (1)$$

denklemini kare kuyu potansiyeli ve $l = 1$ için küresel Bessel fonksiyonları cinsinden çözerek ve saçılmaya ait sınır şartlarını kullanarak P -dalga nötron-proton açılmasını temsil eden radyal dalga fonksiyonunun

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } u = A_1 [(Kr)^{-1} \sin Kr - \cos Kr] \\ r > R \text{ için : } u = A_2 [(kr)^{-1} \sin (kr + \delta_1) - \cos (kr + \delta_1)] \end{array} \right\} \quad (2)$$

şeklinde olduğunu gösteriniz. Aynı zamanda $r = R$ için süreklilik şartını kullanarak saçılmış P dalgalarının δ_1 faz kaymasının

$$K^2 [kR \cotg (kR + \delta_1) - 1] = k^2 [KR \cotg KR - 1] \quad (3)$$

bağıntısı ile belirlendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$r < R$ için : $V = -V_0$ ve $r > R$ için : $V = 0$ ile tanımlanan kare kuyu potansiyeli için

$$r < R \text{ için : } K^2 = \frac{M}{\hbar^2} (E + V_0), \quad r > R \text{ için : } k^2 = \frac{M}{\hbar^2} E \quad (4)$$

vaz edildiği takdirde (1) diferansiyel denklemini

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \\ r > R \text{ için : } \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

şekillerinde yazılabilir. Bu denklemlerin küresel Bessel fonksiyonları cinsinden genel çözümleri

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } u = A_1 Kr j_l(Kr) + B_1 Kr n_l(Kr) \\ r > R \text{ için : } u = C kr j_l(kr) + D kr n_l(kr) \end{array} \right\} \quad (6)$$

şeklindedir. Küresel Bessel fonksiyonlarının $x \rightarrow 0$ için ilk terimleri

$$j_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}$$

şeklinde olduğundan, $r < R$ için $u(0) = 0$ sınır şartı $B_1 = 0$ sonucunu verir. Diğer yandan, $l = 1$ için

$$x j_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x, \quad x n_1(x) = -\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right) \quad (7)$$

olduğundan,

$$r < R \text{ için : } u = A_1 \left(\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr \right) \quad (8)$$

elde edilir. $r > R$ için (6) bağıntılarından ikincisi (7) bağıntılarının kullanılması ile

$$r > R \text{ için : } u = C \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) - D \left(\frac{\cos kr}{kr} + \sin kr \right) \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. (9) bağıntısı

$$u = \frac{1}{kr} (C \sin kr - D \cos kr) - (C \cos kr + D \sin kr) \quad (9')$$

şeklinde de yazılabilir. C ve D keyfî sâbitleri yerine A_2 ve Δ keyfî sâbitleri alınarak (9') bağıntısı

$$u = A_2 \left[\frac{1}{kr} \sin (kr + \Delta) - \cos (kr + \Delta) \right] \quad (10)$$

şekline getirilebilir. Filhakika (10) bağıntısı

$$u = \frac{1}{kr} (A_2 \cos \Delta \sin kr + A_2 \sin \Delta \cos kr) - (A_2 \cos \Delta \cos kr - A_2 \sin \Delta \sin kr) \quad (10')$$

şeklinde yazılırsa (9'), bağıntısı ile özdeş kılınabilir. (9') ve (10') bağıntılarının karşılaştırılmasından

$$C = A_2 \cos \Delta, \quad -D = A_2 \sin \Delta$$

veya

$$\operatorname{tg} \Delta = -D/C, \quad A_2 = \sqrt{C^2 + D^2}$$

bağıntıları bulunur.

Toplam dalga fonksiyonunun kısmî dalgalar metodu ile bulunmuş olan asimtotik çözümü

$$r \psi \cong \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i(\delta_l + l \frac{\pi}{2})} \sin \left(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l \right) P_l(\cos \theta)$$

şeklindedir ve $l = 1$ için

$$r \psi \cong \frac{3}{k} e^{i(\delta_1 + \frac{\pi}{2})} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} + \delta_1 \right) P_1(\cos \theta)$$

şeklini alır. $r \psi = u_1(r) P_1(\cos \theta)$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$u \cong \frac{3}{k} e^{i(\delta_1 + \frac{\pi}{2})} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} + \delta_1 \right) \quad (r \rightarrow \infty)$$

veya

$$u \cong -\frac{3}{k} e^{i(\delta_1 + \frac{\pi}{2})} \cos(kr + \delta_1) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (11)$$

sonucuna varılır. (10) bağıntısı ile verilen çözüm asimtotik olarak

$$u \cong -A_2 \cos(kr + \Delta) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (12)$$

ifâdesine yaklaşır. (11) ve (12) bağıntılarının karşılaştırılması ile

$$\Delta = \delta_1, \quad A_2 = \frac{3}{k} e^{i(\delta_1 + \frac{\pi}{2})} \quad (13)$$

elde edilir ve böylece (10) bağıntısından

$$r > R \text{ için : } u = A_2 \left[\frac{1}{kr} \sin(kr + \delta_1) - \cos(kr + \delta_1) \right] \quad (14)$$

sonucuna varılır. (8) ve (14) bağıntıları aranan bağıntılardır.

Şimdi $r = R$ için u dalga fonksiyonunun süreklilik şartlarını kullanarak δ_1 faz kaymasını veren bağıntıyı bulalım. (8) bağıntısının türevini alarak

$$\frac{du}{dr} = A_1 \left(\frac{\cos Kr}{r} - \frac{\sin Kr}{Kr^2} + K \sin Kr \right)$$

veya

$$\frac{du}{dr} = \frac{A_1}{r} \left[Kr \sin Kr - \left(\frac{\sin Kr}{Kr} - \cos Kr \right) \right]$$

bulunur. Bu bağıntıyı (8) bağıntısına taraf tarafa bölerek ve $r = R$ yazarak

$$\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr}\right)_{r=R} = \frac{1}{R} \left(\frac{KR \sin KR}{\frac{\sin KR}{KR} - \cos KR} - 1 \right)$$

veya

$$\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr}\right)_{r=R} = \frac{1}{R} \left(\frac{(KR)^2}{1 - KR \cotg KR} - 1 \right) \quad (15)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (14) bağıntısının türevini alarak

$$\frac{du}{dr} = A_2 \left[\frac{1}{r} \cos(kr + \delta_1) - \frac{1}{kr^2} \sin(kr + \delta_1) + k \sin(kr + \delta_1) \right]$$

veya

$$\frac{du}{dr} = \frac{A_2}{r} \left\{ kr \sin(kr + \delta_1) - \left[\frac{1}{kr} \sin(kr + \delta_1) - \cos(kr + \delta_1) \right] \right\}$$

bulunur. Bu bağıntıyı (14) bağıntısına taraf tarafa bölerek ve $r = R$ yazarak

$$\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr}\right)_{r=R} = \frac{1}{R} \left[\frac{kR \sin(kR + \delta_1)}{\frac{1}{kR} \sin(kR + \delta_1) - \cos(kR + \delta_1)} - 1 \right]$$

veya

$$\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr}\right)_{r=R} = \frac{1}{R} \left[\frac{(kR)^2}{1 - kR \cotg(kR + \delta_1)} - 1 \right] \quad (16)$$

elde edilir. (15) ve (16) bağıntılarının birinci tarafları süreklilik şartlarının sonucu olarak eşit olduğundan

$$\frac{(kR)^2}{1 - kR \cotg(kR + \delta_1)} = \frac{(KR)^2}{1 - KR \cotg KR}$$

veya

$$K^2 [kR \cotg(kR + \delta_1) - 1] = k^2 [KR \cotg KR - 1] \quad (3)$$

sonucuna varılır.

III.7. S dalgalarının saçılmasına ait δ_0 faz kaymasının

$$k \cotg(kR + \delta_0) = K \cotg KR \quad (1)$$

denklemini ile verildiği bilinmektedir. Bu bağıntıdan ve problem 6 daki (3) bağıntısından yararlanarak $E_{km} = 0 - 10$ MeV aralığındaki saçılma enerjileri için δ_0 ve δ_1 faz kaymalarının sayısal değerlerini ve böylece

$$\sigma_{l=0} = 4\pi k^{-2} \sin^2 \delta_0 \quad \text{ve} \quad \sigma_{l=1} = 12\pi k^{-2} \sin^2 \delta_1 \quad (2)$$

nötron-proton saçılma tesir kesitlerinin sayısal değerlerini E_{km} nin bir fonksiyonu olarak hesaplayınız ve bir cetvel şeklinde gösteriniz. Elde ettiğiniz bu cetveli

kullanarak $\sigma_{l=1}$ in toplam tesir kesitinin yüzde biri olduğu enerjiyi, yâni, $\sigma_{l=0}(E) = 99 \sigma_{l=1}(E)$ bağıntısını gerçekleyen E enerjisini bulunuz. Hesaplarda triplet saçılmaya ait $R_l = 2,0755$ fm ve $V_{ot} = 34,392$ MeV deneysel değerlerini kullanınız.

ÇÖZÜM :

δ_0 ve δ_1 faz kaymalarını

$$k \cotg(kR + \delta_0) = K \cotg KR \quad (1)$$

$$K^2 [kR \cotg(kR + \delta_1) - 1] = k^2 [KR \cotg KR - 1] \quad (3)$$

denklemlerinden çözmemiz gerekmektedir. Burada

$$k^2 = \frac{M}{\hbar^2} E, \quad K^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 + E), \quad k_0^2 = \frac{M}{\hbar^2} V_0 \quad (4)$$

vaz edilmiştir. Ayrıca

$$\alpha = kR, \quad \beta = KR, \quad \gamma = k_0R \quad (5)$$

boyutsuz büyüklükleri vaz edilirse (1) ve (3) bağıntıları

$$\alpha \cotg(\alpha + \delta_0) = \beta \cotg \beta \quad (6)$$

$$\beta^2 [\alpha \cotg(\alpha + \delta_1) - 1] = \alpha^2 (\beta \cotg \beta - 1) \quad (7)$$

şekillerinde yazılabilirler.

(4) bağıntılarından

$$K^2 - k^2 = k_0^2 \quad (8)$$

bağıntısı bulunur ve (5) bağıntıları yardımı ile bu bağıntı

$$\beta^2 - \alpha^2 = \gamma^2 \quad (9)$$

şeklini alır. Diğer yandan, (4) ve (5) bağıntılarından

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{k_0^2}{K^2} = \frac{V_0}{V_0 + E} \quad (10)$$

ve

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{k^2}{K^2} = \frac{E}{V_0 + E} \quad (11)$$

bağıntıları elde edilir. (7) bağıntısı

$$\cotg(\alpha + \delta_1) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) + \frac{\alpha}{\beta} \cotg \beta$$

şeklinde veya (9) bağıntısı yardımı ile de

$$\cotg(\alpha + \delta_l) = \frac{\gamma^2}{\alpha \beta^2} + \frac{\alpha}{\beta \operatorname{tg} \beta} \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak, (6) bağıntısı

$$\operatorname{tg}(\alpha + \delta_0) = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \beta \quad (13)$$

şeklinde yazılarak ve (12) bağıntısı da (10) bağıntısı yardımı ile

$$\cotg(\alpha + \delta_l) = \frac{V_0}{\alpha(V_0 + E)} + \frac{\alpha}{\beta \operatorname{tg} \beta} \quad (14)$$

şeklinde yazılarak sayısal hesaplara başlanabilir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki cetvelde sıralanmıştır. Bu cetvelde $\sigma_{l=0}$ ve 99 $\sigma_{l=1}$ büyüklüklerinin değerleri $E = E_{km}$ enerjisinin bir fonksiyonu olarak hesaplanmıştır. Bir örnek olmak üzere $E = 6$ MeV için hesapların ayrıntılarını aşağıda veriyoruz :

E (MeV)	$\sigma_{l=0}$ (b)	99 $\sigma_{l=1}$ (b)
0	3,6606	0,0000
0,5	2,9515	0,0064
1	2,4627	0,0258
2	1,8330	0,1036
3	1,4454	0,2340
4	1,1830	0,4165
5	0,9939	0,6503
6	0,8514	0,9336
7	0,7402	1,2640
8	0,6512	1,6383
9	0,5784	2,0525
10	0,5179	2,5020

(11) bağıntısından :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{E}{V_0 + E} \right)^{1/2} = \left(\frac{6}{40,392} \right)^{1/2} \cong 0,3854144$$

bulunur. (4) ve (5) bağıntılarından :

$$\beta = \left[\frac{(V_0 + E) R^2}{\hbar^2 / M} \right]^{1/2} = \left(\frac{40,392 \times 4,3077}{41,4714} \right)^{1/2}$$

$$\beta \cong 2,0483117 \text{ radyan}, \quad \operatorname{tg} \beta \cong -1,932528$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \beta \cong -0,744824, \quad \frac{\alpha}{\beta \operatorname{tg} \beta} \cong -0,199435$$

bulunur. (13) bağıntısından :

$$\alpha + \delta_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \beta \right) \cong -36,6796^\circ$$

bulunur. (4) ve (5) bağıntılarından :

$$\alpha = \left(\frac{E R^2}{\hbar^2 / M} \right)^{1/2} = \left(\frac{6 \times 4,3077}{41,4714} \right)^{1/2} \cong 0,789449 \text{ radyan}$$

$$\alpha \cong 45,2321^\circ, \quad \delta_0 = -81,9117^\circ$$

$$\sin^2 \delta_0 = 0,980204$$

bulunur. (4) bağıntılarından

$$\frac{4\pi}{k^2} = \frac{4\pi \hbar^2 / M}{E} = \frac{5,21145}{6} \cong 0,868575 \text{ b}$$

bulunur ve böylece (2) bağıntılarından birincisi yardımı ile

$$\sigma_{l=0} \cong 0,85138 \text{ b}$$

sonucuna varılır. Diğer yandan

$$\frac{V_0}{\alpha(V_0 + E)} = \frac{34,392}{0,789449 \times 40,392} \cong 1,0785445$$

bulunur ve (14) bağıntısında yerlerine yazarak

$$\cotg(\alpha + \delta_1) = 1,0785445 - 0,199435 \cong 0,8791091$$

$$\alpha + \delta_1 = 48,681^\circ, \quad \delta_1 = 3,449^\circ, \quad \sin^2 \delta_1 = 0,003619$$

bulunur. Diğer yandan

$$\frac{12\pi}{k^2} \cong 2,605725 \text{ b}$$

olduğundan, (2) bağıntılarından ikincisi yardımı ile

$$\sigma_{l=1} \cong 0,00943025 \text{ b}, \quad 99 \sigma_{l=1} \cong 0,933595 \text{ b}$$

sonuçlarına varılır.

Yukardaki cetvel incelendiği zaman

$$\sigma_{l=0}(E) = 99 \sigma_{l=1}(E) \quad (15)$$

eşitliğinin

$$5 \text{ MeV} < E < 6 \text{ MeV}$$

aralığındaki bir E enerjisi için gerçekleşmesi gerektiği görülür. Eğer

$$f(E) = \sigma_{l=0}(E) - 99 \sigma_{l=1}(E) \quad (16)$$

bağıntısı ile bir $f(E)$ fonksiyonu tarif edilirse, (15) bağıntısını gerçekleyen E enerjisi $f(E) = 0$ bağıntısını da gerçekler. Cetvelden

$$f(5) = 0,9939 - 0,6503 = 0,3436 \text{ b}$$

$$f(6) = 0,8514 - 0,9336 = -0,0822 \text{ b}$$

bulunur. $5 < E < 6$ aralığında $f(E)$ fonksiyonu için lineer interpolasyon yapılırsa

$$f_1 = - \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} (6 - E_1) + f(6) = 0,4258 (6 - E_1) - 0,0822$$

veya

$$f_1 = -0,4258 E_1 + 2,4726$$

bulunur. $f_1 = 0$ şartını gerçekleyen E_1 enerjisi

$$E_1 = \frac{2,4726}{0,4258} \cong 5,80695 \text{ MeV}$$

olarak bulunur. Bu lineer interpolasyon sonucuna bakılarak aşağıdaki değerler cetveli hesaplanır :

E (MeV)	$\sigma_{l=0}$ (b)	$99 \sigma_{l=1}$ (b)
5,807	0,87609	0,87516
5,808	0,87595	0,87546
5,809	0,87582	0,87576

Bu cetvele bakarak $f(E) = 0$ denkleminin yaklaşık çözümünün

$$E \cong 5,809 \text{ MeV}$$

olduğu görülür. Buna tekabül eden tesir kesitlerinin ortak yaklaşık değeri de

$$\sigma_{l=0}(5,809) \cong 99 \sigma_{l=1}(5,809) \cong 0,8758 \text{ b}$$

dır.

III.8. Sonsuz küçük bir ε kalınlığındaki ve sonsuz büyük bir yüzeye sahip nötron saçıcı bir levha, levhaya dik bir paralel demet oluşturan çok yavaş monoenerjik (veya monokromatik) nötronlarla bombardıman edilmektedir. Levhadan saçılan nötronlar levhanın öbür yanında ve levhadan levhanın kalınlığına nazaran sonsuz uzakta bulunan bir P noktasındaki nötron detektörü ile gözlenmektedir. Çok yavaş veya çok uzun dalga boylarına sahip nötronlar madde içerisinde ışığın âdi optik özelliklerine sahip olduklarına ve madde tarafından saçılmaları ışığın bilinen kırılma kanununa bağlı olduğuna göre levhanın nötronlara nazaran kırılma indisinin yaklaşık olarak

$$n \cong 1 - \lambda^2 \frac{Na}{2\pi}$$

formülü ile verildiğini gösteriniz. Burada λ nötronların dalga boyu, N levhanın birim hacmindaki saçıcı çekirdek sayısı ve a çekirdeklerden her birinin Fermi saçılma uzunluğudur ve koherent saçılmaya aittir.

ÇÖZÜM :

P noktasının levhanın kendisine bakan yüzüne dik uzaklığı QP ve levhanın arka yüzüne dik uzaklığı da $OP = z_0$ olsun. Buna göre $OQ = \varepsilon$ olur. Levhanın içindeki herhangi bir M noktasının P noktasına uzaklığı $MP = r$ olsun. Diğer yandan, başlangıcı O da olan ve z eksenini OQP doğrultu ve yönünde alınan bir (r', φ, z) silindirik koordinat sistemi seçilsin. Levha üzerine düşen nötronların asimtotik dalga fonksiyonu

$$\psi_0 \cong e^{ikz} \quad (1)$$

ve levhadan saçılıp P noktasına gelen nötronların asimtotik dalga fonksiyonu da

$$\psi_{s\varphi} \cong f \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2)$$

şeklinindedir. Burada f saçılma genliğidir ve S dalgalı yavaş nötronlar için izotropiktir, yâni, saçılma açılarına bağlı değildir. Ayrıca f saçılma genliği, çok yavaş nötronlar için, enerjiye bağlı olmayıp Fermi saçılma uzunluğuna ters işaretle eşittir. Böylece levha üzerine düşüp saçıldıktan sonra P noktasına gelen herhangi bir nötronun toplam asimtotik dalga fonksiyonu

$$\psi \cong e^{ikz} - a \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3)$$

şeklinindedir. Bütün nötron demetine ait dalga fonksiyonu da saçılan dalgaların toplamı alınarak aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\psi \cong e^{ikz} - \sum_s a_s \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \quad (4)$$

Buradaki s indisi saçıcı çekirdeklerden her birini göstermektedir. Eğer levha saf bir maddeden oluşmuşsa, a_s saçılma uzunlukları bütün çekirdekler için aynı a değerine sahiptir ve (4) bağıntısı

$$\psi \cong e^{ikz} - a \sum_s \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \quad (5)$$

şeklini alır. Levhadaki çekirdekler levha boyutlarına nazaran sonsuz küçük ve sayıları da sonsuz büyük olduğundan (5) bağıntısındaki toplam yerine levhanın bütün hacmine teşmil edilen bir üç katlı integral alınabilir ve böylece

$$\psi \cong e^{ikz} - a \int_V \frac{e^{ikr}}{r} N d\tau \quad (6)$$

elde edilir. Buradaki $N d\tau$ büyüklüğü $d\tau$ hacim elemanı içerisindeki saçıcı çekirdeklerin sayısıdır. Levha homogen bir maddeden oluşmuşsa N çekirdek sayısı yoğunluğu sâbittir. Böylece (6) bağıntısı, silindirik koordinatlarda $d\tau = r' dr' d\phi dz$ olduğuna dikkat edilerek

$$\psi \cong e^{ikz} - Na \int_0^\varepsilon dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{e^{ikr}}{r} r' dr'$$

veya

$$\psi \cong e^{ikz} - 2\pi Na \varepsilon \int_0^\infty \frac{e^{ikr}}{r} r' dr' \quad (7)$$

şeklini alır. (7) bağıntısı, r nin z ye bağlı olmadığı farz edilmek suretiyle z ye göre integrasyon yapılarak elde edilmiştir. Bu kabul yaklaşık olarak doğrudur ve r yalnız r' cinsinden ifâde edilebilir. Şimdi r ile r' arasındaki bağıntıyı bulalım. P den $MP = r$ uzaklığında ve levhanın içinde bulunan herhangi bir M noktasının Oz eksenini üzerindeki dik izdüşümü M' olsun. Şüphesiz, M' noktası birbirlerine çok yakın bulunan O ve Q noktalarının arasındadır. Eğer $M'MP$ dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa

$$MP^2 = MM'^2 + M'P^2 \quad (8)$$

yazılabilir. Eğer M noktasının silindirik koordinatları (r', ϕ, z) ise $OM' = z$ ve $MM' = r'$ olur. Diğer yandan

$$M'P = OP - OM' = z_0 - z$$

yazılabilir ve (8) bağıntısı da

$$r^2 = r'^2 + (z_0 - z)^2$$

veya

$$r^2 = r'^2 + z_0^2 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^2 \quad (8')$$

şeklini alır. Diğer yandan, $OM' < OQ$ veya $z < \varepsilon$ ve böylece

$$\frac{z}{z_0} < \frac{\varepsilon}{z_0} \ll 1$$

olduğundan, (8') bağıntısı

$$r^2 \cong r'^2 + z_0^2 \quad (9)$$

yaklaşık şeklini alır. (9) bağıntısından, $z_0 = \text{sâbit}$ olduğuna dikkat edilerek,

$$r dr = r' dr', \quad \lim_{r' \rightarrow 0} r = z_0, \quad \lim_{r' \rightarrow \infty} r \rightarrow \infty$$

bağıntıları bulunur ve (7) bağıntısında yerlerine yazılarak

$$\psi \cong e^{ikz} - 2\pi Na \varepsilon \int_{z_0}^{\infty} e^{ikr} dr \quad (10)$$

elde edilir. (10) bağıntısındaki belirli integralin değeri, trigonometrik fonksiyonlar ihtiva ettiğinden belirsizdir; fakat bir hesap hilesi ile bu değer hesaplanabilir. Bahis konusu integral, b reel bir sayı olmak üzere

$$\int_{z_0}^{\infty} e^{ikr} dr \cong \lim_{b^2 \rightarrow 0} \int_{z_0}^{\infty} e^{-b^2 r} e^{ikr} dr$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan,

$$\int_{z_0}^{\infty} e^{(ik-b^2)r} dr = \frac{1}{ik - b^2} \left[e^{ikr} e^{-b^2 r} \right]_{z_0}^{\infty} = \frac{e^{ikz_0}}{b^2 - ik} e^{-b^2 z_0}$$

olduğundan, $b^2 \rightarrow 0$ için

$$\int_{z_0}^{\infty} e^{ikr} dr \cong -\frac{e^{ikz_0}}{ik} \equiv \frac{i}{k} e^{ikz_0}$$

bulunur ve (10) bağıntısında yerine yazarak ve $z_0 = z$ alarak

$$\psi \cong e^{ikz} - i \frac{2\pi Na}{k} \varepsilon e^{ikz} \quad (11)$$

sonucuna varılır.

Nötrona ait bir De Broglie dalgası, levhaya çarptıktan sonra $MM' \ll OP$ yaklaşıklığı içerisinde

$$z = OP = OQ + QP = \varepsilon + (z - \varepsilon) \quad (12)$$

geometrik yolunu kat eder. (11) bağıntısı ile verilen toplam asimtotik dalga fonksiyonunun bulunabilmesi için $\exp(ikz)$ De Broglie dalga fonksiyonunda (12) ile verilen z geometrik yolu yerine nötron dalgasının kat ettiği optik yol yazılmalıdır ve bu da kırılma indisinin bilinmesini gerektirir. De Broglie dalgasının boşluktaki faz hızı u ve boşluktaki parçacık hızı v olduğuna göre, bu iki hız arasında $uv=c^2$ bağıntısı vardır. Levha içerisindeki faz ve parçacık hızları da u' ve v' olsun. Bu hızlar da $u'v' = c^2$ bağıntısını gerçekler. Bir ortamın kırılma indisi boşluktaki faz hızının ortamdaki faz hızına oranı olarak tarif edildiğinden, M_n nötronun kütlesi olmak üzere,

$$n = \frac{u}{u'} = \frac{v'}{v} = \frac{M_n v'}{M_n v} = \frac{p'}{p} = \frac{\hbar k'}{\hbar k}$$

veya

$$n = k'/k \quad (13)$$

yazılabilir. Işığı kıran bir ortamın kırılma indisi genellikle birden büyük olduğu hâlde, nötron dalgalarını kıran bir ortamın kırılma indisi genellikle birden küçüktür. Fakat boşluğun indisi gene birdir. Bir ortamda bir dalganın kat ettiği optik yol, dalganın kat ettiği geometrik yol ile o ortamın kırılma indisinin çarpımı olarak tarif edildiğinden, (12) bağıntısı ile verilen geometrik yola tekabül eden optik yol

$$n OQ + QP = n\varepsilon + (z - \varepsilon) \equiv (n - 1)\varepsilon + z \quad (14)$$

şeklinde olur. Gerçekten, toplam $\psi = \exp(i\varphi)$ dalgasının $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ fazı, kat ettiği ortamlardaki faz farklarının toplamı olduğundan,

$$\varphi = k'\varepsilon + k(z - \varepsilon)$$

veya (13) bağıntısı yardımı ile

$$\varphi = nk\varepsilon + k(z - \varepsilon) \equiv k[(n - 1)\varepsilon + z] \quad (15)$$

sonucuna varılır. (14) veya (15) bağıntısının kullanılması ile toplam asimtotik dalganın ifâdesi

$$\psi \cong e^{ikz} e^{-i(1-n)kz} \quad (16)$$

olarak bulunur. Genellikle n kırılma indisi birden küçük ve bire çok yakındır, yâni,

$$0 < 1 - n \ll 1$$

yazılabilir. Diğer yandan, nötronun dalga boyu levhanın kalınlığı mertebesinde-
dir, yâni

$$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \cong \varepsilon$$

veya

$$k \varepsilon \cong 1$$

yazılabilir ve sonuç olarak

$$(1 - n) k \varepsilon \ll 1 \quad (17)$$

elde edilir. (17) yaklaşıklığı içeirisinde (16) bağıntısı

$$\psi \cong e^{ikz} [1 - i(1 - n) k \varepsilon] \cong e^{ikz} - i(1 - n) k \varepsilon e^{ikz} \quad (18)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (11) bağıntısının benzeri bulunmuş olur. (18) ba-
ğıntısı (11) bağıntısı ile karşılaştırılırsa

$$(1 - n) k \cong \frac{2\pi Na}{k}$$

veya

$$n \cong 1 - \frac{2\pi Na}{k^2} \quad (19)$$

sonucuna varılır. Eğer $2\pi/k = \lambda$ bağıntısı kullanılırsa (19) bağıntısı

$$n \cong 1 - \lambda^2 \frac{Na}{2\pi} \quad (20)$$

şeklinde de yazılabilir ve bu aranan sonuçtur.

III.9. Çok uzun dalga boylarına sahip nötron dalgaları kırılma indisleri farklı iki ortamdan birinden diğerine geçerken ışığın uyduğu kırılma kanunlarına uyarlar. Böylece, nötron dalgaları bir ortamdan kırılma indisi daha küçük bir ortama geçerken nötronların geliş doğrultularının bu iki ortamı ayıran yüzey veya düzlemlerle yaptıkları açılar belirli bir açıdan daha küçük olduğu zaman artık kırılma olmaz ve sâdece tam yansıma olur; bahis konusu belirli açığa da kritik açı adı verilir. Bir önceki problemden yararlanarak bir nötron aynasından yansıyan ve çok uzun bir λ

dalga boyuna sahip monokromatik nötronlar için kritik açı değerinin yaklaşık olarak

$$\theta_c \cong \lambda \sqrt{\frac{Na}{\pi}}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Nötronlara ait kırılma indisleri birden küçük olduğundan, ışıktaki olduğunun tersine, nötronlar boşluktan bir ortama girerken tam yansıma yapabilirler ve bahis konusu ortamın yüzeyi bir nötron aynası gibi iş görür. Nötronların geliş doğrultusunun ortamın yüzey normali ile yaptığı açı i ve kırılma doğrultusunun normal ile yaptığı açı da r olduğuna göre kırılma kanunu

$$\sin i = n \sin r$$

şeklindedir. Kritik açı $r = 90^\circ$ için $i = i_c$ olarak tarif edilir ve böylece

$$\sin i_c = n < 1$$

elde edilir. Tam yansıma için $i > i_c$ olmalıdır. Geliş doğrultusunun ortamın yüzeyi ile yaptığı açı θ olduğuna göre $\theta + i = 90^\circ$ veya $\sin i = \cos \theta$ bağıntısı gerçekleşir. O hâlde, geliş doğrultusunun ortamın yüzeyi ile yaptığı kritik açının değeri

$$\cos \theta_c = n \quad (1)$$

bağıntısı ile belirlenir. Tam yansıma için $\theta < \theta_c$ olmalıdır.

Problem 8 deki (20) bağıntısı,

$$\lambda^2 \frac{Na}{2\pi} \ll 1$$

olduğu göz önünde tutularak,

$$n^2 \cong 1 - \lambda^2 \frac{Na}{\pi} \quad (2)$$

veya

$$1 - n^2 \cong \lambda^2 \frac{Na}{\pi} \quad (3)$$

şeklinde yazılabilir. (1) bağıntısı (3) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\sin \theta_c \cong \lambda \sqrt{\frac{Na}{\pi}} \quad (4)$$

sonucuna varılır. n indisi bire çok yakın olduğundan (1) bağıntısına göre θ_c çok küçüktür ve $\sin \theta_c \cong \theta_c$ alınabilir ve (4) bağıntısı

$$\theta_c \cong \lambda \sqrt{\frac{Na}{\pi}} \quad (5)$$

şeklini alır ve bu da aranan sonuçtur.

III.10. $r_0 = 2 \int_0^{\infty} (v_0^2 - u_0^2) dr$ formülünü kullanarak bir kare kuyu potansiyelinin etkin menzilin

$$r_0 = R - \frac{R^3}{3a^2} - \frac{1}{k_0^2 a}$$

olduğunu gösteriniz. Triplet nötron-proton saçılması için $a_t = 5,397$ fm, $R_t = 2,0755$ fm ve $V_{ot} = 34,392$ MeV deneysel değerlerini kullanarak r_{ot} nin sayısal değerini ve singlet nötron-proton saçılması için de $a_s = -23,68$ fm, $R_s = 2,5215$ fm ve $V_{os} = 14,814$ MeV deneysel değerlerini kullanarak r_{os} nin sayısal değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

$r < R$ için $V = -V_0$ ve $r > R$ için $V = 0$ ile tarif edilen bir kare kuyu potansiyeli için Schrödinger denkleminin radyal kısmı

$$r < R \text{ için : } \frac{d^2u}{dr^2} + K^2u = 0, \quad r > R \text{ için : } \frac{d^2u}{dr^2} + k^2u = 0 \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$K^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 + E), \quad k^2 = \frac{M}{\hbar^2} E \quad (2)$$

vaz edilmiştir ve M nötron-proton sisteminin indirgenmiş kütlelerinin yarısıdır ve E gelen nötronların enerjisidir. Ayrıca

$$k_0^2 = \frac{M}{\hbar^2} V_0 \quad (3)$$

vaz edilirse ve (3) bağıntısı (2) bağıntıları ile karşılaştırılırsa

$$K^2 = k_0^2 + k^2 \quad (4)$$

bulunur. (1) denklemlerinin çözümleri, $u(0) = 0$ sınır şartını sağlamak üzere,

$$r < R \text{ için : } u = A_1 \sin Kr, \quad r > R \text{ için : } u = v = A_2 \sin (kr + \delta) \quad (5)$$

şeklinindedir. Burada δ , saçılmadan ileri gelen faz kaymasıdır. Etkin menzil teorisinde $v(0) = 1$ sınır şartı vaz edildiğinden $A_2 \sin \delta = 1$ bağıntısı bulunur ve

A_2 katsayısı δ cinsinden belirlenir. Etkin menzilin hesaplanabilmesi için u ve v fonksiyonlarının $E = 0$ veya $k = 0$ için aldıkları şekillerin, yâni, u_0 ve v_0 fonksiyonlarının bilinmesi gerekmektedir. Buna göre, (4) bağıntısı yardımı ile (5) bağıntılarından birincisi

$$u_0 = A_1 \sin k_0 r \quad (6)$$

şeklini alır. Diğer yandan

$$v = \frac{\sin(kr + \delta)}{\sin \delta} \quad (7)$$

bağıntısı

$$v = \cotg \delta \sin kr + \cos kr \quad (7')$$

şeklinde yazılarak, etkin menzil teorisinde bilinen

$$k \cotg \delta \cong -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 \quad (8)$$

bağıntısı yardımı ile $k \rightarrow 0$ için limiti hesaplanabilir. (8) bağıntısı (7') bağıntısında yerine yazılır ve $\sin kr$ ile $\cos kr$ ikiyeşer terim Maclaurin serisine açılırsa

$$v \cong \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2\right) \frac{1}{k} \left(kr - \frac{1}{6} k^3 r^3\right) + 1 - \frac{1}{2} k^2 r^2$$

veya

$$v \cong \left(-\frac{r}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 r\right) \left(1 - \frac{1}{6} k^2 r^2\right) + 1 - \frac{1}{2} k^2 r^2$$

veya k^2 ye kadar olan terimler muhafaza edilerek

$$v \cong 1 - \frac{1}{2} k^2 r^2 - \frac{r}{a} + \frac{1}{2} k^2 r r_0 + \frac{1}{6} k^2 \frac{r^3}{a}$$

veya

$$v \cong 1 - \frac{r}{a} + \frac{1}{2} k^2 r (r_0 - r) + \frac{1}{6} k^2 \frac{r^3}{a} \quad (9)$$

bulunur. (9) bağıntısından $k \rightarrow 0$ için

$$v_0 = 1 - \frac{r}{a} \quad (10)$$

sonucuna varılır. (6) ve (10) bağıntılarına $r = R$ için

$$u_0(R) = v_0(R) \quad \text{ve} \quad u_0'(R) = v_0'(R)$$

süreklilik şartları uygulanırsa

$$A_1 \sin k_0 R = 1 - \frac{R}{a}, \quad A_1 k_0 \cos k_0 R = -\frac{1}{a} \quad (11)$$

bağıntıları bulunur. (11) bağıntılarının karelerinin taraf tarafa toplamı alınır

$$A_1^2 = \left(1 - \frac{R}{a}\right)^2 + \frac{1}{k_0^2 a^2} \quad (12)$$

bağıntısı bulunur. Eğer (11) bağıntıları taraf çarpılırsa bu defa

$$-\frac{1}{2k_0} A_1^2 \sin 2k_0 R = \frac{1}{k_0^2 a} \left(1 - \frac{R}{a}\right) \quad (13)$$

bağıntısı bulunur.

$r > R$ için $u_0 = v_0$ olduğundan

$$r_0 = 2 \int_0^{\infty} (v_0^2 - u_0^2) dr$$

integrali

$$r_0 = 2 \int_0^R (v_0^2 - u_0^2) dr \quad (14)$$

şeklinde yazılabilir. O hâlde, (6) bağıntısı yardımı ile

$$\int_0^R u_0^2 dr = A_1^2 \int_0^R \sin^2 k_0 r dr = \frac{1}{2} A_1^2 \int_0^R (1 - \cos 2k_0 r) dr$$

veya

$$\int_0^R u_0^2 dr = \frac{1}{2} A_1^2 \left(R - \frac{1}{2k_0} \sin 2k_0 R \right)$$

bulunur ve bu bağıntıda (12) ve (13) bağıntıları yerlerine yazılırsa

$$\int_0^R u_0^2 dr = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{R}{a}\right)^2 R + \frac{R}{k_0^2 a^2} + \frac{1}{k_0^2 a} \left(1 - \frac{R}{a}\right) \right]$$

veya

$$\int_0^R u_0^2 dr = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{R}{a}\right)^2 R + \frac{1}{k_0^2 a} \right] \quad (15)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, (10) bağıntısı yardımı ile

$$\int_0^R v_0^2 dr = \int_0^R \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 dr = \int_0^R \left(1 - 2\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2}\right) dr$$

veya

$$\int_0^R v_0^2 dr = R - \frac{R^2}{a} + \frac{R^3}{3a^2} \quad (16)$$

bulunur. (15) ve (16) bağıntıları (14) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$r_0 = 2 \left(R - \frac{R^2}{a} + \frac{R^3}{3a^2} \right) - \left[\left(1 - \frac{R}{a}\right)^2 R + \frac{1}{k_0^2 a} \right]$$

veya

$$r_0 = 2R - 2\frac{R^2}{a} + 2\frac{R^3}{3a^2} - R + 2\frac{R^2}{a} - \frac{R^3}{a^2} - \frac{1}{k_0^2 a}$$

veya

$$r_0 = R - \frac{R^3}{3a^2} - \frac{1}{k_0^2 a} \quad (17)$$

sonucuna varılır.

(3) bağıntısı yardımı ile ve $\hbar^2/M = 41,4714 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$ olduğuna dikkat ederek

$$k_{ot}^2 = \frac{34,392}{41,4714} \cong 0,8292944 \text{ fm}^{-2}$$

ve

$$k_{os}^2 = \frac{14,814}{41,4714} \cong 0,3572100 \text{ fm}^{-2}$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\frac{R_t^3}{3a_t^2} = \frac{8,940631869}{87,382827} \cong 0,102316 \text{ fm}$$

ve

$$\frac{R_s^3}{3a_s^3} = \frac{16,03160181}{1682,2272} \cong 0,00953 \text{ fm}$$

ve

$$1/k_{ot}^2 a_t = 1/4,475701877 \cong 0,223429 \text{ fm}$$

ve

$$1/k_{os}^2 a_s = -1/8,4587328 \cong -0,118221 \text{ fm}$$

bulunur. Bu sayısal sonuçlar (17) formülünde yerlerine yazılırsa

$$r_{ot} = 2,0755 - 0,102316 - 0,223429 \approx 1,7497 \text{ fm}$$

ve

$$r_{os} = 2,5215 - 0,00953 + 0,118221 \approx 2,6302 \text{ fm}$$

sonuçlarına varılır.

III.11. Bir kare kuyu potansiyeli için $k \cotg \delta(k)$ fonksiyonunu

$$k \cotg \delta \approx -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 r_0 + \frac{1}{4} k^4 Q$$

şeklinde k^4 terimine kadar seriye açarak bu terimin Q katsayısını R ve V_0 cinsinden hesaplayınız. Kare kuyu potansiyeli için bir önceki problemde verilen a_t, R_t, V_{ot} ve a_s, R_s, V_{os} nin deneysel değerlerini kullanarak Q_t ve Q_s nin sayısal değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM :

Problem 7 deki gibi

$$k^2 = \frac{M}{\hbar^2} E, \quad K^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 + E), \quad k_0^2 = \frac{M}{\hbar^2} V_0 \quad (1)$$

ve

$$\alpha = kR, \quad \beta = KR, \quad \gamma = k_0 R \quad (2)$$

vaz edilirse, problem 7 deki (13) bağıntısına bakarak

$$\tg(\alpha + \delta) = \frac{\alpha}{\beta} \tg \beta$$

veya

$$\tg \delta + \tg \alpha = \frac{\alpha}{\beta} \tg \beta (1 - \tg \alpha \tg \delta)$$

veya

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \tg \alpha \tg \beta\right) \tg \delta = \frac{\alpha}{\beta} \tg \beta - \tg \alpha$$

veya

$$\alpha \cotg \delta = \frac{\beta + \alpha \tg \alpha \tg \beta}{\tg \beta - \beta \frac{\tg \alpha}{\alpha}} \quad (3)$$

yazılabilir. (1) ve (2) bağıntılarından

$$K^2 = k_0^2 + k^2$$

veya

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 \quad (4)$$

elde edilir. $E \ll V_0$ veya $\alpha^2 \ll \gamma^2$ olduğuna göre, (4) bağıntısı

$$\beta = \gamma \left(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)^{1/2} \cong \gamma \left(1 + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} - \frac{\alpha^4}{8\gamma^4}\right)$$

veya

$$\beta \cong \gamma + \frac{\alpha^2}{2\gamma} - \frac{\alpha^4}{8\gamma^3} \quad (5)$$

yaklaşık şeklini alır. Eğer

$$\beta = \gamma + \mu \quad (6)$$

vaz edilirse, (5) ve (6) bağıntılarının karşılaştırılması ile

$$\mu \cong \frac{\alpha^2}{2\gamma} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right) \quad (7)$$

bulunur. Eğer (6) bağıntısı (3) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\alpha \cotg \delta = \frac{(\gamma + \mu)(1 - \tg \gamma \tg \mu) + \alpha \tg \alpha (\tg \gamma + \tg \mu)}{\tg \gamma + \tg \mu - \frac{\tg \alpha}{\alpha} (\gamma + \mu)(1 - \tg \gamma \tg \mu)} \quad (8)$$

bulunur. Şimdi de

$$\left. \begin{aligned} A &= (\gamma + \mu)(1 - \tg \gamma \tg \mu) + \alpha \tg \alpha (\tg \gamma + \tg \mu) \\ B &= \tg \gamma + \tg \mu - \frac{\tg \alpha}{\alpha} (\gamma + \mu)(1 - \tg \gamma \tg \mu) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

vaz edilirse (8) bağıntısı

$$\alpha \cotg \delta = A/B \quad (10)$$

sâde şeklini alır. $\tg x$ fonksiyonu

$$\tg x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (11)$$

şeklinde seriye açılabilir. (7) ve (11) bağıntıları karşılaştırılırsa $\tg \mu \cong \mu$ yaklaşık değerinin yettiği görülür. O hâlde, (9) bağıntıları

$$\left. \begin{aligned} A &\cong (\gamma + \mu)(1 - \mu \operatorname{tg} \gamma) + (\operatorname{tg} \gamma + \mu) \alpha \operatorname{tg} \alpha \\ B &\cong \operatorname{tg} \gamma + \mu - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} (\gamma + \mu)(1 - \mu \operatorname{tg} \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

yaklaşık şekillerini alırlar. Diğer yandan,

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cotg \delta(k) = -\frac{1}{a}$$

veya

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cotg \delta = -\frac{R}{a}$$

olduğundan, (3) bağıntısının her iki yanının $\alpha \rightarrow 0$ için limiti alınırsa

$$-\frac{R}{a} = \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma - \gamma}$$

veya

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma \left(1 - \frac{a}{R}\right) \quad (13)$$

elde edilir. O hâlde, (13) bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} (\gamma + \mu) (1 - \mu \operatorname{tg} \gamma) &= \left(1 + \frac{\mu}{\gamma}\right) \left[1 - \mu \gamma \left(1 - \frac{a}{R}\right)\right] \\ &= 1 + \mu \left[\frac{1}{\gamma} + \gamma \left(\frac{a}{R} - 1\right)\right] + \mu^2 \left(\frac{a}{R} - 1\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. (7) bağıntısının kullanılması ile de

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} (\gamma + \mu) (1 - \mu \operatorname{tg} \gamma) &\cong 1 + \frac{\alpha^2}{2\gamma} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right) \left[\frac{1}{\gamma} + \gamma \left(\frac{a}{R} - 1\right)\right] + \frac{\alpha^4}{4\gamma^2} \left(\frac{a}{R} - 1\right) \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right) \left(\frac{a}{R} - 1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} \left(\frac{a}{R} - 1\right)\right] \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{a}{R} - 1 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{4\gamma^2} \left(\frac{a}{R} - 1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \end{aligned}$$

veya

$$\gamma^{-1} (\gamma + \mu) (1 - \mu \operatorname{tg} \gamma) \cong 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{a}{R} - 1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{\alpha^4}{8\gamma^2} \left(\frac{a}{R} - 1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \quad (14)$$

elde edilir. (7) ve (13) bağıntılarının kullanılması ile

$$\gamma^{-1} (\operatorname{tg} \gamma + \mu) \cong 1 - \frac{a}{R} + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} - \frac{\alpha^4}{8\gamma^4} \quad (15)$$

bulunur. (11) bağıntısına bakarak

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha \cong \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3}$$

yazılabilir ve bu bağıntı (15) bağıntısı ile taraf tarafa çarpılırsa

$$\gamma^{-1} (\operatorname{tg} \gamma + \mu) \alpha \operatorname{tg} \alpha \cong \alpha^2 \left(1 - \frac{a}{R}\right) + \alpha^4 \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{a}{R}\right) + \frac{1}{2\gamma^2}\right] \quad (16)$$

elde edilir. Gene (11) bağıntısına bakarak

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \cong 1 + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\alpha^4}{15}$$

yazılabilir ve bu bağıntı (14) bağıntısı ile taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} (\gamma + \mu) (1 - \mu \operatorname{tg} \gamma) &\cong \\ &\cong 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{a}{R} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \\ &\quad + \frac{\alpha^4}{2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{R} - 1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{1}{4\gamma^2} \left(\frac{a}{R} - 1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{4}{15}\right] \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{a}{R} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{\alpha^4}{2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{R} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4\gamma^2} \left(\frac{a}{R} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \end{aligned} \quad (17)$$

elde edilir. (14-17) bağıntıları (12) bağıntılarında yerlerine yazılırsa

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{-1} A &\cong 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{a}{R} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \\ &\quad + \frac{\alpha^4}{2} \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{a}{R}\right) + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{4\gamma^2} \left(\frac{a}{R} - 1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \\ \gamma^{-1} B &\cong -\frac{a}{R} + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{R}\right) + \frac{\alpha^4}{2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{a}{R}\right) - \frac{1}{4\gamma^2} \left(\frac{a}{R} + \frac{1}{3}\right)\right] \end{aligned} \right\}$$

veya

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{-1} A &\cong 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{a}{R} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \\ &\quad + \frac{\alpha^4}{4} \left[\frac{4}{3} \left(1 - \frac{a}{R}\right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(3 + \frac{a}{R} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \\ \gamma^{-1} B &\cong -\frac{a}{R} \left\{1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{R}{3a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^4}{4} \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{R}{5a}\right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{R}{3a}\right)\right]\right\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

sonuçlarına varılır. Eğer şimdi

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{a}{R} + \frac{1}{\gamma^2}, & a_2 &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{a}{R}\right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(3 + \frac{a}{R} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\ b_1 &= 1 - \frac{R}{3a}, & b_2 &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{R}{5a}\right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{R}{3a}\right) \end{aligned} \right\} (19)$$

vaz edilirse ve (18) bağıntıları (10) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\alpha \cotg \delta \cong - \frac{R}{a} \frac{1 + \frac{\alpha^2}{2} a_1 + \frac{\alpha^4}{4} a_2}{1 + \frac{\alpha^2}{2} b_1 + \frac{\alpha^4}{4} b_2}$$

veya (2) bağıntılarının birincisine göre $\alpha = kR$ alınarak

$$k \cotg \delta \cong - \frac{1}{a} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{2} (a_1 - b_2) + \frac{\alpha^4}{4} [a_2 - b_2 - b_1(a_1 - b_1)] \right\} (20)$$

bulunur. (20) bağıntısı

$$k \cotg \delta \cong - \frac{1}{a} - \frac{1}{2} k^2 \frac{R^2}{a} (a_1 - b_1) - \frac{1}{4} k^4 \frac{R^4}{a} [a_2 - b_2 - b_1(a_1 - b_1)]$$

şeklinde yazılır ve

$$k \cotg \delta \cong - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 r_0 + \frac{1}{4} k^4 Q (21)$$

bağıntısı ile karşılaştırılırsa

$$r_0 = - \frac{R^2}{a} (a_1 - b_1) (22)$$

ve

$$Q = - \frac{R^4}{a} [a_2 - b_2 - b_1 (a_1 - b_1)] (23)$$

bağıntıları bulunur. (19) bağıntıları yardımı ile (22) ve (23) bağıntılarından r_0 ve Q aşağıdaki şekilde hesaplanabilir :

$$a_1 - b_1 = \frac{R}{3a} - \frac{a}{R} + \frac{1}{\gamma^2} (i)$$

$$a_2 - b_2 = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2R}{5a} - \frac{4a}{R}\right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(2 + \frac{a}{R} - \frac{R}{3a} - \frac{1}{\gamma^2}\right) (ii)$$

$$b_1(a_1 - b_1) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R}{a} - \frac{3a}{R} - \frac{R^2}{3a^2}\right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(2 - \frac{2R}{3a}\right) (iii)$$

$$a_2 - b_2 - b_1(a_1 - b_1) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3R}{5a} - \frac{a}{R} + \frac{R^2}{3a^2} \right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{a}{R} + \frac{R}{3a} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (\text{iv})$$

$$\begin{aligned} & - \frac{R}{a} [a_2 - b_2 - b_1(a_1 - b_1)] = \\ & = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{R}{a} + \frac{3R^2}{5a^2} - \frac{R^3}{3a^3} \right) - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{R^2}{3a^2} - \frac{R}{\gamma^2 a} \right) \end{aligned} \quad (\text{v})$$

$$- \frac{R}{a} (a_1 - b_1) = 1 - \frac{R^2}{3a^2} - \frac{R}{\gamma^2 a} \quad (\text{vi})$$

(vi) bağıntısı (22) bağıntısında yerine yazılırsa

$$r_0 = R - \frac{R^3}{3a^2} - \frac{R^2}{\gamma^2 a}$$

bulunur. Bu bağıntıda (2) bağıntılarına göre $\gamma = k_0 R$ alınarak

$$r_0 = R - \frac{R^3}{3a^2} - \frac{1}{k_0^2 a} \quad (24)$$

sonucuna varılır.

(v) bağıntısı (23) bağıntısında yerine yazılırsa

$$Q = \frac{R^3}{3} \left(1 - \frac{R}{a} + \frac{3R^2}{5a^2} - \frac{R^3}{3a^3} \right) - \frac{R^2}{2\gamma^2} \left(R + \frac{R^3}{3a^2} - \frac{R^2}{\gamma^2 a} \right)$$

bulunur. Bu bağıntıda gene $\gamma = k_0 R$ yazılırsa

$$Q = \frac{R^3}{3} \left(1 - \frac{R}{a} + \frac{3R^2}{5a^2} - \frac{R^3}{3a^3} \right) - \frac{1}{2k_0^2} \left(R + \frac{R^3}{3a^2} - \frac{1}{k_0^2 a} \right) \quad (25)$$

sonucuna varılır.

Bir önceki problemde triplet nötron-proton saçılmasına ait verilen $a_t = 5,397$ fm, $R_t = 2,0755$ fm, $V_{ot} = 34,392$ MeV deneysel değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_t^3/3 &= 2,98021 \text{ fm}^3, & R_t/a_t &= 0,3845655 \\ 3R_t^2/5a_t^2 &= 0,088734, & R_t^3/3a_t^3 &= 0,018958, & 1/2k_{ot}^2 &= 0,602922 \text{ fm}^2 \\ R_t^3/3a_t^2 &= 0,102316 \text{ fm}, & 1/k_{ot}^2 a_t &= 0,223429 \text{ fm} \end{aligned}$$

sayısal değerleri bulunur ve bu değerler (25) formülünde yerlerine yazılırsa

$$Q_t = 2,04207 - 1,17834 = 0,86373 \text{ fm}^3$$

sonucuna varılır.

Bir önceki problemde singlet nötron-proton saçılmasına ait verilen $a_s = -23,68$ fm, $R_s = 2,5215$ fm, $V_{os} = 14,814$ MeV deneysel değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_s^3/3 &= 5,34387 \text{ fm}^3, & R_s/a_s &= -0,106482 \\ 3R_s^2/5a_s^2 &= 0,006803, & R_s^3/3a_s^3 &= -0,0004024, & 1/2k_{os}^2 &= 1,39974 \text{ fm}^2 \\ R_s^3/3a_s^2 &= 0,00953 \text{ fm}, & 1/k_{os}^2 a_s &= -0,118221 \text{ fm} \end{aligned}$$

sayısal değerleri bulunur ve bu değerler (25) formülünde yerlerine yazılırsa

$$Q_s = 5,9514 - 3,70825 = 2,24315 \text{ fm}^3$$

sonucuna varılır.

III.12. Döteronun temel hâlini belirleyen Schrödinger denkleminin radyal kısmı, bilindiği gibi, $-E = B > 0$ olmak üzere

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} [E - V(r)] u = 0 \quad (1)$$

şeklindedir. Bu denklemin $u(0) = 0$ sınır şartına uygun bir çözümü

$$u(r) = A (e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}) \quad (2)$$

radyal dalga fonksiyonu ile veriliyor. Burada $\alpha < \beta$ şartı gerçekleşmelidir.

a) Bu dalga fonksiyonunun tekabül ettiği $V(r)$ merkezî potansiyelini ve döteronun B bağ enerjisini α ve β cinsinden bulunuz.

b) Bahis konusu potansiyelin a Fermi saçılma uzunluğunu ve r_0 etkin menzilini α ve β cinsinden bulunuz. Triplet nötron-proton saçılması için $r_{ot} = 1,7497$ fm ve $a_t = 5,397$ fm deneysel değerlerini kullanarak α ve β parametrelerinin ve B bağ enerjisinin sayısal değerlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

a) Eğer

$$U(r) = \frac{M}{\hbar^2} V(r), \quad \gamma^2 = \frac{M}{\hbar^2} B \quad (3)$$

vaz edilirse (1) denklemini

$$\frac{d^2u}{dr^2} - [\gamma^2 + U(r)] u = 0 \quad (4)$$

şeklinde veya

$$U(r) = \frac{1}{u} \frac{d^2u}{dr^2} - \gamma^2 \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan, (2) bağıntısının r ye nazaran iki defa türevini alarak

$$\frac{d^2u}{dr^2} = A (\alpha^2 e^{-\alpha r} - \beta^2 e^{-\beta r}) \quad (2')$$

bulunur. (2) ve (2') bağıntıları (5) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$U(r) = \frac{\alpha^2 e^{-\alpha r} - \beta^2 e^{-\beta r}}{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}} - \gamma^2$$

veya

$$U(r) = \frac{\alpha^2 - \beta^2 e^{-(\beta-\alpha)r}}{1 - e^{-(\beta-\alpha)r}} - \gamma^2$$

elde edilir. Potansiyel fonksiyonu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$$

sınır şartını sağladığından, $\alpha < \beta$ için

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 0$$

bulunur. O hâlde, γ^2 yerine α^2 yazarak

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{\alpha^2 - \beta^2 e^{-(\beta-\alpha)r}}{1 - e^{-(\beta-\alpha)r}} - \alpha^2 \\ &= \frac{\alpha^2 - \beta^2 e^{-(\beta-\alpha)r} - \alpha^2 + \alpha^2 e^{-(\beta-\alpha)r}}{1 - e^{-(\beta-\alpha)r}} \\ &= - \frac{(\beta^2 - \alpha^2) e^{-(\beta-\alpha)r}}{1 - e^{-(\beta-\alpha)r}} = - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{e^{(\beta-\alpha)r} - 1} \end{aligned}$$

veya (3) bağıntılarından birincisi yardımı ile

$$V(r) = - \frac{\hbar^2}{M} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{e^{(\beta-\alpha)r} - 1} \quad (6)$$

sonucuna varılır. Ayrıca, (3) bağıntılarından ikincisinde $\gamma^2 = \alpha^2$ yazılırsa

$$B = \frac{\hbar^2}{M} \alpha^2 \quad (7)$$

elde edilir.

b) Etkin menzil teorisinde $v(r)$ fonksiyonu

$$r \rightarrow \infty \text{ için : } u(r) \rightarrow v(r), \quad v(0) = 1$$

ile tarif edilir. Eğer bu tarif (2) bağıntısına uygulanırsa, $\alpha < \beta$ olduğundan,

$$v(r) = A e^{-\alpha r}$$

bulunur. Ayrıca,

$$v(0) = A = 1$$

olduğundan

$$v(r) = e^{-\alpha r} \quad (8)$$

sonucuna varılır. Etkin menzil teorisinde

$$v(r) = \frac{\sin(kr + \delta)}{\sin \delta}$$

olduğundan,

$$v'(r) = \frac{k \cos(kr + \delta)}{\sin \delta}$$

ve böylece

$$v'(0) = k \cot \delta = -\frac{1}{a(k)} \cong -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 r_0 \quad (9)$$

yazılabilir. (8) bağıntısı (9) bağıntısında yerine yazılırsa

$$v'(r) = -\alpha e^{-\alpha r}, \quad v'(0) = -\alpha$$

olduğundan, ve bağlı hâl için E yerine $-B$ ve k^2 yerine $-\alpha^2$ alınabileceğinden,

$$\alpha \cong \frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 \alpha^2 \quad (10)$$

sonucuna varılır. Problem 10 da

$$\lim_{k \rightarrow 0} v = v_0 = 1 - \frac{r}{a} \quad (11)$$

bulunmuştu. Benzer şekilde, (8) bağıntısı seriye açılırsa

$$v \cong 1 - \alpha r + \frac{1}{2} \alpha^2 r^2$$

veya

$$v \cong 1 - \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \alpha r\right) r \quad (12)$$

bulunur. (10) bağıntısından $1/a$ çözümlürse

$$\frac{1}{a} \cong \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \alpha r_0 \right) \quad (13)$$

elde edilir. Eğer (12) bağıntısında parantez içindeki r etkin menzile eşit alınırsa

$$v \cong 1 - \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \alpha r_0 \right) r$$

yazılabilir. Bu bağıntı da (13) bağıntısı ile karşılaştırılırsa (11) bağıntısına bakarak

$$v \cong 1 - \frac{r}{a} = v_0 \quad (14)$$

elde edilir. Benzer şekilde $u \cong u_0$ alınabilir. O hâlde, (2) bağıntısında $A = 1$ alarak ve (8) bağıntısını kullanarak

$$v_0 \cong e^{-\alpha r}, \quad u_0 \cong e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}$$

yazılabilir ve bu fonksiyonlar etkin menzili veren

$$r_0 = 2 \int_0^{\infty} (v_0^2 - u_0^2) dr \quad (15)$$

bağıntısında yerlerine konularak etkin menzil aşağıdaki gibi hesaplanabilir :

$$\begin{aligned} v_0^2 - u_0^2 &= e^{-2\alpha r} - (e^{-\alpha r} - e^{-\beta r})^2 \\ &= e^{-2\alpha r} - e^{-2\alpha r} - e^{-2\beta r} + 2 e^{-(\alpha+\beta)r} \\ &= -e^{-2\beta r} + 2 e^{-(\alpha+\beta)r} \\ r_0 &= -2 \int_0^{\infty} e^{-2\beta r} dr + 4 \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)r} dr \\ &= \frac{1}{\beta} \left[e^{-2\beta r} \right]_0^{\infty} - \frac{4}{\alpha + \beta} \left[e^{-(\alpha+\beta)r} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\beta} + \frac{4}{\alpha + \beta} = \frac{3\beta - \alpha}{\beta(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (16)$$

sonucuna varılır.

(10) ve (16) bağıntıları

$$\alpha a = 1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{a} (\alpha a)^2 \quad (10')$$

ve

$$\frac{r_0}{a} = \frac{3\beta a - \alpha a}{\beta a (\alpha a + \beta a)} \quad (16')$$

şekillerinde yazılır ve

$$\alpha a = x, \quad \beta a = y, \quad r_0/a = \mu \quad (17)$$

boyutsuz büyüklükleri tarif edilirse

$$x = 1 + \frac{1}{2} \mu \lambda^2 \quad (10'')$$

ve

$$\mu = \frac{3y - x}{y(x + y)} \quad (16'')$$

bulunur. (10'') denklemini

$$\mu x^2 - 2x + 2 = 0$$

şeklinde yazılır ve x e göre çözülürse

$$x = \frac{1}{\mu} [1 - \sqrt{1 - 2\mu}] \quad (18)$$

sonucuna varılır. (10'') bağıntısında $\mu = 0$ için $x = 1$ elde edildiğinden, (18) bağıntısında bu sonucu verecek şekilde karekökün işareti eksi seçilmiştir. Deneysel değerlere göre (17) den

$$\mu = \frac{r_0}{a} = \frac{1,7497}{5,397} \cong 0,3242$$

bulunur ve (18) bağıntısında yerine yazarak

$$x \cong \frac{1 - \sqrt{0,3516}}{0,3242} \cong \frac{0,40704}{0,3242} \cong 1,25552$$

veya (17) ye göre

$$\alpha = \frac{x}{a} \cong \frac{1,25552}{5,397} \cong 0,232633 \text{ fm}^{-1}$$

sonucuna varılır. (16'') denklemini

$$\mu y^2 + (\mu x - 3)y + x = 0$$

veya

$$y^2 - \frac{2}{2} \left(\frac{3}{\mu} - x \right) y + \frac{x}{\mu} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde $\mu = 0,3242$ ve $x = 1,25552$ yazılırsa

$$y^2 - 2 \times 3,999 y + 3,8727 = 0$$

elde edilir. Bu denklemin diskriminantı $D \cong 12,1193$ dür ve buradan

$$\sqrt{D} \cong 3,4813$$

bulunur. O hâlde, $\alpha < \beta$ veya $x < y$ şartı sağlanmak üzere

$$y \cong 3,999 + \sqrt{D} \cong 3,999 + 3,4813 = 7,4803$$

veya (17) ye göre

$$\beta = \frac{y}{a} \cong \frac{7,4803}{5,397} \cong 1,3860 \text{ fm}^{-1}$$

sonucuna varılır. (7) bağıntısından da

$$B = \frac{\hbar^2}{M} \alpha^2 = 41,4714 \times 0,054118 \cong 2,2443 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır. Deneysel değer 2,2245 MeV tur, ve bu değere çok yakındır.

III.13. 0,2 MeV enerjisine sahip protonlar saf $^{27}_{13}\text{Al}$ nümuneden saçılmaktadırlar. $\theta = \pi$ saçılma açısı ile tam geri saçılan protonların sayısal şiddetinin Rutherford formülü ile hesaplanan değer in yüzde 96 sı olduğu bulunmuştur. Bu sonucun Coulomb kuvvetlerine ilâve olan çekirdek kuvvetlerinden ileri geldiğini farz ederek $l = 0$ için çekirdek kuvvetlerinin meydana getirdiği faz kaymasını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Coulomb ve çekirdek kuvvetlerinin bir arada meydana getirdiği toplam saçılma genliği $l = 0$ için

$$f(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} e^{2i\alpha_0} (e^{2i\delta_0} - 1) \quad (1)$$

formülü ile bellidir. Burada $f_c(\theta)$ Coulomb saçılma genliği olup $l = 0$ için

$$f_c(\theta) = \frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + i\pi + 2i\alpha_0} \quad (2)$$

formülü ile verilir. Burada δ_0 , çekirdek kuvvetlerinin meydana getirdiği faz kaymasıdır. k , γ ve α_0 harflerinin tarifleri de aşağıdadır :

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sqrt{2E} \hbar^2/m}, \quad (4)$$

$$\Gamma(1 + i\gamma) = |\Gamma| e^{i\alpha_0} \quad \text{veya} \quad \alpha_0 = \arg \Gamma(1 + i\gamma) \quad (5)$$

Ayrıca m , Al ile protonun indirgenmiş kütlesi olup

$$m = \frac{M_p M_{A1}}{M_p + M_{A1}} \quad (6)$$

bağıntısı ile bellidir.

Herhangi bir doğrultudaki saçılma şiddeti o doğrultudaki diferansiyel saçılma tesir kesiti ile orantılı olduğundan, şiddetlerin oranları yerine diferansiyel saçılma tesir kesitlerinin oranları alınabilir. Saçılma genliği cinsinden toplam diferansiyel saçılma tesir kesiti

$$Q(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (7)$$

bağıntısı ile ve Coulomb diferansiyel saçılma tesir kesiti de

$$Q_c(\theta) = \frac{d\sigma_c}{d\Omega} = |f_c(\theta)|^2 \quad (8)$$

bağıntısı ile verilir.

(1) bağıntısı

$$f(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{k} e^{i(2\alpha_0 + \delta_0)} \sin \delta_0$$

şeklinde yazılabilir. O hâlde,

$$\begin{aligned} |f(\theta)|^2 &= \left[f_c^*(\theta) + \frac{1}{k} e^{-i(2\alpha_0 + \delta_0)} \sin \delta_0 \right] \left[f_c(\theta) + \frac{1}{k} e^{i(2\alpha_0 + \delta_0)} \sin \delta_0 \right] \\ &= |f_c(\theta)|^2 + [f_c^*(\theta) e^{i(2\alpha_0 + \delta_0)} + f_c(\theta) e^{-i(2\alpha_0 + \delta_0)}] \frac{1}{k} \sin \delta_0 + \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \end{aligned}$$

veya (7) ve (8) bağıntıları yardımı ile

$$Q(\theta) = Q_c(\theta) + [f_c^*(\theta) e^{i(2\alpha_0 + \delta_0)} + f_c(\theta) e^{-i(2\alpha_0 + \delta_0)}] \frac{1}{k} \sin \delta_0 + \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \quad (9)$$

elde edilir. (2) bağıntısından

$$Q_c(\theta) = \left(\frac{\gamma}{2k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (10)$$

yazılabilir. (4) bağıntısında $v = \hbar k/m$ yazarak ve (3) bağıntısı yardımı ile

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 k/m}, \quad \frac{\gamma}{2k} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\hbar^2 k^2/m} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}$$

bulunur ve böylece

$$Q_c(\theta) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (10')$$

sonucuna varılır. (10) veya (10') bağıntısına Rutherford formülü adı verilir. (Problem 5 e bakınız.) Gene (2) bağıntısından

$$\begin{aligned} & f_c^*(\theta) e^{i(2\alpha_0 + \delta_0)} + f_c(\theta) e^{-i(2\alpha_0 + \delta_0)} = \\ &= \frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[e^{i(\delta_0 + \gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} - \pi)} + e^{-i(\delta_0 + \gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} - \pi)} \right] \\ &= \frac{\gamma}{k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \left(\delta_0 + \gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} - \pi \right) \\ &= - \frac{\gamma}{k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \left(\delta_0 + \gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç (9) bağıntısında yerine yazılırsa

$$Q(\theta) = Q_c(\theta) - \frac{\gamma \sin \delta_0}{k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \left(\delta_0 + \gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \quad (11)$$

sonucuna varılır. (11) bağıntısında $\theta = \pi$ yazarak

$$Q(\pi) = Q_c(\pi) - \frac{\gamma}{k^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 + \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \quad (12)$$

bulunur. Benzer şekilde (10) bağıntısında $\theta = \pi$ yazarak

$$Q_c(\pi) = \frac{\gamma^2}{4k^2} \quad (13)$$

bulunur. Diğer yandan, deneysel olarak

$$Q(\pi) = 0,96 Q_c(\pi) \quad (14)$$

bulunduğu bilinmektedir. (13) ve (14) bağıntıları (12) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\frac{\gamma^2}{4k^2} - \frac{\gamma}{k^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 + \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 0,96 \frac{\gamma^2}{4k^2}$$

veya

$$\sin^2 \delta_0 - \gamma \sin \delta_0 \cos \delta_0 + 0,01 \gamma^2 = 0 \quad (15)$$

sonucuna varılır. (15) bağıntısında

$$\sin^2 \delta_0 \equiv \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_0}, \quad \sin \delta_0 \cos \delta_0 \equiv \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_0}$$

özdeşliklerini yerlerine yazarak

$$\operatorname{tg}^2 \delta_0 - \gamma \operatorname{tg} \delta_0 + 0,01 \gamma^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_0) = 0$$

veya

$$(1 + 0,01 \gamma^2) \operatorname{tg}^2 \delta_0 - \gamma \operatorname{tg} \delta_0 + 0,01 \gamma^2 = 0 \quad (16)$$

elde edilir. Eğer $\operatorname{tg} x = 0,1 \gamma$ vaz edilirse (16) denklemi

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) \operatorname{tg}^2 \delta_0 - 10 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \delta_0 + \operatorname{tg}^2 x = 0$$

veya

$$\operatorname{tg}^2 \delta_0 - 10 \sin x \cos x \operatorname{tg} \delta_0 + \sin^2 x = 0 \quad (17)$$

şeklinde yazılabilir. (17) denkleminin fiziksel anlama sahip çözümü

$$\operatorname{tg} \delta_0 = 5 \sin x \cos x - \sqrt{25 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x}$$

veya

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \sin x (5 \cos x - \sqrt{25 \cos^2 x - 1}) \quad (18)$$

şeklindedir.

Şimdi (18) bağıntısının sayısal değerini hesaplayalım. $Al - p$ sisteminin indirgenmiş kütlelerini veren (6) bağıntısından

$$\frac{\hbar^2}{m} = \frac{\hbar^2}{M_p} \left(1 + \frac{M_p}{M_{Al}} \right)$$

yazılabilir. Ek I deki cetvellere bakarak

$$\frac{\hbar^2}{m} = 41,5 \left(1 + \frac{1,00727647}{26,981539} \right)$$

veya

$$\frac{\hbar^2}{m} \cong 41,5 \times 1,03733 \cong 43,0492 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

bulunur. Diğer yandan, $E = m v^2/2$ bağıntısından

$$\hbar v = \sqrt{2E \hbar^2/m}$$

yazılabilir ve böylece

$$\hbar v = \sqrt{2 \times 0,2 \times 43,0492} \cong 4,14966 \text{ MeV} \times \text{fm}$$

bulunur. Ek I deki cetvellere bakarak

$$\frac{e^2}{\hbar v} = \frac{1,4399759}{4,14966} \cong 0,347010$$

ve böylece (4) bağıntısından

$$\gamma \cong 1 \times 13 \times 0,34701 \cong 4,51113$$

elde edilir. Diğer yandan, $\text{tg } x = 0,1 \gamma$ vaz eidildiğinden,

$$x = \text{arc tg } 0,1 \gamma \cong 24,281^\circ$$

bulunur. Böylece

$$\sin x \cong 0,41121, \quad \cos x \cong 0,91154, \quad 5 \cos x \cong 4,5577$$

elde edilir. Bu değerler (18) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\text{tg } \delta_0 \cong 0,41121 (4,5577 - 4,446643) \cong 0,04567$$

sonucuna varılır. Buradan faz kaymasının değeri için

$$\delta_0 = 2^\circ 37'$$

elde edilir.

III.14. Bir nötron-proton potansiyelinin hacim integralinin yaklaşık olarak

$$\int_0^\infty r^2 U(r) dr \cong -\frac{1}{k_0} \quad (1)$$

değerine sahip olduğu bilinmektedir.

a) Bir kare kuyu potansiyeli için bahis konusu yaklaşıklığın geçerliliğini triplet ve singlet hâller için sayısal olarak araştırmamız. Bu araştırmada $R_t = 2,0755$ fm, $V_{ot} = 34,392$ MeV ve $R_s = 2,5215$ fm, $V_{os} = 14,814$ MeV deneysel değerlerini kullanınız.

b) Bahis konusu yaklaşıklık içerisinde döteronun bağ enerjisinin kullanılması ile nötron-proton potansiyelinin hacim integralinin tayin edilebileceğini triplet ve singlet kare kuyu potansiyelleri için gösteriniz. Bu maksatla $B_t = 2,2245$ MeV ve $|B_s| \cong 67$ keV deneysel değerlerini kullanınız.

(Yol gösterme : Kare kuyu potansiyeli için döteronun temel hâline ait dalga fonksiyonunun sürekliliğini ifade eden

$$x \cotg x R = -\alpha$$

denkleminin yaklaşık çözümü olan

$$x \cong \frac{\pi}{2R} + \frac{2\alpha}{\pi} \quad (2)$$

bağıntısını kullanınız.)

ÇÖZÜM :

a) Kare kuyu potansiyeli

$$r < R \text{ için : } V = -V_0, \quad r > R \text{ için : } V = 0$$

bağıntıları ile tanımlandığından ve

$$U(r) = \frac{M}{\hbar^2} V(r), \quad k_0^2 = \frac{M}{\hbar^2} V_0$$

vaz edildiğinden

$$r < R \text{ için : } U = -k_0^2, \quad r > R \text{ için : } U = 0 \quad (3)$$

yazılabilir. (3) bağıntısı (1) bağıntısında yerine yazılırsa

$$-k_0^2 \int_0^R r^2 dr = -\frac{1}{k_0}$$

veya

$$\frac{1}{3} k_0^2 R^3 = \frac{1}{k_0} \quad (4)$$

sonucuna varılır.

Triplet hâl için

$$k_{ot}^2 = \frac{V_{ot}}{\hbar^2/M} = \frac{34,32}{41,4714} \cong 0,8292944 \text{ fm}^{-2}$$

$$k_{ot} \cong 0,910656 \text{ fm}^{-1}, \quad 1/k_{ot} \cong 1,09811 \text{ fm}$$

$$k_{ot} R_t \cong 1,89007, \quad (k_{ot} R_t)^2 \cong 3,57236$$

$$\frac{1}{3} k_{ot}^2 R_t^3 \cong 2,47148 > 1,09811 \cong 1/k_t$$

sonucuna varılır. Bu sonuca göre, (4) bağıntısı veya (1) bağıntısı triplet hâl için kabaca bile gerçekleşmez.

Singlet hâl için

$$k_{os}^2 = \frac{V_{os}}{\hbar^2/M} = \frac{14,814}{41,4714} \cong 0,35721 \text{ fm}^{-2}$$

$$k_{os} \cong 0,59767 \text{ fm}^{-1}, \quad 1/k_{os} \cong 1,67316 \text{ fm}$$

$$k_{os} R_s \cong 1,50702, \quad (k_{os} R_s)^2 \cong 2,27111$$

$$\frac{1}{3} k_{os}^2 R_s^3 \cong 1,90887 > 1,67316 \cong 1/k_{os}$$

sonucuna varılır. O hâlde, (1) yaklaşıklığı singlet hâl için kabaca gerçekleşir.

b) Nötron-proton potansiyelinin hacim integrali yaklaşık olarak $-1/k_0$ değerine sahip olduğuna göre, bu yaklaşıklık sağlandığı takdirde hacim integralinin hesabı, k_0 ın döteronun B bağ enerjisi cinsinden hesabına indirgenir.

$$k_0^2 = \frac{M}{\hbar^2} V_0, \quad \alpha^2 = \frac{M}{\hbar^2} B, \quad \kappa^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 - B) \quad (5)$$

vaz edildiğine göre

$$\kappa^2 = k_0^2 - \alpha^2 \quad (6)$$

elde edilir. Buna göre döteronun temel hâline ait dalga fonksiyonunun süreklilik bağıntısı

$$\kappa \cotg \kappa R = -\alpha \quad (7)$$

şeklindedir. Bu denklemden κ nın çözülmesi için

$$\kappa R = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \quad (8)$$

vaz edilir. O hâlde (7) bağıntısı

$$\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \operatorname{tg} \varepsilon = \alpha R \quad (9)$$

şeklını alır. $\alpha^2 \ll \kappa^2$ olduğundan $|\varepsilon| \ll 1$ elde edilir ve böylece

$$\frac{\pi}{2} \varepsilon + \varepsilon^2 \cong \alpha R \quad (10)$$

bulunur. $\alpha \rightarrow 0$ için $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğundan, ε nun α^2 terimine kadar Maclaurin serisine açılımı

$$\varepsilon \cong p \alpha + q \alpha^2 \quad (11)$$

şeklindedir. (11) bağıntısı (10) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\frac{\pi}{2} (p \alpha + q \alpha^2) + p^2 \alpha^2 \cong \alpha R$$

veya

$$\frac{\pi}{2} p \alpha + \left(\frac{\pi}{2} q + p^2 \right) \alpha^2 \cong \alpha R$$

bulunur. O hâlde

$$\frac{\pi}{2} p = R, \quad \frac{\pi}{2} q + p^2 = 0$$

veya

$$p = \frac{2R}{\pi}, \quad q = -\frac{2p^2}{\pi} = -\frac{8R^2}{\pi^3}$$

elde edilir. Böylece (8) ve (11) bağıntularından

$$\kappa R \cong \frac{\pi}{2} + \frac{2R}{\pi} \alpha - \frac{8R^2}{\pi^3} \alpha^2$$

veya

$$\kappa \cong \frac{\pi}{2R} + \frac{2}{\pi} \alpha - \frac{8R}{\pi^3} \alpha^2 \quad (12)$$

sonucuna varılır. Bu sonuç (2) bağıntısından bir fazla terim ihtiva etmektedir. (6) bağıntısından

$$k_0^2 = \kappa^2 + \alpha^2$$

veya

$$k_0 \cong \kappa + \frac{\alpha^2}{2\kappa} \quad (13)$$

bulunur. (12) bağıntısından

$$\frac{\alpha^2}{2\kappa} \cong \frac{R}{\pi} \alpha^2$$

yazılabilir. Eğer bu sonuç ve (12) bağıntısı (13) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$k_0 \cong \frac{\pi}{2R} + \frac{2}{\pi} \alpha + \frac{R}{\pi} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \alpha^2 \quad (14)$$

sonucuna varılır.

Triplet hâl için (5) bağıntısından

$$\alpha_t^2 = \frac{B_t}{\hbar^2/M} = \frac{2,2245}{41,4714} \cong 0,0536394 \text{ fm}^{-2}$$

$$\alpha_t \cong 0,231602 \text{ fm}^{-1}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\pi}{2R_t} \cong 0,756828 \text{ fm}^{-1}, \quad \frac{2\alpha_t}{\pi} \cong 0,147442 \text{ fm}^{-1}$$

$$\frac{R_t}{\pi} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \alpha_t^2 = 0,0602976107 \times 2,0755 \times 0,0536394 \cong 0,0067128 \text{ fm}^{-1}$$

elde edilir ve (14) bağıntısında yerlerine yazarak

$$k_{ot} \cong 0,910983 \text{ fm}^{-1}$$

sonucuna varılır. Bu sonuç yukarıda elde edilen

$$k_{ot} = 0,910656 \text{ fm}^{-1}$$

gerçek değerine çok yakındır.

Singlet hâl için (5) bağıntısından $\alpha_s < 0$ olduğuna dikkat ederek

$$\alpha_s^2 = \frac{|B_s|}{\hbar^2/M} = \frac{0,067}{41,4714} \cong 0,0016156 \text{ fm}^{-2}$$
$$- \alpha_s \cong 0,0402 \text{ fm}^{-1}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\pi}{2R_s} \cong 0,622961 \text{ fm}^{-1}, \quad - \frac{2\alpha_s}{\pi} \cong 0,025592 \text{ fm}^{-1}$$

$$\frac{R_s}{\pi} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \alpha_s^2 = 0,0602976107 \times 2,5215 \times 0,0016156 \cong 0,000246 \text{ fm}^{-1}$$

elde edilir ve (14) bağıntısında yerlerine yazarak

$$k_{os} \cong 0,597615 \text{ fm}^{-1}$$

sonucuna varılır. Bu sonuç yukarıda elde edilen

$$k_{os} \cong 0,59767 \text{ fm}^{-1}$$

gerçek değerine çok yakındır.

IV. BÖLÜM

ÇEKİRDEK MODELLERİ

IV.1. Yarıçapı R olan küresel bir kutu aşağıdaki potansiyel ile tarif edilebilir :

$$r < R \text{ için : } V = 0, \quad r > R \text{ için : } V = +\infty.$$

Spinleri $1/2$ olan parçacıklar böyle bir kutu içerisinde bağımsız olarak hareket etmektedir. Kütleleri M ve enerjisi E olan bir parçacığın küresel bir kutu içerisindeki en aşağı enerji seviyesinin $4,935 \hbar^2/MR^2$ olduğunu gösteriniz. Diğer yandan, bu kutu ile aynı bir $4\pi R^3/3$ hacmine sahip kübik bir kutu içerisinde bulunan ve kütleleri gene M olan bir parçacığın en aşağı enerji seviyesinin, $1,9 \hbar^2/MR^2$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$$\nabla^2 \psi + \frac{2M}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

Schrödinger denkleminde

$$\frac{2M}{\hbar^2} E = k^2 \quad (1)$$

ve

$$\psi = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

konulursa

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2M}{\hbar^2} V \right] u_l = 0 \quad (2)$$

radyal denklemi elde edilir. (2) bağıntısı

$$u_l(r) = - \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2M}{\hbar^2} V \right]^{-1} \frac{d^2 u_l}{dr^2}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu bağıntıda potansiyelin tarifine göre $r = R$ için $V = +\infty$ yazılırsa

$$u_l(R) = 0 \quad (3)$$

sınır şartı bulunur. Ayrıca, $r = 0$ için ψ nin sonlu olmasından elde edilen

$$u_l(0) = 0 \quad (4)$$

sınır şartının varlığı da bilinmektedir. Eğer

$$w = kr \quad (5)$$

vaz edilirse, $r < R$ için $V = 0$ olduğundan (2) bağıntısı

$$\frac{d^2 u_l}{dw^2} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{w^2} \right] u_l = 0 \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. (6) denkleminin (4) sınır şartına uygun çözümü

$$u_l(w) = A_l w j_l(w) \quad (7)$$

şeklindedir. Burada $j_l(w)$ küresel Bessel fonksiyonudur. (3) sınır şartına ve (5) bağıntısına göre (7) bağıntısından

$$u_l(R) = u_l(kR) = u_l(w_{nl}) = A_l w_{nl} j_l(w_{nl}) = 0$$

veya

$$j_l(w_{nl}) = 0 \quad (8)$$

elde edilir. Burada $w_{nl} = kR$, (8) denkleminin n inci köküdür. (1) bağıntısında $k = w_{nl}/R$ yazılırsa, parçacığın enerji seviyelerini veren

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2 w_{nl}^2}{2MR^2} \quad (9)$$

bağıntısı bulunur. Parçacığın en aşağı enerji seviyesi $n = 1$ ve $l = 0$ ile bellidir. $j_0(x) \equiv \sin x/x$ olduğundan (8) bağıntısından

$$\sin w_{n,0} = 0 \quad \text{veya} \quad w_{n,0} = n\pi \quad (10)$$

bulunur. Burada $n = 1, 2, 3, \dots$ tür. (10) bağıntısı (9) bağıntısında yerine yazılırsa

$$E_{n,0} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2MR^2} n^2 \quad (11)$$

elde edilir. En aşağı enerji seviyesi için de

$$E_{1,0} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\hbar^2}{MR^2} \quad (12)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, bir kenarı L olan kübik bir kutu için parçacığın enerji seviyelerinin

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ML^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (13)$$

bağıntısı ile verildiği bilinmektedir. En aşağı enerji seviyesi için $n_x = 1$, $n_y = 0$, $n_z = 0$ yazılması gerektiğinden,

$$E_{\text{küb}} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\hbar^2}{ML^2} \quad (14)$$

elde edilir. Kübik kutunun hacmi küresel kutunun hacmine eşit olduğundan

$$L^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

veya

$$L^2 = \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{2/3} R^2 \quad (15)$$

yazılabilir. (15) bağıntısı (14) bağıntısında yerine yazılırsa

$$E_{\text{küb}} = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{\pi^2}{2} \frac{\hbar^2}{MR^2} \quad (16)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan,

$$\frac{\pi^2}{2} \cong 4,934802, \quad \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{\pi^2}{2} \cong 1,899083$$

olduğundan, (12) ve (16) bağıntılarında yerlerine yazarak

$$E_{1,0} \cong 4,935 \frac{\hbar^2}{MR^2}, \quad E_{\text{küb}} \cong 1,9 \frac{\hbar^2}{MR^2}$$

sonuçlarına varılır.

IV.2. Bir önceki problemin çözümünden yararlanarak küresel bir kutu içinde enerjileri $E_{\text{max}} = 45 \hbar^2 / MR^2$ enerjisinden daha küçük olan ve M kütlelerine ve $1/2$ spinine sahip parçacıkların sayısının 92 olduğunu gösteriniz.

Not : Aşağıdaki $j_l(w_{nl}) = 0$ veya $w_{nl} = \pi \beta_{nl}$ olmak üzere $j_l(\pi \beta_{nl}) = 0$ denkleminin köklerini veren cetveldен yararlanınız.

β_{nl}	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$l = 0$	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000
$l = 1$	1,4303	2,4590	3,4709	4,4775	5,4816
$l = 2$	1,8346	2,8950	3,9226	4,9385	5,9489
$l = 3$	2,2243	3,3159	4,3602	5,3870	6,4050
$l = 4$	2,6046	3,7258	4,7873	5,8255	6,8518

ÇÖZÜM :

Problem 1 e göre

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad (1)$$

olmak üzere küresel kutunun içindeki parçacıklardan herhangi birinin dalga fonksiyonu

$$\psi = A_l j_l \left(w_{nl} \frac{r}{R} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2)$$

şeklindedir. Buna göre, parçacıklardan her birinin kuvantum hâli (n, l, m) kuvantum sayıları ile bellidir. Buna parçacıkların spin hâllerini belirten $m_s = \pm 1/2$ kuvantum sayısı da eklenmelidir. Parçacığın enerji seviyeleri $kR = w_{nl}$ büyüklükleri

$$j_l(w_{nl}) = 0 \quad (3)$$

denkleminin n inci kökü olmak üzere (1) denklemi ile verilir. Diğer yandan,

$$E_{nl} < E_{\max}$$

eşitsizliğinden

$$\frac{\hbar^2 w_{nl}^2}{2MR^2} < 45 \frac{\hbar^2}{MR^2}$$

veya

$$w_{nl} < \sqrt{90} \cong 9,48683 \quad (4)$$

elde edilir. Ayrıca, yukardaki cetvel

$$\beta_{nl} = w_{nl}/\pi$$

büyüklüklerini verdiğiinden, (4) eşitsizliği

$$\beta_{nl} < 3,01975 \quad (5)$$

şeklini alır. Yukardaki cetvele bakarak (5) eşitsizliğini sağlamak üzere:

$(n = 1, l = 0)$ $(n = 1, l = 1)$, $(n = 1, l = 2)$, $(n = 1, l = 3)$, $(n = 1, l = 4)$,
 $(n = 1, l = 5)$, $(n = 2, l = 0)$, $(n = 2, l = 1)$, $(n = 2, l = 2)$, $(n = 3, l = 0)$

hâlleri elde edilir. Pauli'nin dışarılama ilkesine göre, spini 1/2 olan, yâni Fermi-Dirac statistiğine uyan parçacıklardan her biri (n, l, m_l, m_s) kuvantum sayı takımlarından birine ve yalnız birine sahip olmalıdır. Böylece, küresel kutunun içerisinde (n, l, m_l, m_s) takımlarının sayısı kadar sayıda parçacık bulunabilir. Açısal momentum teorisinin verdiği

$$-l \leq m_l \leq l$$

bağıntısına göre, her l için m_l nin $2l + 1$ farklı değeri vardır. Benzer şekilde, $m_s = \pm 1/2$ olduğundan, m_s nin farklı iki değeri vardır. Böylece, her (n, l) hâli için $2(2l + 1)$ sayıda dejenere, yâni aynı E_{nl} enerjisine sahip seviye vardır. O hâlde, her n değeri için, m_l ve m_s nin aldığı değerlere göre toplam olarak

$$2 \sum_{l'=0}^l (2l' + 1) = 4 \times \frac{1}{2} l(l + 1) + 2(l + 1) \equiv 2(l + 1)^2$$

sayıda hâl veya parçacık vardır. Buna göre :

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ için : } \quad 2(5 + 1)^2 &= 72, & n = 2 \text{ için : } \quad 2(2 + 1)^2 &= 18, \\ n + 3 \text{ için : } \quad 2(0 + 1)^2 &= 2 \end{aligned}$$

adet parçacık ve küresel kutuda toplam olarak

$$72 + 18 + 2 = 92$$

adet parçacık vardır.

IV.3. Yarı-ampirik kütle formülünü kullanarak ^{235}U in α -parçalanmasına karşı kararlılığını araştırınız. α parçacığının bağ enerjisi $B(\alpha) = 28 \text{ MeV}$ dir. (Deney sonuçlarına göre ^{235}U , $4,56 \text{ MeV}$ enerjisine sahip α parçacıkları neşreder.)

ÇÖZÜM :

Kütle sayısı A ve proton sayısı Z olan bir çekirdeğin bağ enerjisini veren yarı-ampirik kütle formülü

$$B(A, Z) = 15,753 A - 17,804 A^{2/3} - 0,7103 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 94,77 \frac{(0,5A - Z)^2}{A} - \delta(A, Z)$$

şeklindedir. Böyle bir çekirdekten α parçacığının ayrılma enerjisi

$$S_\alpha(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 4, Z - 2) - B(\alpha)$$

şeklindedir. ^{235}U için $A = 235$, $Z = 92$ olduğundan $A - 4 = 231$, $Z - 2 = 90$ buluur ve

$$S_\alpha(235; 92) = B(235; 92) - B(231; 90) - B(\alpha)$$

elde edilir. A kütle sayısı tek olan çekirdekler için $\delta(A, Z) = 0$ olduğundan

$$\delta(235; 92) = 0, \quad \delta(231; 90) = 0$$

sonuçlarına varılır. O hâlde,

$$S_{\alpha} + B(\alpha) = 15,753 \times 4 - 17,804 (235^{2/3} - 231^{2/3}) - \\ - 0,7103 \left(\frac{92^2}{235^{1/3}} - \frac{90^2}{231^{1/3}} \right) - 94,77 \times (25,5)^2 \left(\frac{1}{235} - \frac{1}{231} \right)$$

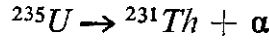
veya

$$S_{\alpha} + B(\alpha) = 63,012 - 7,716 - 36,547 + 4,541 = 23,290 \text{ MeV}$$

bulunur ve böylece

$$S_{\alpha} = 23,290 - 28 = -4,71 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır. $S_{\alpha} < 0$ olduğundan, ^{235}U çekirdeği α -parçalanmasına karşı kararsızdır ve



reaksiyonu ile $E_{\alpha} = -S_{\alpha} = 4,7 \text{ MeV}$ enerjisine sahip α parçacıkları neşreder.

IV.4. Yarı-ampirik kütle formülünü kullanarak $A = 64$ kütle sayısına sahip izobarların α -parçalanmasına karşı kararlılığını araştırınız. Bahis konusu izobarlar ^{64}Ni , ^{64}Cu , ^{64}Zn ve ^{64}Ga tür. Ayrıca, sonuçları deneylerle karşılaştırınız.

ÇÖZÜM :

Çekirdeğin kütlesini atomik elektronların kütleleri ile birlikte veren yarı-ampirik kütle formülü katsayılar MeV cinsinden olmak üzere

$$c^2 M(A, Z) = 939,5 A - 0,7815 Z - 15,753 A + 17,804 A^{2/3} + \\ + 0,7103 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + 94,77 \frac{(0,5A - Z)^2}{A} - (-)^Z \frac{33,6}{A^{3/4}} \quad (1)$$

şeklindedir. β -parçalanması sonucu çekirdekte çıkan elektronun maksimum kinetik enerjisi

$$T_{\max}(e^-) = c^2 [M(A, Z) - M(A, Z + 1)] \quad (2)$$

şeklinde ve pozitronun maksimum kinetik enerjisi de

$$T_{\max}(e^+) = c^2 [M(A, Z) - M(A, Z - 1) - 2m_e] \quad (3)$$

şeklindedir. (Problem 5 deki (5) ve (6) bağıntılarına bakınız.) Çekirdeğin β -parçalanmasına karşı kararlı olabilmesi için $T_{\max} < 0$ olmalıdır. (1) bağıntısından yararlanılarak (2) ve (3) bağıntıları

$$T_{\max}(e^-) = 0,7815 + 0,7103 \frac{Z^2 - (Z + 1)^2}{A^{1/3}} + \\ + 94,77 \frac{(0,5A - Z)^2 - (0,5A - Z - 1)^2}{A} - (-)^Z \frac{67,2}{A^{3/4}} \quad (2')$$

ve $2m_e c^2 = 1,022 \text{ MeV}$ alarak

$$T_{\max}(e^+) = -1,8035 + 0,7103 \frac{Z^2 - (Z-1)^2}{A^{1/3}} +$$

$$+ 94,77 \frac{(0,5A-Z)^2 - (0,5A-Z+1)^2}{A} - (-)^Z \frac{67,2}{A^{3/4}} \quad (3')$$

şekillerinde yazılabilirler. (2') ve (3') bağıntıları sâdeleştirilirse

$$T_{\max}(e^-) = 95,5515 - \left(\frac{0,7103}{A^{1/3}} + \frac{94,77}{A} \right) (2Z+1) - (-)^Z \frac{67,2}{A^{3/4}} \quad (4)$$

$$T_{\max}(e^+) = -96,5735 + \left(\frac{0,7103}{A^{1/3}} + \frac{94,77}{A} \right) (2Z-1) - (-)^Z \frac{67,2}{A^{3/4}} \quad (5)$$

elde edilir. $A = 64$ için

$$A^{1/3} = 4, \quad A^{3/4} = 22,627417$$

olduğundan, (4) ve (5) bağıntılarında yerlerine yazılırsa

$$T_{\max}(e^-) = 95,5515 - 1,6584 (2Z+1) - (-)^Z 2,96985$$

$$T_{\max}(e^+) = -96,5735 + 1,6584 (2Z-1) - (-)^Z 2,96985$$

bulunur. O hâlde, çift Z ler için

$$\left. \begin{aligned} T_{\max}(e^-) &= -3,3168 Z + 90,92325 \\ T_{\max}(e^+) &= 3,3168 Z - 101,20175 \end{aligned} \right\} \text{çift } Z$$

ve tek Z ler için

$$\left. \begin{aligned} T_{\max}(e^-) &= -3,3168 Z + 96,86295 \\ T_{\max}(e^+) &= 3,3168 Z - 95,26205 \end{aligned} \right\} \text{tek } Z$$

sonuçlarına varılır.

${}^{64}\text{Ni}$ için $Z = 28$ olduğundan :

$$T_{\max}(e^-) = -92,8704 + 90,92325 = -1,94715$$

$$T_{\max}(e^+) = 92,8704 - 101,20175 = -8,33135$$

${}^{64}\text{Cu}$ için $Z = 29$ olduğundan :

$$T_{\max}(e^-) = -96,1872 + 96,86295 = 0,67575 > 0$$

$$T_{\max}(e^+) = 96,1872 - 95,26205 = 0,92515 > 0$$

${}^{64}\text{Zn}$ için $Z = 30$ olduğundan :

$$T_{\max}(e^-) = -99,504 + 90,92325 = -8,58075$$

$$T_{\max}(e^+) = 99,504 - 101,20175 = -1,69775$$

${}^{64}\text{Ga}$ için $Z = 31$ olduğundan :

$$T_{\max}(e^-) = -102,8208 + 96,86295 = -5,95785$$

$$T_{\max}(e^+) = 102,8208 - 95,26205 = 7,55875 > 0$$

sonuçlarına varılır. O hâlde: ^{64}Ni ve ^{64}Zn kararlıdır. ^{64}Cu kararsızdır ve hem elektron, hem de pozitron neşreder. ^{64}Ga de kararsızdır ve yalnız pozitron neşreder. Bu sonuçlar deneylere tamamen uymaktadır.

IV.5. $A = 64$ kütle sayısına sahip bütün izobarların atomik kütlelerinin deneysel değerleri atomik kütle birimi cinsinden

$$M(^{64}\text{Ni}) = M_a(64;28) = 63,927958 \text{ u}$$

$$M(^{64}\text{Cu}) = M_a(64;29) = 63,929759 \text{ u}$$

$$M(^{64}\text{Zn}) = M_a(64;30) = 63,929145 \text{ u}$$

$$M(^{64}\text{Ga}) = M_a(64;31) = 63,93674 \text{ u}$$

dir. Bu değerleri kullanarak $A = 64$ kütle sayısına sahip izobarların β -parçalanmasına karşı kararlılığını araştırınız. Ayrıca, sonuçları deneylerle karşılaştırınız.

ÇÖZÜM :

β -parçalanması sonucu çekirdekten çıkan elektronun maksimum kinetik enerjisi

$$T_{\max}(e^-) = c^2 [M_c(A, Z) - M_c(A, Z + 1) - m_e] \quad (1)$$

şeklinde ve pozitronun maksimum kinetik enerjisi de

$$T_{\max}(e^+) = c^2 [M_c(A, Z) - M_c(A, Z - 1) - m_e] \quad (2)$$

şeklinindedir. (1) ve (2) bağıntılarında $M_c(A, Z)$ çekirdeğin kütesidir ve atomik elektronları atoma bağlayan $B(Z)$ bağ enerjisi ihmâl edilmiştir. Çekirdeğin kütlesi artı atomik elektronların kütlesi, yâni, nötr atomun kütlesi

$$M(A, Z) = M_c(A, Z) + Zm_e - B(Z) \quad (3)$$

şeklinindedir. Atomik elektronları atoma bağlayan $B(Z)$ bağ enerjisi gene ihmâl edilirse (3) bağıntısı

$$M(A, Z) \cong M_c(A, Z) + Zm_e \quad (4)$$

şeklinde de yazılabilir. (4) bağıntısından

$$M(A, Z + 1) \cong M_c(A, Z + 1) + (Z + 1)m_e \quad (4a)$$

ve

$$M(A, Z - 1) \cong M_c(A, Z - 1) + (Z - 1)m_e \quad (4b)$$

bağıntıları yazılabilir. (4) ve (4a) bağıntıları yardımı ile (1) bağıntısı

$$T_{\max}(e^-) = c^2 [M(A, Z) - M(A, Z + 1)] \quad (5)$$

şeklinde ve (4) ve (4b) bağıntıları yardımı ile de (2) bağıntısı

$$T_{\max}(e^+) = c^2 [M(A, Z) - M(A, Z - 1) - 2m_e] \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $2m_e c^2 = 1,022$ MeV dir.

^{64}Ni için (5) bağıntısına göre

$$T_{\max}(e^-) = (0,927958 - 0,929759) \times 931,5 = -1,6776 < 0$$

olduğundan, ^{64}Ni elektron neşretmez. Diğer yandan, $A = 64$, $Z = 27$ izobarı mevcut olmadığından, ^{64}Ni pozitron da neşretmez. O hâlde, ^{64}Ni kararlı bir izobardır. ^{64}Cu için (5) ve (6) bağıntılarına göre

$$T_{\max}(e^-) = (0,929759 - 0,929145) \times 931,5 = 0,5719 > 0$$

ve

$$T_{\max}(e^+) = (0,929759 - 0,927958 - 1,022) \times 931,5 = 0,6556 > 0$$

olduğundan, ^{64}Cu hem elektron, hem de pozitron neşreder. ^{64}Zn için (5) ve (6) bağıntılarına göre

$$T_{\max}(e^-) = (0,929145 - 0,93674) \times 931,5 = -7,0747 < 0$$

ve

$$T_{\max}(e^+) = (0,929145 - 0,929759 - 1,022) \times 931,5 = -1,5939 < 0$$

olduğundan, ^{64}Zn kararlı bir izobardır. ^{64}Ga için (6) bağıntısına göre

$$T_{\max}(e^+) = (0,93674 - 0,925145 - 1,022) \times 931,5 = 6,0527 > 0$$

olduğundan, ^{64}Ga pozitron neşreder. Diğer yandan, $A = 64$, $Z = 32$ izobarı mevcut olmadığından, ^{64}Ga elektron neşretmez. Bu sonuçlar, problem 4 ün sonunda verilen deneysel sonuçlara tamamen uymaktadır.

IV.6. Sonsuz küresel kuyu potansiyeli

$$r < R \text{ için : } V = -V_0, \quad r > R \text{ için : } V = +\infty \quad (1)$$

ile tarif edilir. Böyle bir potansiyel altında l açısai momentumuna sahip n inci enerji seviyesinin

$$E_{nl} = -V_0 + \frac{\hbar^2 w_{nl}^2}{2MR^2} \quad (2)$$

bağıntısı ile belli olduğunu gösteriniz; burada w_{nl} , $j_l(w) = 0$ denkleminin n inci köküdür ve M nükleonun kütlesidir. S -hâlleri için de

$$E_{n,0} = -V_0 + \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2MR^2} \quad (3)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Schrödinger denkleminin radyal kısmı

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E - V) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0$$

şeklindedir ve (1) bağıntısı ile verilen sonsuz küresel kuyu potansiyeli için $r < R$ olmak üzere

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E + V_0) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0 \quad (4)$$

şeklini alır. Eğer $E < 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$\kappa^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E + V_0), \quad (5)$$

vaz edilirse (4) denklemini

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[\kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0 \quad (6)$$

şeklini alır. Şimdi de

$$w = \kappa r \quad (7)$$

vaz edilirse

$$\frac{d^2 u_l}{dw^2} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{w^2} \right] u_l = 0 \quad (6')$$

bulunur. Problem 1 de olduğu gibi (6') denklemini

$$u_l(0) = 0, \quad u_l(R) = 0$$

sınır şartları altında çözümlenmelidir. (6') denkleminin (8) deki birinci sınır şartına uygun çözümü

$$u_l(w) = A_l w j_l(w) \quad (9)$$

veya (7) bağıntısına göre

$$u_l(r) = A_l \kappa r j_l(\kappa r) \quad (10)$$

şeklindedir. (8) deki ikinci sınır şartına göre de

$$u_l(R) = A_l \kappa R j_l(\kappa R) = 0$$

veya

$$w_{nl} = \kappa R \quad (7')$$

vaz ederek

$$j_l(w_{nl}) = 0 \quad (11)$$

elde edilir. w_{nl} , (11) denkleminin n inci köküdür. (7') bağıntısı (5) bağıntısında yerine yazılırsa

$$E_{n,l} = -V_0 + \frac{\hbar^2 w_{nl}^2}{2MR^2} \quad (2)$$

enerji seviyeleri elde edilir. S -hâli için, yâni $l = 0$ için (11) bağıntısı

$$j_0(w_{n,0}) \equiv \frac{\sin w_{n,0}}{w_{n,0}} = 0$$

şeklini alır ve buradan, $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$w_{n,0} = n\pi \quad (12)$$

bulunur. (12) bağıntısı (2) bağıntısında yerine yazılırsa

$$E_{n,0} = -V_0 + \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2MR^2} \quad (3)$$

sonucuna varılır.

IV.7. Sonlu küresel kuyu potansiyeli

$$r < R \text{ için : } V = -V_0, \quad r > R \text{ için : } V = 0 \quad (1)$$

ile tarif edilir. Böyle bir potansiyel altında bir S -hâline ait n inci enerji seviyesinin

$$E_n = -V_0 + \frac{\hbar^2 x_n^2}{2MR^2} \quad (2)$$

bağıntısı ile belli olduğunu gösteriniz; burada x_n ,

$$x \cotg x = - \left(\frac{2MR^2}{\hbar^2} V_0 - x^2 \right)^{1/2} \quad (3)$$

denkleminin n inci köküdür ve M nükleonun kütlesidir.

$V_0 = 42 \text{ MeV}$, $R = 7 \text{ fm}$ için ilk üç S -hâlinin enerjilerini hesaplayınız ve bu enerjileri sonsuz küresel kuyuya ait mütekabil enerjilerle karşılaştırınız. (Problem IV.6 ya bakınız).

ÇÖZÜM :

$l = 0$ için Schrödinger denkleminin radyal kısmı

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} (E - V) u_0 = 0$$

şeklinindedir ve (1) bağıntısı ile verilen sonlu küresel kuyu potansiyeli kullanıldığında

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} (E + V_0) u_0 = 0 \\ r > R \text{ için : } \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} E u_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

şeklini alır. Eğer $E < 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$\alpha^2 = -\frac{2M}{\hbar^2} E, \quad \kappa^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E + V_0), \quad k_0^2 = \frac{2M}{\hbar^2} V_0 \quad (5)$$

vaz edilirse (4) denklemleri

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \kappa^2 u_0 = 0 \\ r > R \text{ için : } \frac{d^2 u_0}{dr^2} - \alpha^2 u_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

şekillerini alırlar. (6) denklemlerinin

$$r < R \text{ için : } u_0(0) = 0, \quad r > R \text{ için : } u_0(\infty) = \text{sonlu}$$

sınır şartlarına uygun çözümleri

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } u_0 = A_0 \sin \kappa r \\ r > R \text{ için : } u_0 = B_0 e^{-\alpha r} \end{array} \right\} \quad (7)$$

şeklindedir. (7) çözümlerinin $r = R$ için süreklilik şartları

$$\left. \begin{array}{l} A_0 \sin \kappa R = B_0 e^{-\alpha R} \\ A_0 \kappa \cos \kappa R = -B_0 \alpha e^{-\alpha R} \end{array} \right\} \quad (8)$$

dir. (8) bağıntıları taraf tarafa bölünürse

$$\kappa \cotg \kappa R = -\alpha \quad (9)$$

elde edilir. Diğer yandan, (5) bağıntılarından

$$\alpha = (k_0^2 - \kappa^2)^{1/2} \quad (10)$$

bulunur. Eğer

$$x = \kappa R \quad (11)$$

vaz edilirse (10) bağıntısı yardımı ile (9) bağıntısı

$$x \cotg x = - (k_0^2 R^2 - x^2)^{1/2} \quad (12)$$

şeklini alır. (12) bağıntısı, (5) bağıntılarından üçüncüsü yardımı ile

$$x \cotg x = - \left(\frac{2MR^2}{\hbar^2} V_0 - x^2 \right)^{1/2} \quad (3)$$

şeklinde de yazılabilir. x_n , (12) denkleminin n inci kökü olduğuna göre, (11) bağıntısı (5) bağıntılarından ikincisinde yerine yazılırsa

$$E_n = - V_0 + \frac{\hbar^2 x_n^2}{2MR^2} \quad (2)$$

enerji seviyeleri elde edilir.

(12) bağıntısı

$$f(x) \equiv (k_0^2 R^2 - x^2)^{1/2} \frac{\text{tg } x}{x} = -1 \quad (12')$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece, $x_n, f(x_n) = -1$ denkleminin n inci köküdür. (5) bağıntılarından üçüncüsüne göre

$$k_0^2 R^2 = \frac{2V_0 R^2}{\hbar^2/M} = \frac{84 \times 49}{41,4714} \cong 99,249121$$

olduğundan, arama ile

$$x_1 \cong 2,851325, \quad x_2 \cong 5,676884, \quad x_3 \cong 8,418213$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\frac{\hbar^2/M}{2R^2} = \frac{41,4714}{98} \cong 0,423177 \text{ MeV}$$

olduğundan, (2) bağıntısı

$$E_n = -42 + 0,423177 x_n^2 \quad (2')$$

şeklinde yazılabilir. Yukarda elde edilen x_1, x_2, x_3 değerleri (2') de yerlerine yazılırsa sonlu kuyuda $l = 0$ enerji seviyelerini veren

$$E_1 \cong -38,559 \text{ MeV}, \quad E_2 \cong -28,362 \text{ MeV}, \quad E_3 \cong -12,011 \text{ MeV}$$

sonuçlarına varılır.

Problem 6 daki (3) bağıntısı

$$E_{n,0} = -V_0 + \frac{\pi^2}{2} \frac{\hbar^2}{MR^2} n^2 \quad (13)$$

göz önüne alınırsa,

$$\frac{\pi^2 \hbar^2/M}{2R^2} = \frac{\pi^2 \times 41,4714}{98} \cong 4,176595 \text{ MeV}$$

olduğundan

$$E_{n,0} = -42 + 4,176595 n^2 \quad (13')$$

şeklinde yazılabilir. (13') bağıntısında $n = 1, 2, 3$ değerleri yerlerine yazılırsa sonsuz kuyuda $l = 0$ enerji seviyelerini veren

$$E_{1,0} \cong -37,823 \text{ MeV}, \quad E_{2,0} \cong -25,294 \text{ MeV}, \quad E_{3,0} \cong -4,411 \text{ MeV}$$

sonuçlarına varılır. Sonsuz kuyudaki enerji seviyeleri sonlu kuyudaki enerji seviyelerinden daha yüksektir. Fakat $n = 1$ seviyesi için fark çok az olup 0,736 MeV dir. $n = 2$ için fark 3,068 MeV ve $n = 3$ için ise 7,6 MeV dir.

IV.8. Çekirdeğin kabuk modeline göre manyetik momentini veren

$$\left. \begin{array}{l} l = j - \frac{1}{2} \text{ için : } \mu = \left(j - \frac{1}{2} \right) g_l + g_s \\ l = j + \frac{1}{2} \text{ için : } \mu = \frac{j}{j+1} \left[\left(j + \frac{3}{2} \right) g_l - g_s \right] \end{array} \right\} \quad (1)$$

formüllerini kullanarak ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^{15}\text{N}$, ${}^{17}\text{O}$, ${}^{39}\text{K}$, ${}^{207}\text{Pb}$ ve ${}^{209}\text{Bi}$ un manyetik momentlerini hesaplayınız. Sonuçları deneysel değerlerle karşılaştırınız.

Aşağıdaki cetvelde bahis konusu çekirdeklerin j açısal momentumlarının \hbar cinsinden ve μ manyetik momentlerinin de nükleer manyeton cinsinden deneysel değerleri verilmiştir :

	${}^3_1\text{H}_2$	${}^3_2\text{He}_1$	${}^{15}_7\text{N}_8$	${}^{17}_8\text{O}_9$	${}^{39}_{19}\text{K}_{20}$	${}^{207}_{82}\text{Pb}_{125}$	${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126}$
j	1/2	1/2	1/2	5/2	3/2	1/2	9/2
μ	+2,9788	-2,1275	-0,2831	-1,8937	+0,3915	+0,5895	+4,080

ÇÖZÜM :

Proton için $g_l = 1$, $g_s = 2,7927$ ve nötron için $g_l = 0$, $g_s = -1,9131$ olduğundan, (1) bağıntıları proton için

$$\left. \begin{array}{l} l = j - \frac{1}{2} \text{ için : } \mu = j + 2,2927 \\ l = j + \frac{1}{2} \text{ için : } \mu = j - 2,2927 \frac{j}{j+1} \end{array} \right\} \text{ proton (tek } Z)$$

ve nötron için

$$\left. \begin{array}{l} l = j - \frac{1}{2} \text{ için : } \mu = -1,9131 \\ l = j + \frac{1}{2} \text{ için : } \mu = 1,9131 \frac{j}{j+1} \end{array} \right\} \text{ nötron (çift } Z)$$

şekillerini alırlar. Bu bağıntıların kullanılması ile 3_1H ün manyetik momentinin teorik değeri

$$l = 0 \text{ için : } \mu = \frac{1}{2} + 2,2927 = 2,7927$$

$$l = 1 \text{ için : } \mu = \frac{1}{2} - \frac{2,2927}{3} = -0,26423$$

olarak bulunur. Deneysel değer $+2,9788$ olup $2,7927$ değerine yakındır. 3_2He ün manyetik momentinin teorik değeri

$$l = 0 \text{ için : } \mu = -1,9131$$

$$l = 1 \text{ için : } \mu = \frac{1,9131}{3} = 0,6377$$

olarak bulunur. Deneysel değer $-2,1275$ olup $-1,9131$ değerine yakındır. ${}^{15}_7N$ in manyetik momentinin teorik değeri

$$l = 0 \text{ için : } \mu = \frac{1}{2} + 2,2927 = 2,7927$$

$$l = 1 \text{ için : } \mu = \frac{1}{2} - \frac{2,2927}{3} = -0,26423$$

olarak bulunur. Deneysel değer $-0,2831$ olup $-0,26423$ değerine yakındır. ${}^{17}_8O$ nin manyetik momentinin teorik değeri

$$l = 2 \text{ için : } \mu = -1,9131$$

$$l = 3 \text{ için : } \mu = 1,9131 \times \frac{5}{7} = 1,3665$$

olarak bulunur. Deneysel değer $-1,8937$ olup $-1,9131$ değerine yakındır. ${}^{39}_{19}K$ un manyetik momentinin teorik değeri

$$l = 1 \text{ için : } \mu = \frac{3}{2} + 2,2927 = 3,7927$$

$$l = 2 \text{ için : } \mu = \frac{3}{2} - 2,2927 \times \frac{3}{5} = 0,12438$$

olarak bulunur. Deneysel değer $+0,3915$ olup $0,12438$ değerine yakındır. ${}^{207}_{82}Pb$ nin manyetik momentinin teorik değeri

$$l = 0 \text{ için : } \mu = -1,9131$$

$$l = 1 \text{ için : } \mu = \frac{1,9131}{3} = 0,6377$$

olarak bulunur. Deneysel değer $+0,5895$ olup, $0,6377$ değerine yakındır.
 ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ un manyetik momentinin teorik değeri

$$l = 4 \text{ için : } \mu = \frac{9}{2} + 2,2927 = 6,7927$$

$$l = 5 \text{ için : } \mu = \frac{9}{2} - 2,2927 \times \frac{9}{11} = 2,62415$$

olarak bulunur. Deneysel değer $+4,080$ olup $2,62415$ değerine yakındır.

V. BÖLÜM

ÇEKİRDEK REAKSİYONLARI

V.1. Enerjinin sıfıra yaklaşması hâlinde nötron saçılma tesir kesitinin sonlu kaldığını, fakat reaksiyon tesir kesitininin k^{-1} ile orantılı olarak sonsuz olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$$r < R \text{ için : } V = -V_0, \quad W = -W_0 \quad \text{ve} \quad r > R \text{ için : } V = W = 0$$

bağıntıları ile tarif edilen $V + iW$ şeklindeki bir kompleks kare kuyu potansiyeli için Schrödinger denkleminin radyal kısmı $l = 0$ hâlinde çözümlerse

$$r < R \text{ için : } u = A \sin Kr \quad (1)$$

$$r > R \text{ için : } u = B (e^{-ikr} - \eta_0 e^{ikr}) \quad (2)$$

bulunur. Burada $r < R$ için $u(0) = 0$ sınır şartı ve $r > R$ için de u nun asimtotik şekli kullanılmıştır. $r = R$ için f ve g reel olmak üzere

$$f - ig = \left(\frac{R}{u} \frac{du}{dr} \right)_{r=R} \quad (3)$$

tarifini yapalım. (1) bağıntısında

$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0 + iW_0) \quad (4)$$

ve (2) bağıntısında

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad (5)$$

vaz edilmiştir. Diğer yandan

$$k^2 R^2 = \alpha^2 = \frac{2mR^2}{\hbar^2} E, \quad \beta^2 = \frac{2mR^2}{\hbar^2} V_0, \quad \gamma^2 = \frac{2mR^2}{\hbar^2} W_0 \quad (6)$$

tarifleri yapılırsa (4) bağıntısı

$$K^2 R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + i\gamma^2 \quad (7)$$

şeklini alır. (2) bağıntısı (3) bağıntısında yerine yazılıp (6) bağıntılarından birincisi kullanılarak η_0 çözümlürse

$$\eta_0 = \frac{f - i(g - \alpha)}{f - i(g + \alpha)} e^{-2i\alpha} \quad (8)$$

sonucuna varılır. η_0 in bu ifadesi

$$\sigma_{re} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta_0|^2) \quad (9)$$

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta_0|^2 \quad (10)$$

bağıntılarında yerlerine yazılırsa reaksiyon ve saçılma tesir kesitleri hesaplanabilir. Diğer yandan, (1) bağıntısı (3) bağıntısında yerine yazılırsa

$$f - ig = KR \cotg KR \quad (11)$$

bulunur. $W_0 \neq 0$ için (4) bağıntısına göre K kompleks bir büyüklük olur ve (11) bağıntısında $g \neq 0$ elde edilir. f ve g (11) bağıntısı aracılığı ile hesaplanabilir.

(8) bağıntısından

$$|\eta_0|^2 = \frac{f^2 + (g - \alpha)^2}{f^2 + (g + \alpha)^2}$$

ve

$$1 - |\eta_0|^2 = \frac{4\alpha g}{f^2 + (g + \alpha)^2}$$

bağıntıları bulunur ve (9) bağıntısında yerine yazarak

$$\sigma_{re} = \frac{4\pi R}{k} \frac{g}{f^2 + (g + \alpha)^2}$$

veya

$$k \rightarrow 0 \text{ için : } \sigma_{re} \cong \frac{4\pi R}{k} \frac{g}{f^2 + g^2} \quad (12)$$

sonucuna varılır. Gene (8) bağıntısından

$$\begin{aligned}
 |1 - \eta_0|^2 &= \left| 1 - \frac{f - i(g - \alpha)}{f - i(g + \alpha)} e^{-2i\alpha} \right|^2 \\
 &= \frac{|[f - i(g + \alpha)] e^{i\alpha} - [f - i(g - \alpha)] e^{-i\alpha}|^2}{f^2 + (g + \alpha)^2} \\
 &= \frac{|2[g \sin \alpha + i(f \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)]|^2}{f^2 + (g + \alpha)^2} \\
 &= \frac{4[g^2 \sin^2 \alpha + (f \sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2]}{f^2 + (g + \alpha)^2}
 \end{aligned}$$

bağıntısı bulunur ve (10) bağıntısında yerine yazarak

$$\sigma_{sc} = 4\pi R^2 \frac{\left(f \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right)^2 + g^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}}{f^2 + (g + \alpha)^2}$$

veya

$$k \rightarrow 0 \text{ için : } \sigma_{sc} = 4\pi R^2 \frac{(f - 1)^2 + g^2}{f^2 + g^2} \quad (13)$$

sonucuna varılır.

V.2. Bir çekirdeğin l -dalgalı nötronlarla bombardımanı sonucu meydana gelen çekirdek reaksiyonlarında nötronların sıfır enerjisi civarındaki E enerjisi için reaksiyon tesir kesitinin E^l/\sqrt{E} büyüklüğü ile orantılı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Bir önceki problemdeki kompleks kare kuyu potansiyeli kullanılırsa Schrödinger denkleminin radyal kısmı

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - V - iW) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0$$

şeklindedir ve buradan

$$r < R \text{ için : } \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0$$

$$r > R \text{ için : } \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0$$

radyal denklemleri bulunur. Bu denklemlerin çözümleri de

$$r < R \text{ için : } u_l = A_l Kr j_l(Kr) \quad (1)$$

$$r > R \text{ için : } u_l = B_l(I_l - \eta_l O_l) \quad (2)$$

şeklindedir. Burada $r < R$ için $u_l(0) = 0$ sınır şartı kullanılmıştır ve $r > R$ için

$$I_l = O_l^* = -i kr h_l^{(2)}(kr) \quad (3)$$

$$O_l = I_l^* = i kr h_l^{(1)}(kr) \quad (4)$$

vaz edilmiştir. j_l küresel Bessel ve $h_l^{(1)}$ ile $h_l^{(2)}$ de küresel Hankel fonksiyonlarıdır. Böylece, I_l çekirdek üzerine gelen dalgayı ve O_l çekirdek potansiyelinden saçılarak uzaklaşan dalgayı göstermektedir. $r = R$ için f_l ve g_l reel olmak üzere

$$f_l - ig_l = \left(\frac{R}{u_l} \frac{du_l}{dr} \right)_{r=R} \quad (5)$$

tarifini yapalım. Bir önceki problemde olduğu gibi bu problemde de (1) bağıntısında

$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0 + iW_0) \quad (6)$$

ve (2), (3), (4) bağıntılarında da

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad (7)$$

vaz edilmiştir. Diğer yandan,

$$\alpha = kR \quad (8)$$

tarifi yapılırsa (5) bağıntısı

$$f_l - ig_l = \alpha \frac{u_l'(\alpha)}{u_l(\alpha)} \quad (5')$$

şeklinde de yazılabilir. (5') bağıntısında (2) bağıntısı yerine yazılıp η_l çözümlerse

$$\eta_l = \frac{(f_l - ig_l) I_l - \alpha I_l'}{(f_l - ig_l) O_l - \alpha O_l'} \quad (9)$$

bulunur. Diğer yandan, Φ_l ve χ_l reel olmak üzere

$$O_l = (\Phi_l + i \chi_l) e^{i\alpha} \quad (10)$$

vaz edilsin. Küresel Bessel fonksiyonları ailesinin özelliklerinin kullanılması ile

$$O_l' = O_{l-1} - \frac{l}{\alpha} O_l \quad (11)$$

yazılabilir ve böylece

$$\Phi_l' = \chi_l + \Phi_{l-1} - \frac{l}{\alpha} \Phi_l \quad (12)$$

$$\chi_l' = -\Phi_l + \chi_{l-1} - \frac{l}{\alpha} \chi_l \quad (13)$$

$$\Phi_l \chi_{l-1} - \chi_l \Phi_{l-1} = 1 \quad (14)$$

bağıntıları bulunur. (10) bağıntısı (9) bağıntısında yerine yazılırsa ve (12) ile (13) bağıntıları kullanılırsa

$$\eta_l = \frac{(X_l - g_l \chi_l) - i(Y_l + g_l \Phi_l)}{(X_l + g_l \chi_l) + i(Y_l - g_l \Phi_l)} e^{-2i\alpha} \quad (15)$$

sonucuna varılır. Burada

$$X_l = (f_l + l) \Phi_l - \alpha \Phi_{l-1} \quad (16)$$

$$Y_l = (f_l + l) \chi_l - \alpha \chi_{l-1} \quad (17)$$

vaz edilmiştir. (16) ve (17) bağıntılarından (14) bağıntısı yardımı ile

$$\chi_l X_l - \Phi_l Y_l = \alpha \quad (18)$$

bağıntısı elde edilir. (15) bağıntısından

$$|\eta_l|^2 = \frac{(X_l - g_l \chi_l)^2 + (Y_l + g_l \Phi_l)^2}{(X_l + g_l \chi_l)^2 + (Y_l - g_l \Phi_l)^2}$$

ve

$$1 - |\eta_l|^2 = \frac{4g_l(\chi_l X_l - \Phi_l Y_l)}{(X_l + g_l \chi_l)^2 + (Y_l - g_l \Phi_l)^2}$$

bağıntıları bulunur. Son bağıntı (18) bağıntısı kullanılarak

$$1 - |\eta_l|^2 = \frac{4\alpha g_l}{(X_l + g_l \chi_l)^2 + (Y_l - g_l \Phi_l)^2}$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer bu bağıntı

$$\sigma_{re,l} = (2l + 1) \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta_l|^2) \quad (19)$$

bağıntısında yerine yazılırsa

$$\sigma_{re,l} = (2l + 1) \frac{4\pi R}{k} \frac{g_l}{(X_l + g_l \chi_l)^2 + (Y_l - g_l \Phi_l)^2} \quad (20)$$

sonucuna varılır. Eğer (20) bağıntısında (16) ve (17) bağıntıları yardımı ile α sifıra yaklaştırılırsa

$$\sigma_{re,l} \cong (2l+1) \frac{4\pi R}{k} \frac{g_l}{[(f_l + l)\Phi_l + g_l\chi_l]^2 + [(f_l + l)\chi_l - g_l\Phi_l]^2}$$

veya

$$k \rightarrow 0 \text{ için : } \sigma_{re,l} \cong (2l+1) \frac{4\pi R}{k} \frac{g_l}{[(f_l + l)^2 + g_l^2] (\Phi_l^2 + \chi_l^2)} \quad (21)$$

bulunur. $l=0$ için $\Phi_0 = 1$ ve $\chi_0 = 0$ konulursa bir önceki problemdeki (12) bağıntısı elde edilir. Diğer yandan

$$\alpha \ll l \text{ için : } \Phi_l \cong \frac{(2l-1)!!}{\alpha^l}, \quad \chi_l \cong -\frac{(2l-1)!!}{\alpha^{l-1}}$$

olduğundan $|\Phi_l| > |\chi_l|$ dir ve böylece

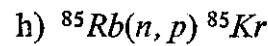
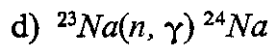
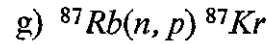
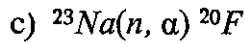
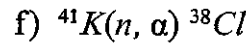
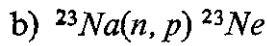
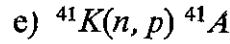
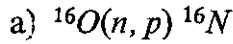
$$\sigma_{re,l} \cong (2l+1) \frac{4\pi R^2}{\alpha} \frac{g_l \alpha^{2l}}{[(f_l + l)^2 + g_l^2] [(2l-1)!!]^2}$$

veya

$$\sigma_{re,l} \cong (2l+1) \frac{4\pi R^{2l+1} g_l}{[(f_l + l)^2 + g_l^2] [(2l-1)!!]^2} \frac{(2m)^{l-\frac{1}{2}}}{\hbar^{2l-1}} \frac{E_l}{\sqrt{E}} \quad (22)$$

sonucuna varılır.

VI.3. Aşağıdaki nötron girişli reaksiyonların her biri için Q değerini ve eşik enerjisini hesaplayınız.



Not : Yukarıdaki çekirdeklerin atomik kütle birimi cinsinden kütleleri aşağıda verilmiştir :

$$M(^{16}\text{N}) = 16,006103$$

$$M(^{41}\text{K}) = 40,961832$$

$$M(^{16}\text{O}) = 16,005085$$

$$M(^{85}\text{Kr}) = 84,912523$$

$$M(^{20}\text{F}) = 19,999987$$

$$M(^{85}\text{Rb}) = 84,9118$$

$$M(^{23}\text{Ne}) = 22,994473$$

$$M(^{87}\text{Kr}) = 86,913365$$

$$M(^{23}\text{Na}) = 22,989771$$

$$M(^{87}\text{Rb}) = 86,909187$$

$$M(^{24}\text{Na}) = 23,990962$$

$$M_n = 1,008665$$

$$M(^{38}\text{Cl}) = 37,968005$$

$$M_p = 1,007825$$

$$M(^{41}\text{A}) = 40,9645$$

$$M_\alpha = 4,002603$$

ÇÖZÜM :

Bu problemde istenen sonuçların bulunabilmesi için PROBLEM : I.7. de verilen şu formüller gereklidir :

$$Q = (M_1 + M_2 - M_3 - M_4) c^2 \quad (1)$$

$$T_{es} = \frac{M_3 + M_4}{M_3 + M_4 - M_1} |Q| \quad (2)$$

Burada $X(n, p) Y$ reaksiyonu için $M_2 = M_X$, $M_1 = M_n$, $M_3 = M_p$, $M_4 = M_Y$ dir. $Q < 0$ için reaksiyon andoerjik, ve $Q > 0$ için de reaksiyon egzoerjiktir ve $T_{es} = 0$ dir.

a) $^{16}O(n, p) ^{16}N$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa

$$Q = (17,01375 - 17,013928) \times 931,5$$

$$Q = -0,000178 \times 931,5 = -0,165807 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon andoerjiktir. (2) bağıntısı uygulanırsa

$$T_{es} = \frac{17,013928}{16,005263} |Q| = 1,063021 \times 0,165807 = 0,17626 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır.

b) $^{23}Na(n, p) ^{23}Ne$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa

$$Q = (23,998436 - 24,002298) \times 931,5$$

$$Q = -0,003862 \times 931,5 = -3,597453 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon andoerjiktir. (2) bağıntısı uygulanırsa

$$T_{es} = \frac{24,002298}{22,993633} |Q| = 1,043867 \times 3,597453 = 3,75526 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır.

c) $^{23}Na(n, \alpha) ^{20}F$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa

$$Q = (23,998436 - 24,00259) \times 931,5$$

$$Q = -0,004154 \times 931,5 = -3,869451 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon andoerjiktir. (2) bağıntısı uygulanırsa

$$T_{es} = \frac{24,00259}{22,993925} |Q| = 1,043866 \times 3,869451 = 4,03919 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır.

d) $^{23}\text{Na}(n, \gamma) ^{24}\text{Na}$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa, fotonun kütlesi $M_3 = 0$ olduğundan

$$Q = (23,998436 - 23,990962) \times 931,5$$

$$Q = 0,007474 \times 931,5 = 6,962031 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon egzotermik olduğundan $T_{e\gamma} = 0$ sonucuna varılır.

e) $^{41}\text{K}(n, p) ^{41}\text{A}$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa

$$Q = (41,970497 - 41,972325) \times 931,5$$

$$Q = -0,001828 \times 931,5 = -1,702782 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon endotermiktir. (2) bağıntısı uygulanırsa

$$T_{e\gamma} = \frac{41,972325}{40,96366} |Q| = 1,024623 \times 1,702782 = 1,74471 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır.

f) $^{41}\text{K}(n, \alpha) ^{38}\text{Cl}$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa

$$Q = (41,970497 - 41,970608) \times 931,5$$

$$Q = -0,000111 \times 931,5 = -0,1033965 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon endotermiktir. (2) bağıntısı uygulanırsa

$$T_{e\gamma} = \frac{41,970608}{40,961943} |Q| = 1,024624 \times 0,1033965 = 0,10594 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır.

g) $^{87}\text{Rb}(n, p) ^{87}\text{Kr}$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa

$$Q = (87,917852 - 87,92119) \times 931,5$$

$$Q = -0,003338 \times 931,5 = -3,109347 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon endotermiktir. (2) bağıntısı uygulanırsa

$$T_{e\gamma} = \frac{87,92119}{86,912525} |Q| = 1,011605 \times 3,109347 = 3,14543 \text{ MeV}$$

sonucuna varılır,

h) $^{85}\text{Rb}(n, p) ^{85}\text{Kr}$ reaksiyonu için (1) bağıntısı uygulanırsa

$$Q = (85,920465 - 85,920348) \times 931,5$$

$$Q = 0,000117 \times 931,5 = 0,1089855 \text{ MeV}$$

bulunur ve reaksiyon egzotermik olduğundan $T_{e\gamma} = 0$ sonucuna varılır.

V.4. $f(\theta)$ saçılma genliğinin $P_l(\cos \theta)$ Legendre polinomları cinsinden açılımını kullanarak, toplam saçılma tesir kesiti σ_{sc} nun ileriye doğru saçılma genliği $f(0)$ a

$$\sigma_{sc} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} \{f(0)\}$$

bağıntısı ile bağlı olduğunu gösteriniz. Bu bağıntıya optik teoremi adı verilir.

ÇÖZÜM :

$f(\theta)$ saçılma genliğinin Legendre polinomları cinsinden açılımı

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \quad (1)$$

şeklindedir. Diğer yandan,

$$\frac{1}{2i} (e^{2i\delta_l} - 1) \equiv \frac{1}{2i} e^{i\delta_l} (e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}) \equiv e^{i\delta_l} \sin \delta_l$$

olduğundan (1) bağıntısı

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (2)$$

şeklinde de yazılabilir. Legendre polinomlarının özelliklerine göre $P_l(1) = 1$ olduğundan, $\theta = 0$ için (2) bağıntısı

$$f(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (3)$$

şeklini alır. Diğer yandan,

$$\text{Im} \{f(0)\} = \frac{1}{2i} [f(0) - f^*(0)]$$

olduğundan, (3) bağıntısını kullanarak

$$\text{Im} \{f(0)\} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{2i} (e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}) \sin \delta_l$$

veya

$$\text{Im} \{f(0)\} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (4)$$

elde edilir. Bu bağıntı toplam tesir kesitini veren

$$\sigma_{s\varphi} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (5)$$

bağıntısı ile karşılaştırılırsa

$$\sigma_{s\varphi} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \{f(0)\} \quad (6)$$

sonucuna varılır.

VI. BÖLÜM

ALFA PARÇALANMASI

VI.1. Kütle sayısı A ve yük sayısı Z olan bir çekirdeğin kütle sayıları αA ve $(1 - \alpha) A$ olan ve yük sayıları da βZ ve $(1 - \beta) Z$ olan iki parçaya ayrıldığını düşününüz. Bağ enerjisini veren yarı-ampirik formülde $\delta(A, Z)$ terimi ihmâl edilirse, ilk çekirdek ile parçalanmadan sonra meydana gelen iki çekirdek arasındaki bağ enerjisi farkının, yâni

$$\Delta B = B(\alpha A, \beta Z) + B[(1 - \alpha) A, (1 - \beta) Z] - B(A, Z)$$

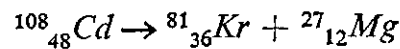
bağıntısı ile tarif edilen ΔB büyüklüğünün aşağıdaki gibi olduğu kolaylıkla gösterilebilir :

$$\begin{aligned} \Delta B = & 17,8 A^{2/3} [1 - \alpha^{2/3} - (1 - \alpha)^{2/3}] + \\ & + 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[1 - \frac{\beta^2}{\alpha^{1/3}} - \frac{(1 - \beta)^2}{(1 - \alpha)^{1/3}} \right] + \\ & + 95 \frac{Z^2}{A} \left[1 - \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{(1 - \beta)^2}{1 - \alpha} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

a) ΔB yi veren fonksiyonun $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 1/2$ için maksimum olduğunu gösteriniz ve bu maksimumun A ve Z cinsinden ifâdesini bulunuz. Ayrıca kararsız çekirdek şartınının $\Delta B = \Delta B_{\max}$ için aldığı şekli bulunuz.

b) $\alpha = \beta$ için Z^2/A nın α ve ΔB nin bir fonksiyonu olarak ifâdesini bulunuz. Bu ifâdeyi $\Delta B = 0$ için yazılan $(Z^2/A)_{\Delta B=0}$ ifâdesi ile karşılaştırarak kararsız çekirdek şartının $\alpha = \beta$ için aldığı şekli bulunuz.

c) Problemin (b) şikkından elde ettiğiniz sonucu kullanarak



fisyon reaksiyonunun enerji bakımından mümkün olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

a) ΔB fonksiyonunun α ve β değişkenlerine nazaran maksimum olabilmesi için

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta B) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (\Delta B) = 0$$

şartları sağlanmalıdır. Bu şartlar (1) bağıntısına uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times 17,8 A^{2/3} \left[\frac{1}{\alpha^{1/3}} - \frac{1}{(1-\alpha)^{1/3}} \right] + \frac{0,71}{3} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[\frac{(1-\beta)^2}{(1-\alpha)^{4/3}} - \frac{\beta^2}{\alpha^{4/3}} \right] + \\ + 95 \frac{Z^2}{A} \left[\frac{(1-\beta)^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

ve

$$0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[\frac{\beta}{\alpha^{1/3}} - \frac{1-\beta}{(1-\alpha)^{1/3}} \right] + 95 \frac{Z^2}{A} \left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1-\beta}{1-\alpha} \right] = 0$$

elde edilir. Bu bağıntılar $\alpha = \beta$ için

$$\frac{2}{3} \times 17,8 A^{2/3} \left[\frac{1}{\alpha^{1/3}} - \frac{1}{(1-\alpha)^{1/3}} \right] + \frac{0,71}{3} \frac{Z^2}{A^{1/3}} [(1-\alpha)^{2/3} - \alpha^{2/3}] = 0$$

ve

$$0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} [\alpha^{2/3} - (1-\alpha)^{2/3}] = 0$$

şekillerini alırlar. Bu bağıntılar,

$$(1-\alpha)^{2/3} = \alpha^{2/3}, \quad (1-\alpha)^{1/3} = \alpha^{1/3} \quad \text{veya} \quad 1-\alpha = \alpha$$

bağıntısı ile birlikte gerçekleşir. Böylece

$$\alpha = \beta = 1/2$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, $\alpha = \beta$ için (1) bağıntısı

$$\Delta B = 17,8 A^{2/3} [1 - \alpha^{2/3} - (1-\alpha)^{2/3}] + 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} [1 - \alpha^{5/3} - (1-\alpha)^{5/3}] \quad (2)$$

şeklini alır. (2) bağıntısında $\alpha = 1/2$ yazılırsa

$$\Delta B_{\max} = 17,8 \left(1 - \frac{2}{2^{2/3}} \right) A^{2/3} + 0,71 \left(1 - \frac{2}{2^{5/3}} \right) \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

veya

$$\Delta B_{\max} = 17,8 (1 - 2^{1/3}) A^{2/3} + 0,71 (1 - 2^{1/3}/2) \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

bulunur. $2^{1/3} \cong 1,26$ olduğundan

$$\Delta B_{\max} \cong -17,8 \times 0,26 A^{2/3} + 0,71 \times 0,37 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

veya

$$\Delta B_{\max} = -4,6 A^{2/3} + 0,26 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (3)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, $\Delta B > 0$ kararsız çekirdek şartı $\alpha = \beta = 1/2$ için $\Delta B_{\max} > 0$ şeklini alır ve (3) bağıntısı aracılığı ile

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{4,6}{0,26} = 17,7 \quad (4)$$

sonucuna varılır.

b) (2) bağıntısının her iki yanını

$$0,71 A^{2/3} [1 - \alpha^{5/3} - (1 - \alpha)^{5/3}]$$

ifâdesi ile bölersek

$$\frac{Z^2}{A} + \frac{17,8}{0,71} \frac{1 - \alpha^{2/3} - (1 - \alpha)^{2/3}}{1 - \alpha^{5/3} - (1 - \alpha)^{5/3}} = \frac{\Delta B}{0,71 A^{2/3} [1 - \alpha^{5/3} - (1 - \alpha)^{5/3}]} \quad (5)$$

bulunur. Bu bağıntıda $\Delta B = 0$ yazılırsa

$$\left(\frac{Z^2}{A} \right)_{\Delta B=0} = - \frac{17,8}{0,71} \frac{1 - \alpha^{2/3} - (1 - \alpha)^{2/3}}{1 - \alpha^{5/3} - (1 - \alpha)^{5/3}} \quad (6)$$

elde edilir. (5) ve (6) bağıntıları karşılaştırılırsa

$$\frac{Z^2}{A} - \left(\frac{Z^2}{A} \right)_{\Delta B=0} = \frac{\Delta B}{0,71 A^{2/3} [1 - \alpha^{5/3} - (1 - \alpha)^{5/3}]} \quad (7)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan, $0 < \alpha < 1$ ve $0 < 1 - \alpha < 1$ eşitsizliklerinden

$$\alpha^{5/3} < \alpha, \quad (1 - \alpha)^{5/3} < 1 - \alpha$$

eşitsizlikleri elde edilir ve bu eşitsizliklerin taraf tarafa toplanması ile

$$\alpha^{5/3} + (1 - \alpha)^{5/3} < \alpha + (1 - \alpha) \equiv 1$$

veya

$$1 - \alpha^{5/3} - (1 - \alpha)^{5/3} > 0 \quad (8)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde,

$$\alpha^{2/3} > \alpha, \quad (1 - \alpha)^{2/3} > 1 - \alpha$$

eşitsizliklerinden

$$1 - \alpha^{2/3} - (1 - \alpha)^{2/3} < 0 \quad (9)$$

sonucuna varılır. (6) bağıntısı (8) ve (9) eşitsizlikleri ile karşılaştırılırsa, daima olması gerektiği gibi $(Z^2/A)_{\Delta B=0} > 0$ bulunur. (7) bağıntısı (8) eşitsizliği ile karşılaştırılırsa $\Delta B > 0$ kararsız çekirdek şartı $\alpha = \beta$ için

$$\frac{Z^2}{A} > \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\Delta B=0} \quad (10)$$

şeklini alır.

c) $^{108}_{48}\text{Cd} \rightarrow ^{81}_{36}\text{Kr} + ^{27}_{12}\text{Mg}$ fisyon reaksiyonu için

$$\alpha = 27/108 \equiv 1/4, \quad \beta = 12/48 \equiv 1/4$$

olduğundan, $\alpha = \beta$ hâli gerçekleşir ve (6) bağıntısında $\alpha = 1/4$ yazarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\Delta B=0} &= -\frac{17,8}{0,71} \frac{1 - 0,396850263 - 0,8254818122}{1 - 0,0992125657 - 0,6191113592} = \\ &= 25,07042254 \times \frac{0,222332075}{0,2816760751} = 25,07042254 \times 0,7893182796 = 19,78854279 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Diğer yandan,

$$\frac{Z^2}{A} = \frac{48^2}{108} = \frac{2304}{108} = 21,33333333$$

olduğundan, (10) bağıntısı ile verilen kararsız çekirdek şartı gerçekleşir. O hâlde, bahis konusu fisyon reaksiyonu enerji bakımından mümkündür.

VI.2. Bağ enerjisini veren yarı-empirik formülü kullanarak $A > 180$ şartını sağlayan çekirdekler için α -parçalanmasının mümkün olduğunu, fakat bilinen en ağır çekirdekler için bile proton veya nötron parçalanmasının mümkün olmadığını gösteriniz. (Yarı-empirik formülün α -parçacığı için uygun olmadığına ve $A > 120$ için $Z \cong 0,4 A$ olduğuna dikkat ediniz.)

ÇÖZÜM :

Bağ enerjisini veren yarı-empirik formülde $\delta(A, Z)$ terimi çok küçük olduğu için ihmâl edilebilir ve bu formül

$$B(A, Z) = 15,753 A - 17,804 A^{2/3} - 0,7103 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 94,77 \frac{(0,5 A - Z)^2}{A}$$

şeklinde yazılabilir. $A > 120$ için

$$Z \cong 0,4 A, \quad Z^2 \cong 0,16 A^2, \quad \frac{Z^2}{A^{1/3}} \cong 0,16 A^{5/3},$$

$$0,5 A - Z \cong 0,1 A, \quad \frac{(0,5 A - Z)^2}{A} \cong 0,01 A$$

yazılabileceğinden, bağ enerjisi formülü

$$B(A; 0,4A) = 15,753 A - 17,804 A^{2/3} - 0,7103 \times 0,16 A^{5/3} - 0,9477 A$$

veya

$$B(A) = 14,8053 A - 17,804 A^{2/3} - 0,113648 A^{5/3} \quad (1)$$

şeklini alır. α -parçalanması için bağ enerjisi farkı

$$\Delta B = B(A - 4) + B_\alpha - B(A) \quad (2)$$

şeklindedir. Yarı-ampirik formül α -parçacığı için uygun olmadığından, α -parçacığının bağ enerjisi

$$B_\alpha = (2M_p + 2M_n - M_\alpha) c^2 \quad (3)$$

bağıntısından hesaplanmalıdır. Böylece

$$B_\alpha = [2(1,007825 + 1,008665) - 4,002603] \times 931,5$$

$$B_\alpha = 0,030377 \times 931,5 \cong 28,2962 \text{ MeV}$$

bulunur. (1) bağıntısı (2) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\Delta B = -30,925 + 17,804 [A^{2/3} - (A - 4)^{2/3}] + 0,113648 [A^{5/3} - (A - 4)^{5/3}] \quad (4)$$

sonucuna varılır. $A = 180$ için bu bağıntıdan

$$\Delta B = -30,925 + 8,44015 + 23,97444 = 1,48959 \text{ MeV}$$

bulunur. $\Delta B > 0$ olduğundan, $A > 180$ için α -parçalanması mümkündür.

Proton veya nötron parçalanması için bağ enerjisi farkı

$$\Delta B = B(A - 1) - B(A) \quad (5)$$

şeklindedir. (1) bağıntısı (5) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\Delta B = -14,8053 + 17,804 [A^{2/3} - (A - 1)^{2/3}] + 0,113648 [A^{5/3} - (A - 1)^{5/3}] \quad (6)$$

sonucuna varılır. En ağır çekirdeklere uygulamak üzere $A = 238$ alınırsa (6) bağıntısından

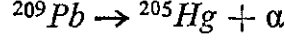
$$\Delta B = -14,8053 + 1,9166 + 7,2642 = -5,6245 \text{ MeV}$$

bulunur. $\Delta B < 0$ olduğundan, bilinen en ağır çekirdekler için bile proton veya nötron parçalanması mümkün değildir.

VI.3. ^{205}Hg ve ^{209}Pb çekirdeklerinin deneysel kütleleri

$$M(^{205}\text{Hg}) = 204,9762 \text{ u} \text{ ve } M(^{209}\text{Pb}) = 208,98108 \text{ u}$$

olduğuna göre



reaksiyonundan çıkan α -parçacıklarının enerjisini hesaplayınız. Ayrıca, bu parçalanmanın yarı ömrünün gözlenemeyecek kadar uzun olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Reaksiyondan çıkan α -parçacıklarının kinetik enerjisi $T_\alpha \equiv E$ ve kalan ^{205}Hg çekirdeğinin geri tepme kinetik enerjisi de T_R olduğuna göre enerjinin korunumu denklemi

$$c^2 M(^{209}\text{Pb}) = c^2 M(^{205}\text{Hg}) + T_R + M_\alpha c^2 + T_\alpha$$

şeklindedir. Diğer yandan, bu reaksiyondan açığa çıkan enerji

$$Q = [M(^{209}\text{Pb}) - M(^{205}\text{Hg}) - M_\alpha] c^2$$

olduğundan, enerjinin korunumu denklemi

$$E + T_R = Q$$

şeklinde yazılabilir. Momentumun korunumu denklemi de

$$\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_R = 0 \text{ veya } p_\alpha^2 = p_R^2$$

veya

$$M_\alpha E = M(^{205}\text{Hg}) T_R$$

şeklindedir. Bu denklemden T_R yi çözüp enerjinin korunumu denkleminde yerine yazarsak

$$E + \frac{M_\alpha}{M(^{205}\text{Hg})} E = Q$$

veya

$$E = \frac{Q}{1 + \frac{M_\alpha}{M(^{205}\text{Hg})}}$$

sonucuna varılır. Q nun sayısal değeri

$$Q = (208,98108 - 204,9762 - 4,002603) \times 931,5$$

$$Q = 0,002277 \times 931,5 = 2,1210255 \text{ MeV}$$

olarak bulunur. O hâlde, α -parçacıklarının enerjisi de

$$E = \frac{2,1210255}{1 + \frac{4,002603}{204,9762}} = \frac{2,1210255}{1,01952716} \cong 2,08 \text{ MeV}$$

olarak bulunur.

α -parçalanmasının yarı ömrünü veren bağıntı

$$T = C e^{2s} \quad (1)$$

şeklindedir. Burada C ve s

$$C \cong \frac{\frac{2Ze^2}{R} + V_0}{4(E + V_0)} \frac{\sqrt{2mR^2}}{\left(\frac{2Ze^2}{R} - E\right)^{1/2}} \ln 2 \quad (2)$$

$$2s = 4 \left(\frac{Ze^2 R}{\hbar^2/m}\right)^{1/2} f(x) \quad (3)$$

$$f(x) \cong \frac{1}{\sqrt{x}} \arccos \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \quad (4)$$

$$x = \frac{R}{b} = \frac{RE}{2Ze^2} \quad (5)$$

bağıntıları ile verilir.

^{205}Hg çekirdeği ile α -parçacığının oluşturduğu sistemin indirgenmiş kütlesi yaklaşık olarak

$$m \cong \frac{4 \times 205}{4 + 205} = \frac{820}{209} \cong 3,923 \text{ u}$$

dir ve buna göre

$$\frac{\hbar^2}{m} \cong \frac{\hbar^2}{M_p} \frac{M_p}{m} = 41,5 \times \frac{1,00727647 \times 209}{820} \cong 10,654 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

bulunur. Diğer yandan, $Z = 80$ ve

$$R = 1,4 (205)^{1/3} \cong 8,255 \text{ fm}$$

olduğundan

$$4 \left(\frac{Ze^2 R}{\hbar^2/m}\right)^{1/2} = 4 \left(\frac{80 \times 1,44 \times 8,255}{10,654}\right)^{1/2} \cong 37,791$$

ve (5) bağıntısından da

$$x = \frac{RE}{2Ze^2} = \frac{8,255 \times 2,08}{2 \times 80 \times 1,44} \cong 0,074524$$

bulunur. (4) bağıntısında yerine yazılırsa

$$f(x) \cong 3,77915$$

elde edilir. Bu değerler (3) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$2s = 37,791 \times 3,77915 \cong 142,82$$

ve

$$e^{2s} \cong 1,06 \times 10^{62}$$

sonuçlarına varılır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \sqrt{2mR^2} &\cong \sqrt{2mc^2} \frac{R}{c} = \sqrt{2 \times 3,923 \times 931,5} \frac{8,255}{2,99792458} \times 10^{-23} \\ &\cong 2,354 \times 10^{-21} (\text{MeV})^{1/2} \times \text{san.} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2mR^2} \ln 2 \cong 1,632 \times 10^{-21} (\text{MeV})^{1/2} \times \text{san.}$$

ve

$$\frac{2Ze^2}{R} = \frac{2 \times 80 \times 1,44}{8,255} \cong 27,91 \text{ MeV}$$

olduğundan, (2) bağıntısında yerlerine yazarak ve $V_0 \cong 10 \text{ MeV}$ alarak

$$C \cong \frac{27,91 + 10}{4(2,08 + 10)} \frac{1,632 \times 10^{-21}}{(27,91 - 2,08)^{1/2}} \cong \frac{37,91 \times 1,632 \times 10^{-21}}{48,32 \times 5,082322}$$

$$C \cong 2,52 \times 10^{-22} \text{ san.}$$

elde edilir. Bu değerler (1) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$T \cong 2,52 \times 10^{-22} \times 1,06 \times 10^{62} \cong 2,67 \times 10^{40} \text{ san.}$$

veya 1 yıl = 31557600 san. olduğundan

$$T \cong 8,46 \times 10^{32} \text{ yıl}$$

sonucuna varılır. Bu yarı ömür gözlenemeyecek kadar uzundur.

VI.4. Aşağıdaki cetvelden yararlanarak $C = Te^{-2s}$ büyüklüklerini hesaplayınız ve böylece alfa parçalanmasının yarı klâsik teorisine göre tabiattaki alfa parçacığı neşreden çekirdeklerin yarı ömürlerinin neşredilen alfa parçacıklarının enerjilerine duyarlı olarak bağlı olduklarını gösteriniz. (Bu maksatla alfa parçalanmasına ait çekirdek yarıçapının $R = 1,4 A^{1/3} + 1,2 \text{ fm}$ ampirik formülü ile verildiğini kabul ediniz.)

<u>İlk çekirdek</u>	<u>Kalan çekirdek</u>	<u>Alfa enerjisi E (MeV)</u>	<u>Yarı ömür T</u>
$^{238}_{92}U$	$^{234}_{90}Th$	4,25	$4,51 \times 10^9$ yıl
$^{234}_{92}U$	$^{230}_{90}Th$	4,84	$2,35 \times 10^5$ yıl
$^{228}_{90}Th$	$^{224}_{88}Ra$	5,52	1,91 yıl
$^{222}_{86}Rn$	$^{218}_{84}Po$	5,59	3,83 gün
$^{218}_{84}Po$	$^{214}_{82}Pb$	6,11	3,05 dak.
$^{214}_{84}Po$	$^{210}_{82}Pb$	7,83	$1,6 \times 10^{-4}$ san.
$^{212}_{84}Po$	$^{208}_{82}Pb$	8,95	$3,0 \times 10^{-7}$ san.

ÇÖZÜM :

α -parçalanmasının yarı ömrü T olduğuna göre

$$C = T e^{-2s} \quad (1)$$

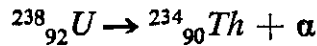
yazılabilir. Burada s

$$2s = 4 \left(\frac{Ze^2 R}{\hbar^2/m} \right)^{1/2} f(x) \quad (2)$$

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} \arccos \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \quad (3)$$

$$x = \frac{R}{b} = \frac{RE}{2Ze^2} \quad (4)$$

bağıntıları ile verilir. Önce



parçalanmasını düşünelim. ^{238}Th çekirdeği ile α -parçacığının oluşturduğu sistemin indirgenmiş kütlesi yaklaşık olarak

$$m \equiv \frac{4 \times 234}{4 + 234} = \frac{936}{238} \equiv 3,933 \text{ u}$$

dir ve buna göre

$$\frac{\hbar^2}{m} \equiv \frac{\hbar^2}{M_p} \frac{M_p}{m} = 41,5 \times \frac{1,00727647 \times 238}{936} \equiv 10,629 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

bulunur. Diğer yandan, $Z = 90$ ve

$$R = 1,4 (234)^{1/3} + 1,2 \cong 9,827 \text{ fm}$$

olduğundan

$$4 \left(\frac{Z e^2 R}{\hbar^2/m} \right)^{1/2} = 4 \left(\frac{90 \times 1,44 \times 9,827}{10,629} \right)^{1/2} \cong 43,785$$

ve (4) bağıntısından da

$$x = \frac{RE}{2Ze^2} = \frac{9,827 \times 4,25}{2 \times 90 \times 1,44} \cong 0,161129$$

bulunur. (3) bağıntısında yerine yazılırsa

$$f(x) \cong 1,96829$$

elde edilir. Bu değerler (2) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$2s = 43,785 \times 1,96829 \cong 86,182$$

ve

$$e^{-2s} = 3,7294 \times 10^{-38}$$

sonuçlarına varılır. Diğer yandan

$$T = 4,51 \times 10^9 \times 31557600 \cong 1,42325 \times 10^{17} \text{ san.}$$

olduğundan (1) bağıntısını kullanarak

$$C \cong 1,42325 \times 10^{17} \times 3,7294 \times 10^{-38} \cong 5,308 \times 10^{-21} \text{ san.}$$

elde edilir.

Diğer çekirdeklere ait α -parçalanmaları için benzer hesaplar yapılabilir. Sonuçlar sayfa 123 deki cetvelde sıralanmıştır. Bu cetvelin dördüncü sütununda

$$P = 4 \left(\frac{Ze^2 R}{\hbar^2/m} \right)^{1/2}$$

vaz edilmiştir ve onuncu sütundaki C ler 10^{-21} san. cinsinden yazılmıştır.

Bu cetvelden de görüldüğü gibi C büyüklükleri kayda değer bir şekilde değişmemektedir. C lerin ortalaması hesaplanırsa

$$\bar{C} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 C_i \cong 9,609 \times 10^{-21} \text{ san.}$$

olarak bulunur. C lerin bu ortalama değerden standard sapması da

$$\delta C = \left[\frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (C_i - \bar{C})^2 \right]^{1/2} \cong 2,818 \times 10^{-21} \text{ san.}$$

dir. Böylece sonuç olarak

Kalan çek.	$\frac{\hbar^2}{m}$	(fm) R	P	(MeV) E	x	$f(x)$	e^{-2s}	(san.) T	10^{-21} C
$^{234}_{90}Th$	10,629	9,827	43,785	4,25	0,161129	1,96829	$3,729 \times 10^{-38}$	$1,423 \times 10^{17}$	5,308
$^{230}_{90}Th$	10,632	9,778	43,669	4,84	0,182577	1,73882	$1,054 \times 10^{-33}$	$7,416 \times 10^{12}$	7,817
$^{224}_{88}Ra$	10,637	9,702	43,003	5,52	0,211312	1,48995	$1,490 \times 10^{-28}$	$6,027 \times 10^7$	8,984
$^{218}_{84}Po$	10,642	9,626	41,840	5,59	0,222426	1,40747	$2,661 \times 10^{-26}$	$3,309 \times 10^5$	8,804
$^{214}_{82}Pb$	10,646	9,574	41,219	6,11	0,247701	1,24208	$5,822 \times 10^{-23}$	$1,83 \times 10^2$	10,65
$^{210}_{82}Pb$	10,649	9,521	41,099	7,83	0,315690	0,90657	$6,581 \times 10^{-17}$	$1,6 \times 10^{-4}$	10,53
$^{208}_{82}Pb$	10,651	9,495	41,095	8,95	0,359842	0,74601	$5,056 \times 10^{-14}$	3×10^{-7}	15,17

$$C = (9,609 \pm 2,818) \times 10^{-21} \text{ san.}$$

yazılabilir.

VI.5. Problem 4 deki cetvelde çekirdeklere ait deneysel değerlere alfa parçalanmasının yarı klâsik teorisini uygulayarak bu çekirdeklerin alfa parçalanmasına ait yarıçaplarını hesaplayınız ve bu yarıçapların $R = 1,4 A^{1/3} + 1,2 \text{ fm}$ ampirik formülüne ne dereceye kadar uyduğunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM :

Clerin problem 4 de bulunan ortalama değeri $\bar{C} = 9,609 \times 10^{-21} \text{ san.}$ ve α -parçalanmasının yarı ömrü T olduğuna göre

$$2s = \ln \frac{T}{C} = 4 \sqrt{2} \frac{Ze^2}{\sqrt{E\hbar^2/m}} \Phi(x) = Q\Phi(x) \quad (1)$$

yazılabilir. Burada

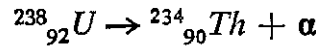
$$Q = 4 \sqrt{2} Ze^2 / \sqrt{E\hbar^2/m} \quad (1a)$$

vaz edilmiştir ve $\Phi(x)$ fonksiyonu da

$$\Phi(x) \equiv \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x} \sqrt{1-x} \quad (2)$$

$$x = \frac{R}{b} = \frac{RE}{2Ze^2} \quad (3)$$

bağıntıları ile verilir. Önce



parçalanmasını düşünelim.

$$2s = \ln \frac{T}{C} = \ln \frac{1,42325 \times 10^{17}}{9,609 \times 10^{-21}} \cong 85,588$$

ve (1a) bağıntısına göre

$$Q = 4 \sqrt{2} \frac{90 \times 1,44}{(4,25 \times 10,629)^{1/2}} \cong 109,078$$

olduğundan, (1) bağıntısına göre

$$\Phi(x) = \frac{85,588}{109,078} \cong 0,78465$$

ve (2) bağıntısına göre

$$x \cong 0,163525$$

bulunur. Diğer yandan, (3) bağıntısını kullanarak

$$b = \frac{2Ze^2}{E} = \frac{2 \cdot 90 \times 1,44}{4,25} \cong 60,988 \text{ fm}$$

ve

$$R = xb \cong 0,163525 \times 60,988 \cong 9,9731 \text{ fm}$$

sonucuna varılır. Bu sonuca göre de

$$q = R - 1,4 A^{1/3} \cong 9,9731 - 1,4 (234)^{1/3} \cong 1,346 \text{ fm}$$

elde edilir. Diğer çekirdeklere ait α -parçalanmaları için benzer hesaplar yapılabilir. Sonuçlar aşağıdaki cetvelde sıralanmıştır.

Kalan çekirdek	$2s$	Q	$\Phi(x)$	x	(fm) b	(fm) R	(fm) q
$^{234}_{90}\text{Th}$	85,588	109,078	0,78465	0,163525	60,988	9,9731	1,346
$^{230}_{90}\text{Th}$	75,726	102,200	0,74096	0,183533	53,554	9,8289	1,251
$^{224}_{88}\text{Ra}$	64,006	93,5494	0,68419	0,211685	45,913	9,7191	1,217
$^{218}_{84}\text{Po}$	58,801	88,7154	0,66281	0,222954	43,277	9,6488	1,223
$^{214}_{82}\text{Pb}$	51,301	82,8204	0,61942	0,246987	38,651	9,5464	1,172
$^{210}_{82}\text{Pb}$	37,351	73,1486	0,51062	0,314841	30,161	9,4959	1,174
$^{208}_{82}\text{Pb}$	31,072	68,4139	0,454178	0,354867	26,386	9,3637	1,069

Bu cetvelden de görüldüğü gibi q büyüklükleri kayda değer bir şekilde değişmemektedir. q ların ortalaması hesaplanırsa

$$\bar{q} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 q_i \cong 1,207 \text{ fm}$$

olarak bulunur. q ların bu ortalama değerden standard sapması da

$$\delta q = \left[\frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (q_i - \bar{q})^2 \right]^{1/2} \cong 0,078 \text{ fm}$$

dir. Böylece sonuç olarak

$$q = 1,207 \pm 0,078 \text{ fm}$$

yazılabilir ve

$$R \cong 1,4 A^{1/3} + 1,207$$

elde edilir.

VI.6. ^{226}Ra ve ^{226}Th nın parçalanmalarından çıkan alfa parçacıklarının enerjileri müttekabilen, 4,9 ve 6,5 MeV dir. Bu iki çekirdeğin yarıçaplarının aynı olduğu kabul edilirse, ömürlerinin oranının yaklaşık olarak $2,6 \times 10^7$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

α -parçalanmasının yarı ömrünü veren bağıntı

$$T = C e^{2s} \quad (1)$$

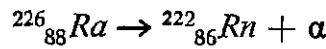
şeklindedir. Burada s

$$2s = 4 \left(\frac{Ze^2 R}{\hbar^2/m} \right)^{1/2} f(x) \quad (2)$$

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} \arccos \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \quad (3)$$

$$x = \frac{R}{b} = \frac{RE}{2Ze^2} \quad (4)$$

bağıntıları ile verilir. Önce



parçalanmasını düşünelim. ^{222}Rn çekirdeği ile α -parçacığının oluşturduğu sistemin indirgenmiş kütlesi yaklaşık olarak

$$m_1 \cong \frac{4 \times 222}{4 + 222} = \frac{888}{226} \cong 3,929 \text{ u}$$

dir ve buna göre

$$\frac{\hbar^2}{m_1} \cong \frac{\hbar^2}{M_p} \frac{M_p}{m_1} = 41,5 \times \frac{1,00727647 \times 226}{888} \cong 10,6388 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

bulunur. Diğer yandan, $Z_1 = 86$ ve

$$R_1 = 1,4 (222)^{1/3} + 1,2 \cong 9,677 \text{ fm}$$

olduğundan

$$4 \left(\frac{Z_1 e^2 R_1}{\hbar^2/m_1} \right)^{1/2} = 4 \left(\frac{86 \times 1,44 \times 9,677}{10,6388} \right)^{1/2} \cong 42,4536$$

ve (4) bağıntısından da

$$x_1 = \frac{R_1 E_1}{2Z_1 e^2} = \frac{9,677 \times 4,9}{2 \times 86 \times 1,44} \cong 0,191446$$

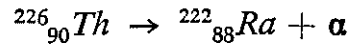
bulunur. (3) bağıntısında yerine yazılırsa

$$f(x_1) \cong 1,65581$$

elde edilir. Bu değerler (2) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$2s_1 = 42,4536 \times 1,65581 \cong 70,295$$

sonucuna varılır. Şimdi de



parçalanması için benzer hesapları yapalım. ${}^{222}\text{Ra}$ çekirdeği ile α -parçacığının oluşturduğu sistemin indirgenmiş kütlesi yaklaşık olarak

$$m_2 \cong m_1 \cong 3,929 \text{ u}$$

dir ve buna göre de

$$\frac{\hbar^2}{m_2} \cong \frac{\hbar^2}{m_1} \cong 10,6388 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

bulunur. Diğer yandan, $Z_2 = 88$ ve

$$R_2 = R_1 \cong 9,677 \text{ fm}$$

olduğundan

$$4 \left(\frac{Z_2 e^2 R_2}{\hbar^2 / m_2} \right)^{1/2} = 4 \left(\frac{88 \times 1,44 \times 9,677}{10,6388} \right)^{1/2} \cong 42,9444$$

ve (4) bağıntısından da

$$x_2 = \frac{R_2 E_2}{2Z_2 e^2} = \frac{9,677 \times 6,5}{2 \times 88 \times 1,44} \cong 0,248187$$

bulunur. (3) bağıntısında yerine yazılırsa

$$f(x_2) \cong 1,23917$$

elde edilir. Bu değerler (2) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$2s_2 = 42,9444 \times 1,23917 \cong 53,215$$

sonucuna varılır. $C_1 \cong C_2$ olduğundan, (1) bağıntısına göre

$$T_1/T_2 = \exp(2s_1 - 2s_2) \cong \exp(70,295 - 53,215) = \exp(17,08) \cong 2,616 \times 10^7$$

sonucuna varılır.

VI.7. Problem VI.6 daki parçalanmaların yarı ömürleri ^{226}Ra için 1622 yıl ve ^{226}Th için de 30,9 dakikadır. Bu iki çekirdeğin alfa parçalanması yarıçaplarını bulunuz. Ayrıca, bu iki yarıçap değerinin birbirlerinden sâdece binde birkaç birim kadar fark ettiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Problem 6 da bulunan sonuçlara göre C_1 ve C_2 yi hesaplayalım :

$$C_1 = T_1 e^{-2s_1} \cong 5,11864 \times 10^{10} \times 2,96 \times 10^{-31} \cong 15,151 \times 10^{-21} \text{ san.}$$

$$C_2 = T_2 e^{-2s_2} \cong 1854 \times 7,74267 \times 10^{-24} \cong 14,355 \times 10^{-21} \text{ san.}$$

elde edilir. C lerin ortalama değeri

$$\bar{C} = (C_1 + C_2)/2 = 14,753 \times 10^{-21} \text{ san.}$$

olarak bulunur. α -parçalanmasının yarı ömrü T olduğuna göre

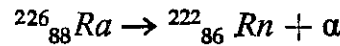
$$2s = \ln \frac{T}{C} = 4 \sqrt{2} \frac{Ze^2}{\sqrt{E\hbar^2/m}} \Phi(x) \quad (1)$$

yazılabilir. Buradaki $\Phi(x)$ fonksiyonu

$$\Phi(x) \equiv \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x} \sqrt{1-x} \quad (2)$$

$$x = \frac{R}{b} = \frac{RE}{2Ze^2} \quad (3)$$

bağıntıları ile verilir. Önce



parçalanmasını düşünelim.

$$2s_1 = \ln \frac{T_1}{C} = \ln \frac{5,11864 \times 10^{10}}{14,753 \times 10^{-21}} \cong 70,3216$$

ve

$$4 \sqrt{2} \frac{Z_1 e^2}{\sqrt{E_1 \hbar^2 / m_1}} = 4 \sqrt{2} \frac{86 \times 1,44}{\sqrt{4,9 \times 10,6388}} \cong 97,0268$$

olduğundan, (1) bağıntısına göre

$$\Phi(x_1) = \frac{70,3216}{97,0268} \cong 0,72476$$

ve (2) bağıntısına göre

$$x_1 \cong 0,191312$$

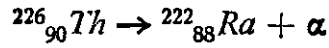
bulunur. Diğer yandan, (3) bağıntısını kullanarak

$$b_1 = \frac{2Z_1 e^2}{E_1} = \frac{2 \times 86 \times 1,44}{4,9} \cong 50,547 \text{ fm}$$

ve

$$R_1 = x_1 b_1 \cong 0,191312 \times 50,547 \cong 9,670 \text{ fm}$$

sonucuna varılır. Şimdi de



parçalanması için benzer hesapları yapalım.

$$2s_2 = \ln \frac{T_2}{C} = \ln \frac{1854}{14,753 \times 10^{-21}} \cong 53,1879$$

ve

$$4 \sqrt{2} \frac{Z_2 e^2}{\sqrt{E_2 \hbar^2 / m_2}} = 4 \sqrt{2} \frac{88 \times 1,44}{\sqrt{6,5 \times 10,6388}} \cong 86,2020$$

olduğundan, (1) bağıntısına göre

$$\Phi(x_2) = \frac{53,1879}{86,202} \cong 0,617015$$

ve (2) bağıntısına göre

$$x_2 \cong 0,248369$$

bulunur. Diğer yandan, (3) bağıntısını kullanarak

$$b_2 = \frac{2Z_2 e^2}{E_2} = \frac{2 \times 88 \times 1,44}{6,5} \cong 38,991 \text{ fm}$$

ve

$$R_2 = x_2 b_2 \cong 0,248369 \times 38,991 \cong 9,684 \text{ fm}$$

sonucuna varılır.

Son olarak alfa parçalanma yarıçaplarının değişme oranını bulalım :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_2 - R_1}{R} = \frac{9,684 - 9,670}{9,677} = \frac{0,014}{9,677} = \%0,145$$

sonucuna varılır.

EK I

CETVELLER

ÇEKİRDEKLERLE İLGİLİ FİZİKSEL SÂBİTLER

$$1 \text{ u} = 1/12 M(^{12}\text{C}) = 931,5016 \text{ MeV}$$

$$M_p c^2 = 938,28 \text{ MeV}$$

$$M_p = 1,00727647 \text{ u}$$

$$M_n c^2 = 939,57 \text{ MeV}$$

$$M_n = 1,008665 \text{ u}$$

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

$$m_e = 0,0005485 \text{ u}$$

$$M_d c^2 = 1875,628 \text{ MeV}$$

$$M_d = 2,0135531 \text{ u}$$

$$e^2 = 1,44 \text{ MeV} \times \text{fm}$$

$$M_n - M_p = 1,2934 \text{ MeV}$$

$$\hbar^2/M_p = 14,5 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

$$M = 2M_p M_n / (M_p + M_n) \text{ olmak üzere:}$$

$$\hbar^2/M_n = 41,4428 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

$$\hbar^2/M = 41,4714 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$$

HAFİF ÇEKİRDEKLERİN ATOMİK KÜTLELERİ

$$^1\text{H} \quad 1,007825$$

$$^{10}\text{B} \quad 10,012939$$

$$^2\text{H} \quad 2,014102$$

$$^{11}\text{B} \quad 11,009305$$

$$^3\text{H} \quad 3,016050$$

$$^{12}\text{C} \quad 12,000000$$

$$^3\text{He} \quad 3,016030$$

$$^{13}\text{C} \quad 13,003354$$

$$^4\text{He} \quad 4,002603$$

$$^{14}\text{N} \quad 14,003074$$

$$^6\text{Li} \quad 6,015125$$

$$^{15}\text{N} \quad 15,000108$$

$$^7\text{Li} \quad 7,016004$$

$$^{16}\text{O} \quad 15,994915$$

$$^8\text{Be} \quad 8,005308$$

$$^{17}\text{O} \quad 16,999133$$

$$^9\text{Be} \quad 9,012185$$

$$^{18}\text{O} \quad 17,99916$$

BİBLİYOGRAFYA

L.R.B. Elton, "Introductory Nuclear Theory" (Pitman and Sons, Ltd., London, 1966).

Enrico Fermi, "Nuclear Physics" (The University of Chicago Press, 1962).

Anthony Foderaro, "The Elements of Neutron Interaction Theory" (The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1971).

R. Hagedorn, "Relativistic Kinematics" (W.A. Benjamin, Inc., New York, 1964).

ERRATA

<u>Sayfa</u>	<u>Satır</u>	<u>Yanlış</u>	<u>Doğru</u>
108	12	VI.3.	V.3.
111	4*	$e^{i\delta t} - e^{i\delta t}$	$e^{i\delta t} - e^{-i\delta t}$