TEORİK FİZİK DERSLERİ

Dizinin Kurucusu : AHMED YÜKSEL ÖZEMRE
Dizinin Yöneticisi : ÇETİN CANSOY

«Teorik Fizik Dersleri» şimdilik 6 sı Lisans ve 6 sı Lisansüstü düzeyinde 12 cild metin kitabı ile 15 cild de çözümlü problem kitabından oluşan bir dizi olarak plânlanmış bulunmaktadır.

METİN KİTAPLARI :

Lisans Düzeyinde

1. **Fizikte Matematik Metotlar;** A.Y.Özemre (*1. baskısı İTÜ Yayınları No.* 826, 1971; *genişletilmiş* 2. *baskısı hazırlanıyor*).
2. **Klâsik Teorik Mekanik;** A.Y.Özemre (*İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları No.* 132, 1976; 2. *baskı No.* 158, 1981).
3. **Kuvantum Mekaniği**
4. **Klâsik Elektrodinamiğe Giriş;** A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları. BASKIDA*)
5. **Isı Teorisi;** A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No.* 140, 1977 ; 2. baskısı yakında çıkacak).
6. **Özel Rölâtivite Teorisi**

Lisansüstü Düzeyinde

7. **Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri:** A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. BASKIDA*) No. 168, 1982)
8. **Kozmolojiye Giriş;** A.Y.Özemre (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No.* 161, 1981)
9. **İleri Kuvantum Teorisi**
10. **Çekirdek Teorisi;** Ç.Cansoy (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No.* 143, 1978)
11. **Alan Teorilerine Giriş**
12. **Temel Tânecikler Teorisi**

ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTAPLARI :

Dizinin tasarlanan 15 adet Çözümlü Problem Kitabından hâlen yayınlanmış, baskıda ya da hazırlanmakta olanlar şunlardır:

1/II **Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı,** E.Rıza (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. BASKIDA*)

2/I **Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı;** A.Y.Özemre ve Ş.Zebitay (*HAZIRNIYOR*)

3/I **Kuvantum Mekaniği Çözümlü Problem Kitabı;** E.Rıza (*İst.Üniv.Fen Fak. Yay. BASKIDA*)

5/I **Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı;** A.Y.Özemre ve E.Rıza (*İst.Üniv.Fen Fak.Yay. No.* 147. 1978)

10/I **Çekirdek Teorisi Çözümlü Problem Kitabı;** Ç.Cansoy (*İst.Üniv. Fen. Fak. Yay. BASKIDA*)

TEORİK FİZİK DERSLERİ

CİLD 7

GRAVİTASYONUN RÖLÂTİVİST TEORİLERİ

Prof. Dr. AHMED YÜKSEL ÖZEMRE
İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
1982

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
YAYINLARINDAN
Sayı : 2952

FEN FAKÜLTESİ
Sayı : 168

TEORİK FİZİK
Sayı : 12

Bu kitabın 1. basımı 1350 adet olarak İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matbaasında Mart 1982 de tamamlanmıştır.

Bu Kitabımı
İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Enstitüsünde
1954 *ilâ* 1957 *Yıllarında*
Kendilerinden Feyz Almış Olduğum
Azîz ve Muhterem Hocalarım

Câhit ARF, Lûtfi BİRAN, Altıntaş BÜKE, Mâcit BÜKE
Feza GÜRSEY, Süeda GÖNENÇ (MORALI), Orhan Ş. İÇEN
Suzan KAHRAMANER, Nâmık OĞUZTÖRELİ, Giacomo SABAN
Ferruh ŞEMİN, Nâzım TERZİOĞLU (merhûm), *ve* **Halil YÜKSEL'***e*

Hörmet ve Şükranlarımla İthaf Ediyorum.

YAZARIN ESERLERİ

* **Çözülmüş Atom ve Reaktör Fiziği Problemleri;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1962 (Çeviri).
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 2. Cild;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
* **Geometrik Eşitsizlikler;** Türk Matematik Derneği, 1963 (Çeviri).
* **Contributions à la Théorie de la Diffusion des Neutrons Dépendant du Temps;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1964.
* **Kuvantum Mekaniğine Giriş;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1965 (Çeviri).
* **Reaktör Kritikliğinin Nötronların Difüzyon Teorisine Göre Analitik Vecheleri;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
* **Hızlı Reaktörlerin Fiziksel Analizine Giriş;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild (düzeltilmiş ikinci baskı);** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969.
* **Nükleer Reaktörler Fiziğinin Matematik Temelleri;** İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969 (Çeviri).
* **Çağdaş Fiziğe Giriş Çözümlü Problem Kitabı** (*Şehsuvar Zebitay ile birlikte*); İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
* **Çağdaş Fiziğe Giriş Ders Kitabı, 1. Cild;** İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
* **Fizikte Matematik Metotlar Ders Kitabı;** İTÜ Elektrik Fakültesi, 1971.
* **Klâsik Teorik Mekanik;** İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1976.
* **Isı Teorisi,** İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1977
* **Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı** (*Emine Rıza ile birlikte*), İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1978.
* **Çağdaş Fiziğe Giriş Ders Kitabı** (ikinci baskı); İst. Üniv. Fen Fakültesi 1978.
* **Çağdaş Fiziğe Giriş Çözümlü Problem Kitabı** (ikinci baskı), İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1979.
* **Kozmolojiye Giriş;** İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1981.
* **Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri** ; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1982.
* **Klâsik Elektrodinamiğe Giriş** (Baskıda).
* **Isı Teorisi,** (ikinci baskı ; yakında çıkıyor) ; İst. Üniv. Fen Fakültesi 1982.
* **Çağdaş Fiziğe Giriş,** (genişletilmiş üçüncü baskı ; yakında çıkıyor) ; İst. Üniv. Fen Fakültesi.

HAZIRLANMAKTA OLANLAR

* **Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı** (*Şehsuvar Zebitay ile birlikte*).
* **Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri Çözümlü Problem Kitabı** (*Şehsuvar Zebitay, Hâşim Mutuş ve Ömer Oğuz ile birlikte*)

ÖNSÖZ

TEORİK FİZİK DERSLERİ külliyâtının 7. cildini teşkil eden "GRAVİTASYONUN RÖLÂTİVİST TEORİLERİ" isimli bu kitap 1976-1977 ders yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsünde ihdas etmiş ve haftada 2 saat ders ve 1 saat de uygulama olmak üzere lisansüstü öğrencilerine okutmuş olduğunu aynı isimli dersin notlarından meydana gelmiştir.

Yaklaşık 25 yıllık bir bilgi birikimi ve özümlemesi sonucu ve kesintisiz 16 aylık bir çalışmadan sonra ortaya konabilmiş olan bu kitap hiç bir orijinallik ihtivâ etmemektedir. Ancak, konuya ve literatürüne âşina olanların, kitabın muhtevâsında ittihaz edilmiş olan felsefe ve stratejinin mûtaddan biraz farklı olduğunu teslim edeceklerini ümid etmekteyim.

Kitap bu hâliyle 12 bölüm ve bölümlerin sonuna eklenmiş 222 kalem referans ile 56 da alıştırma ve problem ihtivâ etmektedir. Bunların ve bunlara ilâveten başka problemlerin çözümlerini ihtivâ edecek olan "Teorik Fizik Dersleri, Cild 7/I, Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri Çözümlü Problem Kitabı" Doç. Dr. Şehsuvar Zebitay ile yardımcılarım Ömer Oğuz ve Hâşim Mutuş'un da yardımlarıyla hazırlanmaktadır.

Kitaba mesned olan lisansüstü dersinin kapsamı dışında kaldıklarından *KRUSKAL* koordinatları ile *KERR* metriği ayrıca incelenmemiş, ancak küçük birer paragrafla bunların mâhiyetlerine değinilmekle yetinilmiştir. Ayrıca, bu kitabın dayandığı dersin amacı yalnızca salt gravitasyon olayını geometrik bir yapı aracılığıyla modellendirmek olduğundan elektromagnetik olaylara ve, bu münâsebetle, henüz çok spekülâtif bir konu olan birleşik alan teorilerine de hiç değinilmemiştir. Gravitasyon alanlarının kuvantumlaştırılması da gene aynı sebeplerden ötürü kitabın kapsamı dışında bırakılmıştır.

Bu kitap ne bir el kitabıdır ve ne de konuyu derinliğine ve eksiksiz işlemiş olmak iddiasında olan bir kitaptır. Bu, yalnızca, Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri konusunu haftada 2 saat ders itibâriyle 2 yarıyılda lisansüstü öğrencilerine anlayabilecekleri bir biçimde sunma amacını güden 10 yıllık bir rûyânın, bir özlemin mütevâzî bir biçimde tahakkukudur; o kadar! Bu motivasyon ve çerçeve göz önünde tutulmadığı takdirde kitabın eksiği pek çoktur. Samimî niyâzım ise bu kitabın eksik yanlarının, eksiksizini yazabilme husûsunda başkalarına müessir bir ilhâm kaynağı olmasıdır.

Çok sıkıntılı ve çileli 16 ay boyunca bu kitabı yazma sabrını ve gücünü lûtfetmiş olan CENÂB-I HAKK'a, diğer bütün nîmetleri için de olduğu gibi, lâyıkıyla hamd ve şükürden âcizim.

Kitap henüz manüskri hâlinde iken içindeki hesapları kontrol ederek bir sürü yanlışın önlenmesinde katkıları olan azîz yardımcılarım Hâşim Mutuş, Ömer Oğuz, Doç.Dr. Emine M. Rıza ve Doç. Dr.Şehsuvar Zebitay'a; manüskriyi büyük bir titizlikle okuyup pekçok yanlışın ve vuzuhsuzluğun izâlesinde beni kendisine minnettâr bırakan azîz meslekdaşım Prof.Dr. Ferit Öktem'e; kitabın yazılışı süresince bana büyük mânevî destek olmuş olan azîz meslekdaşım Doç.Dr. Çetin Cansoy'a; şevkimi arttırmış olan bütün öğrenci ve dinleyicilerime; formüllerinin dizgisi çok zor olan bu kitabı sabır ve güleryüzle dizen mürettip Tayfur Lâçin'e, baskı operatörü Şâkir Çelik'e, Fen Fakültesi Matbaasının emekleri geçen diğer personeline ve Matbaa Müdürü Mehmet Mardinligil'e en kalbî teşekkürlerimi ifâde etmekten büyük haz duymaktayım.

Üsküdar, Mart 1982 — Ahmed Yüksel ÖZEMRE

I. BÖLÜM

Geceyi ve gündüzü ve güneşi ve ayı yaratan O'dur. Herbiri bir yörüngede yüzer durur (XXI; 33) — Güneş ve ay bir hesaba göredir (LV; 5)
KUR'ÂN

KLÂSİK GRAVİTASYON TEORİSİ

Bu bölümün amacı, klâsik gravitasyon teorisinin temel ilkelerini kısaca sergilemek, sınırlarını vurgulamak ve böylece, gravitasyonun rölâtivist teorilerinin sonuçlarının derinliğine anlaşılabilmesi için uygun bir mukaayese temeli oluşturmaktır.

(I.1) KLÂSİK GRAVİTASYON TEORİSİNİN TEMELLERİ

Semekandlı Türk astronomu Sultan *ULUĞ BEY*'in (1394-1449) uzun gezegen gözlemlerine dayanarak hazırlamış olduğu, gezegenlerin gökyüzündeki durumlarını belirten cetvellerinin Danimarkalı astronom *TYCHO BRAHE*'nin (1546-1601) sâhip olduğu araçlar ve gözlem olanaklarıyla olgunlaştırılmış bir şekilde Bohemyalı astronom *JOHANNES KEPLER*'e (1572-1630) intikaal etmesi sonucu *KEPLER*'in bu cetvellerden, hâlen kendi adıyla anılan, üç kaanun çıkarmış olduğu bilinmektedir.

Tamâman kinematik mâhiyetli olan bu kaanunların 1. ve 2. sinden hareketle, yörüngesi Güneşi odaklarından biri kabul eden bir elips olan herhangi bir gezegenin haiz olduğu ivmenin yalnızca Güneşe yönelik ve de

$$\mathbf{a} = -\frac{h^2}{p}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \quad , \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{I.1.1}$$

şeklinde Güneş ile kendisi arasındaki r uzaklığının karesiyle ters orantılı olduğunu göstermek mümkündür [1].

Bu (I.1.1) ifâdesindeki p ve h^2 her ne kadar göz önüne alınan gezegen yörüngesinin karakteristik büyüklükleri iseler de, 3. *KEPLER* kaanûnunu göz önünde bulundurarak, h^2/p oranının Güneş etrafında dolanan her gezegenin yörüngesi için aynı değeri haiz olduğunu göstermek de mümkündür. Buna göre, $M_\odot$ ile Güneşin gravitasyon kütlesini ve G ile de uygun bir sâbiti göstererek

$$\frac{h^2}{p} = GM_\odot \tag{I.1.2}$$

vaz edilebilir, ve gezegenin ivmesi de

$$\mathbf{a} = -\frac{GM_\odot}{r^2}\,\mathbf{e}_r \tag{I.1.3}$$

şekline girer.

Dinamik görüş açısından da m eylemsizlik kütlesini haiz bir gezegen üzerine etkiyen kuvvetin ifâdesi

$$\boxed{\mathbf{K}(\mathbf{r}) = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G\,M_\odot m}{r^2}\,\mathbf{e}_r} \tag{I.1.4}$$

olacaktır. Bu ifâde küresel koordinatlarda

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta = -GMr^{-2}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = 0$$

olur. Hareketin düzlemsel olduğu göz önünde tutulacak olursa $\theta = \pi/2$ ve $\dot{\theta} = 0$ için bu denklemler

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -GM_\odot r^{-2} \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{I.1.5}$$

şekline indirgenmiş olurlar. İkinci denklem merkezil kuvvetler için geçerli olan *alanlar kaanûnu*nun diferansiyel ifâdesinden başka bir şey değildir. h ile gene *alanlar sâbiti*ni göstererek

$$r^2\dot{\varphi} = h$$

bulunur. Buradan ise

$$\frac{d}{dt} = \frac{h}{r^2}\,\frac{d}{d\varphi}$$

yazılabilir. Buna göre ve $u = 1/r$ vaz ederek (I.1.5) den

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} \quad , \quad p = \frac{h^2}{GM_\odot}} \tag{I.1.6}$$

olur. Bu âdî diferansiyel denklemin genel çözümü de, e ve φ_0 ile iki integrasyon parametresini göstererek,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left[1 - e\cos(\varphi + \varphi_0)\right] \tag{I.1.6'}$$

dır. Bu ifâde kutupsal koordinatlar cinsinden bir koniğin denklemidir. $0<e<1$ hâli yörüngenin bir elips, $e=1$ hâli bir parabol ve $e>1$ hâli de bir hiperbol olmasına tekaabül eder; φ_0 ise yörüngenin eksenlere göre konumuyla ilgilidir. Koordinat eksenlerinin uygun bir dönmesi aracılığıyla φ_0 ın değerini sıfır olarak seçmek her zaman mümkündür.

Kısaca özetlemek gerekirse *KEPLER* kaanunları Güneşin cıvarında, ifâdesi (I.1.3) ile verilen bir **ivme alanının** tanımına denktirler. Bu ivme alanını, dinamik görüş açısından, *m* eylemsizlik kütlesini haiz bir gezegen için bir **kuvvet alanı** olarak da yorumlamak mümkündür. Bir taraftan bu kuvvetin bir çekim kuvveti olduğunu, diğer taraftan da (I.1.4) ifâdesinin hem Güneşin hem de gezegenin kütlesi bakımından simetrik bir görünüm arz ettiğini göz önünde bulundurursak (I.1.4) ifâdesinin *sanki* güneşin gezegene uyguladığı bir çekim kuvvetini temsil ediyormuş gibi yorumlanabildiği kadar *sanki* gezegen de Güneşe bir çekim kuvveti uyguluyormuş gibi ·rumlanabilmesinin mümkün olduğuna işâret etmek gerekir.

Evrendeki sayılamıyacak kadar kalabalık olan gök cisimlerinden ancak biri olan Güneşin, kendi cıvarındaki gezegenler üzerine uyguladığı bu çekim kuvvetinin tekeline sâhip olamıyacağını ilk sezen *NEWTON* (1642-1727) olmuştur. *NEWTON* 1666 da bu çekim kaanûnunun yalnızca Güneş ile gezegenlere özgü olmayıp Evrendeki bütün cisimler için geçerli olduğunu ; ve, artık *G* ile yalnızca Güneş sistemi için değil fakat tüm Evren için geçerli bir **evrensel sâbiti** gösterek, m_1 ve m_2 kütlelerini haiz, $\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_2$ yervektörlü, noktasal ya da aralarındaki $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ uzaklığı kendilerinin boyutlarına göre çok büyük olan iki cisim arasında

$$\boxed{\mathbf{K} = -\frac{G\,m_1\,m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}\,\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}} \tag{I.1.7}$$

şeklinde; yâni her cismin kütlesiyle doğru ve aralarındaki uzaklığın karesiyle de ters orantılı bir **gravitasyon kuvvetinin** (**çekim kuvvetinin**) mevcûd olduğunu temel bir varsayım olarak kabul etmiştir.

Lâboratuvarda yapılan deneylerle G evrensel sâbitinin değerinin

$$G = 6{,}674.10^{-11}\ m^3.\ kg^{-1}.\ san^{-2}$$

olduğu tesbit edilmiştir.

Noktasal değil de sonlu yaygınlığı haiz cismlerin cıvarlarında oluşturdukları çekim alanlarının özelliklerini inceleyebilmek, ve bu alanların noktadan noktaya değişimlerini tesbit etmek üzere gravitasyonun alan teorisini oluşturmak gereklidir. Bir gravitasyon alanının belli bir noktadaki etkisi o noktaya yerleştirilmiş birim kütleli sükûnetteki bir **test tâneciği** üzerine bu alanın uyguladığı gravitasyon kuvveti aracılığıyla saptanır.

Uzayda belirli bir O orijinine göre test tâneciğinin haiz olduğu yervektörünü $\mathbf{r}$; gravitasyon alanını saptamak istediğimiz cismin noktalarının değişken yervektörünü $\mathbf{r}'$; cismin yoğunluğunu $\rho = \rho(\mathbf{r}')$ ve hacmını da V ile gösterelim. Cismin sonsuz küçük bir $d^3\mathbf{r}'$ hacım elemanındaki $dm(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}'$ kütlesinin, evrensel gravitasyon kaanûnuna göre, test tâneciği üzerine icrâ edeceği $d\mathbf{g}$ elemanter gravitasyon kuvveti

$$d\mathbf{g} = -\frac{G\, dm(\mathbf{r}')\,.\,1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\;\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

dür. Cismin $\mathbf{r}$ deki test tâneciği üzerindeki tüm etkisi, cismi oluşturan bütün kütle elemanlarının ortak katkılarından ibârettir :

$$\mathbf{g} = -\int_V G\,\frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\;\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,.$$

Bu ifâde, kısaca

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}\,,\mathbf{r}') = (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

vaz ederek,

$$\mathbf{g} = -G\int_V \frac{\mathbf{e}(\mathbf{r}\,,\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \tag{I.1.8}$$

şeklinde de yazılabilir.

$\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ eğer $\mathbf{g}$ gravitasyon alanının türediği gravitasyon potansiyeli ise,

$$\mathbf{g} = -\,\mathbf{grad}\,\Phi \tag{I.1.9}$$

ve

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{I.1.10}$$

olur. Ayrıca $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ ile V hacmını sınırlayan S yüzeyinin normâl birim vektörünü gösterirsek *GAUSS* teoremi aracılığıyla ve de (I.1.8) i göz önünde bulundurarak

$$\int_S \mathbf{g}.\mathbf{n}\, dS = \int_V \mathrm{div}\, \mathbf{g}\, d^3\mathbf{r} = -\int_V \nabla^2 \Phi(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}$$

$$= \int_S \left\{ -G \int_V \frac{\mathbf{e}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\, d^3\mathbf{r}' \right\} . \mathbf{n}(\mathbf{r})\, d^2\mathbf{r}$$

yazılır. Bu eşitliğin en sağ yanındaki integraller belirli integraller olduklarından değerleri, integrasyon değişkenlerinden bağımsızdır. Buna göre $\mathbf{r}$ ile $\mathbf{r}'$ integrasyon değişkenleri kendi aralarında değiş tokuş edilirlerse integrallerin değerleri bu değişiklikten etkilenmeyecektir :

$$\int_V \mathrm{div}\, \mathbf{g}\, d^3\mathbf{r} = -\int_V \nabla^2 \Phi(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r} = -\int_V G\, \rho(\mathbf{r}) \left\{ \int_S \frac{\mathbf{e}(\mathbf{r},\mathbf{r}') . \mathbf{n}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\, d^2\mathbf{r}' \right\} d^3\mathbf{r}. \tag{I.1.11}$$

Sağdaki ifâdede parantez içindeki integralin integrantı, tanımı gereği $d\Omega$ elemanter katı açısından başka bir şey değildir. Hâlbuki kapalı bir S yüzeyi üzerinden $d\Omega$ nın integrali de yalnızca 4π verir. Buna göre (I.1.11) den kolaylıkla

$$\boxed{-\mathrm{div}\, \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\, \rho(\mathbf{r})} \tag{I.1.12}$$

olduğu bulunur. Öte yandan da (I.1.9) dolayısıyla

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{g} = 0 \tag{I.1.13}$$

olduğunu da kaydetmek gerekir.

Gravitasyonunun temel problemi: belirli bir $\rho(\mathbf{r})$ kütle dağılımı için $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ alan şiddetinin tâyinidir. Bunun için en kestirme yöntem (I.1.8) integralini hesaplamaktır. Bir başka yöntem de önce, verilen $\rho(\mathbf{r})$ kütle dağılımının doğurduğu $\Phi(\mathbf{r})$ gravitasyon potansiyelini (I.1.12) *POİSSON* denkleminden tâyin etmek ; ve sonra da (I.1.9) aracılığıyla $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ alan şiddetini hesaplamaktır.

$\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ olduğu hâl için (I.1.12) nin çözümü göz önüne alınan cismin içindeki gravitasyon potansiyelini; ve $\rho(\mathbf{r}) = 0$ olduğu hâl için aynı denklemin çözümü de kendi dışında yarattığı gravitasyon potansiyelini verecektir.

İlginç bir soru da uzayda bir noktada yaratılan gravitasyon potansiyelinin uzayın bir başka noktasında ne zaman hissedileceği yâni gravitasyon alanının etkisinin yayılma hızının ne olduğu sorusudur.

Bu soruyu cevaplandırmak üzere

$$\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\partial_\nu\,\Phi = \Box^2\,\Phi = -\nabla^2\,\Phi + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

ile belirlenen dalga yayılım denklemini göz önüne alalım(*).

Bu, c hızıyla yayılmakta olan dalgaları ifâde etmektedir. Bunu bilfiil görebilmek üzere basit bir hâli, tek boyutlu hâli göz önüne alalım. Bu takdirde denklem

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

şekline indirgenmiş olacaktır. Bunu çözmek için denklemin

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi = 0 \qquad \text{(I.1.14)}$$

şeklinde de yazılabileceğine işâret edip

$$\xi = x - ct \quad , \quad \eta = x + ct$$

ile belirlenen yeni değişkenler ithâl edelim. Bu takdirde

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

olduğunu ve dolayısıyla da (I.1.14) ün

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$$

şeklinde yazılabileceğini görmek kolaydır. Bunu önce ξ ye göre integre eder ve $f_0(\eta)$ ile de keyfî bir fonksiyon tanımlarsak

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = f_0(\eta)$$

bulunur. Bu ifâde bir kere de η ya göre integre edilirse, f_1 ve f_2 ile keyfî iki fonksiyonu göstererek, neticede

$$\Phi = \int f_0(\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

(*) Bu kitapta sürekli olarak EİNSTEİN'ın toplama kuralı uygulanacak yâni aynı bir monomda eğer aynı bir indis iki kere kullanılmış ise bu, indisin alabileceği bütün değer takımı üzerinden toplam yapılacağına delâlet edecektir. Lâtin harfli indisler daima 1, 2, 3 ve grek harfli indisler de daima 0, 1, 2, 3 değerlerini alacaklardır.

Ayrıca $\eta_{\mu\nu}$ ile 4 boyutlu **öklitselimsi** bir uzay olan MİNKOWSKİ uzayının $(+\,-\,-\,-)$ işâretini haiz: $\eta_{ik} = -\delta_{ik}$ ve $\eta_{\mu 0} = \delta_{\mu 0}$ şeklindeki temel tansörü gösterilmektedir.

bulunur. Bunun mânâsını anlamak için meselâ $f_2 = 0$ ve dolayısıyla $\Phi = f_1(x - ct)$ varsayalım. Buna göre, her $x = sâbit$ düzleminde, Φ alanı zamanın fonksiyonu olarak değişecektir. Kezâ belirli bir t ânı için de Φ değişik x ler için farklı olacaktır. Âşikârdır ki Φ alanı $x - ct = sâbit$ yâni

$$x = sâbit + ct$$

denklemini gerçekleyen bütün (x, t) değer çiftleri için aynı değeri haiz olacaktır. Buna göre alan, meselâ eğer $t = 0$ ânında bir x noktasında belirli bir değeri haiz ise bir t zaman aralığı sonra başlangıçtaki yerden ct uzaklığında gene aynı değeri haiz olacaktır. Yâni x - ekseni boyunca c hızıyla yayılmış olacaktır. $f_1(x - ct)$, bu bakımdan, x - ekseni boyunca pozitif yönde; $f_2(x + ct)$ de gene x - ekseni boyunca fakat negatif yönde ilerleyen bir dalga hareketini tasvir etmektedir.

Dalganın yayılma hızının sonsuza gittiğini varsayalım. Bu takdirde

$$\lim_{c \to \infty} \Box^2 \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

olacaktır. Şu hâlde klâsik gravitasyon teorisine göre gravitasyon potansiyeli alanı kendisini doğuran maddenin dışında sonsuz hızla yâni ânî bir biçimde yayılmaktadır. Buna göre gravitasyon potansiyelinin, klâsik teoriye göre, temas yoluyla değil de **uzaktan etki** yoluyla kendini hissettirdiğinden de söz edilir.

Aynı şekilde

$$\Box^2 \Phi = -4\pi G \rho \qquad \text{(I.1.15)}$$

denkleminin çözümünün de c hızıyla yayılan bir dalga hareketini temsil ettiğini göstermek kaabildir [2]. Gene $c \to \infty$ limiti için (I.1.15) denkleminin (I.1.12) *POİSSON* denklemine gittiği ve dolayısıyla bir cismin kendi içinde oluşturduğu gravitasyon alanının da, klâsik gravitasyon teorisine göre, ânî olarak yayıldığı görülebilir.

(1.2) KLÂSİK GRAVİTASYON TEORİSİNİN SINIRLARI

Klâsik gravitasyon teorisi Arz üzerindeki hareketlerin incelenmesi, özellikle serbest düşüş ve mermilerin hareketlerinde; gezegenlerin, uyduların ve diğer gök cisimlerinin yörüngelerinin tâyininde çok başarılı olmuş; ve hattâ Uranus gezegeninin hareketinde teoriye uymayan bazı pertürbasyonların varlığının sebebinin ancak Uranus'un ötesinde bulunabilecek bir başka gezegen olabileceği varsayımından hareketle böyle bir gezegenin Uranus üzerinde gözlenen pertürbasyonları doğurabilmesi için, teorik hesaplarla, yörüngesinin, kütlesinin ve belirli bir ânda gökyüzünde nerede gözlenebileceğinin tâyinini dahi mümkün kılmıştır. *J.ADAMS* (1819-1892) ve *U. Le VERRİER* (1811-1877) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak yapılan bu hesaplar sonucu Neptün gezegeni gerçekten de hesapların öngördüğü biçimde keşfedilmiştir.

Aynı hikâye, bu asırda, bu sefer Neptünün mâruz kaldığı tesbit edilen pertürbasyonlardan hareketle *PARCİVAL LOWELL*'in (1855-1916) yapmış olduğu hesaplar sonucu bu pertürbasyonlara sebep olan Pluton gezegeninin gözlemsel olarak keşfedilmesiyle de tekerrür etmiştir.

Klâsik gravitasyon teorisinin bütün bu parlak başarılarına rağmen ortaya, bu teori çerçevesi içinde açıklanamayan bazı durumlar da çıkmıştır.

Astronomlar özellikle Merkür, Venüs, Arz gibi Güneşe yakın gezegenlerin yörüngelerinin, Güneş sisteminde hâsıl olan karşılıklı etkileşmeler sonucu ortaya çıkan pertürbasyonlar nedeniyle, tam anlamıyla kapalı yörüngeler olmadıklarını ve bir gezegenin yörüngesinin Güneşe en yakın noktası olan *perihel noktasının* gezegenin Güneş etrafındaki her dolanımı sonunda bir önceki durumuna nisbetle bir $\delta\varphi$ açısı kadar ilerlemiş olduğunu tesbit etmişlerdir. **Perihel noktasının ilerlemesi** diye bilinen bu olay bilhassa Merkür için oldukça bârizdir. *NEWTON*'un klâsik gravitasyon teorisine dayanarak yapılan pertürbasyon hesapları sonucu, Merkürün perihel noktasının bir yüzyıl sonundaki kümülâtif $\Delta\varphi_N$ ilerleme mikdarının

$$\Delta\varphi_N = 5557{,}62'' \pm 0{,}20''$$

olması gerekmektedir. Bu değerin hemen hemen 5025″ lik kısmı Arza bağlı koordinat sisteminin rotasyonundan, ve 532″ lik kısmı da Venüs, Arz, Jüpiter v.s. gibi diğer gezegenlerin Merkür üzerinde icrâ ettikleri pertürbasyonlardan ileri gelmektedir.

Ancak, 18. yüzyılın ikinci yarısındanberi muntazaman yapılagelmiş Merkür gözlemlerinin kayıtlarından, perihel noktasının bir yüzyılda gözlenen $\Delta\varphi_{göz}$ kümülâtif ilerlemesinin

$$\Delta\varphi_{göz} = 5600{,}73'' \pm 0{,}41''$$

olduğu tesbit edilmiştir. Aradaki

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{göz} - \Delta\varphi_N = 43{,}11'' \pm 0{,}45''$$

farkı klâsik gravitasyon teorisi çerçevesinde bir açıklama bulamayan bir **anormal ilerleme** olarak ortaya çıkmaktadır.

Aşağıdaki cetvelde Merkürün, Venüsün, Arzın ve bir de Mars ile Satürn arasındaki küçük gezegenlerden biri olan İkarüsün perihel noktalarının bir yüzyıldaki "anormal" ilerlemeleri özetlenmiştir :

Gezegen	Güneşe uzaklığı (10^6 km)	Dolanım/Yüzyıl	$\Delta\varphi$
Merkür	57,91	415	43,11″ ± 0,45″
Venüs	108,21	147	8,4″ ± 4,8″
Arz	149,60	100	5,0″ ± 1,2″
İkarüs	161,00	89	9,8″ ± 0,8″

Buna göre gezegen Güneşe ne kadar yakınsa anormal perihel ilerlemesinin de o kadar büyük olduğu görülmektedir.

Merkürün perihel noktasının bu anormal ilerlemesini izah edebilmek üzere bazı varsayımlar ileri sürülmüştür. Bunlardan biri, etkisi Merkürün perihel noktasının anormal ilerlemesine sebep olabilecek bir başka gezegen bulunması gerektiğine dair *Le VERRİER*'nin ileri sürmüş olduğu iddiadır. Ancak böyle bir gezegenin doğal olarak kolaylıkla gözlenmesi gerekmesine rağmen hiç gözlenememiş olması karşısında sonradan, gözlenmesi kolay bir gezegen yerine minik gezegenlerden oluşan bir halkanın aynı etkiyi yaptığı savunulmuştur. Fakat böyle bir gezegenler halkası varsayımı, Merkürün perihel noktasının bir yüzyılda 43,11″ lik anormal ilerlemesini izah edebilecek bir sebep teşkil etse bile Venüs, Arz ve İkarüsünkilerini izah edememekte olduğundan terkedilmiştir.

Bir başka izah imkânının da Güneşin söz konusu 43,11″ lik farkı izah edebilecek kadar basık olması olduğu savunulmuştur. Böyle bir varsayım eğer gerçek olsaydı Merkürün düğüm noktasının da hemen hemen aynı oranda gerilemesine yol açacaktı. Böyle bir olay gözlenmemiş olduğu gibi *R.H.DİCKE* ve *H.M.GOLDENBERG*'in [3] Güneşin basıklığını tesbit etmek üzere yapmış oldukları hassas ölçümler de Güneşin, Merkürün 43,11″ lik *anormal* bir ilerlemesine sebep olacak kadar basık olmadığını göstermiştir (*bk.* XI. BÖLÜM).

Meseleye *NEWTON* teorisi çerçevesi içinde bir çözüm getirmeyi amaçlayan bir başka varsayım da Güneşin, kendi zodyak ışığına yataklık eden seyrelmiş bir gazla çevrili olduğu ve bunun Arzın yörüngesinden çok uzaklara kadar uzanabildiği varsayımıdır. Fakat bu varsayımın diğer gezegenlerin perihel noktalarının anormal ilerlemelerinin de izahını oluşturabilmesi için, söz konusu gazın çok özel bir yoğunluk dağılımına sâhip olmasının gerekli olduğu ortaya konmuştur. Ancak, bu kadar keyfî bir dağılımı içeren bir varsayım, söz konusu dağılımın niçin böyle olduğu sorusunu cevapsız bıraktığından, epistomoloji yönünden tatminkâr bir açıklamaya temel teşkil etmemektedir.

Meseleye *NEWTON*'un gravitasyon kaanûnunu tâdil ederek bir çözüm getirmek isteyen teşebbüsler de başarılı olamamıştır. Bunlardan biri gravitasyon kaanûnunun, $n \neq 2$ olmak üzere,

$$K(r) = -\frac{GM_{\odot}m}{r^n}$$

şeklinde olması varsayımına ve n nin de Merkürün perihel noktasının anormal ilerlemesini açıklayacak biçimde saptanmasına dayanmaktadır. Gerçekten de eğer $n = 2{,}000\ 000\ 16$ alınacak olursa bu kaanun çerçevesi içinde söz konusu anormal ilerlemeye doğal bir izah bulmak mümkün olmaktadır. Ancak göstermek kaabildir ki bu takdirde yalnız Merkürün değil fakat Güneş sistemindeki bütün gezegenlerin perihel noktalarının bir yüzyılda tam 43,11″ lik bir açı kadar gerilemeleri gereklidir. Bu ise gözlemlerle açık bir çelişki içindedir.

Diğer bir teklif de gravitasyon kaanûnunu

$$K(r) = -\frac{GM_{\odot}m}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r^n}\right) \qquad (n = 3,\ 4 \text{ veyâ } 5)$$

şeklinde tâdil etmektir. Ancak, bu hâlde de tıpkı bir önceki hâlde olduğu gibi, α ve n parametrelerinin değerlerinin, bütün gezegenlerin perihel noktalarının gözlenmiş olan anormal ilerleme mikdarlarını aynı zamanda izah edebilecek biçimde seçilebilmesi imkânı olmadığı gösterilmiştir. (*NEWTON gravitasyon kaanûnunu tâdil ederek gezegenlerin perihel noktalarının ilerlemesini formel bir şema içine oturtmaya yönelik teklifler ve araştırmalar hakkında derli toplu özet bir bilgi ve ayrıntılı bir referans listesi H.Arzeliès tarafından verilmiştir* [4]).

Bu duruma göre bütün gezegenlerin perihel noktalarının anormal ilerlemelerini klâsik gravitasyon teorisi çerçevesi içinde tek bir sebebe bağlı olarak basit bir biçimde açıklamanın olanaksız olduğunu; ve hattâ bu teoriyi tâdil ederek bu olayı açıklığa kavuşturmayı amaç edinen bir takım *ad hoc* (amaca uydurulmuş) varsayımların da başarıya ulaşamadığını görmüş bulunmaktayız.

Gezegenlerin perihel noktalarının anormal ilerlemeleri hakkındaki gözlem sonuçlarının klâsik gravitasyon teorisiyle bağdaşmaması, bu durum karşısında çıkarılması gereken yegâne epistemolojik sonuç olarak şunu telkîn etmektedir: "*NEWTON*'**un Klâsik Gravitasyon Teorisi tam ve kendi kendine yeterli bir teori değildir. Bütün bilinen gravitasyon olaylarının tam ve kendi kendine yeterli bir açıklamasını ve öngörüsünü takdim edecek daha üst düzeyde bir teori, bir takım amaca uygun sun'î varsayımların klâsik teoriye ithâliyle değil fakat ancak klâsik teorinin dayandığı temel kavramlar ve genel formel alt yapıda gerçekleştirilecek temelli değişiklikler yardımıyla kurulabilir.**"

II. Bölümde **Özel Rölâtivite Teorisi (ÖRT)** çerçevesi içinde konunun nasıl ele alınabileceği husûsunda teklif edilmiş olan çeşitli teorileri kısaca gözden geçireceğiz. Hepsi de 4 boyutlu *öklitselimsi MİNKOWSKİ* uzayında *LORENTZ*-invaryansını haiz, ve çoğu da lineer birer gravitasyon teorisi olmak vasfına sâhip bulunan bu teorilerin arz ettikleri bütün özelliklerini ve vechelerini bu kitapta yansıtmak söz konusu değildir. Bu itibarla II. Bölümün sonuna, bu boşluğu doldurmak üzere, ayrıntılı bir referans listesi ilâve edilmiştir.

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

1.1. m kütleli bir gezegen, ε küçük bir kemmiyet olmak üzere, eğer $(\varepsilon/r^3)\,\mathbf{e}_r$ şeklinde itici bir pertürbatör kuvvetin etkisi altında kalırsa gezegenin böylece bozulmuş olan hareketinin, gezegenin her tam dolanımında sâbit yıldızların oluşturdukları referans sisteminde perihel noktasının

$$\Delta\phi \simeq \frac{\pi\varepsilon}{mh^2}$$

radyan kadar gerilemiş olmasıyla tezâhür edeceğini gösteriniz.

1.2. *NEWTON* gravitasyon kaanûnunu invaryant bırakan sürekli konform dönüşüm grubunu tesbit ediniz.

REFERANSLAR :

[1] A.Y.ÖZEMRE : **Teorik Fizik Dersleri, Cild: 2 - Klâsik Teorik Mekanik;** 45-49, İ.Ü. Fen Fakültesi, (1976).

[2] L.LANDAU, E. LİFSHİTZ : **The Classical Theory of Fields;** 8. Bölüm, Addison Wesley, (1951).

[3] R.H. DİCKE, H.M. GOLDBERG : *Phys. Rev. Letters,* **18,** 313, (1967).

[4] H.ARZELİÈS : **Relativité Généralisée, Gravitation; Fascicule: II,Le Champ Statique à Symetrie Sphérique,** 108-111 ve 119, Gauthier-Villars; Paris, (1963).

II. BÖLÜM

Errare humanum est!
Lâtin atasözü.

Felix culpa!
Aziz AUGUSTİNUS (354 - 430)

LORENTZ-İNVARYANSLI GRAVİTASYON TEORİLERİ

(II.1) GİRİŞ

Birbirlerine nazaran dönmesiz düzgün doğrusal hareket yapan referans sistemlerinde (*GALİLE sistemleri*'nde) fizik kaanunlarının şeklen invaryant kalacak bir biçimde ifâde edilmesi gerektiğini savunan Özel Rölâtivite İlkesi, bilindiği gibi, aslında *MİCHELSON-MORLEY* deneyinin ışığın boş uzayda izotrop (eşyönlü) ve homogen bir biçimde yayıldığını telkîn eden sonucuna dayanmakta olan "*heuristique*" (yol gösterici) bir ilke olup fiziğin bu anlamda yeniden formülâsyonu için bir program içermektedir. *ALBERT EİNSTEİN* (1879-1955) bu **yol gösterici** ilkenin ışığında bu programı gerçekleştirmiş ve gerek mekaniği gerekse elektromagnetik teoriyi *GALİLE* sistemlerinde invaryant bir biçimde ifâde etmeyi başarmıştı [1]. Bu invaryansı sağlayan dönüşüm formülleri **ÖRT**'nden de bilindiği gibi *LORENTZ* dönüşüm formülleridir.

ÖRT'nin en önemli özelliği hiç bir sinyalin, hiç bir maddî etkinin *c* ışık hızından daha hızlı yol alamıyacağı keyfiyetini temel ilke olarak kabul etmiş olmasıdır. Bu itibarla gravitasyonu **ÖRT** çerçevesi içinde incelerken bu hususu göz önünde bulundurmak gereklidir. Klâsik Gravitasyon Teorisi ile **ÖRT** arasındaki uyumsuzluk, I. Bölümde de işâret etmiş olduğumuz, gravitasyon potansiyeli alanının klâsik teoriye göre sonsuz hızla yayılması keyfiyetinden doğmaktadır. Ayrıca gravitasyonun klâsik alan denklemi olan (I.1.12) ifâdesi de *LORENTZ* dönüşümüne göre invaryant değildir.

Klâsik gravitasyon teorisinin daha doğru bir formülâsyonunu ararken iki şeyi göz önünde bulundurmak gereklidir. Bunlardan biri *NEWTON*'un gravitasyon teorisinin, aradığımız daha mükemmel bir gravitasyon teorisinin mutlaka bir yaklaşımını oluşturması gerekliliği; ikincisi de, en azından, gezegenlerin perihel noktalarının anormal ilerlemelerinin bu teori çerçevesi içinde doğal bir izaha kavuşabilmesidir. Bu itibarla bir kuvvet merkezi etrafında dolanan bir test tâneciğinin yörüngesinin belirlenmesi problemini, ileride gereğini daha da iyi kavrayacağımız vechile, daha geniş bir görüş açısından yeniden ele almamız gerekmektedir.

(II.2) YÖRÜNGE PROBLEMİ

Merkezil bir kuvvetin etkisi altında bu kuvvet merkezi etrafında dolanan bir test tâneciğinin hareket denklemleri için

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -K(r) \tag{II.2.1}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2\,T(r) \tag{II.2.2}$$

$$r^2\dot{\theta} = H(r) \tag{II.2.3}$$

yazılabilir. Bu denklemlerden ilki test tâneciğinin üzerine etkiyen kuvveti, ikincisi kinetik enerjisini ve sonuncusu da tâneciğin yervektörünün birim zamanda süpürdüğü alanı, r radyal uzaklığı cinsinden vermektedir. Klâsik gravitasyon teorisi bahis konusu olduğunda, $K(r) = -GM/r^2$ ile $m = 1$ kütleli test tâneciği üzerine etkiyen çekim kuvveti; $H(r) = h = sâbit$ ile de alanlar sâbiti gösterilecektir. r radyal uzaklık ve θ da yörünge düzlemindeki yervektörünün kutupsal açısıdır.

Bu denklemlerin temsil ettiği yörüngeyi genel şartlarda, yâni $K(r)$, $T(r)$ ve $H(r)$ nin r nin keyfî fonksiyonları olmaları hâlinde inceleyeceğiz.

Aslında bu üç fonksiyonun birbirlerinden tamamen bağımsız olmadıklarını görmek kolaydır. Nitekim (II.2.2) ile (II.2.3) arasında $\dot{\theta} = d\theta/dt$ yi eler de elde edilen denklemi t ye göre türettikten sonra 2 dr/dt ile bölersek

$$K(r) = \frac{H(r)}{r^2}\frac{dH}{dr} - \frac{dT}{dr} \tag{II.2.4}$$

bulunur. Klâsik gravitasyon hâli için $K(r) = -dT/dr$ olacağı görülmektedir.

Yörünge denklemini bulmak için (II.2.3) den

$$\frac{d}{dt} = \frac{H(r)}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$

yazılabileceğine dikkati çektikten sonra $u = 1/r$ vaz ederek bunu (II.2.1) ve (II.2.2) ye uygulayalım; bu takdirde

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{H^2u^2} - \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \frac{d\,(\ln|H|)}{du} \tag{II.2.5}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2T}{H^2} \tag{II.2.6}$$

denklemleri elde edilir. (II.2.6) aracılığıyla (II.2.5) den $(du/d\theta)^2$ elenecek olursa, (II.2.4) ü de göz önünde tutarak,

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{K}{H^2u^2}-\left(\frac{2T}{H^2}-u^2\right)\frac{d(\ln|H|)}{du}=\frac{1}{H^2}\frac{dT}{du}-\frac{2T}{H^3}\frac{dH}{du}=N(u)} \qquad \text{(II.2.7)}$$

bulunur. Bu denklemi gerçekleyen $u=u_0=$ *sâbit* şeklindeki dairesel bir yörüngenin $u_0=N(u_0)$ denkleminin kökü ile belirleneceği (II.2.7) den kolaylıkla görülür. Fakat (II.2.6) ya göre bu kök, aynı zamanda,

$$u_0^2=\frac{2T(u_0)}{[H(u_0)]^2}=\frac{2T_0}{H_0^2}$$

bağıntısıyla da verilmekte olup burada T_0 ve H_0 ile $T(u)$ ve $H(u)$ nun $u=u_0$ daki değeri gösterilmiş bulunulmaktadır. Buna binâen dairesel bir yörüngeden itibâren vukuu bulacak olan herhangi bir $\eta=u-u_0$ sapması da, (II.2.7) de $u=u_0+\eta$ vaz etmek sûretiyle,

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2}+\left[1-\left(\frac{dN}{du}\right)_{u_0}\right]\eta=O(\eta^2) \qquad \text{(II.2.8)}$$

diferansiyel denklemini gerçekleyecektir. Bu diferansiyel denklemi gerçekleyecek olan birinci mertebeden bir sapmanın, A ve θ' ile iki integrasyon sâbitini göstererek,

$$\eta=A\cos\left(\theta\sqrt{1-\left(\frac{dN}{du}\right)_{u_0}}+\theta'\right) \qquad \text{(II.2.9)}$$

şeklinde olacağı ortaya çıkmaktadır. Yörünge büyük ekseninin doğrultusunu gösteren θ' yü her zaman sıfır olarak almak mümkündür.

Perihel noktası r nin minimum ve dolayısıyla da u nun ve η nın maksimum olduğu noktadır. η ise, (II.2.9) a göre, argümenti sıfıra ve 2π ye eşit olduğunda maksimum olacaktır. Eğer φ_P ile bir perihel noktasından hareketle müteakip perihel noktasına varıldığında yervektörünün kutupsal açısındaki değişimi gösterirsek

$$\varphi_P=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{dN}{du}\right)_{u_0}}}=\frac{2\pi}{1-\delta\phi}\cong 2\pi(1+\delta\phi) \qquad \text{(II.2.10)}$$

bulunur. Buradan, eğer $\delta\phi>0$ ise taneciğin perihel noktasının her dolanım sonunda $\delta\phi$ radyan ilerlemiş olacağı; eğer $\delta\phi<0$ ise de her dolanım sonunda $\delta\phi$ radyan kadar gerilemiş olacağı anlaşılmaktadır. Küçük $(dN/du)_{u_0}$ değerleri için

$$\boxed{\delta\phi = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dN}{du}\right)_{u_0}} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{dN}{du}\right)_{u_0}} \tag{II.2.11}$$

olacaktır.

(II.3) *LORENTZ*-İNVARYANSLI GRAVİTASYON TEORİLERİNE GENEL BİR BAKIŞ

İlerideki bölümlerde ayrıntılarıyla inceleyeceğimiz vechile gravitasyonun tutarlı, kendi kendine yeterli, epistemolojik yönden tatminkâr ve gözlemlerle çelişkili olmayan ilk teorisini *A.EİNSTEİN*'ın 1916 da takdîm etmiş olduğu şekliyle **Genel Rölâtivite Teorisi (GRT)** teşkil etmiştir [2].

GRT, gezegenlerin perihel noktalarının *NEWTON* teorisinin açıklayamadığı anormal ilerlemelerini hem yönleri ve hem de her bir gezegen için gözlenmiş değerler bakımından tek bir formüle bağlı ve teorinin doğal bir sonucu olarak öngörmüş olduğu gibi ayrıca o zamana kadar gözlenmemiş olan iki olayın varlığını da haber vermiş ve bu olayların büyüklüklerini veren genel formülleri tesis etmiştir.

Bu olaylardan biri, gök cisimlerinin yakınından geçerken, ışığın yörüngesinin doğrudan sapmasıdır. İlk defa 1919 da bir Güneş tutulmasından yararlanılarak ölçülmüş olan bu olay **GRT**'nin gözlemle uyumluluğunun en önemli testlerinden birini teşkil etmiştir. **GRT**, Güneşin cıvarından geçen ışığın mâruz kalacağı maksimum sapmanın Δ_t teorik değeri olarak, ileride § (VI.5) de de göreceğimiz gibi,

$$\Delta_t = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot} \tag{II.3.1}$$

ifâdesini vermektedir. Bu, Güneş diskine teğet olarak gelen bir ışının sapma mikdarıdır. Bu formüldeki sâbitlerin değerlerini yerlerine koyarak elde edilen $\Delta_t = 1{,}75''$ değeri 1919 dan 1952 ye kadar yapılan gözlemlerde ölçümlerin düzeltilmiş ortalama değeri olarak elde edilmiş olan $\Delta_{göz} = 2{,}03''$ değeri ile % 14 lük izafî bir hatâ ile uyuşum hâlindedir. Işığın gravitasyon alanı tarafından saptırılması diye isimlendirilen bu olayın değerlendirilmesi, kritiği ve zengin bir literatürü *H.ARZELİÈS* tarafından verilmiştir [3].

Söz konusu olan diğer olay da ışığın bir gravitasyon alanından geçerken frekansının azalması olayıdır. **Spektrum çizgilerinin gravitasyon kökenli kızıla kayması** diye de isimlendirilen bu olay ilk defa büyük bir hassasiyetle, 1959 da *R.V. POUND* ve *G.A.REBKA* tarafından [4-5], *MÖSSBAUER* olayına [6-8] dayanılarak ölçülmüştür. *POUND* ve *REBKA*'nın gerçekleştirmiş oldukları deneyin şartları altında **GRT**'ne göre Arz için kırmızıya kaymanın teorik değerinin $4{,}94.10^{-15}$ olmasına karşılık bu yazarların denel olarak bulmuş oldukları değer $(5{,}13 \pm 0{,}51).10^{-15}$ olup bu, görüldüğü gibi, teorik değerle çok iyi bir uyum hâlindedir. Gravitasyon alanında ışığın iki nokta arasında katettiği uzaklık dolayısıyla alan potansiyelinin değişimini $\delta\Phi$, bu nedenle ışığın başlangıçtaki ν_0 frekansındaki değişimini de $\delta\nu$ ile gösterecek olursak **GRT**'nin bu olayın büyüklüğü için tesis etmiş olduğu formül, özellikle Güneş için

$$\frac{\delta\nu}{\nu_0} = \frac{\delta\Phi}{c^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{GM_\odot}{R_\odot} \tag{II.3.2}$$

dir. Bu olayla ilgili dolgun bir literatürü de *M.A.TONNELAT*'da bulmak mümkündür [9].

Bir gezegenin büyük ekseninin uzunluğu $2a$, dışmerkezliği de e ile gösterilirse, **GRT** çerçevesi içinde, gezegenin perihel noktasının, *NEWTON*'un gravitasyon teorisi tarafından izah olunamayan dolanım başına anormal ilerlemesinin teorik değeri de

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{3GM_\odot}{ac^2(1-e^2)} = +\frac{3\mu}{p} \tag{II.3.3}$$

ile verilmektedir (*).

Bu üç olay yâni gezegenlerin perihel noktalarının anormal ilerlemesi, ışığın gravitasyon alanından geçerken sapması ve gravitasyon alanlarında spektrum çizgilerinin kızıla kayması bütün gravitasyon teorileri için öngörmeleri gereken üç test ve teorilerin geçerliliği için de **asgarî ölçütleri** oluştururlar.

GRT'nin sâhip olduğu bütün avantajlara rağmen, gravitasyonu **ÖRT** çerçevesi içine yerleştirmeye yönelik 1916 öncesi çalışmaların somut örneklerine, bu tarihten günümüze kadar da daha birçokları eklenegelmiştir. Bütün bu teorilerin ortak ve kısıtlayıcı yanı hepsinin de fizik kaanunlarının formülâsyonu yönünden *GALİLE* referans sistemlerinin birbirlerine eşdeğer olduklarının ifâdesi olan *LORENTZ* invaryansı üzerine inşâ edilmiş olmalarıdır. Gravitasyonun ille de *LORENTZ*-invaryanslı bir teorisini kurmanın çekici yanı, **GRT**'nde ortaya çıkan lineer olmayan alan denklemlerini çözmenin zorluğu karşısında, bu gibi teorilerin genellikle lineer teoriler olmaları; ve tam anlamıyla lineer olmayanlarının da, hiç değilse $1/c^2$ mertebesinde, matematik bakımından **GRT**'ne nisbetle çok daha kolay muamele edilebilir ifâdelere yol açmalarıdır.

LORENTZ-invaryanslı gravitasyon teorilerinin (**LİGT**'nin) geçerliliklerini iki yönden incelemek mümkündür. Bunlardan biri bu teorilerin gözlemlerle karşı-

(*) $p = h^2/GM = a(1-e^2)$ dir; bunun için bk. *A.Y.ÖZEMRE*: **Teorik Fizik Dersleri, Cild 2 Klâsik Teorik Mekanik,** s.45-49 ve 112. Burada ayrıca $\mu = GM/c^2$ vaz edilmiştir.

laştırılması, ikincisi de aksiyomatik temellerinin epistemolojik açıdan incelenmesidir. İleride de görüleceği vechile **GRT**'nin nisbeten keyfî varsayımlardan arınmış, özellikle her yönden tutarlı ve kendi kendine yeterli tam bir teori olmasına karşılık **LİGT** dayandıkları temel aksiyomlar bakımından büyük keyfîlikler arz edebilmektedirler.

Bütün gravitasyon teorilerini : a) **epistemoloji,** ve b) **matematiksel yapı** açısından da mütâlea etmek mümkündür. Epistemoloji açısından bunları önce: 1) iç-tutarlılığı olan teoriler, ya da 2) kendi kendine tutarsız teoriler diye iki sınıfa ayırabiliriz. Her iki sınıf da, ayrıca: 1) *kendi kendine yeterli* ya da *tam teoriler*; 2) *yetersiz* ya da *eksik teoriler alt sınıflarına ayrılabilir.* Kendi kendine yeterli teoriler, *NEWTON* gravitasyon teorisinin verilerinin değerleri teoriye ithâl edildiğinde yukarıda söz konusu edilmiş olan üç test için de, gözlemlerle uyuşsun ya da uyuşmasın, belirli sayısal değerler öngören teorilerdir. Yetersiz diye nitelendirilen teoriler ise ya: a) ne teorinin kendisinin belirtebildiği ve ne de *NEWTON* gravitasyon teorisinin verileri aracılığıyla belirlenebilen, buna karşılık değerleri ancak olaylara uyacak şekilde usturuplu seçilirse, söz konusu üç test için (veyâ bunlardan bazısı için) sayısal değerler verebilen parametreler ihtivâ eden; ya b) başka fizik kaanûnları veyâ gözlemlerle açıkça çelişik olan, ya da c) içerdikleri büyüklüklerin tasviri eksik olan teorilerdir.

Matematiksel yapı bakımından ise **LİGT**'ni: 1) *POİNCARÉ tipi,* 2) *skaler,* 3) *vektörel* ve 4) *tansörel teoriler* diye dört kategoriye ayırmak mümkündür.

POİNCARÉ (1854 - 1912) tipi teorilerle diğerleri arasında, probleme yaklaşım bakımından, büyük bir metodolojik fark göze çarpmaktadır. Bu birinci tip teorilerde, iki cisim arasındaki çekim kuvvetini aralarındaki uzaklığın karesinin tersiyle orantılı olarak veren *NEWTON* kaanûnunun doğrudan doğruya *LORENTZ*-invaryansını sağlamak sûretiyle klâsik gravitasyon teorisinin **ÖRT** çerçevesine sığdırılmasının hedef alınmasına karşılık diğer teoriler, gravitasyon potansiyelinin gerçeklediği *POİSSON* denklemini ilk bir yaklaşım olarak kabul eden, *LORENTZ*-invaryanslı daha genel bir teori inşâ etmeği amaçlamaktadırlar. Bu teorilerde gravitasyon alanını doğuran kaynak da alanın potansiyeli de ya skaler, ya vektörel, ya da tansörel büyüklükler olarak seçilmekte ve,

$$\Box^2 = \eta^{\mu\nu}\, \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

ile gene *D'ALEMBERT* operatörünü ve $\varkappa$ ile birleşim (kuplâj) sâbitini gösterek, *LORENTZ*-invaryanslı alan denklemleri

$$\left.\begin{array}{lll} \text{skaler teorilerde} & : & \Box^2\Phi = -\varkappa T \\ \text{vektörel teorilerde} & : & \Box^2\Phi_\mu = -\varkappa T_\mu \\ \text{tansörel teorilerde} & : & \Box^2\Phi_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} \end{array}\right\} \qquad \text{(II.3.4)}$$

şeklini almaktadırlar. Buradaki T, T_{μ}, $T_{\mu\nu}$ kaynak fonksiyonlarını göstermektedirler.

D'ALEMBERT diferansiyel operatörünün

$$\vec{\Box} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

şeklindeki bir dörtlü vektörden türeyen $\Box^2 = \vec{\Box} \, . \, \vec{\Box}$ şeklindeki bir invaryant olması ve $c \rightarrow \infty$ için *LAPLACE* operatörüne indirgenmesi, (II.3.4) denklemlerinin ilk yaklaşımlarda (I.1.12) ile verilen *POİSSON* denklemine indirgenmelerini temin eden amaca uygun **LİGT**'nin temelini teşkil etmektdir. Burada önemli olan nokta, tabiîdir ki, kaynak fonksiyonlarının seçimi ve bu seçimin ortaya çıkardığı teorinin ne dereceye kadar geçerli olduğu husûsudur.

Şimdi ayrıntılarına fazlaca girmeden bu teorilerin matematiksel yapılarının temellerini kısaca gözden geçirmek istiyoruz.

(II.4) POİNCARÉ TİPİ TEORİLER

Tarihî bakımdan *LORENTZ*-invaryanslı ilk gravitasyon teorisi 1906 da *H. POİNCARÉ* tarafından tesis edilmiştir [10]. Bu çalışmasında *POİNCARÉ* önce, *denge hâli* eğer referans sistemine bağlı olmayan (*invaryant*) bir özellik ise elektromagnetik kökenli olmayan bütün kuvvetlerin de *GALİLE* referans sistemlerinde tıpkı *LORENTZ* kuvveti gibi dönüşüm kurallarına uymaları gerektiğine işâret etmektedir. Ayrıca gravitasyon etkileşmesinin yayılma hızının da sonlu olmasını tartışan müellif, eğer $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ gibi iki üçlü vektörün temsil ettikleri âdî 3 boyutlu uzayın iki noktasında hissedilen gravitasyon etkisi ile ilgili gecikme zamanı,

$$t_2 = t_1 - \frac{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}{c} \qquad \text{(II.4.1)}$$

şeklinde yalnızca bu iki noktanın koordinatlarının fonksiyonu ise bu yayılma hızının, yegâne *LORENTZ*-invaryanslı hız olan c ışık hızına eşit olması gerektiği sonucuna varmaktadır.

POİNCARÉ bundan sonra *NEWTON*'un gravitasyon kaanûnunu genelleştirerek, çeken noktasal kütlenin sükûnette bulunduğu referans sisteminde, *NEWTON* çekim kuvvetinin uzaklığın karesiyle ters orantılı ifâdesine indirgenen *LORENTZ*-invaryanslı bir kuvvet kaanûnu elde etmek istemiştir.

Dörtlü vektör formalizmi uyarınca *H.MİNKOWSKİ* (1864-1909) uzayında, mûtad olduğu üzere, gene:

$\mathbf{X}_i = (x_{0i} = ct_i \, , \mathbf{x}_i)$ ile (i) noktasının yervektörünü,

$\mathbf{U}_i.\mathbf{U}_i = c^2$ olmak üzere $\mathbf{U}_i = \dfrac{d\mathbf{X}_i}{d\tau_i} = \left(c\gamma_i , \dfrac{d\mathbf{x}_i}{d\tau_i}\right) = (c\gamma_i , \gamma_i \mathbf{u}_i)$ ile (i) noktasının hız vektörünü,

$$\mathbf{K}_i = \left(\frac{1}{c}\frac{dE_i}{d\tau_i} , \frac{d\mathbf{p}_i}{d\tau_i}\right) = \frac{d\mathbf{P}_i}{d\tau_i} = \frac{d(m_i \mathbf{U}_i)}{d\tau_i} \tag{II.4.2}$$

ile (i) noktasına etkiyen kuvvet vektörünü gösterir, ve

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 = = (c\,(t_2 - t_1) , \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = (R_0 , \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \tag{II.4.3}$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt = \frac{dt}{\gamma} = \frac{ds}{c} \tag{II.4.4}$$

tanımlanırsa, (1) ve (2) noktaları göz önüne alındığında, bu tanımlanan dörtlü vektörlerden hareketle

R.R	**K.K**
$\mathbf{R}.\mathbf{U}_1$	**K.R**
$\mathbf{R}.\mathbf{U}_2$	$\mathbf{K}.\mathbf{U}_1$
$\mathbf{U}_1.\mathbf{U}_2$	$\mathbf{K}.\mathbf{U}_2$

invaryantlarını inşâ etmek kaabildir. Bu invaryantlardan sonuncusunun, (II.4.2) hareket denklemi geçerli olduğu takdirde, sıfır olacağı derhâl görülür. Sıfır değerini haiz diğer bir invaryant da **R.R** skaler çarpımıdır. Gerçekten de, eğer (II.4.1) özelliği göz önünde tutulursa

$$\mathbf{R}.\mathbf{R} = R_0^2 - |\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\,|^2 = \{\,c\,(t_2 - t_1)\}^2 - |\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\,|^2 \equiv 0 \tag{II.4.5}$$

olduğu görülür.

Bu dörtlü vektörlerden hareketle şimdi öyle bir kuvvet kaanûnu ifâdesi bulmak istiyoruz ki bu : 1) *LORENTZ* invaryansına sâhip olduğu gibi, üstelik, 2) üzerine etkidiği maddî noktanın sükûnette bulunduğu referans sisteminde de uzaklığın karesinin tersiyle orantılı olan bir ifâdeye indirgensin.

LORENTZ invaryansını sağlamak üzere, yukarıda verilmiş olan invaryant büyüklüklerden $\mathbf{K}_2.\mathbf{U}_2 \equiv 0$ özdeşliğinden yararlanacağız. İkinci şartı sağlayan ifâdenin de

$$\frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R}.\mathbf{U}_1)^3} \tag{II.4.6}$$

şeklinde olduğunu göstermek istiyoruz. Gerçekten de eğer m_2 kütleli maddî noktayı sükûnette bulunduğu referans sisteminin orijininde varsayarsak ($\mathbf{x}_2 = 0$ ve $\mathbf{v}_2 = 0$ olacağından)

$$(\mathbf{R}.\mathbf{U}_1)^3 = \left[R^0 U_1^0 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau_1}\right]^3 = \left[cR^0 + c\mathbf{x}_1 \cdot \frac{d\mathbf{x}_1}{ds_1}\right]^3 = c^3 (R^0)^3$$

ve

$$\frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R}.\mathbf{U}_1)^3} \Rightarrow \frac{R^\alpha}{c^3 (R^0)^3} \Rightarrow \left[\frac{R^\alpha}{c^3 (R^0)^3}\right] = L^{-5} T^3$$

bulunur. Ancak, kuvvetin ifâdesi olarak (II.4.6) yı alamayız; zira $\mathbf{U}_2$ ile skaler olarak çarpıldığında bu ifâde özdeş olarak sıfır olmaz. (2) numaralı maddî noktanın sükûnette bulunduğu referans sisteminde bir çarpan yaklaşıklığıyla *NEWTON*'un çekim kaanûnuna indirgenen (II.4.6) ifâdesinden hareketle $\mathbf{K}_2.\mathbf{U}_2 \equiv 0$ bağıntısını sağlamak için (II.4.6) ya

$$-\frac{(\mathbf{R}.\mathbf{U}_2)\,\mathbf{U}_1}{(\mathbf{R}.\mathbf{U}_1)^3\,(\mathbf{U}_1.\mathbf{U}_2)}$$

ifâdesini eklemenin kâfî geleceği kolayca görülmektedir. Buna göre hareket denklemi de

$$m_2 \frac{d\mathbf{U}_2}{d\tau} = -Gm_1 m_2 c^3 \left\{ \frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R}.\mathbf{U}_1)^3} - \frac{(\mathbf{R}.\mathbf{U}_2)\,\mathbf{U}_1}{(\mathbf{R}.\mathbf{U}_1)^3\,(\mathbf{U}_1.\mathbf{U}_2)} \right\} \tag{II.4.7}$$

şeklinde olacaktır. Buradaki $-Gm_1m_2c^3$ katsayısı *NEWTON* çekim kaanûnuyla uyumu sağlamak üzere ithâl edilmiştir. Bu hareket denklemini hesaplar için daha elverişli bir şekle dönüştürmek için, $i = 1,\ 2$ olmak üzere,

$$\mathbf{R}.\mathbf{U}_i = \eta_{\mu\nu} R^\mu U_i^\nu = \eta_{\mu\nu} (\mathbf{x}_2^\mu - \mathbf{x}_1^\mu) \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i} = c\,\eta_{\mu\nu} (x_2^\mu - x_1^\mu) \frac{dx_i^\nu}{ds_i} = c\,\rho$$

ve

$$\chi = \eta_{\mu\nu} U_1^\mu U_2^\nu$$

vaz edilirse (II.4.7) denklemi, bileşenler cinsinden,

$$\frac{d^2 x_2^\alpha}{ds_2^2} = -\frac{Gm_1}{c^2 \rho_1^3} \left(x_2^\alpha - x_1^\alpha - \frac{c\rho_2}{\chi} U_1^\alpha \right) \tag{II.4.8}$$

şekline girer.

Bu denklemin özel halleri *MİNKOWSKİ* [11], *LORENTZ* [12], *SOMMERFELD* [13] tarafından ve daha genel halleri de *De SİTTER* [14], *KOTTLER* [15], *WHİTROW* ve *MORDUCH* [16] tarafından incelenmiştir. Bu sonuncu iki müellifin vermiş oldukları *POİNCARÉ* tipi daha genel bir teorideki hareket denklemi, n ile bir parametreyi göstererek,

$$\frac{d^2x_2^\alpha}{ds_2^2} = -\frac{Gm_1}{c^2\rho_1^3}\left(\frac{\chi}{c^2}\right)^n\left(x_2^\alpha - x_1^\alpha - \frac{\rho_1}{\chi}U_1^\alpha\right) \tag{II.4.9}$$

şeklindedir.

(II.4.9) denklemiyle karakterize edilen *POİNCARÉ* tipi teoriler klâsik üç test için ilgi çekici sonuçlar verirler. Bu denklemde eğer $n<2$ alınacak olursa, teori, gravitasyon alanlarında spektrum çizgilerinin herhangi bir kaymaya mâruz kalmayacaklarını ve ışığın da bir sapma göstermeyeceğini öngörür. Teori n nin değeri ne olursa olsun, bir gezegenin perihel noktasının **GRT**'nin öngördüğü ve gözlemle de doğrulanmış bulunan değerinin $n/6$ sı kadar ilerlemesini öngörmektedir. $n>2$ için teorinin ne kızıla kayma olayının ve ne de ışığın sapması olayının büyüklüğünü hesaplamaya müsait olduğu saptanmıştır. $n=2$ hâlinde ise teorinin kızıla kayma olayı için, **GRT** ile aynı büyüklüğü vermesine karşılık, ışığın sapması için öngördüğü değer **GRT'**ninkinin yarısıdır.

POİNCARÉ tipi teorilerin içerdikleri kavramsal mahzurların başlıcası belki de bunların gravitasyon alanlarının enerji yoğunluğu için pozitif definit bir ifâde vermemeleridir. Kezâ bu tipten teorilerde kuvvetin türetilebileceği bir impuls-enerji tansörü veyâ bir potansiyel fonksiyonu da tanımlanamadığından teoriyi bir aksiyon ilkesi aracılığıyla bir varyasyon problemi olarak formüle etmek de mümkün değildir [17]. Bu itibarla *POİNCARÉ* tipi gravitasyon teorileri "uzaktan etkileşme" teorileri sınıfına girerler.

(II.5) SKALER TEORİLER

LORENTZ-invaryanslı bütün skaler gravitasyon teorilerinin ortak hareket noktaları, probleme, *POİSSON* denklemini **ÖRT** çerçevesi içinde ifâde etmeye başlamak sûretiyle bir yaklaşım yapmalarıdır. Bu itibarla da bunlar uzaktan etkileşme tipinden teoriler değil, alan teorileridirler. Hepsini de bir varyasyon ilkesi aracılığıyla formüle etmek mümkündür.

Bu yoldaki ilk gayretler *A.EİNSTEİN* [18] ve *M.ABRAHAM*'dan [19-32] gelmiştir.

A. ABRAHAM TEORİSİ

ABRAHAM'ın iki ayrı yönde geliştirmiş olduğu teorisi, *POİSSON* denkleminin **ÖRT** çerçevesi içinde genelleştirilmiş hâli olan

$$\Box^2\Phi = -4\pi G\rho_0$$

denkleminden hareket etmekte ve Φ skaler potansiyelinin ışığın uzaydaki yayılma hızını tâyin ettiği varsayımına dayanmaktadır. Φ gravitasyon potansiyeli ile c ışık hızı arasındaki bağımlılık da, ya: 1) öklitselimsi uzayın metrik yapısını, $c^2 = c^2(x^0, x^1, x^2, x^3)$ varsayımı altında,

$$ds^2 = c^2(x^0, x^1, x^2, x^3)\, dt^2 - dx^i\, dx^i \tag{II.5A.1a}$$

şeklinde tâdil ederken alan denklemlerini

$$\delta \int ds = 0 \tag{II.5A.1b}$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesinden çıkarmak sûretiyle, ya da: 2) uzayın metriğinin

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

şeklinde $\eta_{\mu\nu}$ *MİNKOWSKİ* temel metrik tansörü aracılığıyla belirlendiğini; fakat Φ ile c^2 arasında, α ve c_0 ile iki sâbiti göstererek,

$$c^2 = \alpha - 2c_0\Phi \tag{II.5A.2a}$$

şeklinde bir bağımlılığın varlığını varsayıp alan denklemini

$$\delta \int \exp\left(-\frac{\Phi}{c^2}\right) ds = 0 \tag{II.5A.2b}$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesinden türetmek sûretiyle ortaya konmaktadır.

(II.5A.2a) şartı $\Phi - \Phi^0 \ll c$ olduğu haller için *EİNSTEİN* tarafından [18] tesis edilmiş olan

$$c = c_0 \left[1 - \frac{\Phi - \Phi_0}{c}\right]$$

formülüne eşdeğerdir. Bunun böyle olduğunu da, $c - c_0 = \delta c$ ve $\Phi - \Phi_0 = \delta\Phi$ yazılırsa $\delta c = -\frac{c_0}{c}\,\delta\Phi$ olacağından buradan, integrasyonla (II.5A.2a) yı elde etmekle görmek kaabildir.

Bu teoride, gravitasyon kuvvetinin $-\mathbf{grad}\, c$ ile orantılı olduğu; gravitasyon alan şiddetinin $(1/c).\, |\mathbf{grad}\, c|^2$ ile orantılı olduğu; ve alan denklemlerinin de c cinsinden

$$\square^2 \left(\frac{c^2}{2}\right) = 4\pi G \rho_0$$

şeklinde olduğu kolayca görülür.

Bu teori, (II.5A.1) şekliyle gravitasyon kökenli kızıla kaymayı doğru olarak öngörmekte; ışığın sapması için ve gezegenlerin perihel noktalarının ilerlemesi için de **GRT**'nin vermiş olduğu değerlerin, sırasıyla, 1/2 sini ve 2/3 ünü verebilmektedir. (II.5A.2) şekliyle ise *ABRAHAM* teorisinin bu olaylar için öngördüğü değerler **GRT**'ninkilerin (sırasıyla): aynısı, yarısı ve aynısıdır.

B. NORDSTRÖM'ün TEORİLERİ

NORDSTRÖM 1912-1913 de *POİSSON* denklemini, *LORENTZ*-invaryansına uyan daha genel bir denklemin uzay kısmını oluşturacak bir biçimde genelleştirerek gravitasyonu **ÖRT** çerçevesi içine sokmayı amaçlayan iki ayrı teori teklif etmiştir. Her iki teoride de ışığın hızı sâbit kabul edilmiştir.

1. NORDSTRÖM'ün BİRİNCİ TEORİSİ

Bu teorinin temelinde Φ skaler gravitasyon potansiyelinin, *POİSSON* denkleminin 4 boyutlu uzay-zamana *LORENTZ*-invaryant bir genelleştirilmesi olan

$$\Box^2\Phi = -4\pi G\rho_0 \tag{II.5B.1}$$

denklemi aracılığıyla tâyin edileceği fikri bulunmaktadır. Buradaki G gene evrensel çekim sâbitini, ρ_0 ise sükûnet hâlindeki gravitasyon kütlesi yoğunluğunu göstermektedir. Birim kütle başına gravitasyon kuvvetinin ifâdesi

$$k^\mu = \partial^\mu\Phi = \eta^{\mu\nu}\,\partial_\nu\Phi \;, \; (k^0 = \partial_0\Phi \;, \; k^i = -\partial_i\Phi)$$

ile verilecektir. Buna göre, m eylemsizlik kütlesini haiz bir tâneciğin bir gravitasyon alanındaki hareket denklemi

$$mk^\mu = K^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{d(mU^\mu)}{d\tau} = m\,\partial^\mu\Phi \tag{II.5B.2}$$

olacaktır. Eğer eylemsizlik kütlesinin (II.5B.2) de olduğu gibi skaler bir invaryant olduğu şartını koşarsak, bu bağıntı $K^\mu U_\mu \equiv 0$ özdeşliğini gerçeklemeye müsait değildir. Fakat bu kısıtlayıcı şart kaldırılacak olursa (II.5B.2) denklemi

$$m\,\partial^\mu\Phi = m\frac{dU^\mu}{d\tau} + U^\mu\frac{dm}{d\tau} \tag{II.5B.3}$$

yazılabileceğinden, buradan her iki yanı U_μ ile çarpıp μ üzerinden kontrakte ederek,

$$m\frac{d\Phi}{d\tau} = c^2\frac{dm}{d\tau} \tag{II.5B.4}$$

olduğu bulunur.

Eğer Φ gravitasyon potansiyeli m eylemsizlik kütlesini haiz tâneciğin evren çizgisi boyunca sâbit değilse, $c =$ *sâbit* olduğundan, (II.5B.4) e binâen m eylemsizlik kütlesinin Φ gravitasyon potansiyeline

$$\frac{1}{m}\,\frac{dm}{d\Phi} = \frac{1}{c^2} \tag{II.5B.5}$$

ifâdesi uyarınca bağlı olması gerekir. Bu denklemin çözümü ise

$$\boxed{m = m_0\, e^{\Phi/c^2}} \tag{II.5B.6}$$

dir.

(II.5B.1) denklemi ρ gravitasyon kütlesinin yoğunluk dağılımının Φ gravitasyon potansiyelini doğurduğunu; (II.5B.6) ifâdesi de gravitasyon alanının cisimlerin eylemsizlik kütlelerine tesir ettiğini göstermektedir. Şu hâlde bu teoriye göre, evrendeki bütün cisimlerin doğurdukları tüm gravitasyon alanı herhangi bir cismin eylemsizlik kütlesinin değerine katkıda bulunacak; ya da başka bir deyişle, bir cismin eylemsizliği (atâleti) evrendeki bütün cisimlerin oluşturdukları gravitasyon alanının veyâ kısaca evrendeki diğer bütün cisimlerin fonksiyonu olarak belirlenecektir. Bu ise, kaba hatlarıyla, *MACH* ilkesinin ifâdesinden başka bir şey değildir (*bk. A. Y. ÖZEMRE* : Teorik Fizik Dersleri, Cild 2 - Klâsik Teorik Mekanik, s. 77-79).

(II.5B.3) ve (II.5B.5) aracılığıyla hareket denklemleri olarak

$$\boxed{-\,\partial_\mu \Phi = \frac{dU_\mu}{d\tau} + \frac{U_\mu}{c^2}\,\frac{d\Phi}{d\tau}} \tag{II.5B.7}$$

ifâdesi bulunur. Bu hareket denklemlerinin

$$\delta \int e^{\Phi/c^2} \sqrt{\eta^{\mu\nu} U_\mu U_\nu}\, d\tau = 0$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesinden de çıkartılabileceğine işâret edelim. Bu, eğer e^{Φ/c^2} çarpanından sarf-ı nazar edilirse, serbest bir tâneciğin hareket denklemlerini veren mûtad varyasyon ilkesinin aynıdır. İntegranttaki üstel çarpanın varlığı, bu teorinin yalnızca *LORENTZ*-invaryansını değil, aynı zamanda konform tasvir invaryansını da haiz olduğuna işâret etmektedir. Bu teoride temel metrik tansör, $g_{\mu\nu} = \exp\,(2\Phi/c^2)\;\eta_{\mu\nu}$ şeklinde olup, yalnızca Φ den ileri gelen tek bir serbestlik derecesine sâhip bulunmaktadır.

Şimdi bu teoriye dayanarak, Güneş etrafında dolanan bir gezegenin perihel noktasının hareketini inceleyelim. Bunun için (II.5B.7) hareket denklemlerini kutupsal koordinatlarda yazalım. Gezegenin hareketi düzlemde vukuu bulacaktır. Buna göre ivmenin bileşenleri, noktalı ifâdelerle öz zamana göre türev almaya işâret ederek,

$$\dot{U}_r = a_r = \frac{dU_r}{d\tau} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad , \quad \dot{U}_\theta = a_\theta = \frac{dU_\theta}{d\tau} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad \text{(II.5B.8)}$$

olacaktır. Bu itibarla (II.5B.7) hareket denklemler için, gravitasyon potansiyelinin $\Phi = -GM/r$ şeklinde olduğuna da işâret ederek,

$$\dot{U}_0 = -\frac{U_0}{c^2}\frac{\partial\left(-\frac{GM}{r}\right)}{\partial r}\frac{dr}{d\tau} = -\frac{U_0}{c^2}\frac{GM}{r^2}\dot{r} = -\mu r^{-2}\dot{r}\,U_0 \qquad \text{(II.5B.9)}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{U_r}{c^2}\frac{\partial\left(-\frac{GM}{r}\right)}{\partial r}\frac{dr}{d\tau} - \frac{\partial\left(-\frac{GM}{r}\right)}{\partial r}$$

$$= -\mu c^2 r^{-2}(1 + c^{-2}\dot{r}^2) \qquad \text{(II.5B.10)}$$

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) = -\mu\dot{r}\,\dot{\theta} \qquad \text{(II.5B.11)}$$

ifâdeleri bulunur.

Bu teori çerçevesi içinde gezegenin perihel noktasının hareketini saptamak üzere bu denklemleri (II.2.1-3) denklemlerine benzetmeliyiz. Görüldüğü gibi (II.5B.9-11) denklemleri arasında (II.2.2) denkleminin benzeri eksik bulunmaktadır. Bu eksikliği gidermek üzere, kutupsal koordinatlarda

$$\eta^{\nu\mu} U_\mu U_\nu = \mathbf{U}.\mathbf{U} = U_0^2 - U_r^2 - U_\theta^2 = c^2$$

olmak hasebiyle

$$U_r^2 + U_\theta^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = U_0^2 - c^2 \qquad \text{(II.5B.12)}$$

yazılabildiğine işâret edelim. Öte yandan (II.5B.9) dan kolaylıkla ve k ile bir integrasyon sâbitini göstererek,

$$U_0 = k\,e^{\mu/r} = k\,e^{\mu u} \qquad \text{(II.5B.13)}$$

bulunur. Buna göre de (II.5B.12) den

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2T = k^2 e^{2\mu u} - c^2 \qquad \text{(II.5B.14)}$$

elde edilir. (II.5B.11) de derhâl integre edilebilir, ve h ile bir başka integrasyon sâbitini göstererek,

$$H = h\,e^{\mu u} \tag{II.5.B.15}$$

olur. (II.5B.14) ve (II.5B.15) i (II.2.7) ye vaz ederek $N(u)$ için

$$N(u) = \frac{\mu c^2}{h^2}\,e^{-2\mu u}$$

değeri elde edilir. Buradan hareketle de (II.2.11) e göre, bir dolanım sonunda gezegenin perihel noktasının

$$\delta\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{dN}{du}\right)_{u_0} = -\frac{\mu^2 c^2}{h^2}\,e^{-2\mu u_0} \cong -\frac{\mu^2 c^2}{h^2} = -\frac{\mu}{p} \tag{II.5.B.16}$$

radyan ilerlemiş yâni μ/p radyan gerilemiş olacağı meydana çıkar. Bu değer hem işâreti ve hem de büyüklüğü bakımından gözlemle uyuşmadığından *NORDSTRÖM*'ün 1. teorisi geçerli bir teori değildir. Görüldüğü gibi bu teori perihel noktasının hareketinin yönü için gerileme, büyüklüğü için de **GRT**'ninkinin 1/3 ünü öngörmektedir. Ayrıca, teoriye göre, ışığın gravitasyon alanından geçerken herhangi bir sapmaya mâruz kalmayacağı; buna karşılık, frekansının tıpkı **GRT**'nin öngördüğü kadar azalacağı da gösterilebilir.

2. NORDSTRÖM'ün İKİNCİ TEORİSİ

Birinci teorisinin gözlemlerle uyuşmadığı ve bazı kavramsal güçlükleri de içerdiğini gören *NORDSTRÖM* bu sefer evrensel gravitasyon sâbitinin aslında Φ gravitasyon potansiyeline bağlı olduğu varsayımına dayanan ikinci bir teori geliştirmiştir. Bu teori de, bir önceki gibi, eylemsizlik kütlesinin gravitasyon potansiyelinin bir fonksiyonu (ve üstelik de lineer bir fonksiyonu) olmasını içermektedir. Teorinin hareket denklemleri

$$\delta \int \Phi \sqrt{\eta^{\mu\nu} U_\mu U_\nu}\, d\tau = 0$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesinden de çıkartılabilmektedir. Bu da, tıpkı birinci teoride olduğu gibi, hareket denklemlerine RİEMANNsal konform bir uzayın geodezik eğrileriymiş nazarıyla bakılabileceğine delâlet etmektedir. Bu teoride de temel metrik tansör $g_{\mu\nu} = \Phi^2 \eta_{\mu\nu}$ şeklinde olup, gene Φ den ötürü tek bir serbestlik derecesine sâhiptir.

Bu teori de, her ne kadar ışığın kızıla kayma olayının büyüklüğünü doğru olarak öngörmekte ise de gerek ışığın gravitasyon alanlarında sapmayacağını; gerekse gezegenlerin perihel noktalarının **GRT**'nin verdiği değerin 1/6 sı kadar ve o da ters yönde olmak üzere hareket edeceklerini öngörmüş olması dolayısıyla başarılı ve geçerli bir teori olamamıştır.

Bu teori hakkında daha ayrıntılı bilgi için *NORDSTRÖM*'ün [35], *von LAUE*'nin [36] *EİNSTEİN* ve *FOKKER*'in [37], *WELİNER* ve *SANDRİ*'nin [64], ve *HARVEY*'in [17] çalışmalarına başvurulabilir.

C. WHİTROW VE MORDUCH'un TEORİSİ

WHİTROW ve *MORDUCH*, $u = f(x) = x + qx^2 + \ldots$ olmak üzere,

$$\delta \int \exp\left[-f(\Phi/c^2)\right] ds = 0 \qquad \text{(II.5C.1)}$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesinden çıkartılan genelleştirilmiş bir skaler gravitasyon teorisi vermişlerdir [16]. Bu teori $f(\Phi/c^2) = \Phi/c^2$ seçildiğinde *NORDSTRÖM*'ün 1. teorisine indirgenmektedir. *LİTTLEWOOD* [38] ve *BERGMANN*'ın [39] ayrı zamanlarda vermiş oldukları skaler gravitasyon teorilerini, bu teori $q = 1/2$ için özel hâl olarak kabul etmektedir [40]. *LİTTLEWOOD* ve *BERGMANN*'ın teorileri kızıla kayma olayı için **GRT**'ndeki değerin aynını vermekle beraber, ışığın gravitasyon alanında sapmayacağını ve gezegenlerin perihel noktalarının gerileyeceğini ve bu olayın büyüklüğünün de **GRT**'ninkinin 1/6 sı olacağını öngörmektedirler.

WHİROW ve *MORDUCH* $q = 4$ alındığı takdirde üç klâsik test için de teorinin vereceği sonuçların **GRT**'ninkilerin aynı olduğunu göstermişlerdir. Ancak bu teori q parametresinin fiziksel olarak neye tekaabül ettiğini ve bunun değerinin niçin 4 e eşit olması gerektiğini açıklığa kavuşturamadığından temel bir teori olmak niteliğini haiz değildir ; bu itibarla da fenomenolojik bir teori denemesinden öteye geçememektedir.

Bu arada *BERGMANN*'ın teorisine, mânâ bakımından değilse bile, şekil bakımından çok sıkı bağlı bir teori olan *W.E.THİRRİNG*'in teorisinin [41] varlığını da kaydetmek gerekir. Başlangıçtaki motivasyonu skaler bir gravitasyon teorisi oluşturmak olmayan bu teorinin nasıl bir skaler gravitasyon teorisine yol açacağı *A.L. HARVEY* [17] tarafından tartışılmıştır.

D. MİLNE'in TEORİSİ

Birbiçim genişleyen bir evren modeliyle ilgili olarak farklı bir biçimdeki bir skaler gravitasyon teorisi de *E.A.MİLNE* tarafından teklif edilmiştir [42-43]. Işık hızının sâbit olarak kabul edildiği bu teori her ne kadar daha sonraları *CAMM* [44], *WHİTROW* [45], *WALKER* [46] ve *KROGDAHL* [47] tarafından geliştirilmiş ise de gözlemlere uygun düşmemesi dolayısıyla terkedilmiştir. Gerçekten de bu teori ışığın gravitasyon alanında sapmayacağını öngörmekte; gezegenlerin perihel noktalarının **GRT** ve gözlemlerin verdikleri değerden 1/6 sı kadar gerileyecekleri sonucuna varmakta, kızıla kayma olayı için ise, yapısı gereği, hiç bir şey beyân edememektedir.

(II.6) VEKTÖREL TEORİLER

LORENTZ invaryansını haiz vektörel gravitasyon teorilerinin hareket noktası (Φ^μ ile vektörel gravitasyon potansiyelini, U^μ ile dörtlü hız vektörünü ve ρ ile de maddenin öz yoğunluğunu göstererek) alan denklemlerinin

$$\square^2 \Phi^\mu = -4\pi G \rho_0 U^\mu \tag{II.6.1}$$

şeklinde olduğu varsayımıdır. Bu, *LORENTZ*-invaryanslı bir teori olan *MAXWELL*'in elektromagnetik teorisinin haiz olduğu alan denklemlerinin aynıdır. *MAXWELL* tipi ilk gravitasyon teorisi 1900 da *H.A.LORENTZ* tarafından teklif edilmiştir. [48] Gerek bu tip, gerekse bunu özel hâl olarak kabul eden daha genel vektörel gravitasyon teorilerinin gerek kavramsal açıdan, gerekse gözlemlerle uygunluk bakımından çok zayıf teoriler oldukları gösterilmiştir. Gerçekten de vektörel gravitasyon teorilerine yöneltilebilecek en kesin eleştiri bunların gravitasyon alanlarının enerjisini negatif olarak vermeleri ve klâsik üç testin hiç birisi için doğru bir değer temin edememeleridir.

MAXWELL tipi bir gravitasyon teorisinin hareket denklemlerinin

$$\delta \int (ds - \Phi_\mu dx^\mu) = 0$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesinden çıkartılabileceği gösterilebilir.

Vektörel bir gravitasyon alanındaki bir test tâneciğinin

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$$

dörtlü ivmesinin bileşenlerinin, dörtlü Φ^μ gravitasyon potansiyelinin bileşenlerinin birinci mertebeden türevleri cinsinden lineer ve homogen fonksiyonlar oldukları kabul edilirse, $\Gamma^{\mu\nu\rho}$ ile en fazla U^μ bağlı bir takım katsayılar göstermek üzere

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \Gamma^{\mu\nu\rho}(\partial_\rho \Phi_\nu) \tag{II.6.2}$$

yazılabilir. $U_\mu A^\mu \equiv 0$ özdeşliği $\Gamma^{\mu\nu\rho}$ katsayılarının seçimini sınırlayacak bir şart oluşturmaktadır. Bu takdirde

$$0 = U_\mu A^\mu = U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} = \Gamma^{\mu\nu\rho} U_\mu (\partial_\rho \Phi_\nu) \tag{II.6.3}$$

olacaktır. Şimdi **m, p, q** üç adet keyfî dörtlü vektör olmak üzere

$$\Gamma(\mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{U}) = \Gamma^{\mu\nu\rho}(U)\, m_\mu p_\nu q_\rho \tag{II.6.4}$$

vaz edelim. Bu takdirde $\Gamma(\mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{U})$ skaler büyüklüğünün alabileceği en genel şekil A, B, C, D ve E bir takım sâbit katsayılar ve c^2 de ışığın hızının karesinin değeri olmak üzere

$$\Gamma(\mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{U}) = A(\mathbf{m} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + B c^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{m}) + C c^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{U})$$
$$+ D (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{U}) + E c^2 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} m^\alpha p^\beta q^\gamma U^\delta \qquad \text{(II.6.5)}$$

dır. Bu takdirde $\Gamma(\mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{U})$ skalerini

$$\Gamma(\mathbf{U}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{U}) = \Gamma^{\mu\nu\rho} U_\mu p_\nu q_\rho = 0$$

olacak şekilde seçelim. Buna göre, (II.6.4) den

$$A(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = -(B + C + D)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{U})$$

bağıntısı elde edilir. Ancak, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ tamâmen keyfî iki dörtlü vektör olduğundan bu bağıntının gerçekleşebilmesi için

$$A = 0 \quad \text{ve} \quad B + C + D = 0$$

olmalıdır. Bundan ötürü (II.6.5) ifâdesi de

$$\Gamma(\mathbf{m},\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{U}) = Bc^2 (\mathbf{p}.\mathbf{U})(\mathbf{q}.\mathbf{m}) + Cc^2 (\mathbf{p}.\mathbf{m})(\mathbf{q}.\mathbf{U}) - (B+C)(\mathbf{m}.\mathbf{U})(\mathbf{p}.\mathbf{U})(\mathbf{q}.\mathbf{U}) +$$
$$+ Ec^2 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} m^\alpha p^\beta q^\gamma U^\delta \qquad \text{(II.6.6)}$$

şekline girer. Fakat $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ vektörleri keyfî olduklarından (II.6.5) ve (II.6.6) dan

$$\Gamma^{\mu\nu\rho} = c^2 B \eta^{\mu\rho} U^\nu + c^2 C \eta^{\mu\nu} U^\rho - (B + C) U^\mu U^\nu U^\rho + c^2 E \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} U_\sigma \qquad \text{(II.6.7)}$$

olması gerektiği tesbit edilir. Şimdi

$$\alpha = \frac{1}{2}(B - C)c^2 \quad , \quad \beta = \frac{1}{2}(B + C)c^2 \quad , \quad \zeta = \frac{1}{2} Ec^2$$

ve

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} \quad , \quad H_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu}$$

vaz edilirse (II.6.2) hareket denklemleri

$$\boxed{A^\mu = -\alpha F^\mu_\nu U^\nu + \beta \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{U^\mu U^\nu}{c^2}\right) H_{\nu\rho} U^\rho + \zeta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} U_\sigma F_{\nu\rho}}$$

şekline girer.

Görüldüğü gibi *H.P.ROBERTSON* ve *T.W.NOONAN*'ın vermiş oldukları şekliyle [49], bu genelleştirilmiş vektörel gravitasyon teorisi görünüşte 3 parametre ihtivâ etmektedir. Fakat bu denklemler Güneş etrafnda dolanan bir gezegene uygulanacak olursa gezegenin yörüngesinin hem düzlemsel olması ve hem de Güneşin gezegenin yörünge düzleminin içinde bulunması için $\zeta = 0$ olması gerektiği; ve kezâ , hızların ve zamana göre türevlerin değerlerinin küçük oldukları varsayımı altında *NEWTON* yaklaşımı yapıldığında da $\alpha + \beta = 1$ olduğu saptanır. Buna göre teorideki parametre sayısı bire indirgenmiş olmaktadır [49]. Bu parametreyi β olarak seçersek gezegenin perihel noktasının anormal ilerlemesi için.

$$\Delta\phi = \frac{\mu}{2p}(1 - 4\beta)$$

bulunur. Bu teorinin GRT'nin öngörmüş olduğu değeri verebilmesi için $\beta = -5/4$ ve $\alpha = 9/4$ olarak alınmaları gerektiği görülmektedir. Bu teori ışığın gravitasyon alanlarında sapmayacağı sonucunu vermektedir. Bu teori, ayrıca, spektrum çizgilerinin gravitasyon kökenli kızıla kayması hakkında da $\beta = 0$ olmadıkça $ds = 0$ denklemine herhangi bir ışık (bir foton) tekaabül ettirmenin de mümkün olmadığını içermektedir.

Vektörel gravitasyon teorileri hakkında daha fazla bilgi için *WHİTROW* ve *MORDUCH* [40] ve *KUSTAANHEİMO*'nun [50] çalışmalarına başvurulabilir.

(II.7) TANSÖREL TEORİLER

LORENTZ-invaryanslı tansörel gravitasyon teorilerinin hepsi de *A.EİNSTEİN*'ın, **Genel Kovaryans İlkesi**ne dayanan **GRT**'nden çok daha sonra teklif edilmişlerdir. İleride ayrıntılarıyla inceleyeceğimiz vechile genel kovaryans ilkesi bütün fizik kaanunlarının, birinden diğerine sürekli koordinat dönüşümleriyle geçilebilen bütün referans sistemlerinde şeklen invaryant kalmalarını (bir referans sisteminden diğerine geçildiğinde kovaryant biçimde değişmelerini) içerir. Bu bakımdan fizik kaanunlarının en genel biçimde formülâsyonları için yol gösterici (= *kılavuzlayıcı* = *heuristique*) bir ilke ve hattâ bundan da öteye: bir **p r o g r a m** mâhiyetindedir.

EİNSTEİN'ın Genel Rölâtivite Teorisi m e t r i k bir gravitasyon teorisidir; yâni:

a) dört boyutlu uzay-zamanda iki olay verildi miydi bunlar arasındaki dx^μ koordinat aralıklarından hareketle oluşturulan

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)\, dx^\mu dx^\nu$$

invaryantı, $g_{\mu\nu}$ temel metrik tansörünün belirlediği öz-aralık olup bu, uzay-zamanın geometrik yapısını da tâyin eder;

b) test tânecikleri $g_{\mu\nu}$ temel metrik tansörüne tekaabül eden uzayın geodezik eğrilerini izlerler; ve

c) yerel eylemsizlik sistemlerinde, ya da serbest düşüşe terkedilmiş referans sistemlerinde gravitasyon kökenli olmayan bütün fizik kaanunları **ÖRT**'ndeki şekillerine indirgenirler.

LİGT arasında tansörel teorileri gözden geçirirken bunların **GRT** ile karşılaştırmasını yapmak epistemolojik yönden de bize ışık tutacaktır.

A. WHİTEHEAD'in TEORİSİ

A.N.WHİTEHEAD'in 1922 de teklif etmiş olduğu teori fuzulî parametre ihtivâ etmeyen metrik bir teoridir [51]. Teori, etkileşmelerin belirli bir $g_{\mu\nu}$ gravitasyon metriği aracılığıyla tavsir olunacağından hareket etmekte ve $g_{\mu\nu}$ nün, m_k kütleli çok sayıda tânecik hâlinde

$$\mathbf{R}_{(k)} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{(k)} \quad , \quad \mathbf{R}_{(k)} \cdot \mathbf{R}_{(k)} = R_{(k)\lambda} R^{\lambda}_{(k)}$$

$$d\sigma^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} \qquad \text{(II.7A.1)}$$

$$w_{(k)} = \mathbf{R}_{(k)} \cdot \frac{\mathbf{dX}_{(k)}}{d\sigma}$$

olmak üzere,

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{X}) = \eta_{\mu\nu} - 2 \sum_k m_k \frac{R_{(k)\mu}\, R_{(k)\nu}}{w^3_{(k)}} \qquad \text{(II.7A.2)}$$

ifâdesi ile belirlendiğini kabul etmektedir. Bu takdirde test tâneciklerinin yörüngeleri

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} \qquad \text{(II.7A.3)}$$

olmak üzere

$$\delta \int ds = 0$$

varsayon ilkesi aracılığıyla saptanabilmektedir.

Görüldüğü gibi bu teoride (II.7A.2) tansörel gravitasyon potansiyellerinin belirlediği (II.7A.3) gravitasyon metriği ile (II.7A.1) ile verilen *MİNKOWSKİ* metriği birlikte bulunmaktadırlar. Etkileşmeleri esas tasvir eden $g_{\mu\nu}$ metriği olduğundan $\eta_{\mu\nu}$ *MİNKOWSKİ* metriğinin fiziksel olarak gözlenebilmesi olanağı yoktur. Şu hâlde *WHİTEHEAD* teorisi $\eta_{\mu\nu}$ ve $h_{\mu\nu}$ gibi iki temel tansörlü bir teoridir.

EDDİNGTON, bu teoride tek cisim problemi göz önüne alınırsa sükûnette bulunan küresel simetrik bir kütlenin gravitasyon alanının, u y g u n s e ç i l m i ş b i r k o o r d i n a t s i s t e m i n d e **GRT**'nde elde edilen *SCHWARZSCHİLD* çözümüne indirgenebileceğini göstermiştir [52, 53]. Buna dayanarak *SYNGE* [54], *SCHİLD* [55], ve *WHİTROW* ile *MORDUCH* [16], *WHİTEHEAD*'in teorisinin her üç test için de **GRT**'nin verdiği değerlerin aynını vereceğini göstermişlerdir. Ancak *SCHİLD* sonradan, epistemolojik yönden bu işlemi tenkid etmiştir [56].

SCHİLD'e göre bu işlem hiç de tatmin edici değildir. Eğer bütün fiziksel deneyler $d\sigma$ yı değil de ds yi ölçüyorlarsa pekâlâ $d\sigma$ dan tamâmen vaz geçilip teori bir RİEMANNsal uzay çerçevesi içinde mütâlea edilebilir ki bu da bizi **GTR** tipinde bir teoriye götürür. $d\sigma$ ya yalnızca gravitasyon potansiyellerini tâyine yardımcı olmanın dışında hiç bir fiziksel rolü olmayan bir büyüklük gözüyle bakmak hiç şüphesiz $d\sigma$ nın varlığı için yeterli bir sebep değildir. Bu itibarla, ve özellikle kızıla kayma olayı için, *SYNGE*, *SCHİLD*, *WHİTROW* ve *MORDUCH*'in ittihaz ettikleri bu işlemden bütünüyle vaz geçmek gereklidir. Aksi hâlde, *WHİTEHEAD* teorisine göre, bir saatin işleyişinin saatin mâhiyetine ve saati oluşturan maddî noktaları bir arada tutan kuvvet alanlarının gravitasyon alanıyla etkileşmesine çok kritik bir biçimde bağlı olacağını beklemeliyiz. Nitekim, meselâ, ortaya çıkan kuvvetlerin daha çok elektromagnetik kökenli olduğu bir fotonun bir atomun dış elektronları tarafından yayınlanması olayı ile elektromagnetik kökenli olmayan bir işlem olan bir γ ışınının bir atom çekirdeği tarafından yayınlanması olayı gravitasyon alanına bağlı olacaklar ve atomik bir foton ile nükleer bir fotonun bir gravitasyon alanında mâruz kalacakları kırmızıya kayma olayının büyüklüğü her ikisi için de ayrı olacaktır.

Bu mülâhazalar hiç göz önünde bulundurulmasalar bile *C.M.WİLL*'in 1971 de yaptığı bir hesap *WHİTEHEAD* teorisinin tamâmen saf dışı kalmasına yetmiştir. *WİLL*, nitekim, *WHİTEHEAD*'in teorisine göre evrensel gravitasyon sâbitinin lâboratuvarda ölçülen değeri üzerinde Samanyolunun bir anizotropi yaratacağını ve bunun sonucu olarak da 12 saat peryotlu ve de genliği gözlemlerin müsaade ettiği en alt limitten 200 misli daha büyük gel-git olayları olması gerektiğini hesaplamıştır [57]. Bu ise gözlemlerle tümüyle çelişik bir durumdur. Bu itibarla da *WHİTEHEAD*'in teorisinin bütünüyle geçerli bir teori olamıyacağı anlaşılmış olmaktadır.

B. BİRKHOFF'un TEORİSİ

1943-1944 de teklif etmiş olduğu *LORENTZ*-invaryanslı tansörel gravitasyon teorisinde, *BİRKHOFF*, gravitasyon potansiyelinin

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{r} \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.7.B.1)}$$

gibi ikinci mertebeden simetrik bir $\Phi_{\alpha\beta}$ tansöründen türediğini kabul etmiştir [58, 59]. Bu tansörün maddenin varlığı hâlinde davranışı da

$$\Box^2 \Phi_{\alpha\beta} = \varkappa M_{\alpha\beta} \qquad \text{(II.7B.2)}$$

şeklindeki alan denklemleriyle belirlenmektedir. $M_{\alpha\beta}$ ile bu teoriye mahsus enerji-impuls tansörü gösterilmektedir. Bir test tâneciği üzerine etkiyen kuvvetin ifâdesi ise *a priori*

$$K_\mu = m_e \frac{dU_\mu}{d\tau}$$

olarak kabul edilmiştir. K_μ dörtlü kuvvetinin U_μ dörtlü hız vektörüne dik olması da ($K_\mu U^\mu = 0$), gravitasyon kuvveti olarak

$$K_\mu = m_g U^\lambda U^\nu (\partial_\mu \Phi_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Phi_{\mu\nu}) \qquad \text{(II.7B.4)}$$

şeklinde bir ifâde seçildiğinde sağlanmış olur. Burada m_e ile eylemsizlik kütlesi ve m_g ile de gravitasyon kütlesi gösterilmektedir. *EÖTVÖS-DİCKE-BRAGİNSKİ* [60-63] deneyinin (*EDB deneyinin*) sonucunun paralelinde bir varsayımla bu teoride $m_e/m_g = 1$ kabul edilmekte ve dolayısıyla da test tâneciğinin hareket denklemleri

$$\boxed{\frac{dU_\mu}{d\tau} = U^\lambda U^\nu (\partial_\mu \Phi_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Phi_{\nu\mu})} \qquad \text{(II.7B.5)}$$

şeklini almaktadırlar.

BİRKHOFF $M_{\alpha\beta}$ enerji-impuls tansörünün ifâdesi olarak da

$$M_{\alpha\beta} = \rho U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2} \rho \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{(II.7B.6)}$$

vaz etmiştir.

Şimdi bu teoriyi uygulamak sûretiyle gezegenlerin perihel noktalarının hareketlerini inceleyelim. Hareket düzlemsel olduğundan dörtlü vektörün yalnızca sıfırıncı (ct), birinci (r) ve ikinci (θ) bileşenleri göz önüne alınacaktır; ayrıca da hız vektörü için

$$U_\alpha U^\alpha = U_0 U_0 - U_r U_r - U_\theta U_\theta = c^2 \qquad \text{(II.7B.7)}$$

olacaktır. Hesaplarda harflerin üzerindeki noktalar daima τ öz zamanına göre türeve delâlet edecektir. Buna göre

$$\dot{U}_0 = U^\lambda U^\nu (\partial_0 \Phi_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Phi_{0\nu}) = U^0 U^0 \, \partial_0 \Phi_{00} + U^r U^r \, \partial_0 \Phi_{rr} + U^\theta U^\theta \, \partial_0 \Phi_{\theta\theta} -$$
$$- U^0 U^0 \, \partial_0 \Phi_{00} - U^r U^0 \, \partial_r \Phi_{00} - U^\theta U^\theta \, \partial_0 \Phi_{00} = - U^r U^0 \, \partial_r \Phi_{00} = - U^r (\eta^{0a} U_a) \times$$
$$\times \frac{d(c^2 \mu u)}{du} \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = - U^r \frac{U_0}{c^2} c^2 \mu \dot{u} \frac{1}{U_r} = - U^r U_0 \mu \dot{u} \frac{1}{\eta_{ra} U^a} = \mu \dot{u} \, U_0 \qquad \text{(II.7B.8)}$$

$$\dot{U}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = U^\lambda U^\nu (\partial_r \Phi_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Phi_{r\nu}) = U^0 U^0 \, \partial_r \Phi_{00} + U^\theta U^\theta \, \partial_r \Phi_{\theta\theta}$$
$$= \eta^{0a} U_a \, \eta^{0b} U_b \frac{d(c^2 \mu u)}{du} \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} + \eta^{\theta a} U_a \, \eta^{\theta b} U_b \frac{d(\mu u)}{du} \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} =$$
$$= \frac{U_0}{c^2} \frac{U_0}{c^2} c^2 \mu \dot{u} \frac{1}{U_r} + (- U_\theta)(- U_\theta) \mu \dot{u} \frac{1}{U_r} =$$
$$= \frac{\mu}{c^2} \frac{1}{\dot{r}} \left(- \frac{\dot{r}}{r^2} \right) \left[U_0^2 + c^2 U_\theta^2 \right] = - \frac{\mu}{c^2 r^2} (U_0^2 + c^2 r^2 \dot{\theta}^2)$$
$$\text{(II.7B.9)}$$

$$\dot{U}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = U^\lambda U^\nu (\partial_\theta \Phi_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Phi_{\theta\nu}) = - U^r U^\theta \, \partial_r \Phi_{\theta\theta}$$
$$= - \eta^{ra} U_a \, \eta^{\theta b} U_b \frac{d(\mu u)}{du} \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dr}$$
$$= - (- U_r)(- U_\theta) \mu \dot{u} \frac{1}{U_r} = - \mu \dot{u} \, r \dot{\theta} \qquad \text{(II.7B.10)}$$

bulunur. (II.7B.8) derhâl integre edilir; ve, k bir integrasyon sâbiti olmak üzere,

$$U_0 = k \, e^{\mu u} \qquad \text{(II.7B.11)}$$

elde edilir. (II.7B.10) ise

$$r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{d\tau} = - \mu \dot{u} r \dot{\theta}$$

yazılabileceğinden, h ile gene bir integrasyon sâbitini göstererek,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{d\tau} = - \mu \dot{u} \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad H(r) = h \, e^{-\mu u} \qquad \text{(II.7B.12)}$$

olur. Şimdi gezegenin perihel noktasının ilerlemesini hesaplamak üzere (II.2.7) ve (II.2.11) den $N(u)$ yu ve $\delta\phi$ yi hesaplamamız gerekir. Ancak $N(u)$ nun hesabı için §(II.5) deki gibi önce $2T$ yi hesaplamamız lâzımdır. (II.7B.7) ve (II.7B.11) den

$$2T = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = U_0^2 - c^2 = k^2 e^{2\mu u} - c^2$$

bulunur. Şu hâlde, ve $U_0 = c\gamma$ olduğunu da göz önünde tutarak,

$$N(u) = \frac{1}{H^2}\left\{\frac{dT}{du} - \frac{2T}{H}\frac{dH}{du}\right\} = \frac{\mu}{h^2 e^{-2\mu u}}\left[2\left(k^2 e^{2\mu u}\right) - c^2\right]$$

ve

$$\delta\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{dN}{du}\right)_{u_0} = \frac{\mu^2}{h^2}\left[4\left(k^2 e^{2\mu u_0}\right) - c^2\right] e^{2\mu u_0} = \frac{\mu^2}{h^2}\left(4c^2\gamma^2 - c^2\right) e^{2\mu u_0}$$

$$\cong \frac{3\mu}{\frac{h^2}{\mu c^2}}\left(1 + 2\mu u_0\right) \cong \frac{3\mu}{p} + O\left[\left(\frac{3\mu}{p}\right)^2\right] \qquad \text{(II.7B.13)}$$

sonucu elde edilir ki bu da **GRT**'nin verdiği sonuçla aynıdır.

BİRKHOFF teorisi diğer iki test için de **GTR**'nin verdiği sonuçların aynını temin etmektedir. Ancak, sâdece bunlara bakıp da teorinin **GRT**'nin ciddî bir rakîbi olduğu sanılmamalıdır; zirâ bu teori iki yönden sakattır. Bunlardan birincisi, teorinin sesin yayılma hızının c ışık hızına eşit olduğu (!) sonucuna varmasıdır. Bu tuhaf sonuç (II.7B.6) ile verilmiş olan özel biçimdeki enerji-impuls tansöründen ileri gelmektedir. Nitekim buna göre cisimlerin içindeki basınç, kütle-enerjinin toplam yoğunluğuna eşit bulunmaktadır. Teorinin diğer sakat yanı ise iç çelişkiden arınmış olmayışı, tutarlı bir yapıya sâhip olmayışıdır. *MOSHİNSKY* bu teorinin a-lan denklemlerinden hareket ederek *LAGRANGE* fonksiyonunun ifâdesini ve bunun yol açtığı hareket denklemlerini çıkartmıştır [65]. Ancak bu denklemler teorinin başında *a priori* vaz edilmiş olanlarla aynı değildir. Yâni başka bir deyimle *BİRKHOFF*'un vaz ettiği kuvvet ifâdesi teorinin *LAGRANGE* formülâsyonundan elde edilen sonuçlarıyla (bu arada özellikle toplam enerji-impulsun korunumu ile) uyumlu değildir.

C. BELİFANTE ve SWİHART'ın TEORİSİ

Bu müelliflerin geliştirmiş oldukları *LORENTZ*-invaryanslı tansörel gravitasyon teorisi bir takım parametreler ihtivâ eden ve bunların değerlerini gözlemlerle uygun düşecek biçimde seçen fenomenolojik bir teoridir [66-68]. *LAGRANGE* formalizmine dayanan bu teori birçok yönden, yukarıda tanımını verdiğimiz metrik gravitasyon teorisi modeline uymaz. Gerçekten de, *LEE* ve *LİGHTMAN*'in hesaplarına göre teorinin, bugünkü hassasiyet sınırları göz önüne alındığında, *EÖTVÖS-DİCKE-BRAGİNSKY* (EDB) deneyinin sonucuyla çelişik olduğu ortaya konmuştur. Aynı müellifler teorinin EDB deneyi ile çelişik düşmediği hassasiyet mertebesiyle yetinildiği takdirde teoriyi metrik bir teori olarak yeniden formüle etmenin mümkün olduğunu da göstermişlerdir [69].

LORENTZ - İNVARYANSLI GRAVİTASYON TEORİLERİ İÇİN SİNOPTİK ÖZET CETVEL

* İşaretli teorilerdeki sonuçlar parametrelerin optimal değerlerine göredir.

TEORİNİN Tipi	TEORİNİN İSMİ		PERİHEL İLERLEMESİ	IŞIĞIN SAPMASI	KIZILA KAYMA	TEORİNİN EPİSTEMOLOJİK ÖZELLİKLERİ, AKSAKLIKLARI VE ÇELİŞKİLERİ
	GENEL RÖLÂTİVİTE		1	1	1	Kendi kendine yeterli; tutarlı; metrik ve temel bir teori. Gözlemlere uyuyor.
POİNCARÉ TİPİ	GENEL POİNCARÉ	$n < 2$	n/6	0	0	$n > 2$ için tutarsız; metrik olmayan bir teori; kendi kendine yeterli değil. Alan enerji yoğunluğunu negatif olarak veriyor. Geçerli değil.
		$n > 2$	n/6	—	—	
		$n = 2$	1/3	1/2	1	
SKALER TEORİLER	1. ABRAHAM		2/3	1/2	1	Kendi kendine yeterli, fakat ışık hızını sâbit kabul etmediği için temelde LORENTZ-invaryansıyla çelişik, tutarsız teoriler. Geçerli değil.
	2. ABRAHAM		1	1/2	1	
	1. NORDSTRÖM		—1/3	0	1	Kendi kendine yeterli ve tutarlı teoriler. Ancak gözlemlere uymadıklarından geçerli değiller.
	2. NORDSTRÖM		—1/6	0	1	
	LİTTLEWOOD, BERGMANN		—1/6	0	1	Gözlemlere uymadıklarından geçerli olmayan teoriler.
	WHİTROW, MORDUCH*		1	1	1	Kendi kendine yeterli değil. Optimal sonuçları veren $q=4$ değerininin niçin böyle alinması gerektiğini açıklamıyor.
	MİLNE		—1/6	0	—	Kendi kendine yeterli; ancak kızıla kayma için öngörüde bulunmadığı için geçersiz. [70.]
VEKTÖREL TEORİLER	ROBERTSON, NOONAN*		1	—	?	Kendi kendine yeterli değil. c hızlı tânecik fotonu temsil etmediğinden tutarsız. Alan enerji yoğunluğunu negatif veriyor [49].
	WHİTROW, MORDUCH	$p = 0$	1/6	0	0	Kendi kendine yeterli değil. $p \neq 0$ için tutarsız. Alan yoğunluğunu negatif veriyor. Geçersiz.
		$p > 0$	$(1+2p)/6$	1	—	
	KUSTAANHEİMO*		1	1	1	Yetersiz; ayrıca iç-tutarlılığı da yok. Aynı potansiyeldeki farklı iki nokta için de, fotonlar ve ışık dalgaları için de farklı kızıla kayma veriyor.
TANSÖREL TEORİLER	WHİTEHEAD		1	1	1	Yeterli, tutarlı, çift tansör alanlı teori. 12 saat peryotlu, bilinenden 200 misli şiddetli gel-git öngördüğünden geçersiz.
	BİRKHOFF		1	1	1	Yeterli. NEWTON teorisine indirgenemediği ve ses hızını ışık hızına eşit gördüğü, farklı 2 alan ve hareket denklemi verdiği için iç-tutarlılığa sâhip değil.
	BELİFANTE, SWİHART*		1	1	1	Yetersiz. Metrik bir teori de değil. EDB deneyi ile çelişik. Zayıf eşdeğerlilik ilkesine uymuyor. Geçersiz.

(II.8) LORENTZ-İNVARYANSLI GRAVİTASYON TEORİLERİNİN SİSTEMATİĞİ VE GENEL SONUÇLAR

Bu bölümde kısaca değinmiş olduğumuz *LORENTZ*-invaryanslı gravitasyon teorilerinin klâsik üç teste ne derecede uydukları ve herbirinin bellibaşlı epistemolojik özellikleri, aksaklıkları ve (eğer varsa) çelişkileri sinoptik bir cetvel hâlinde 36. sayfada verilmiş bulunmaktadır.

Bu cetvelde karşılaştırma ölçütü olarak, sonuçları gözlem ve deneylerle uyuşan ve şimdiye kadar da henüz yalanlanmamış temel bir teori niteliğini korumuş olan A. *EİNSTEİN*'ın Genel Rölâtivite Teorisi seçilmiş; karşılaştırmayı kolaylaştırmak amacıyla da **GRT**'nin klâsik üç test için verdiği değerler 1 e indirgenmiştir.

Bir gravitasyon teorisinin geçerliliği konusunda, ileride genel kovaryans ilkesine dayanan gravitasyon teorilerini de incelerken başvuracağımız, bir dizi epistemolojik ölçüt (kriter) uygulamak mümkündür [70]. Buna göre:

1. ÖLÇÜT, göz önüne alınan gravitasyon teorisi

a) iç-tutarlılığa sâhip midir?

b) kendi kendine yeterli midir?

c) en küçük mertebeden yaklaşımda *NEWTON* teorisiyle uyumlu mudur? sorularına olumlu cevap, almakla aşılır. Bu engele : *NORDSTRÖM*'ün teorileri, *LİTTLEWOOD* ve *BERGMANN*'ın teorisi, *WHİTROW* ve *MORDUCH*'ın skaler teorisi, *WHİTEHEAD*'in teorisi ile *BELİFANTE* ve *SWİHART*'ın teorisi dışında kalan bütün **LİGT**'nin takıldıkları görülmektedir.

2. ÖLÇÜT engeli, teorinin

a) ışığın gravitasyon alanlarında kızıla kaymasını doğru olarak öngörmesi, ve

b) *EÖTVÖS-DİCKE-BRAGİNSKY* deneyi sonucu ile uyumlu olmasıyla aşılır.

1. ölçütü aşmış olan teoriler arasından yalnızca *BELİFANTE* ve *SWİHART*'ın teorisinin bu engele takıldığı görülmektedir.

3. ÖLÇÜT, ise

a) ışığın gravitasyon alanlarındaki yayılma doğrultusunun bir doğrudan sapmasını isâbetli bir şekilde öngörmekle aşılır.

Böylece, bu engeli de aşan teorinin yalnızca *WHİTEHEAD*'in teorisi olduğu görülmektedir.

4. ÖLÇÜT, teorinin

a) gezegenlerin perihel noktalarının anormal ilerlemesini doğru olarak öngörmelerinden ibârettir.

WHİTEHEAD'in teorisi bu engeli de aşmaktadır.

5. ÖLÇÜT ise, teorinin

a) Arzdaki gel-git olayları, ve

b) Arzın rotasyon hızının değişimi

gibi jeofiziksel olaylarla çelişkili olmamasından ibârettir.

LORENTZ-invaryanslı gravitasyon teorileri için sonuncu engeli teşkil eden bu ölçütün *WHİTEHEAD*'in teorisine de geçerlilik pasaportu vermediği görülmektedir. Bu itibarla g ö z l e m l e r l e t a m b i r u y u ş u m i ç i n d e b u l u n a n g e ç e r l i t u t a r l ı h i ç b i r L O R E N T Z - i n v a r y a n s l ı g r a v i t a s y o n t e o r i s i y o k t u r.

Yukarıda zikredilmiş bulunan 5 ölçüt **LİGT** arasında geçerli bir teori olup olmadığını anlamak için yeterlidir. Ancak, meseleye, geçerlilik değil de **LİGT** ile **GRT** arasında bir karşılaştırma yapmak açısından bakılır ve **GRT**'nin teorik olarak öngördüğü bütün olayların büyüklükleri **LİGT**'nin öngördükleriyle karşılaştırılmak istenirse, bu takdirde gözlemlerle de gerçeklenmiş bulunan üç klâsik testin ötesinde **GRT**'nin öngördüğü 4 olayın daha göz önüne alınması gerekir. Bunlar: iki cisim probleminde, yâni her ikisi de öz harekete sâhip cisimlerin oluşturdukları ikili sistemlerde, 1) periastron'un, yâni iki gök cisminin birbirlerine en yakın oldukları noktanın, ilerlemesi; 2) kütle merkezinin daha büyük kütleli cismin yörüngesinin periastron noktasına doğru ivmesi; 3) merkezî küresel cismin kendi eksenlerinden birinin etrafındaki rotasyonu dolayısıyla ortaya çıkan "perihel noktasının ek ilerlemesi olayı"; ve 4) gezegenin yörünge düzleminin normalinin merkezî gök cisminin rotasyon ekseni etrafındaki presesyonu olayıdır.

Bu toplam 7 olaya nazaran **LİGT** ile **GRT** arasında bir karşılaştırma yapılırsa, **GRT**'ne yalnızca bu olayların sonuçları bakımından en çok yaklaşan teorinin *WHİTEHEAD*'in teorisi olduğu oraya çıkmaktadır. Bu 4 yeni olay hakkında geniş bilgi için *WHİTROW* ve *MORDUCH*'un konuyu ayrıntılı bir biçimde inceleyen çalışmasına başvurulabilir [40].

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

II.1. Üzerine Güneşin çekim kuvvetinden başka hiç bir kuvvet etkimeyen bir gezegenin perihel noktasının *NEWTON*'un teorisine göre sâbit kalacağını gösteriniz.

II.2. *POİNCARÉ*'nin genelleştirilmiş teorisine göre Güneşin sükûnette bulunduğu referans sisteminde ışığın kırmızıya kaymasını hesaplayınız.

II.3. *POİNCARÉ*'nin genelleştirilmiş teorisi çerçevesi içinde $n = 2$ ve $n < 2$ için ışığın bir gravitasyon alanında doğrudan ne kadar sapacağını tesbit ediniz.

II.4. Birinci *NORDSTRÖM*'ün teorisinde ışığın gravitasyon alanında kızıla kayması olayının büyüklüğünü tesbit ediniz.

II.5. *NORDSTRÖM*'ün birinci teorisinde ışığın gravitasyon alanında doğrudan sapmasının büyüklüğünü hesaplayınız.

II.6. *WHİTROW* ve *MORDUCH*'ın vektörel gravitasyon teorisi genelleştirilmiş *MAXWELL* teorisi tipinde olup, Φ^μ vektörel potansiyeli

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\Phi^\mu = 4\pi\frac{G\rho}{c^2}\frac{dx^\mu}{ds}$$

şeklindeki alan denklemlerini sağlamakta olan bu teorinin hareket denklemleri de

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}=\eta^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial x^\nu}\right)\frac{dx^\lambda}{ds}+p\frac{d\Phi_\nu}{ds}\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{dx^\mu}{dx}\frac{dx^\nu}{ds}\right)$$

şeklindedir. $\eta^{\mu\nu}$ kontravaryant *MİNKOWSKİ* metrik tansörü olup p de bir parametredir. $\Phi^0 = Gm/c^2r$ ve $\Phi^i = 0$ olduğunu göz önünde bulundurarak, bu teori çerçevesinde, bir vektörel gravitasyon alanının ışığın frekansı üzerindeki etkisini hesaplayınız.

II.7. *WHİTROW* ve *MORDUCH*'ın vektörel gravitasyon teorisinde, ışığın gravitasyon alanında sapmasını $p = 0$ için inceleyiniz.

II.8. Silindirik koordinatlarda bileşenleri $(0, 0, g)$ olan statik ve homogen bir gravitasyon alanı veriliyor. **R** ve **U** ile bu alanda bulunan bir tâneciğin dörtlü yer ve hız vektörleri gösterilmektedir. Bu takdirde *NORDSTRÖM*'ün birinci teorisi çerçevesi içinde

1) Önce, $R^0_\mu = (0, 0, 0, 0)$ ve $U^0_\mu = (0, 0, 0, 0, c\gamma)$ başlangıç şartları altında tâneciğin hareket denklemlerini integre ediniz.

2) Sonra da, birbirlerine, kütlesi ihmâl edilen $2L$ uzunluğundaki bir çubukla bağlı iki eşit kütleden oluşan bir halterin $z = 0$ düzlemi içinde, rotasyon merkezi çubuğun ortası ve ekseni de z-ekseni olan bir eksen etrafında sâbit ω_0 açısal hızıyla döndüğünü göz önünde bulundurarak bu kütlelerden her birisi için geçerli olan $R^0_\mu = (L, 0, 0, 0)$ ve $U^0_\mu = (0, L\omega_0\gamma, 0, c\gamma)$ başlangıç şartları altında halterin kütleleri için hareket denklemlerini integre ediniz.

3) Her iki sonucu da karşılaştırarak, bu gravitasyon alanında, dönen cismin dönmeyene nisbetle daha yavaş düşeceğini gösteriniz. Bu sonuca dayanarak "kuvvetli eşdeğerlik" ilkesinin *NORDSTRÖM*'ün birinci teorisi için geçerli olmadığını gösteriniz.

II.9. *POİNCARÉ*'nin genelleştirilmiş teorisine göre Güneşin, orijininde sükûnette bulunduğu bir sisteme göre bir gezegenin perihel noktasının hareketini $n = 2$ ve $n \neq 2$ için inceleyiniz ve **GRT** nin verdiği sonuçla karşılaştırınız.

II.10. Φ^{μ} vektörel potansiyelinin

$$\Phi^{\mu} = -\frac{GM}{c^2 r}\delta_0^{\mu}$$

ile verilmesi hâlinde, *WHİTROW* ve *MORDUCH*'ın gravitasyon teorisi çerçevesi içinde ve $p = 0$ için gezegenlerin perihel noktalarının hareketini inceleyiniz.

II.11. *BİRKHOFF*'un teorisi çerçevesi içinde ışığın R yarıçaplı bir gök cisminin gravitasyon alanındaki maksimum kızıla kaymasını hesaplayınız.

II.12. *BİRKHOFF*'un teorisi çerçevesi içinde, ışığın, gravitasyon alanındaki sapma mikdarını hesaplayınız.

II.13. Aralarındaki etkileşme merkezî gravitasyon etkileşmesi olan iki gök cismi için hareket denklemlerini ve herbirinin perihel noktalarının hareketini veren genel formülü tesis ediniz.

REFERANSLAR

[1] A.EİNSTEİN, *Ann.d.Phys.*, **17**, 891, (1905).

[2] A.EİNSTEİN, *Ann.d.Phys.*, Serie: 4, **49**, 769, (1916).

[3] H.ARZÉLİÈS, **Etudes Relativistes: Relativité Généralisée, Gravitation, Fasc. II- Le Champ Statique à Symetrie Sphérique**, s. 142-172, Gauthier-Villars, (1963).

[4] R.V. POUND, G.A.REBKA, *Phys. Rev. Letters*, **3**, 439, (1959).

[5] R.V. POUND, G.A. REBKA, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 337, (1960).

[6] R.L.MÖSSBAUER, *Z. Phys.*, **151**, 124, (158).

[7] R.L.MÖSSBAUER, *Naturwissenschaften*. **45**, 538, (1958).

[8] R.L.MÖSSBAUER, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 211, (1959).

[9] M.A. TONNELAT, **Les Vérifications Expérimentales de la Relativité Générale**; s. 293-297, Masson et Cie., (1964).

[10] H.POİNCARÉ, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **21**, 129, (1906).

[11] H. MİNKOWSKİ, *Gött. Nachr.*, **53**, (1908) - Phys. Z. c. **10**, 1909, (1980).

[12] H.A.LORENTZ, *Phys. Z.*, **11**, 1234, (1910).

[13] A. SOMMERFELD, *Ann. d. Phys.*, **33**, 649, (1910).

[14] W. De SİTTER, *M.N.R.A.S.*, **71**, 388, (1911).

[15] F. KOTTLER, **Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften**, c. **6/2**; 159, (1922-1934).

[16] G.J.WHİTROW, G.E. MORDUCH, *Nature*, **188**, 790, (1960).

[17] A.L. HARVEY, *Amer. J. Phys.*, **33**, 449, (1965).

[18] A.EİNSTEİN, *Ann. d. Pys.* **35**, 898, (1911). - *Bk.* Henri Arzéliès [3], s. 95, Ref. 4

[19] M.ABRAHAM, *Rend. Accad. Lincei*, **20**, 671, (1911).

[20] M.ABRAHAM, *Phys. Z.*, **13**, 1, 1(912).

[21] M.ABRAHAM, *Phys. Z.*, **13**, 4, (1912).

[22] M.ABRAHAM, *Phys. Z.*, **13**, 176, (1912).

[13] M.ABRAHAM, *Phys. Z.*, **13**, 310, (1912).

[24] M.ABRAHAM, *Phys. Z.*, **13**, 793, (1912).

[25] M.ABRAHAM, *Nuovo Cimento*, 6. seri, **3**, 211, (1912).

[26] M.ABRAHAM, *Arch. Math. Phys.*, 3. seri, **20**, 193, (1912).

[27] M.ABRAHAM, *Nuovo Cimento*, 6. seri, **3**, 459, (1912).

[28] M.ABRAHAM, *Ann.d.Phys.* **38**, 1056, (1912).

[29] M.ABRAHAM, *Ann, d. Phys.* **39**, 444, (1912).

[30] M.ABRAHAM, *Atti Real. Accad. Lincei*, **21**, 27, (1912).

[31] M.ABRAHAM, *Atti Real. Accad . Lincei*, **21**, 432, (1912).

[32] M.ABRAHAM, Jahrbuch der Radioaktivitaet, **11**, 470, (1912).

[33] G. NORDSTRÖM, *Phys. Z.*, **13**, 1126, (1912).

[34] G.NORDSTRÖM, *Ann. d. Phys.*, **40**, 856, (1912).

[35] G.NORDSTRÖM, *Ann. d. Phys.*, **42**, 533, (1913).

[36] M. von LAUE, *Jahrb. Radio. Elekt.*, **14**, 263, (1913).

[37] A. EİNSTEİN, *Ann. d. Phys.*, **44**, 321, (1914).

[38] D.E. LİTTLEWOOD, *Proc. Camb. Phil. Soc. Soc.* **49**, 90, (1953).

[39] O. BERGMANN, *Amer. J. Phys.*, **24**, 39, (1957)

[40] G.J.WHİTROW, G.E. MORDUCH, *Relativistic Theories of Gravitation, A Comparative Analysis with Particular Reference to Astronomical Tests*; **Vistas in Astronomy**, edit. A. BEER, **6**, 1-67, Pergamon Press, (1965).

[41]W.E.THİRRİNG, *Ann. Phys.*, **16**, 96, (1961).

[42] E.A.MİLNE, *Proc. Roy. Soc.*, A serisi, **106**, 7, (1937).

[43] E.A.MİLNE, **Kinematic Relativity,** 142, Oxford Univ. Press, (1948).

[44] G.L. CAMM, *Nature*, **155**, 754., (1945).

[45] G.J. WHİTROW, *Nature*, **156**, 365, (1945).

[46] A.G.WALKER, *Nature*, **168**, 961, (1951).

[48] H.A.LORENTZ, *Proc. Amst. Acad.*, 559, (1900).

[49] H.P.ROBERTSON, T.W. NOONAN, **Relativity and Cosmology,** s. 160-163, W.B. Saunders Comp., (1969).

[50] P.KUSTAANHEİMO, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A serisi, **228**, 1, (1957).

[51] A.N. WHİTEHEAD, **The Principle of Relativity,** Cambridge Univ. Press, (1922).

[52] A.S. EDDİNGTON, *Nature*, **113**, 192, (1924).

[53] G.J. WHİTROW, G.E. MORDUCH, Ref. [40], s. 19.

[54] J.L.SYNGE, *Proc. Roy. Soc.* **A 211**, 303, (1952).

[55] A.SCHİLD, *Proc. Roy. Soc.*, **A 235**, 202, (1956).

[56] A.SCHİLD, *Gravitation Theories of the Whitehead Type and the Principle of Equivalence,* **Evidence for Gravitational Theories,** edit. C.MØLLER, s. 82, Academic Press; (1962).

[57] C.M.WİLL, *Astrophys. J.*, **169**, 141, (1971).

[58] G.D.BİRKHOFF, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **29**, 231, (1943).

[59] G.D.BİRKHOFF, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **30**, 324, (1944).

[60] R.V.EÖTVÖS, *Math. Naturwis. Ber. aus Ungarn.* **8**, 65, (1888).

[61] R.V. EÖTVÖS, D. PEKAR, E. FEKETE, *Ann. d.Phys.* **68**, 11, (1922).

[62] P.G.ROLL, R. KROTKOV, R.H. DİCKE, *Ann. Phys.*, **26**, 442, (1964).

[63] V.B.BRAGİNSKY, V.I. PANOV, *Sov. Phys. JETP*, **34**, 464, (1971).

[64] M.WELLNER, G.SANDRİ, *Amer. J. Phys.*, **32**, 36, (1964); **32**, 504, (1964).

[65] M. MOSHİNSKY, *Phys. Rev.*, **80**, 4 ve 514, (1950).

[66] F.J.BELİFANTE, J.C. SWİHART: *Ann. Phys.*, **1**, 168, (1957).

[67] F.J.BELİFANTE, J.C. SWİHART, *Ann. Phys.*, **1**, 196, (1957).

[68] F.J.BELİFANTE, J.C. SWİHART, *Ann. Phys.*, **2**, 81, (1957).

[69] C.M.WİLL, "*The Theoretical Tools of Experimental Gravitation*", **Experimental Gravitation,** edit. B.BERTOTTİ, 1-110, bk. s. 12, Academic Press, (1974).

[70] C.M.WİLL, "*Einstein on Firing Line*", Physics Today, October 1972, American Institute of Physics.

III. BÖLÜM

Testi yapmak için kile şekil verilir; ama testinin kullanışlılığı içindeki boşluğa bağlıdır...
Lao-Tzu (M.Ö. 6. yüzyıl) : TAO TE KİNG

EİNSTEİN başkalarının âşikâr gibi kabul ettiklerini sorulara dönüştüren entellektüel bir tevâzua sâhipti.
Cornelius Lanczos.

GENEL RÖLÂTİVİTENİN FİZİKSEL TEMELLERİ

(III.I) ÖZEL RÖLÂTİVİTE İLKESİNİN SINIRLARI

Özel Rölâtivite Teorisinin (**ÖRT**'nin) temelindeki Özel Rölâtivite İlkesi fizik kaanûnlarının ifâdesi, ya da başka bir deyişle tabiatı tasvir edişimiz bakımından bütün eylemsizlik sistemlerinin tamâmen eşdeğer olduklarını kabul etmektedir. Matematik bakımından ise bu ilke fiziğin temel denklemlerinin *LORENTZ* dönüşümlerine göre kovaryant bir biçimde ifâde edilmeleriyle somutlaştırılmaktadır.

Fiziğin temel denklemlerinin mümkün bütün eylemsizlik sistemlerindeki, yâni birbirlerine nazaran düzgün doğrusal harekette bulunan referans sistemlerindeki bütün gözlemciler için *LORENTZ* dönüşümlerine göre kovaryant birbiçimde ifâde edilmeleri bu gözlemcilerin ortak bir dil kullanmalarına temel teşkil eder. Bu çeşit gözlemciler için bu, aynı zamanda, tabiatın tasvirinde objektifliği de temin eder. Ancak tabiatın tasviri bakımından gözlemcilerin eriştikleri bu objektiflik sınırlıdır. Nitekim eylemsizlik sistemi teşkil etmeyen referans sistemlerine bağlı gözlemciler için fizik kaanûnlarının ifâdesi eylemsizlik sistemlerindeki gözlemcilerinkinden farklı olabilecektir. Bunun en belirgin örneklerinden biri mekanik bir sistemi ivmeli bir referans sisteminde incelemeğe kalktığımızda ortaya, sistemin fiziksel özellikleriyle hiç bir ilişkisi olmayan (merkezkaç kuvveti *CORİOLİS* kuvveti... gibi) bir takım görünümsel (zâhirî) kuvvetlerin çıkması ve meselâ *NEWTON*'un hareket kaanûnunun bu yüzden ivmeli sistemlerde eylemsizlik sistemlerinden farklı, şeklen değişik olarak ifâde edilmesidir. Bu görünümsel kuvvetlerin yalnızca referans sisteminin ivmesine bağlı olduklarını, ve *NEWTON*'un da, mutlak uzay kavramını mekanik kaanûnlarının en basit şekillerine kavuştukları referans sistemini temsil etmek üzere ithâl etmiş olduğunu biliyoruz.

NEWTON'un düşüncesine göre, mutlak uzaya nazaran yapılan bir ivmeli hareketin belirleyicisi olarak ortaya çıkan görünümsel kuvvetler içerik ve köken bakımından tabiattaki gerçek kuvvetlerden farklıdırlar. Şu hâlde eylemsizlik sistemleriyle ivmeli sistemler arasındaki fark her iki cins sistemdeki kuvvetler arasında da içerik ve köken farkı doğurmaktadır.

Eğer fizik kaanûnları, Özel Rölâtivite İlkesine dayanarak, yalnızca eylemsizlik sistemlerinde invaryant kalacak şekilde ifâde edilmişlerse, mümkün bütün referans sistemlerindeki gözlemciler için fizik kaanûnlarının objektifliği sağlanmış olmayacaktır.

Bundan başka, bütün tabiat kaanûnlarını *LORENTZ*-invaryant kılmada her ne kadar matematiksel bir zorluk yoksa da bu türlü *LORENTZ*-invaryant kılınmış kaanûnların fiziksel gerçeği yansıtıp yansıtmayacakları yâni gözlem ve deneylerle uyumlu olup olmayacakları da ayrı bir problemdir. Nitekim, hiç değilse gravitasyon olayları söz konusu olduğunda, *LORENTZ*-invaryant gravitasyon teorilerinin bu yönde başarılı olamadıklarını II. Bölümde görmüş bulunmaktayız.

Şu hâlde fizik kaanûnlarının **bütün gözlemciler** için objektif bir biçimde ifâde edilmiş olmalarını sağlamak üzere Özel Rölâtivite İlkesinden daha genel, uygun bir ilke vaz edilmesi ve bütün fiziğin de bu yeni ilkeye göre yeni baştan formüle edilmesi gerektiği kendiliğinden ortaya çıkmaktadır.

(III.2) EŞDEĞERLİK İLKESİ

Bir kuvvet genellikle iki cismin veyâ iki alanın, veyâhut da bir cisimle bir alanın kendi aralarında etkileşmeleri sonucu ortaya çıkar. Meselâ bir taşın Arz üzerine düşmesi, taş ile Arz arasındaki (daha doğrusu taş ile Arzın çekim alanı arasındaki) etkileşme sonucu ortaya çıkan taşın ağırlığı dolayısıyladır. Bu görüş açısından bakıldığında, eylemsizlik kuvvetlerinin dışındaki her kuvvetin bu çerçeve içinde fiziksel bir kökeni olduğunu saptamak ve gözlemek kolaydır. Ancak, eylemsizlik kuvvetlerinin klâsik mekanik çerçevesi içinde kendileri için geometrik bir kökenden başka bir köken tesbit edilememesi yüzünden bir ayrıcalıkları vardır. Fakat acaba bu ayrıcalık gerçek ve kesin midir, yoksa bir görünümden mi ibârettir? Yâni başka bir deyimle, eylemsizlik kuvvetlerine acaba gerçekten de fiziksel bir köken bulmak mümkün müdür? *Eylemsizliğin kökeni* problemi *NEWTON*'dan bu yana fizikçileri epeyi uğraştırmış olan ve bugün bile her yönüyle tatmin edici bir teorisi yapılamamış olan bir konudur.

Şimdi bu önemli problemi, özel bir misâli göz önünde tutarak, incelemeğe çalışalım. Bunun için tavana takılı bir ipin ucunda asılı boş bir kova göz önüne alacağız. Bu kovayı kendi simetri ekseni etrafında döndürmek sûretiyle asılı bulunduğu ipi iyice buralım ve kovayı sâbit tutup suyla doldurduktan sonra da serbest bırakalım. Bunu izleyen olayların açıklanması eylemsizliğin kökeninin ortaya konmasında ışık tutucu olacaktır.

Kovayı serbest bırakmadan önce kovadaki suyun yüzeyi düzlemseldir. Kova serbest bırakıldığı zaman, burulmuş olan ipi, burulmanın ters yönünde ve gitgide artan bir dönme hızıyla kovayı döndürr. İp sağıldıkça hız artarak bir maksimuma erişir ve sonra da, bir süre, gitgide sönen bir takım burulmalı salınımlardan sonra kova tekrar sükûnet hâline döner. Bütün bu safhalar süresince kovadaki su da kovanın hareketiyle sürüklenerek, yüzeyi bir paraboloide dönüşür ve maksimum bir derinliğe eriştikten sonra da, en sonunda, suyun sükûnete erişmesiyle düzlemsel olur.

Suyun yüzeyinin, suyun *kovaya göre* haiz olduğu ve başlangıçta büyük iken kovanın gitgide artan dönme hızının sonunda suyun bütünüyle kovayla birlikte sürüklenmesi sonucu sıfıra indirgenen Ω görel dönme hızına bağlı olmadığı açıktır; zirâ kova en hızlı döndüğünde suyu da kendisiyle birlikte sürüklediği zaman bu Ω görel dönme hızı, sıfır olmaktadır. Bu hız, kezâ, gerek kovanın gerekse suyun beraberce sükûnette oldukları zaman da sıfırdır.

Öte yandan suyun Arza nazaran açısal hızı da su yüzeyinin dönel bir paraboloid hâlini almasında kesinlikle etken olan bir büyüklük değildir. Çünkü aynı deney Arzın kutuplarında da yapılacak olsa, bu noktalarda hem kovanın ve hem de kovadaki suyun Arzın eksenine göre açısal hızlarının sıfır olmalarına rağmen su yüzeyinin hafifçe gene dönel bir paraboloid olduğu tesbit edilir. Kutupta kovadaki suyun yüzeyi eğer düzlemsel olsaydı bu, ya Arzın dönmediğine ya da bütün kovanın (suyla birlikte), *FOUCAULT* sarkacının düşey bir sâbit düzlemde salındığı bir referans sistemine göre sükûnette olmasına kanıt olacaktı. Buna göre suyun yüzeyinin şeklini belirleyen etkenin, suyun söz konusu referans sistemine göre haiz olduğu açısal hız olduğu sezilmektedir.

NEWTON da aynı misâl üzerinde yürüttüğü düşünceler sonunda aynı kanıya erişmiştir. *NEWTON*'a göre kovadaki suyun yüzeyinin şekli suyun, mutlak uzaya göre haiz olduğu açısal hızın değeri tarafından belirlenmektedir. *NEWTON* kovadaki su yüzeyi çöküntüsünü, kovanın mutlak uzaya göre dönmesinin varlığı için kıstas olarak kabul etmiştir.

NEWTON'un bu yorumunu ilk defa *BERKELEY* (1685-1753) eleştirmiştir. *BERKELEY* mutlak uzaya göre bir hareketin fiziksel bakımdan anlamsız olduğunu savunmuş ve yukarıda sözü edilmiş olan su dolu kova deneyinde esas göz önünde bulundurulması gereken husûsun kovanın Evrene ve özellikle sâbit yıldızlar takımına göre dönmesi olduğu fikrinde diretmiştir. *BERKELEY* bir cismin, ancak, başka cisimlere karşı görel hareketinin fiziksel bir anlamı olabileceğini savunmuştur.

Bu düşünceler daha sonra *ERNST MACH* (1838-1916) tarafından işlenerek eylemsizliğin kökeninin araştırılması ve incelenmesinde yararlı olmuşlardır.

MACH'ın bu konudaki incelemeleri de onu, bir eylemsizlik sistemini sâbit yıldızlar takımına göre düzgün doğrusal bir hareket yapan bir sistem olarak tanımlamasına yol açmıştır. *MACH*, Evrenin yukarıdaki misâlde söz konusu edilmiş olan kova ile şuyun dışındaki her şeyle birlikte bir anda yok olması hâlinde hiç bir eylemsizlik olayının da olamıyacağını, yâni Evrendeki maddenin tümünün *NEWTON* mekaniğinde görünümsel kuvvetler aracılığıyla tasvir olunan eylemsizlik olaylarının tek sorumlusu olduğunu savunmuştur.

Bir cismin eylemsizliğinin Evrendeki bütün cisimlerin fonksiyonu olarak belirlenmekte olduğunu ifâde eden ilkeye **MACH ilkesi** adı verilir. Bu ilkeye göre, yukarıda sözünü etmiş olduğumuz su dolu kova örneğinde su yüzeyinin dönel bir paraboloid şeklini kazanması, kovanın mutlak uzaya göre dönmesi sonucu olarak değil de su ile, geri kalan bütün Evren arasındaki **bir çeşit gravitasyon etkileşmesi**nin sonucudur. Ve bu, suyun çok uzağındaki tüm kütlelerin bu etkileşmeye katkılarının suyun cıvarındakilerin katkısından çok daha yoğun bir biçimde ortaya çıktığı bir etkileşme olarak düşünülmektedir. Böylelikle *MACH* eylemsizlik sistemlerinin imtiyazlı durumlarını, etkilerini yok edemediğimiz uzak gök cisimlerinin işe karışmalarına atfetmektedir. Eğer uzak gök cisimleri mevcûd olmayıp da meselâ Arz uzayda yalnız başına olsaydı bütün referans sistemleri eşdeğer olacak ve hepsi de eylemsizlik sistemleri oluşturacaklardı. Bu ideal durumda *FOUCAULT* sarkacının salınım düzleminin rotasyonu da olmayacaktı.

Buna binâen *MACH* ilkesi çerçevesi içinde görünümsel eylemsizlik kuvvetleriyle gerçek gravitasyon kuvvetleri arasında bir eşdeğerliğin varlığı mümkün görünmektedir.

EİNSTEİN da **sınırlı bir uzay bölgesi göz önüne alındığında** zahirî eylemsizlik kuvvetleriyle gerçek gravitasyon kuvvetlerini fiziksel ölçümlerle birbirlerinden ayırdedebilmenin mümkün olamıyacağını göstermiştir.

EÖTVÖS, *DİCKE* ve *BRAGİNSKİ*'nin gerçekleştirdikleri deneylerin sonucu olarak gitgide artan ve bugün için 9.10^{-13} den daha küçük bir duyarlılıkla ortaya konulmuş olduğu vechile (*bk.* II. BÖLÜM: [60 - 63]) uygun seçilmiş birimler cinsinden ifâde edildiklerinde eylemsizlik kütlesi ile gravitasyon kütlesi birbirlerine eşittirler. Bu özellik **zayıf eşdeğerlik ilkesi** diye anılmaktadır. Bu denel verinin sonucu olarak gravitasyon kuvvetleri bir cisme, tıpkı eylemsizlik kuvvetleri gibi, kütleden bağımsız bir ivme sağlarlar. Nitekim gravitasyon potansiyelinin etkisinde hareket eden bir cismin hareket denklemi

$$m_e \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_G = - m_g \,\mathbf{grad}\,\Phi$$

olacağından, ve $m_e = m_g$ olmasından ötürü

$$\ddot{\mathbf{x}} = - \mathbf{grad}\,\Phi$$

olduğu bulunur. Bu özellik literatürde *serbest düşüşün tekliği ilkesi* diye bilinmektedir [1].

Şimdi görünümsel eylemsizlik kuvvetleriyle gravitasyon kuvvetlerinin hangi şartlar altında ve nasıl eşdeğer sayılabileceklerini anlamak için *EİNSTEİN* ile birlikte birbiçim (yâni kuvvet çizgileri birbirlerine paralel) bir gravitasyon alanında serbest düşüşe terkedilmiş bir asansör göz önüne alalım. Asansörün içinde kapalı bulunan ve dışarıdan hiç bir yoldan bir bilgi alamayan bir fizikçinin bir topu elinden ilk hızsız bıraktığını varsayalım; bu takdirde bu top asansöre göre sükûnette olacak yâni asansör tabanından sâbit bir yükseklikte kalakalacaktır. Aksine, eğer fizikçi gravitasyon alanının sıfır sayılabileceği bir uzay bölgesinde **g** sâbit ivmesini haiz olarak yükselen bir füze içinde bulunursa bu takdirde de ayaklarına tesir eden kendi vücûdunun reaksiyonu sebebiyle kendisinin Arz yüzeyinde hareketsiz bulunduğuna hükmedebilir.

İçinde bulunduğu referans sistemine dışarıdan hiç bir bilgi eriştirilmedikçe bir fizikçinin sistem içinde gerçekleştireceği fiziksel deneyler aracılığıyla yukarıdaki şartlar altında sükûnette mi olduğuna ya da bir birbiçim gravitasyon-alanında mı bulunduğuna kesinlikle karar vermesi imkânı olmadığı âşikârdır. Başka bir deyimle asansördeki fizikçi de, füzedeki fizikçi de etkisi altında bulundukları kuvvetlerin eylemsizlik kuvvetleri mi yoksa gravitasyon kuvvetleri mi olduğunu kestiremeyeceklerdir. Bu fizikçiler için etkisi altında bulundukları kuvvetlerin kökenlerini fiziksel ölçümlerle tesbit etmek imkânsız olup **bu kuvvetler ortaya çıkan etkileri bakımından birbirlerine eşdeğerdirler.** Şu hâlde: **uzayın sınırlı bir bölgesi verildiğinde görünümsel eylemsizlik kuvvetleriyle gerçek gravitasyon kuvvetleri birbirlerinden ayırdedilemezler; bunlar arasında yerel bir eşdeğerlik vardır.** Bu, *yerel eşdeğerlik ilkesi*nin ifâdesini teşkil etmektedir.

Ancak, uzayın yerel değil de yaygın bir bölgesi göz önüne alındığında bu yerel eşdeğerliğin kısmen bozulacağı da âşikârdır. Zirâ her ne kadar birbiçim bir gravitasyon alanında, yukarıdaki serbest düşüşe terkedilmiş asansör misâlinde olduğu gibi, uygun bir referans sistemi seçimiyle gravitasyon alanını yok etmek mümkün ise de (meselâ kütleli gök cisimlerinin hemen yakınlarındaki gibi yâni) gravitasyon alanının kuvvet çizgilerinin paralel olmayıp da yakınsak bir hüzme oluşturdukları hâllerde gravitasyon alanının etkisini tümüyle yok edecek hiç bir dönüşüm takımı bulmak mümkün değildir. Böyle bir hâlde gözlemci gravitasyon alanıyla eylemsizlik alanının ancak ortak etkilerini tesbit edebilecek, fakat bunların ayrı ayrı katkılarının büyüklükleri hakkında bir şey söyleyemeyecektir. Bu takdirde gözlemcinin ifâde edebileceği tek husus, olsa olsa, içinde bulunduğu referans sisteminin mutlak bir eylemsizlik sistemi olmadığıdır.

(III.3) ÖKLİTSEL OLMAYAN BİR GEOMETRİDEN YARARLANMA GEREKLİLİĞİ; GEODEZİK İLKESİ

Şimdi gene birbiçim bir gravitasyon alanındaki asansör misâline dönelim. Serbest düşüşe terkedilmiş olması dolayısıyla asansörün bir eylemsizlik sistemi olarak telâkki olunabileceğini gördük. Bir eylemsizlik sisteminden bir diğer eylemsizlik sistemine geçiş **ÖRT'**ne göre *LORENTZ* dönüşüm grubu aracılığıyla olmakta ve eylemsizlik sistemlerinde de

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad \text{(III.3.1)}$$

büyüklüğü invaryant kalmaktaydı. Yâni başka bir deyişle (III.3.1) in invaryant kaldığı bütün referans sistemleri *yerel eşdeğerlik ilkesi* uyarınca eylemsizlik sistemleridir ve bu sistemlerde, yerel olarak, gravitasyon kuvvetlerini eylemsizlik kuvvetlerinden ayırdetmek olanağı yoktur.

Ancak, birbiçim olmayan gravitasyon alanları göz önüne alındığında, bunların etkilerini tümüyle yok edecek bir kooordinat dönüşümü mevcûd olmadığına, ya da başka bir deyişle bunları eylemsizlik kuvvetleri gibi yorumlayabileceğimiz bir eylemsizlik sistemi bulmanın mümkün olmadığına temas ettikti. Şu hâlde yaygın bir bölgedeki şiddetli ve gerçek gravitasyon alanlarının incelenmesi söz konusu olduğunda bunlar, ya 1) etkilerinin eylemsizlik kuvvetleri gibi yorumlanabileceği hiç bir eylemsizlik sisteminin mevcûd olmamasıyla, ya da 2) bu gravitasyon alanlalarındaki metriğin öklitselimsi bir metrik olan (III.3.1) *MİNKOWSKİ* metriğine indirgenemez olması yâni bu alanlardaki metriği $\eta_{\mu\nu}$ metriğine dönüştürecek, jakobyeni sıfırdan farklı sürekli hiç bir dönüşüm takımının mevcûd olmamasıyla karakterize edileceklerdir.

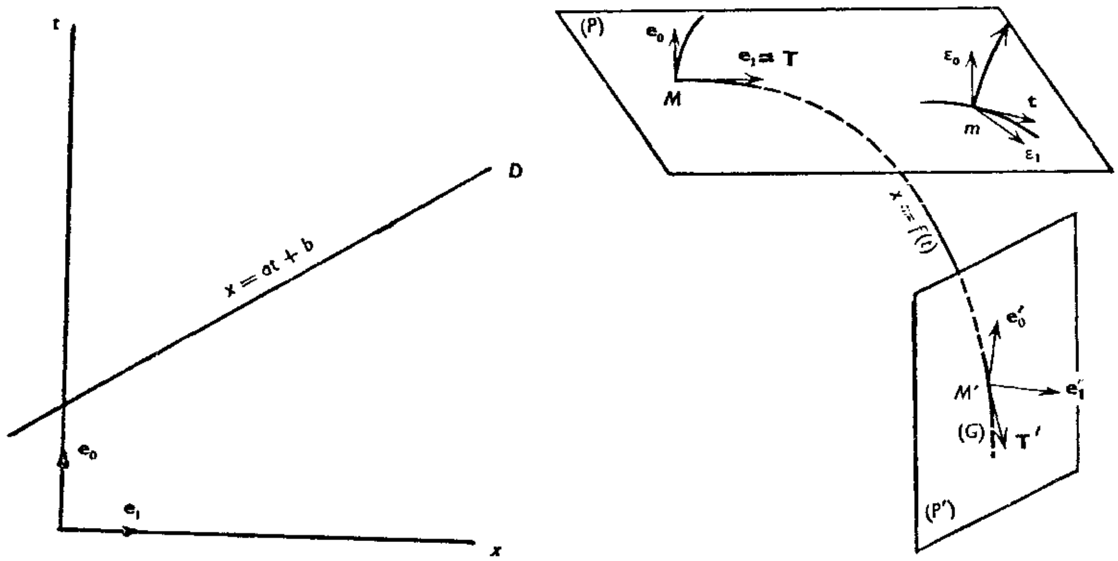
Böylelikle gerçek gravitasyon alanlarının etkilerinin öklitselimsi olmayan, ancak yerel olarak öklitselimsi bir metriğe indirgenebilen, daha genel bir metrikle temsil olunan bir uzay-zaman şeması çerçevesi içinde incelenebilecekleri anlaşılmaktadır.

Bu uzay-zaman şeması, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere zaman ve uzay koordinatlarının sürekli fonksiyonu olarak tanımlanan bir $g_{\mu\nu}$ temel metrik tansörü aracılığıyla

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad \text{(III.3.2)}$$

şeklinde belirlenen ds^2 nin karakterize ettiği dört boyutlu bir *RİEMANN* uzayı olacaktır. Bu kavramların oluşturdukları çerçeve içinde, böylelikle, uzay-zamanın geometrik yapısı ile gravitasyon alanları arasında matematikleştirilebilir fonksiyonel bir bağımlılığın var olması gerektiği kolaylıkla sezilmektedir. Burada akla gelebilecek önemli bir soru, yalnızca matematik görüş açısından bakıldığı takdirde, (III.3.2) ile belirlenen bir *RİEMANN* uzayı verildiğinde buna tekaabül eden gravitasyon alanının gerçek bir gravitasyon alanı mı, yoksa eşdeğerlik ilkesi uyarınca bir gravitasyon alanıymış gibi ortaya çıkan bir eylemsizlik alanı mı olduğunun ayırdedilmesini mümkün kılacak ölçütün (kriterin) ne olduğu sorusudur. Bu husûsu IV. Bölümde "*EİNSTEİN*'ın Rölâtivist Gravitasyon Teorisinin (**ERGT'**nin) Geometrik Temelleri"ni incelerken açıklığa kavuşturacağız.

Şimdi, üzerine yerel bir kuvvetin tesir etmediği maddî bir noktanın hareketi yönünden ve eşdeğerlik ilkesi açısından, RİEMANNsal bir uzayla ÖKLİTsel bir uzay arasındaki organik bağı sergilemek amacıyla basit bir misâl göz önüne alacağız. Birbirine dik Ox ve Ot eksenleriyle temsil olunan iki boyutlu ÖKLİTsel bir (Ö) uzayı olsun. Bu uzayda, üzerine hiç bir kuvvetin tesir etmediği maddî bir noktanın yaptığı düzgün doğrusal hareketin denklemi $x = at + b$ şeklindedir. Bu iki boyutlu ÖKLİTsel uzayı kıvırmak (ya da matematiksel olarak ifâde edersek:



Şekil: III.1

bu düzlemi *uygun* bir sürekli koordinat dönüşümüne tâbî tutmak) sûretiyle eğri bir (*R*) yüzeyi elde edelim. (*Ö*) düzleminde düzgün doğrusal hareket yapan maddî noktanın yörüngesi, (*Ö*) de iki nokta arasındaki en kısa yol olmak özelliğini haiz olan **"doğru"**dur; bu özellik (*Ö*) de

$$\delta \int_{A_{\ddot{O}}}^{B_{\ddot{O}}} ds_{\ddot{O}} = 0 \tag{III.3.3}$$

varyasyon problemiyle karakterize edilir. $A_{\ddot{O}}$ ve $B_{\ddot{O}}$ ile (*Ö*) de maddî noktanın geçtiği iki nokta gösterilmiştir; $ds_{\ddot{O}}$ ise (*Ö*) deki sonsuz küçük yay uzunluğunu göstermektedir. Varyasyonlar hesabının bilinen bir özelliği dolayısıyla (III.3.3) denklemi, (*Ö*) yü (*R*) ye dönüştüren sürekli koordinat dönüşümünde şeklini korur; yâni (*Ö*) de iki nokta arasındaki en kısa yol olma özelliğini haiz yörünge (*R*) de de gene iki nokta arasında en kısa yol olma özelliğini haizdir. Şu halde göz önüne alınan dönüşümde maddî noktanın (*D*) yörüngesi (*R*) nin bir (*G*) **geodezik eğrisine** dönüşmektedir. Öte yandan, eylemsizlik ilkesine göre (*Ö*) de üzerine hiç bir kuvvetin tesir etmediği maddî nokta ya sükûnette, ya da (Ö) nün geodeziği olan bir doğru boyunca hareket ediyor bulunduğuna göre bu hareketin yukarıda açıklanmış olduğu biçimde (*R*) uzayına yansımasından çıkarılacak sonuç da ancak şu olabilir: RİEMANNsal bir uzayda üzerine hiç bir kuvvetin tesir etmediği bir maddî nokta ya sükûnettedir, ya da uzayın bir geodezik eğrisi boyunca hareket eder. Bu, eylemsizlik ilkesinin RİEMANNsal uzaylardaki ifâdesi olup maddî nokta için **geodezik ilkesi** ya da **geodeziksel hareket kaanûnu** diye de isimlendirilir.

Şimdi (*R*) de $x = f(t)$ ile belirlenen (*G*) geodeziğinin M ve M' noktalarındaki (*G*) ye teğet düzlemler (*P*) ve (*P'*) olsunlar. **MT** ve **M'T'** de (*P*) ve (*P'*) düzlemlerinde M ve M' noktalarında (*G*) ye teğet doğruları göstersinler. (*Bk*. Şekil : III.1).

Eğer (*R*) deki maddî nokta serbest hareket ediyorsa yâni üzerine hiç bir kuvvet tesir etmiyorsa bu takdirde **M'T'** teğetiyle belirlenen **V'** hızının **MT** teğetiyle belirlenen **V** hızına eşit ve aynı yönde olması gerekirdi:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' \qquad \text{(III.3.4)}$$

Bu ise eylemsizlik ilkesinin genelleştirilmiş bir ifâdesi demektir. Ancak, (III.3.4) şartını nasıl ve neye göre yazmalıyız, bunu da belirtmek gerekir. Eğer bunu ÖKLİTsel (*P*) teğet düzlemindeki gözlemciye göre yazmak istersek, bu takdirde (*P*) de, (*P'*) deki **V'** hız vektörüne tekaabül edecek olan **v** vektörünü belirlemiş olmamız gerekir. Bunu yapmak için gerekli işlem, M den M' ye ve dolayısıyla **V** den de **V'** ye geçişi sağlayan *aynı dx ve dt sonsuz küçük artışları için*, M' ye ve **V'** ye artık (*R*) de değil de (*P*) teğet düzleminde tekaabül edecek olan m ve **v** yi belirlemektir. Bu takdirde M noktasının yer değiştirmesine ÖKLİTsel (*P*) teğet düzleminde tekaabül eden yörünge Mm ile verilmiş olacaktır.

MM' nün (*R*) nin bir geodeziği olmasına karşılık Mm, ÖKLİTsel (*P*) teğet düzleminin artık bir geodeziği yâni bir doğrusu değildir. Bu itibarla da (*P*) deki gözlemci kendi referans sisteminde incelediği maddî noktanın hareketinin bir doğrudan sapmış olmasını bu maddî nokta üzerine tesir etmekte olan bir kuvvetin varlığına atfedecektir. Yâni başka bir deyimle (*R*) de üzerine hiç bir kuvvet tesir etmeden hareket eden maddî bir noktanın (*R*) ye teğet bir referans sistemine göre incelenen hareketinin yörüngesi bir eğri olacaktır.

(*P'*) deki **M'T'** teğetine (*P*) de tekaabül eden **mt** teğeti M nin ÖKLİTsel teğet uzaya yansıyan yörüngesini belirlemekte, ve **mt** nin **MT** den sapması da *aynı ÖKLİTsel uzayda* noktanın yörüngesinin eylemsizlik ilkesine göre bir doğru olmasına karşı koyan bir takım kuvvetlerin tezâhürü olarak görülmektedir.

Bu görüş açısından, eğri bir uzaydaki maddî noktanın eylemsizlik ilkesine uygun her hareketinin bu uzayda yalnızca kinematik çerçevesi içinde incelenebilmesine karşılık aynı hareketin bu uzaya teğet bir ÖKLİTsel uzaya yansıması bu uzayda dinamik özellikler kazanmakta ve bir takım parazit sayılabilecek eylemsizlik kuvvetlerinin ortaya çıkmasına sahne olmaktadır. Bu durum genel anlamda eylemsizlik hareketlerinin incelenmesi için ÖKLİTsel uzay-zamanın yetersiz olduğunu da açık bir biçimde ortaya koymaktadır.

Şimdi de, tersine, üç boyutlu ÖKLİTsel uzayda noktanın ivmeli hareketini göz önüne alalım. Bu takdirde noktaya her an tekaabül ettirilebilecek olan eylemsizlik sistemlerinin eksenlerinin birbirlerine paralel kalacaklarından bahsetmek abes olur; zirâ, noktanın yörüngesine her noktadaki teğet hem yön ve hem de büyüklük bakımından değişmektedir. Böylece, yörüngenin her noktasına tekaabül ettirilen (*GALİLE*) eylemsizlik sistemlerini aynı bir ÖKLİTsel uzayda uyumlu bir biçimde birbirlerine tutturmak imkânı yoktur. Böyle bir şeyi yapabilmek ancak her noktadaki yörüngeye teğet düzlemleri göz önüne almak ve hareketin bir teğet düzlemine yansımasından, paralel taşıma yoluyla diğer bir teğet düzlemine yansımasını istidlâl etmek sûretiyle gerçekleştirilebilir. Yukarıdaki ilk misâlden bildiğimiz gibi hareketin bu yoldan tasviri ise ÖKLİT'sel olmayan bir uzay-zaman geometrisi çerçevesi içine rahatça sığmakta ve bu tasvir, bu çerçeve içinde (ÖKLİTsel uzay-zamanda içerdiği bütün dinamik özelliklere rağmen), bir kinematik problemine indirgenmiş olmaktadır.

Şu hâlde, sonuç olarak diyebiliriz ki:

Eşdeğerlik ilkesinin görüş açısından gravitasyon alanları ile eylemsizlik alanları yerel olarak eşdeğerdirler. Gerçek gravitasyon alanlarının tasviri eğri bir uzaya tekaabül eden RİEMANNsal bir metrikle mümkün olacaktır. Bu metrik, belirli bir noktanın sonsuz küçük cıvarında (yerel olarak), bu RİEMANNsal uzaya o noktada teğet olan *MİNKOWSKİ* uzayını almak sûretiyle **ÖRT**'nin metriğine dönüştürülebilir ve gravitasyon olaylarının bu teğet uzayın temsil ettiği *GALİLE* referans sistemindeki yansımaları *NEWTON* dinamiği yönünden incelenebilir. Bu anlayış açısından eğri uzayın metriği, teğet ÖKLİTsel uzayda, fenomenolojik bir biçimde bir gravitasyon potansiyeli şeklinde yorumlayacağımız bir büyüklüğü temsil etmektedir.

Olayları bu dört boyutlu RİEMANNsal uzay-zaman çerçevesi içinde tasvir etmek yukarıdaki misâllerden de sezmiş olduğumuz gibi bütün dinamik unsurların bu şema içinde kinematik unsurlara indirgenmiş olması sonucunu doğurmaktadır. Olayların dinamik unsurları ancak, bunları, vukuu buldukları uzay-zaman noktasına teğet *MİNKOWSKİ* uzayına izdüşürdüğümüzde, yâni yerel olarak kendilerini göstermektedirler. Bu bakımdan olayları dört boyutlu bir RİEMANNsal uzay-zaman şemasına göre ve **GRT**'nin temelindeki ilkelere göre tasvir etmemiz, bir bakıma, fizikteki dinamik unsurların yerine geometriyi ikaame etmek, *fiziği geometrileştirmek* anlamına da gelmektedir.

(III.4) KUVVETLİ EŞDEĞERLİK İLKESİ

Kuvvetli eşdeğerlik ilkesi aslında zayıf eşdeğerlik ilkesini de içeren, fakat şu iki varsayıma dayanan bir ilkedir :

(a) Uzay-zamanın her noktasında birbirlerine bir *LORENTZ* dönüşümü yaklaşıklığıyla eşdeğer olan yerel bir eylemsizlik sistemi sınıfı mevcûd olup bu referans sistemlerinde bütün fizik kaanûnları, *MİNKOWSKİ* uzayında sâhip oldukları standart biçime girerler.

(b) Bu fizik kaanûnlarının *MİNKOWSKİ* uzayında sâhip oldukları şekil ve ihtivâ ettikleri sâbitlerin değerleri bütün uzay-zamanda aynıdır.

Böylelikle fizik kaanûnlarının Evrenin her noktasında geçmişte de, hâlde de, gelecekte de aynı oldukları, yâni fizik kaanûnlarının ve ihtivâ ettikleri evrensel sâbitlerin değerlerinin gravitasyon potansiyellerine bağlı olmadıkları ifâde edilmiş olmaktadır.

Eğer bir fizik kaanûnu açık bir şekilde uzay-zamanın eğrilik tansörünü ihtivâ etseydi bu, (a) varsayımının geçerli olmamasına yol açardı. Kezâ, eğer çeşitli etkileşmelerin şiddetini tasvir eden **boyutsuz kuplâj sâbitleri** de eğer aslında değişken olsalardı bu da (b) varsayımının geçerli olmamasına yol açardı.

Zayıf eşdeğerlik ilkesinin de yüklü tânecikler için geçerli olmayacağı ve birbiçim bir gravitasyon alanında serbest düşüşe terkedilmiş biri nötr, diğeri ise yüklü fakat aynı sükûnet kütlesini haiz iki parçacığın aynı hızla düşmeyecekleri zirâ yüklü tâneciğin, ivmeli düşüşü esnâsında, ışıma yoluyla enerji ve dolayısıyla da eylemsizlik kütlesi kaybedeceği ileri sürülmüştür [2 - 5]. Fakat sonradan *F.ROHRLİCH* bu düşünme tarzının aldatıcı olduğunu ve zayıf eşdeğerlik ilkesinin yüklü tânecikler için de geçerli olduğunu göstermiştir. [6].

Zayıf eşdeğerlik ilkesinin kuvantik bölgede geçerli olmaya devâm edip etmediği araştırılmış ve ilk defa nötronlar kullanılarak *Mc REYNOLDS* tarafından yapılan deneyler [7], daha sonra *DABLES, HARVEY, PAYA* ve *HORTSMANN* tarafından geliştirilerek [8] nötronun gravitasyon kütlesinin eylemsizlik kütlesine eşit olduğunu 10^{-3} lük bir duyarlılıkla ortaya koymuşlardır. Daha sonra *OVERHAUSER, COLELLA* ve *WERNER* gene nötronlar aracılığıyla, fakat bu sefer nötronların gerçekten de kuvantik davranışlarına dayanan bir yeni deneyde aynı sonucu %1 lik bir duyarlılıkla elde etmişlerdir [9-12].

(III.5) GENEL KOVARYANS İLKESİ

ÖRT, bütün eylemsizlik sistemlerinin, fizik kaanûnlarının ifâdesi bakımından birbirlerine eşdeğer olduklarını söyleyen Özel Rölâtivite İlkesine dayanmaktaydı. Diğer taraftan gravitasyonun *LORENTZ*-invaryant bir biçimde tutarlı bir teorisini yapmanın mümkün olmadığını da gördüktü.

Gravitasyonu da kapsayan bir teorinin dört boyutlu RİEMANNsal bir uzay-zaman şemasına dayalı olması gerektiğini ve bu çerçeve içinde eylemsizlik alanlarıyla ivme alanlarının eşdeğerliğinden bahsolunabileceğini gördük. Bundan başka bütün gözlemcilerin aynı dili konuşmaları, yâni olayları hepsi için aynı biçimde ifâde edilmiş fizik kaanûnları aracılığıyla incelemelerinin bilimsel objektiflik anlamına geleceğine işâret ettik. Bütün bunların telkîn ettiği şudur; **Fizik kaanûnları birinden diğerine jakobyeni sıfırdan farklı, sürekli ve türetilebilir koordinat dönüşümleriyle geçilebilen bütün referans sistemlerinde aynı şekli muhafaza edecek biçimde ifâde edilmelidir.** **Genel Rölâtivite İlkesi** veyâ **Genel İnvaryans İlkesi** veyâhut da **Genel Kovaryans İlkesi** diye de bilinen bu ilke fiziksel içerikli olmaktan ziyâde yol gösterici bir ilke, hattâ bir program görünümündedir.

Şu hâlde mesele, şimdi bütün bu ilkelerin ışığı altında dört boyutlu RİEMANNsal uzay-zamanda fizik kaanûnlarının kovaryant bir biçimde ifâde edilmelerinin sağlanmasından ve gravitasyonun da bu şemaya doğal bir biçimde oturtulmasından ibârettir. Bu itibarla EİNSTEİN'ın çoğu kere "Genel Rölâtivite Teorisi" diye anılan **Rölâtivist Gravitasyon Teorisi**nin (**ERGT**'nin) geometrik temelleri IV. Bölümün konusunu teşkil edecektir.

Ancak, sırası gelmişken, yukarıda ifâdesini vermiş olduğumuz Genel Rölâtivite İlkesinin **ERGT**'nde ne vüs'atte geçerli olduğu husûsuna da değinmek istiyoruz.

Genellikle Genel Rölâtivite İlkesinin programının **ERGT** tarafından gerçekleştirilmiş olduğu kabul edilir. Bunun için de çoğu kitaplar, geçerlilik sınırlarını bir eleştiriye tâbî tutmadan bu ilkeyi **ERGT**'nin temel bir ilkesi olarak vaz ederler. Aslında bu ilke büyük bir yol gösterici rolü oynamakla beraber **ERGT**'nin buna tümüyle uymakta olduğu, **ERGT**'nde gerçekten de ayrıcalıklı referans sistemlerinin bulunmadığı pek savunulamaz.

Bilindiği gibi *NEWTON* mekaniğinde **GALİLE Rölâtivite İlkesi** bu mekaniğin bütün *GALİLE* referans sistemlerine göre invaryant olduğunu ifâde eder. **ÖRT**'nde ise *GALİLE* referans sistemlerine göre invaryans fikri bütün fizik kaanûnlarına genelleştirilmiş bulunmaktadır. Bu son hâlde tüm fizik kaanûnları, *GALİLE* dönüşüm grubuna göre değil de, *LORENTZ* dönüşüm grubuna göre bütün *GALİLE* referans sistemlerinde invaryant olurlar.

Dikkat edilecek olursa her iki hâlde de bu ilkelerin ifâdesi bir çeşit **ayrıcalıklı referans sistemi** fikrine dayanmaktadır. Fizik kaanûnlarının invaryansı her iki hâl için de yalnızca belirli bir referans sistemi sınıfı (*GALİLE* referans sistemleri sınıfı) için teminat altına alınmış bulunmaktadır.

Genel Rölâtivite İlkesi dolayısıyla **ERGT'**nin her çeşit ayrıcalıklı referans sistemini ortadan kaldırdığı zannedilebilir. Hâlbuki **ERGT** için bu hiç de böyle değildir. Bu teoride de diğerlerinde olduğu gibi ayrıcalıklı belli bir referans sistemi sınıfı vardır ve fizik kaanûnlarının invaryansı da ancak bu referans sistemleri sınıfına göre sağlanmaktadır.

Kısaca **EİNSTEİN referans sistemleri** diye isimlendireceğimiz bu referans sistemleri sınıfı iki şekilde elde edilmektedir :

1) ya bir *GALİLE* sisteminden hareketle sürekli, türetilebilir, jakobyeni sıfırdan farklı sonlu bir dönüşüm aracılığıyla,

2) ya da madde ve enerjinin varlığı şartı altında **EİNSTEİN'**ın (IV. Bölümde tesis edilecek olan) gravitasyon alan denklemlerini çözmek sûretiyle!

EİNSTEİN referans sistemlerinin ayrıcalıkları: 1) RİEMANNsal olmaları, ve 2) *EİNSTEİN*'ın gravitasyon denklemlerini gerçeklemeleriyle belirginleşmektedir. Aslında bu durum, **ÖRT'**ne nisbetle gene de olağanüstü bir genelleştirme demektir; ama ne de olsa *EİNSTEİN* referans sistemlerinin bünyesindeki bu sınırlılıklar **ERGT'**nin Genel Rölâtivite İlkesini tümüyle içermediğinin de açık delilidir. (Konunun daha ayrıntılı bir tartışması için *bk.* [13]).

(III.6) EŞDEĞERLİK İLKESİNİN ÖNGÖRDÜĞÜ OLAYLAR

Şimdi §(III.3) de sözü edilmiş olan tasarımsal asansör deneyine dönelim ve asansörün duvarlarından birinde açılmış bir delikten içeri bir ışık ışınının sızdığını varsayalım. Asansör uzayda gravitasyon alanı bulunmayan bir bölgede bulunuyor ve sâbit bir gravitasyon alanına eşdeğer olacak bir biçimde yukarı doğru sâbit ivmeli bir hareket yapmıyorsa ışının asansöre girip de karşıdaki duvarda oluşturturduğu aydınlık noktanın asansör tabanına olan BO' uzaklığı deliğin tabana olan AO uzaklığına eşit olacaktır; yâni bu durumda AB ışını asansörün OO' tabanına paralel olacak, başka bir deyişle ışık asansörün içinde, klâsik fizikten çok iyi bildiğimiz gibi, bir doğru boyunca yayılmış olacaktır (*Bk.* Şekil : III. 2).

Ancak eğer asansör, uzayda, gravitasyon alanı bulunmayan bir bölgede bulunmakla birlikte sâbit bir gravitasyon alanına eşdeğer olacak bir biçimde yukarı doğru ivmeli bir hareket yapıyorsa bu takdirde A deliğinden içeri giren ışık, karşı duvara çarpıncaya kadar geçecek olan Δt zaman aralığı içinde asansör de $\Delta h = B'B$ kadar yukarı doğru yer değiştirmiş olacaktır. Buna göre ışın karşı duvara B noktasında değil tabana daha yakın olan bir B' noktasında erişecektir. Bu ise ışığın bu şartlar altında asansör içinde bir doğru boyunca değil, fakat A deliğinden itibâren

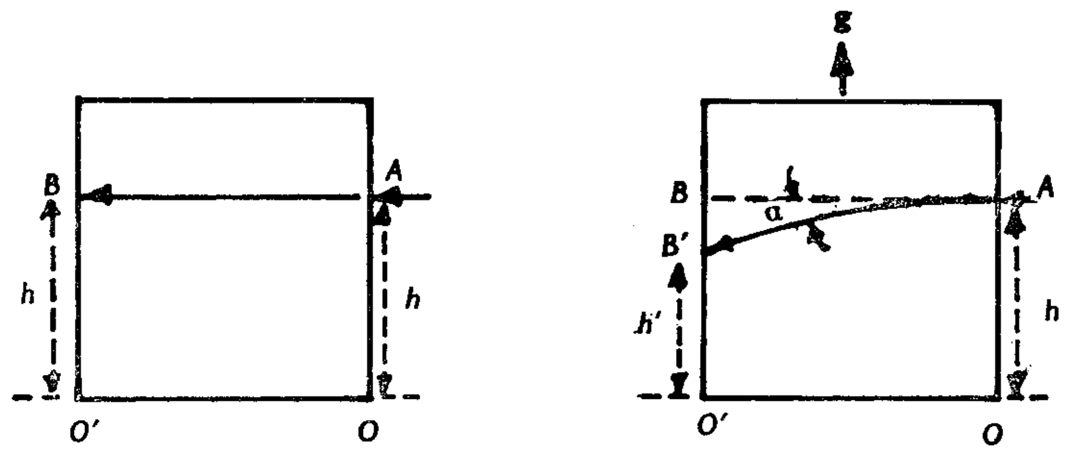
$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= d = c.(\Delta t) \\ \overline{BB'} &= \Delta h = -\frac{1}{2}\, g.(\Delta t)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha \cong \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{-g}{2c}(\Delta t) = \frac{-gd}{2c^2}$$

radyanlık bir açı kadar saparak bir eğri boyunca hareket etmiş olması demektir. Burada $-gd$ ise Φ gravitasyon potansiyelinin d uzaklığı boyunca $\Delta\Phi$ değişiminden ibârettir. Buna göre

$$\alpha = \frac{\Delta\Phi}{2c^2} \qquad \text{(III.6.1)}$$

olur.

Şu hâlde, eğer eşdeğerlik ilkesi geçerliyse, ışığın gerçek gravitasyon alanlarındaki yayılmasının da bir doğru boyunca olmaması ve gravitasyon alanını doğuran kaynakların (gök cisimlerinin) cıvarlarında ışınların belirli bir sapmaya uğramaları beklenmelidir. Nitekim bunun böyle olduğunu § (VI.5) de ayrıntılarıyla göreceğiz.



Şekil: III.2 — Tasarımsal asansör deneyi.

Şimdi gene boş uzayda sâbit bir g ivmesiyle yükselen bir asansör göz önüne alalım. Eşdeğerlik ilkesine göre bu tıpkı g potansiyel gradyentini haiz sâbit bir gravitasyon alanına eşdeğer olacaktır. Asansörün tabanından çıkan ν frekanslı monokromatik bir ışık tabandan d kadar yükseklikteki bir alıcı tarafından kaydedilsin. Böyle bir dalganın kaynaktan alıcıya gitmesine kadar geçen zaman yaklaşık olarak $\Delta t = d/c$ dir. Fakat bu arada alıcının hızı, kaynağın dalgayı yaymış olduğu an haiz olduğu hıza nisbetle $\Delta v = g.\Delta t = gd/c$ kadar artmış bulunur. Bunu sonucu olarak alıcı, dalgayı $\Delta v/c = gd/c^2$ lik bir *DOPPLER* kaymasıyla kaydedecektir. Buna tekaabül eden frekans kayması da, $\Delta\Phi = -gd$ ile gene Φ gravitasyon potansiyelinin d uzaklığı boyunca değişme mikdarını göstererek

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gd}{c^2} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \qquad \text{(III.6.2)}$$

olur. Bu sonuca göre, meselâ, büyük gravitasyon alanına sâhip gök cisimlerinin spektrumlarında belirli bir elemana ait çizgilerin, aynı elemanın Arzda lâboratuvarda elde edilen spektrumundaki çizgilere oranla, (III.6.2) formülü uyarınca kızıla kaymış olmaları gerekecektir. Genel Rölâtivite Teorisi çerçevesi içinde bu konuya ayrıntılarıyla § (VI.6) da değineceğiz.

Her ne kadar (III.6.2) bağıntısına eşdeğerlik ilkesinin bir sonucu olarak erişilmişse de bunun bu ilkeden tamâmen bağımsız bir biçimde elde edilmesi de mümkündür. Nitekim, $E = h\nu$ enerjili bir fotona bir

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \tag{III.6.3}$$

hareket kütlesi tekaabül ettirmek mümkün olduğundan gravitasyon potansiyelinin Φ olduğu bir noktada fotonun toplam enerjisi: $h\nu + m\Phi$ olacaktır. Eğer foton $\Delta\Phi$ lik bir gravitasyon potansiyeli farkı boyunca, meselâ bir (G) gök cismi ile (A) Arz arasında hareket ediyorsa toplam enerjinin korunumu ilkesine göre

$$h\nu_A + m\Phi_A = h\nu_G + m\Phi_G$$

veyâ (III.6.3) ü de göz önünde bulundurarak

$$h\nu_A - h\nu_G = h\,(\nu_A - \nu_G) = h\,.\,\Delta\nu = m\,(\Phi_G - \Phi_A) = \frac{h\nu_G}{c^2}\,\Delta\Phi$$

ya da gene

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_G} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \tag{III.6.2}$$

ifâdesi bulunur.

REFERANSLAR

[1] C.W. MİSNER, K.S. THORNE, J.A. WHEELER, **Gravitation**, s. 1050; W.H.Freeman and Comp., San Fransisco, (1973).

[2] H.BONDİ, T.GOLD, *Proc. Roy. Soc.*, **A 229**, 416, (1955).

[3] B.DeWİTT, R.W.BREHME, *An. Phys.*, **9**, 220, (1960).

[4] D.L.DRUKEY, *Phys. Rev.*, **76**, 543, (1949).

[5] T.FULTON, F.ROHRLİCH, *An. Phys.*, **9**, 449, (1960).

[6] F.ROHRLİCH, *An.Phys.*, **22**, 169, (1963).

[7] Mc REYNOLDS, *Phys. Rev.*, **83**, 172, 233, (1951).

[8] J.W. DABLES, J.A.HARVEY, D.PAYA, H. HORSTMANN, *Phys. Rev.*, **139**, 765, (1965).

[9] A.W.OVERHAUSER, R.COLELLA, *Phys. Rev. Letters*, **33**, 1237, (1974).

[10] R.COLELLA, A.W.OVERHAUSER, S.A.WERNER, *Phys. Rev. Letters*, **34**, 1472, (1975).

[11] F.BALİBAR, *La Recherche*, **7**, 66-67, (1976).

[12] *La Recherche*, **7**, 560, (1976).

[13] H.ARZÉLİÈS, **Relativité Générale, Gravitation,** Fasc. I, s. XLIV-LI; Gauthier-Villars et Cie., Paris, (1961).

IV. BÖLÜM

...[The] Geometry as a branch of Physics [is] a subjet to which no one has contributed more than ALBERT EİNSTEİN, who by his theories of relativity has brought into being physical geometries which have supplanted the tradition-steeped *a priori* geometry and kinematics of EUCLID and NEWTON.
H.P.Robertson

GENEL RÖLÂTİVİTENİN GEOMETRİK TEMELLERİ

(IV.I) İLİŞKİSEL (*AFFİN*) GEOMETRİ

ERGT'nin çerçevesini oluşturan dört boyutlu RİEMANNsal geometriyi incelemek ve belirgin özelliklerini tesbit etmek üzere iki yöntem vardır. Bunlardan biri bu uzayı bir **metrik** ile donatmak, ötekisi ise **vektörlerin paralel ötelenmesi** kavramından hareket ederek, uzayın, noktaları arasındaki ilişkisel (*affin*) özelliklerini ortaya koymaktır. Her iki yöntem de çoğu hâlde aynı formel sonuçları verirler. Bununla beraber ancak bir metrik ithâl etmekle elde edilen sonuçların, metrikten tamâmen bağımsız olanlardan ayırd edilebilmeleri için bu iki yöntemi ayrı ayrı inceleyip ortak sonuçlarını vurgulamakta yarar vardır.

Bir noktada tanımlanmış bir vektörün başka bir noktaya paralel ötelenmesi kavramını gerçekleştirecek biçimde bir algoritmanın ithâl edilmesiyle dört boyutlu geometriye yataklık eden varyete de özel bir topolojik yapıyla donatılmış olur. Böyle bir uzaya **noktasal ilişkisel** (affin) **uzay** denir. **İlişkisel uzay** adı böyle bir uzayda vektörlerin paralel ötelenmesi açısından noktalar arasındaki topolojik ilişkilerin ya da **ilişkisel bağlantıların** ön plâna alınmış olmasından ötürüdür.

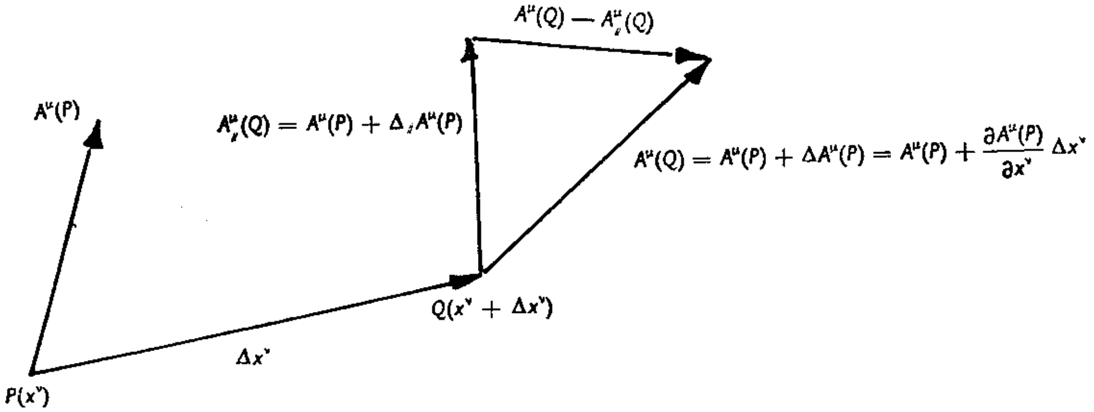
İleride de görülebileceği gibi ilişkisel uzay metrik uzaydan daha geneldir. Bu yüzden de gravitasyon ve elektromagnetizmayı aynı bir matematik çerçeve içinde incelemek idealine yönelik bazı Birleştirilmiş Alan Teorilerinde yalnızca ilişkisel bir geometri kullanmak gerekmiştir.

A. *VEKTÖRLERİN PARALEL ÖTELENMESİ VE MUTLAK TÜREV*

Bilindiği gibi $y = f(x^\nu)$ gibi bir fonksiyonun türevi, $f(x^\nu + \Delta x^\nu) - f(x^\nu)$ ile fonksiyonun Q ve P gibi komşu iki noktada aldığı değerlerin farkını göstererek,

$$\lim_{\Delta x^\nu \to 0} \frac{f(x^\nu + \Delta x^\nu) - f(x^\nu)}{\Delta x^\nu} = \frac{\partial f(x^\nu)}{\partial x^\nu}$$

ile verilmektedir. Fakat bir **vektör alanı** söz konusu olduğunda, vektörlerin farklı noktalarda farklı şekilde dönüşmeleri sebebiyle, bu tanımı doğrudan doğruya uygulamak imkânı yokur. Bu güçlüğün üstesinden gelebilmek için bir vektörün $P(x^\nu)$ noktasından $Q(x^\nu + \Delta x^\nu)$ noktasına paralel ötelenmesi işlemini tanımlamamız gerekir.



Şekil : IV.I.

Şimdi A^μ gibi bir kontravaryant vektör alanı verilmiş olsun. A^μ nün $Q(x^\nu + \Delta x^\nu)$ noktasındaki bileşenleri $P(x^\nu)$ noktasındaki bileşenlerine

$$A^\mu(Q) = A^\mu(P) + \Delta A^\mu(P) = A^\mu(P) + \frac{\partial A^\mu(P)}{\partial x^\nu} \Delta x^\nu \qquad \text{(IV.1.1)}$$

bağıntısıyla bağlıdır. Ancak $[A^\mu(Q) - A^\mu(P)]$ farkı, iki farklı noktada tanımlanmış olan iki vektörün bileşenlerinin farkı olduğundan $\Delta A^\mu(P)$ bir vektör değildir. Nitekim

$$\begin{aligned}\Delta A^\mu(P) &= \Delta A^\mu(x) = A^\mu(Q) - A^\mu(P) \\ &= A^\mu(\bar{x}(x)) - A^\mu(x) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu - A^\mu = \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} - \delta^\mu_\nu\right) A^\nu(x)\end{aligned}$$

bir vektörün dönüşümü kuralını temsil etmemektedir.

Şimdi $A^\mu(P)$ nin Q da (IV.1.1) diferansiyeli aracılığıyla aldığı değeri yerine $A^\mu(P)$ nin *özel bir işlem uyarınca* P den Q ya taşındığında alacağı $A^\mu_{/\!/}(Q)$ değerini göz önüne alalım, öyle ki $A^\mu_{/\!/}(Q) - A^\mu(P)$ farkı bu özel işlemden ileri gelen $\Delta_{/\!/} A^\mu(P)$ farkıyla gösterilsin. Buna göre

$$A^\mu_{/\!/}(Q) = A^\mu(P) + \Delta_{/\!/} A^\mu(P) \qquad \text{(IV.1.2)}$$

olur. Kezâ $\Delta_{/\!/} A^{\mu}(P)$ de, P ve Q noktalarında tanımlanmış olan iki vektörün bileşenlerinin farkı olduğundan bir vektör teşkil etmez. Bu özel taşıma işlemini

$$\boxed{\Delta_{/\!/} A^{\mu}(P) = - L^{\mu}_{\lambda\nu} A^{\lambda}(P)\, \Delta x^{\nu} = - \omega^{\mu}_{\lambda} A^{\lambda}(P)} \qquad \text{(IV.1.3a)}$$

şeklinde bir *bilineer vektörel form* aracılığıyla tanımlayacağız. Eğer göz önüne alınan alan, bir kovaryant vektör alanı ise bu takdirde de söz konusu işlem

$$\Delta_{/\!/} A_{\mu}(P) = L^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda}(P)\, \Delta x^{\nu} \qquad \text{(IV.1.3b)}$$

şeklindeki bir bilineer vektörel formla tanımlanacaktır. Buna göre $A^{\mu} = 0$ ya da $\Delta x^{\nu} = 0$ için $\Delta_{/\!/} A^{\mu}(P)$ sıfır olacaktır. $L^{\mu}_{\lambda\nu}$ göz önüne alınan noktalar arasında A^{μ} vektörünün taşınması yönünden mevcûd ilişkiyi tasvir eden katsayılardır; bu sebeple $L^{\mu}_{\lambda\nu}$ ye uzayın **ilişkisel bağlantı katsayıları** adı verilir. Dört boyutlu bir uzay, bu 64 adet ilişkisel bağlantı katsayısının peşinen verilmiş olmasıyla bir **ilişkisel bağlantı yapısı** ile donatılmış olur.

(IV.1.3) tanımı gereği $\Delta A^{\mu}(P) \neq \Delta_{/\!/} A^{\mu}$ olduğu âşikârdır. Şimdi A^{μ} nün Q noktasında biri koordinat eğrileri boyunca kayma, diğeri de (IV.1.3) ile belirlenen özel taşınma işlemi dolayısıyla haiz olacağı değerler arasındaki farkı göz önüne alalım :

$$DA^{\mu} = A^{\mu}(Q) - A^{\mu}_{/\!/}(Q) = [A^{\mu}(P) + \Delta A^{\mu}(P)] - [A^{\mu}(P) + \Delta_{/\!/} A^{\mu}(P)] = \Delta A^{\mu}(P) - \Delta_{/\!/} A^{\mu}(P)$$

$$= \Delta A^{\mu}(P) - \omega^{\mu}_{\lambda} A^{\lambda}(P) = \frac{\partial A^{\mu}(P)}{\partial x^{\nu}} \Delta x^{\nu} + L^{\mu}_{\lambda\nu} A^{\lambda}(P)\, \Delta x^{\nu} \qquad \text{(IV.1.4)}$$

Bu ifâde, aynı bir noktada tanımlanmış olan iki kontravaryant vektörün farkı olduğundan bir kontravaryant vektörü temsil etmektedir; dolayısıyla da seçilen koordinat sisteminden bağımsız olan tansörel bir vasfı vardır. (IV.1.3) aracılığıyla tanımlanmış olan işleme ilişkisel bir uzayda bir **vektörün paralel ötelenmesi işlemi** denir. Buna göre $A^{\mu}_{/\!/}(Q)$ vektörü böyle tanımlanmış bir paralel ötelenmeyle $A^{\mu}(P)$ den hareketle elde edilmiş bir vektör olmaktadır. Bu işleme niçin paralel ötelenme denildiğinin sebebi, aynı işlemi uzayı bir metrikle donatarak incelediğimiz zaman belirginleşecektir.

(IV.1.3a) ve (IV.1.4) ifâdeleri göz önünde alındığında $DA^{\mu} = 0$ ifâdesinin (IV.1.3a) ile eşdeğer olduğu ve dolayısıyla da ilişkisel bir uzayda bir vektörün paralel ötelenmesi işlemini karakterize edeceği ortaya çıkmaktadır.

(IV.1.4) den hareketle ilişkisel uzay için yeni bir türev tanımı vermek mümkündür:

$$D_\nu A^\mu = \lim_{\Delta x^\nu \to 0} \frac{\Delta A^\mu(P) - \Delta_{/\!/} A^\mu(P)}{\Delta x^\nu}$$

veyâ

$$\boxed{\frac{DA^\mu}{Dx^\nu} = D_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + L^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda} \tag{IV.1.5}$$

Tanımından da anlaşıldığı vechile bu büyüklük tansörel vasıftadır. Buna **mutlak türev** ya da **kotürev** adı verilir. Buraya kadar söylenilenleri kovaryant bir vektör alanı için de aynen söylemek ve benzer sonuçlar tesis etmek mümkündür.

Şimdi ilişkisel bir uzay verildiğinde bunu belirleyen $L^\mu_{\lambda\nu}$ ilişkisel bağlantı katsayılarının, uzayın kendi üzerine bir tasvirinde haiz olacakları dönüşüm kurallarını tesbit etmek istiyoruz. Her ne kadar dört boyutlu bir uzay için 64 adet $L^\mu_{\lambda\nu}$ katsayısının önceden verilmesiyle uzayın ilişkisel bağlantısı tesbit edilmiş olursa da, bu $L^\mu_{\lambda\nu}$ katsayılarının tamâmen keyfî olarak verilmesi de, tutarlı olmayan ve özellikle bazı büyüklüklerin vektörel (ya da tansörel) vasfını muhafaza etmeyen sonuçlara yol açabilir. Bu itibarla, $L^\mu_{\lambda\nu}$ lerin değerleri üzerine kesin bir sınırlandırma koymaksızın, göz önüne alınan uzaydaki bir koordinat dönüşümünde ilişkisel bağlantı katsayılarının dönüşüm kurallarını, tutarsız sonuçlara yol açmayacak bir biçimde tanımlamak gerekir.

Yukarıda (IV.1.4) ile tanımlamış olduğumuz $[\Delta A^\mu(P) - \Delta_{/\!/} A^\mu(P)]$ farkının kontravaryant bir vektörün bileşenleri olduklarına değinmiştik. Şu hâlde $L^\mu_{\lambda\nu}$ ilişkisel bağlantı katsayılarının dönüşüm kuralını $[\Delta A^\mu - \Delta_{/\!/} A^\mu]$ nün vektörel vasfını bozmayacak şekilde tesbit etmeliyiz. Bunun için ilişkisel uzayı kendi kendine sürekli bir biçimde tasvir eden bir

$$T : x^\nu = x^\nu(\bar{x}^\sigma) \quad \text{ve} \quad T^{-1} : \bar{x}^\sigma = \bar{x}^\sigma(x^\nu) \tag{IV.1.6}$$

dönüşüm grubu verilmiş olsun. Buna göre A^μ nün dönüşmüşünü de $\bar{A}^\alpha$ ile göstererek

$$\Delta A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}\Delta x^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}\bar{A}^\alpha\right)\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma}\Delta \bar{x}^\sigma$$

yazabiliriz. Öte yandan (IV.1.6) dönüşümlerinden

$$\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\sigma} = \delta^\beta_\sigma$$

yazılabileceğinden

$$\Delta A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \partial_{\beta} \bar{A}^{\alpha} \Delta \bar{x}^{\beta} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}} \bar{A}^{\alpha} \Delta \bar{x}^{\beta} \qquad \text{(IV.1.7)}$$

olur. Öte yandan da $\Delta_{/\!/} A^{\mu}$ için

$$\Delta_{/\!/} A^{\mu} = - L^{\mu}_{\lambda\nu} A^{\lambda} \Delta x^{\nu} = - L^{\mu}_{\lambda\nu} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \bar{A}^{\alpha} \right) \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \Delta \bar{x}^{\beta} \right) \qquad \text{(IV.1.8)}$$

yazılabilir. Buna göre (IV.1.7) ile (IV.1.8) den

$$\Delta A^{\mu} - \Delta_{/\!/} A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} (\partial_{\beta} \bar{A}^{\alpha} \Delta \bar{x}^{\beta}) + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}} \bar{A}^{\alpha} \Delta \bar{x}^{\beta} + L^{\mu}_{\lambda\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \bar{A}^{\alpha} \Delta \bar{x}^{\beta}$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} \Delta \bar{A}^{\gamma} + \left(\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}} + L^{\mu}_{\lambda\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \right) \bar{A}^{\alpha} \Delta \bar{x}^{\beta} \qquad \text{(IV.1.9)}$$

sonucu çıkar. Şimdi, $\Delta A^{\mu} - \Delta_{/\!/} A^{\mu}$ farkının bir kontravaryant vektörün bileşenleri gibi değişebilmesi için $L^{\mu}_{\lambda\nu}$ lerin (IV.1.6) dönüşümünde

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} \bar{L}^{\gamma}_{\alpha\beta} = L^{\mu}_{\lambda\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}} \qquad \text{(IV.1.10)}$$

şeklinde değişmelerinin yeterli olduğuna dikkati çekelim. Gerçekten de bu takdirde (IV.1.9) ifâdesi

$$\Delta A^{\mu} - \Delta_{/\!/} A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} [\Delta \bar{A}^{\gamma} + \bar{L}^{\gamma}_{\alpha\beta} \bar{A}^{\alpha} \Delta \bar{x}^{\beta}]$$

olur ki bu da kontravaryant bir vektörün dönüşüm kuralından başka bir şey değildir. Böylelikle ilişkisel bağlantı katsayılarının dönüşüm kuralının da

$$\boxed{\bar{L}^{\gamma}_{\alpha\beta} = L^{\mu}_{\lambda\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}}} \qquad \text{(IV.1.11)}$$

olması gerektiği tesbit edilmiş olmaktadır. Bu dönüşüm kuralı $L^{\mu}_{\lambda\nu}$ lerin tansör vasfını haiz olmadıklarını da açıkça ortaya koymaktadır.

B. *İLİŞKİSEL GEODEZİK EĞRİLERİ*

İlişkisel bir uzayda bir (G) eğrisi verildiğinde eğer herhangi bir $P \in (G)$ noktasındaki $t^{\mu}(P)$ teğet vektörü, bir başka $Q \in (G)$ noktasındaki $t^{\mu}(Q)$ ve $t^{\mu}_{/\!/}(Q)$ vektörlerinin farkı ile aynı doğrultuda ise (G) nin, ilişkisel uzayın bir **geodezik eğrisi** olduğu söylenir. Buna göre $t^{\mu}(P) = dx^{\mu}/d\tau$, ve τ da (G) üzerinde alınan bir parametre olmak üzere

$$t^\mu(Q) - t^\mu_{/\!/}(Q) = D\,t^\mu = D\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = K(\tau)\frac{dx^\mu}{d\tau}\,d\tau$$

yazılabilir. Burada $K(\tau)$ ile bir orantı katsayısı gösterilmiştir. (IV.1.4) e göre, ve gerekli parametre değişimini de yaptıktan sonra

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) + L^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = K(\tau)\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

olur. Şimdi $s = s(\tau)$ şeklinde yeni bir parametre ithâl edersek bu son denklem

$$\frac{ds}{d\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\frac{ds}{d\tau}\right) + L^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{ds}{d\tau}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{ds}{d\tau} = K(\tau)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{ds}{d\tau}$$

veyâ gerekli işlemler ve düzenlemelerden sonra da

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + L^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = -\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-2}\frac{dx^\mu}{ds}\left(\frac{d^2s}{d\tau^2} - K(\tau)\frac{ds}{d\tau}\right) \qquad \text{(IV.1.12)}$$

bulunur. Şimdi s yi

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = K(\tau)\frac{ds}{d\tau} \qquad \text{(IV.1.13)}$$

olacak şekilde seçelim. s ye **ilişkisel** (affin) **parametre** adı verilir, ve $x^\mu = x^\mu(s)$ eğrisini belirleyen denklem de

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + L^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0} \qquad \text{(IV.1.14)}$$

şekline girer. Bu denkleme **geodezik denklemi** adı verilir. (IV.1.14) denklemi, aynı zamanda, $t^\mu = dx^\mu/ds$ teğet vektörünün kovaryant türevinin (G) boyunca sıfır olduğuna da delâlet etmektedir. Şu hâlde ilişkisel bir uzayın geodezik eğrisi, teğetin kovaryant türevinin sıfır olduğu noktaların geometrik yeri olarak da tanımlanabilir.

İlişkisel uzayda verilen bir noktadan, verilen bir doğrultuda ancak bir tek geodezik eğrisi geçebilir. Nitekim böyle bir geodezik, verilmiş olan bir x noktasından itibâren verilen doğrultuda sonsuz küçük bir dx^μ vektörü alıp bunu x^μ den $x^\mu + dx^\mu$ noktasına kadar paralel taşıyarak yeni bir $d'x^\mu$ vektörü elde etmek; sonra bunu $x^\mu + dx^\mu$ noktasından $x^\mu + dx^\mu + d'x^\mu$ noktasına paralel taşıyarak, ve ilh... bu şekildeki ardarda işlemler uygulayarak bütün eğriyi ortaya koymak sûretiyle elde edilir. Şu hâlde bir noktadaki her doğrultuya bir geodozik eğrisi tekaabül eder. Ayrıca bu noktanın hemen cıvarındaki noktalar göz önüne alındığında, bu nokta ile bu komşu noktalardan birinden de bir ve yalnız bir geodezik eğrisi geçer. Bununla beraber bu, uzay bütünüyle elde alındığında doğru olmayabilir;

meselâ bir küre yüzeyi üzerindeki geodezik eğrileri kürenin büyük çemberleri olduğundan iki antipod noktası göz önüne alındığında bu noktalardan geçen geodezik eğrilerinin sayısı sınırsızdır.

$L^{\mu}_{\lambda\nu}$ diye ilişkisel bağlantı katsayıları verildi miydi bunu

$$\underline{L}^{\mu}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(L^{\mu}_{\lambda\nu} + L^{\mu}_{\nu\lambda}\right) \quad , \quad \underset{\vee}{L}^{\mu}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(L^{\mu}_{\lambda\nu} - L^{\mu}_{\nu\lambda}\right)$$

vaz etmek sûretiyle alt indislerine göre simetrik ve antisimetrik kısımlarına ayırmak ve

$$L^{\mu}_{\lambda\nu} = \underline{L}^{\mu}_{\lambda\nu} + \underset{\vee}{L}^{\mu}_{\lambda\nu}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bunu hatırda tutarak, ilişkisel bir uzay verildiğinde buna tekaabül eden geodezik eğrilerini, yukarıda görmüş olduğumuz gibi, tek bir şekilde belirleyebilmemize karşılık bunun tersinin doğru olmadığını göstermek istiyoruz.

Önce (IV.1.14) geodezik denkleminin yapısı gereği, $L^{\mu}_{\lambda\nu}$ ilişkisel bağlantı katsayılarının bu denkleme katkısının yalnızca simetrik kısımlarından ileri gelmekte olduğuna dikkat edelim. Nitekim $\underset{\vee}{L}^{\mu}_{\lambda\nu} = -\underset{\vee}{L}^{\mu}_{\lambda\nu}$ olduğundan (IV.1.14)

$$\underset{\vee}{L}^{\mu}_{\lambda\nu} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} + \underset{\vee}{L}^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \equiv 0$$

olacaktır. Bu itibarla aynı simetrik kısma fakat farklı antisimetrik kısımlara sâhip iki ilişkisel bağlantı yapısı, birbirlerinden yapı itibâriyle farklı olmalarına rağmen, aynı geodezik eğrileri ailesini kabul edeceklerdir.

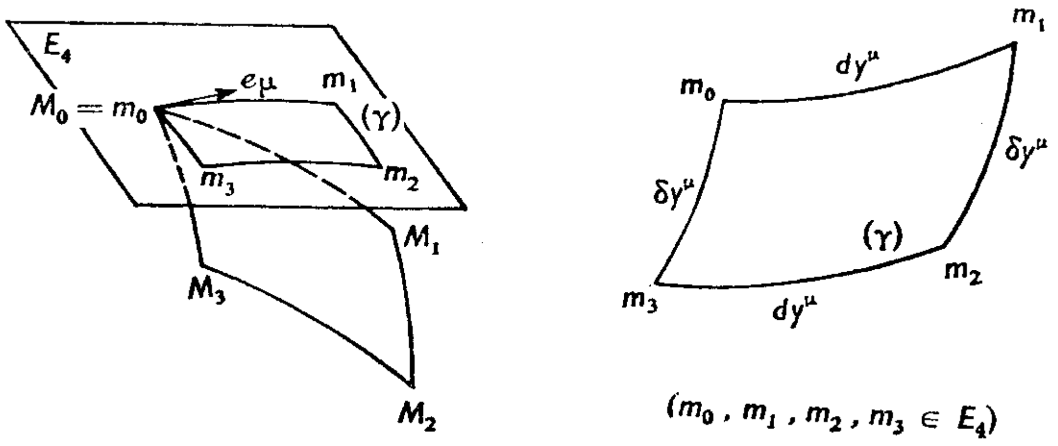
C. *İLİSKİSEL UZAYIN EĞRİLİKLERİ*

Vektörlerin paralel ötelenmesi kavramından hareketle tanımlanabilen bazı geometrik büyüklükler aracılığıyla ilişkisel uzayın geometrik yapısını zenginleştirmek mümkündür.

Şimdi ÖKLİTsel olmayan, yâni geodezik eğrileri doğrulardan ibâret olmayan ilişkisel bir A_4 uzayı göz önüne alalım. Bu uzayda bir M noktasının çizdiği sonsuz küçük bir kapalı (Γ) çevresi $M_0M_1M_2M_3M_0$ olsun (Bk. Şekil : IV.2). A_4 e M_0 noktasında teğet olan E_4 ÖKLİTsel uzayında bu noktalara sırasıyla $m_0 \equiv M_0$, m_1, m_2 ve m_3 noktaları tekaabül ettirilmiş olsun. Böylece E_4 de oluşan ÖKLİTsel çevre dy^{μ} ve δy^{μ} kenarlarını haiz eğrisel bir (γ) paralelkenarımsı çevreyle tasvir olunabilecektir. $\mathbf{e}_{\mu}$ ile de O keyfî bir orijin olmak üzere

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial(\mathbf{OM})}{\partial y^\mu} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y^\mu} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{M} = dy^\mu \, \mathbf{e}_\mu \tag{IV.1.15}$$

ile keyfî bir M noktasına bağlı olarak tanımlanan $[M, \mathbf{e}_\mu]$ **doğal referans sisteminin** taban vektörlerini gösterelim. Bu tanıma göre $\mathbf{e}_\mu$ lerin dy^μ artışlarına teğet oldukları âşikârdır.



Şekil : IV.2.

$M_0 M_1 M_2 M_3 M_0$ çevresini teğet E_4 uzayında $M = M_0$ noktasında değerlendirebilmek için $M_1 \longleftrightarrow m_1, \ldots, M_3 \longleftrightarrow m_3$ tekaabüliyetlerini göz önünde bulundurmak gerekir. Bu tekaabüliyetler dy^μ ya da δy^μ gibi birinci mertebeden sonsuz küçüklerin ortaya çıkmasına yol açarlar. Nitekim, meselâ, $d\mathbf{M} = dy^\mu \, \mathbf{e}_\mu$ olmak üzere M_1 e $m_1 = M_1 + dM_1$ noktası tekaabül edecektir. Ayrıca M_1 deki $[M_1, (\mathbf{e}_\mu)_1]$ doğal referans sisteminin taban vektörlerine de m_1 de, $\widehat{m_0 m_1}$ yayı boyunca paralel taşıma sonucu (IV.1.3b) ye binâen,

$$d\mathbf{e}_\lambda = \omega_\lambda^\mu \, \mathbf{e}_\mu = L_{\lambda\nu}^\mu \, \mathbf{e}_\mu \, dy^\nu \tag{IV.1.16}$$

olmak üzere $(\mathbf{e}_\lambda)_1 = \mathbf{e}_\lambda + d\mathbf{e}_\lambda$ taban vektörleri tekaabül edecektir.

Ancak $M_0 M_1 M_2 M_3 M_0$ çevresinin, teğet E_4 uzayındaki bir tasvirini elde etmek için hem dy^μ ve hem de δy^μ ötelemelerini hesaba katmak gerekir. Eğer $M = M_0$ noktasındaki doğal referans sisteminin taban vektörlerini $(\mathbf{e}_\mu)_0$ ve ilişkisel bağlantı katsayılarının değerlerini de $(L_{\lambda\nu}^\mu)_0$ ile gösterirsek M_1 noktasındaki doğal taban vektörleri olan $(\mathbf{e}_\mu)_1 = (\mathbf{e}_\mu)_0 + (d\mathbf{e}_\mu)_0$ vektörleri, $dy^\nu = y^\nu - y_0^\nu$ yazılabileceğinden

$$(\mathbf{e}_\mu)_1 = (\mathbf{e}_\mu)_0 + (d\mathbf{e}_\mu)_0 = (\mathbf{e}_\mu)_0 + (L_{\mu\nu}^\lambda)_0 \, (\mathbf{e}_\lambda)_0 \, (y^\nu - y_0^\nu) \tag{IV.1.17}$$

şeklinde ifâde edilebilirler. Bu ifâdeyi

$$d\mathbf{M} = dy^\mu \, (\mathbf{e}_\mu)_1 \tag{IV.1.18}$$

bağıntısına yerleştirirsek

$$\boxed{d\mathbf{M} = dy^{\mu}\,(\mathbf{e}_{\mu})_0 + (L^{\lambda}_{\mu\nu})_0\,(y^{\nu} - y^{\nu}_0)\,dy^{\mu}\,(\mathbf{e}_{\lambda})_0 = [dy^{\mu} + (L^{\mu}_{\lambda\nu})_0\,(y^{\nu} - y^{\nu}_0)\,dy^{\lambda}]\,(\mathbf{e}_{\mu})_0} \tag{IV.1.19}$$

ifâdesi bulunur. Buradan $d\mathbf{M}$ nin birinci mertebeden sonsuz küçük cinsinden

$$d\mathbf{M} = dy^{\mu}\,(\mathbf{e}_{\mu})_0 \tag{IV.1.20}$$

şeklinde verileceği görülmektedir.

Benzer şekilde, (IV.1.17) nin (IV.1.16) ile verilmiş olan

$$d\mathbf{e}_{\lambda} = \omega^{\mu}_{\lambda}\,(\mathbf{e}_{\mu})_1 = L^{\mu}_{\lambda\nu}\,dy^{\nu}\,(\mathbf{e}_{\mu})_1 \tag{IV.1.21}$$

ifâdesine yerleştirilmesi, ikinci mertebeden

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathbf{e}_{\lambda} &= \omega^{\mu}_{\lambda}\,(\mathbf{e}_{\mu})_0 + \omega^{\mu}_{\lambda}\,(L^{\sigma}_{\mu\tau})_0\,(\mathbf{e}_{\sigma})_0\,(y^{\tau} - y^{\tau}_0) \\ &= [\omega^{\mu}_{\lambda} + \omega^{\sigma}_{\lambda}\,(L^{\mu}_{\sigma\tau})_0\,(y^{\tau} - y^{\tau}_0)]\,(\mathbf{e}_{\mu})_0 \end{aligned}} \tag{IV.1.22}$$

bağıntısını verir.

Şimdi, A_4 e M_0 noktasında teğet olan E_4 ÖKLİTsel uzayına bağlı bir gözlemcinin E_4 deki kendi referans sisteminde, $M_0\,M_1\,M_2\,M_3\,M_0$ kapalı çevresinin tasviri olan $M_0{=}m_0\,m_1\,m_2\,m_3\,M_0$ kapalı çevresi boyunca

$$\oint d\mathbf{M} \quad \text{ve} \quad \oint d\mathbf{e}_{\lambda}$$

integrallerini değerlendirmesini göz önüne alalım. Bu takdirde genelleştirilmiş *STOKES* teoremi [*bk. LANDAU, LİFSCHİTZ*: **The Classical Theory of Fields** Addison Wesley Press, Inc., (1951); s. 20-22] dolayısıyla ve (IV.1.19) a binâen

$$\begin{aligned} \oint d\mathbf{M} &= \iint (d\delta\mathbf{M} - \delta d\mathbf{M}) \\ &= \iint \Big\{ d[\delta y^{\mu} + (L^{\mu}_{\lambda\nu})_0\,(y^{\nu} - y^{\nu}_0)\,\delta y^{\lambda}]\,(\mathbf{e}_{\mu})_0 - \delta\,[dy^{\mu} + (L^{\mu}_{\lambda\nu})_0\,(y^{\nu} - y^{\nu}_0)\,dy^{\lambda}]\,(\mathbf{e}_{\mu})_0 \Big\} \\ &= \iint (L^{\mu}_{\lambda\nu})_0\,(dy^{\nu}\,\delta y^{\lambda} - \delta y^{\nu}\,dy^{\lambda})\,(\mathbf{e}_{\mu})_0 \end{aligned}$$

bulunur. Bir taraftan $(L^{\mu}_{\lambda\nu})_0 = (L^{\mu}_{\underline{\lambda\nu}})_0 + (L^{\mu}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}})_0$ olduğunu göz önünde bulundurur, diğer taraftan da

$$dS^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\,(dy^{\lambda}\,\delta y^{\nu} - \delta y^{\lambda}\,dy^{\nu})$$

vaz edersek

$$\oint d\mathbf{M} = \iint [-2\,(\underset{\vee}{L}{}^{\mu}_{\lambda\nu})_0]\, dS^{\lambda\nu}\, (\mathbf{e}_\mu)_0$$

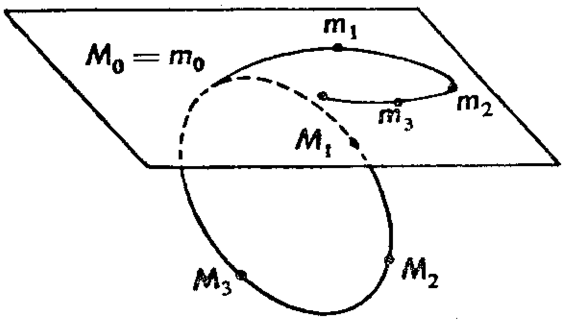
olur. $(\underset{\vee}{L}{}^{\mu}_{\lambda\nu})_0$ ın tanımını hatırlarsak, E_4 deki paralelkenarımsı çevrenin sınırladığı yüzey üzerinde birinci mertebeden bir sonsuz küçük yaklaşıklığıyla $(\underset{\vee}{L}{}^{\mu}_{\lambda\nu})_0 \cong \underset{\vee}{L}{}^{\mu}_{\lambda\nu}$ yazılabilir. Bu takdirde

$$\Omega^{\mu} = -2\, \underset{\vee}{L}{}^{\mu}_{\lambda\nu}\, dS^{\lambda\nu} \tag{IV.1.23}$$

vaz ederek

$$\oint d\mathbf{M} = \iint \Omega^{\mu}\, (\mathbf{e}_\mu)_0 \tag{IV.1.24}$$

olur. Eğer $\Omega^{\mu}(\mathbf{e}_\mu)_0 \neq 0$ ise bu, $d\mathbf{M}$ artışlarının integre edilemez olduklarına, ya da başka bir deyimle $M_0\, M_1\, M_2\, M_3\, M_0$ çevresinin E_4 deki tasvirinin kapalı bir çevre teşkil etmediğine delâlet eder (*bk.* Şekil : IV.3). Bu takdirde A_4 uzayının **burulmalı** bir uzay olduğu söylenir; Ω^{μ} vektörüne de uzayın **burulma vektörü** denir.



Şekil : IV.3 — Burulmalı uzay ($\Omega^{\mu} \neq 0$) hakkında.

(IV.1.23) tanımından Ω^{μ} burulma vektörünün, A_4 uzayının ilişkisel bağlantı katsayılarının antisimetrik kısmına bağlı olduğu görülmektedir. Şu hâlde eğer $L^{\mu}_{\lambda\nu}$ ler bizâtihî simetrikseler bu takdirde A_4 ün burulmalı bir uzay olamayacağı ortaya çıkmaktadır.

Şimdi gene genelleştirilmiş *STOKES* teoremine dayanarak (IV.1.21) ve (IV.1.22) aracılığıyla $d\mathbf{e}_\lambda$ nın E_4 deki paralelkenarımsı çevre üzerindeki

$$\oint d\mathbf{e}_\lambda = \iint (d\delta \mathbf{e}_\lambda - \delta d\mathbf{e}_\lambda)$$

değişimini hesaplayalım. Ancak hesapları kolaylaştırmak yönünden, önce,

$$\left.\begin{aligned} \omega^{\mu}_{\lambda}(d) &= L^{\mu}_{\lambda\nu}\, dy^{\nu}\,, \quad \omega^{\mu}_{\lambda}(\delta) = L^{\mu}_{\lambda\nu}\, \delta y^{\nu} \\ [\omega^{\tau}_{\lambda}\, \omega^{\mu}_{\tau}] &= \omega^{\tau}_{\lambda}(d)\, \omega^{\mu}_{\tau}(\delta) - \omega^{\tau}_{\lambda}(\delta)\, \omega^{\mu}_{\tau}(d) \\ (\omega^{\mu}_{\lambda})' &= d\omega^{\mu}_{\lambda}(\delta) - \delta\omega^{\mu}_{\lambda}(d) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.1.25)}$$

vaz edeceğiz. Buna göre ve $(L^{\mu}_{\lambda\nu})_0 \cong L^{\mu}_{\lambda\nu}$ alınabileceğinden

$$\begin{aligned} \oint d\mathbf{e}_{\lambda} &= \iint (d\delta\mathbf{e}_{\lambda} - \delta d\mathbf{e}_{\lambda}) \\ &= \iint \left\{ d[\omega^{\mu}_{\lambda}(\delta) + \omega^{\sigma}_{\lambda}\, (L^{\mu}_{\sigma\tau})_0\, (y^{\tau} - y^{\tau}_0)]\, (\mathbf{e}_{\mu})_0 - \delta[\omega^{\mu}_{\lambda}(d) + \omega^{\sigma}_{\lambda}\, (L^{\mu}_{\sigma\tau})_0\, (y^{\tau} - y^{\tau}_0)]\, (\mathbf{e}_{\mu})_0 \right\} \\ &= \iint \left\{ (\omega^{\mu}_{\lambda})' - [\omega^{\tau}_{\lambda}\, \omega^{\mu}_{\tau}] \right\} (\mathbf{e}_{\mu})_0 = \iint \Omega^{\mu}_{\lambda}\, (\mathbf{e}_{\mu})_0 \end{aligned} \qquad \text{(IV.1.26)}$$

yazılabilir. (IV.1.25) den hareketle $(\omega^{\mu}_{\lambda})'$ ve $[\omega^{\tau}_{\lambda}\, \omega^{\mu}_{\tau}]$ açıkça hesaplanabilir; neticede

$$\begin{aligned} (\omega^{\mu}_{\lambda})' &= d(L^{\mu}_{\lambda\nu}\, \delta y^{\nu}) - \delta(L^{\mu}_{\lambda\nu}\, dy^{\nu}) \\ &= (\partial_{\sigma} L^{\mu}_{\lambda\nu})\, (dy^{\sigma}\, \delta y^{\nu} - \delta y^{\sigma}\, dy^{\nu}) = 2\, (\partial_{\sigma} L^{\mu}_{\lambda\nu})\, dS^{\sigma\nu} \\ [\omega^{\tau}_{\lambda}\, \omega^{\mu}_{\tau}] &= L^{\tau}_{\lambda\sigma}\, dy^{\sigma}\, L^{\mu}_{\tau\nu}\, \delta y^{\nu} - L^{\tau}_{\lambda\sigma}\, \delta y^{\sigma}\, L^{\mu}_{\tau\nu}\, dy^{\nu} \\ &= L^{\tau}_{\lambda\sigma}\, L^{\mu}_{\tau\nu}\, (dy^{\sigma}\, \delta y^{\nu} - \delta y^{\sigma}\, dy^{\nu}) = 2\, L^{\tau}_{\lambda\sigma}\, L^{\mu}_{\tau\nu}\, dS^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla da

$$\Omega^{\mu}_{\lambda} = 2\, (\partial_{\sigma} L^{\mu}_{\lambda\nu} - L^{\tau}_{\lambda\sigma}\, L^{\mu}_{\tau\nu})\, dS^{\sigma\nu} = (\partial_{\sigma}\, L^{\mu}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\, L^{\mu}_{\lambda\sigma} + L^{\tau}_{\lambda\nu}\, L^{\mu}_{\tau\sigma} - L^{\tau}_{\lambda\sigma}\, L^{\mu}_{\tau\nu})\, dS^{\sigma\nu}$$

olur. Buradan da

$$\boxed{B^{\mu}{}_{\lambda\nu\sigma} = \partial_{\nu}\, L^{\mu}_{\lambda\sigma} - \partial_{\sigma}\, L^{\mu}_{\lambda\nu} + L^{\tau}_{\lambda\sigma}\, L^{\mu}_{\tau\nu} - L^{\tau}_{\lambda\nu}\, L^{\mu}_{\tau\sigma}} \qquad \text{(IV.1.27)}$$

vaz ederek

$$\boxed{\Omega^{\mu}_{\lambda} = B^{\mu}{}_{\lambda\nu\sigma}\, dS^{\nu\sigma}} \qquad \text{(IV.1.28)}$$

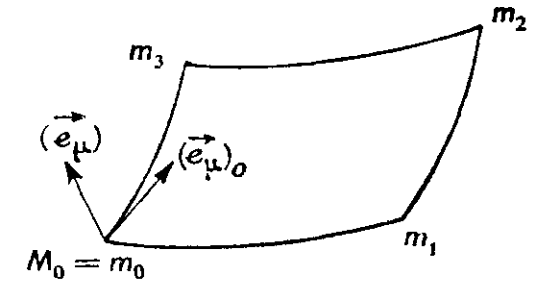
yâni

$$\oint d\mathbf{e}_{\lambda} = \iint B^{\mu}{}_{\lambda\nu\sigma}\, (\mathbf{e}_{\mu})_0\, dS^{\nu\sigma} \qquad \text{(IV.1.29)}$$

bulunur. İlişkisel bağlantı katsayıları aracılığıyla tanımlanan dördüncü mertebeden $B^{\mu}{}_{\lambda\nu\sigma}$ tansörüne A_4 uzayının **eğrilik tansörü** adı verilir.

(IV.1.29) dan kolayca görüldüğü vechile, eğriliği sıfırdan farklı bir uzayda, $\mathbf{e}_{\mu}$ taban vektörleri kapalı bir çevreyi katedip de hareket noktalarına döndüklerinde ilk durumlarıyla çakışmazlar; yâni böyle uzaylarda yön değişimleri integre edilemezler.

Ω^{μ}_{λ} dan hareketle elde edilen $\Omega = \Omega^{\mu}_{\mu}$ skalerine de uzayın **homoteti eğriliği** adı verilir. Tabiîdir ki, uzayın Ω^{μ}_{λ} toplam eğriliği özdeş olarak sıfırsa homoteti eğriliği de sıfır olur; ancak bunun tersi doğru değildir. Nitekim uzayın toplam eğriliğini sıfır kılmaksızın homoteti eğriliğini sıfır kılmak mümkündr.



Şekil : IV.4 — Eğriliği haiz ($\Omega^{\mu}_{\lambda} \neq 0$) uzaylarda yön değişimlerinin integre edilemez olmaları hakkında.

Toplam eğriliğin özdeş olarak sıfır olduğu uzayların **mutlak paralellik** ya da **uzaktan paralellik** vasfına sâhip oldukları söylenir.

Ω^{μ}, Ω^{μ}_{λ} ve Ω sıfır olup olmamalarına göre aşağıdaki gibi 6 kombinezon teşkil ederler; ancak, bu bağıntı dizilerinin, yanlarına yazılı uzay cinslerinin tanımlarını değil de yalnızca bâriz özelliklerini dile getirdiklerini vurgulamak gerekir.

1) *ÖKLİT* uzayı	: $\Omega^{\mu} = 0, \quad \Omega^{\mu}_{\lambda} = 0, \quad \Omega = 0$	(IV.1.30)
2) *RİEMANN* uzayı	: $\Omega^{\mu} = 0, \quad \Omega^{\mu}_{\lambda} \neq 0, \quad \Omega = 0$	(IV.1.31)
3) *WEYL* uzayı	: $\Omega^{\mu} = 0, \quad \Omega^{\mu}_{\lambda} \neq 0, \quad \Omega \neq 0$	(IV.1.32)
4) *EİNSTEİN - LEVİ CİVİTA* uzayı	: $\Omega^{\mu} \neq 0, \quad \Omega^{\mu}_{\lambda} = 0, \quad \Omega = 0$	(IV.1.33)
5) *İNFELD* uzayı	: $\Omega^{\mu} \neq 0, \quad \Omega^{\mu}_{\lambda} \neq 0, \quad \Omega = 0$	(IV.1.34)
6) *EİNSTEİN - SCHRÖDİNGER* uzayı	: $\Omega^{\mu} \neq 0, \quad \Omega^{\mu}_{\lambda} \neq 0, \quad \Omega \neq 0$	(IV.1.35)

RİEMANN uzayı önceden de değinmiş olduğumuz gibi **ERGT**'nin matematiksel formülâsyonunun dayandığı uzaydır. Son dört uzay ise gravitasyon alanları ile elektromagnetik alanları aynı bir matematiksel çerçeve içinde formüle etmeğe yönelik "Birleştirilmiş Alan Teorisi"nin formülâsyonu için çeşitli müellifler tarafından ele alınmış ve incelenmiş olan uzaylardır.

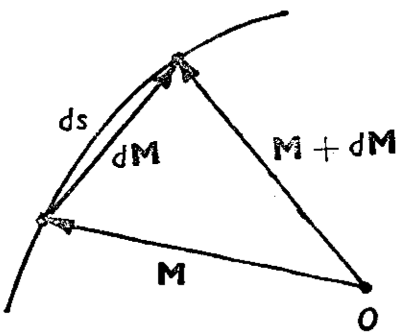
(IV.2) METRİK GEOMETRİ

Metrik bağlantılı uzay her noktasında bir **uzunluk birimi** tanımlanmış olan uzaydır. Tümüyle ilişkisel (*affin*) bir uzayda kovaryantlığın ya da kontravaryantlığın bir vektörün zâtî özellikleri olmasına karşılık metrik uzaylarda bu özellikleri birbirlerine matematiksel olarak bağlamanın mümkün olduğu mâlûmdur (*bk.* *AHMED YÜKSEL ÖZEMRE*: **Fizikte Matematik Metotlar**, 2. Bölüm).

Metrik uzayın her bir x^σ ($\sigma = 1,2,\ldots$) noktasında tanımlanmış olan $\{\mathbf{e}_\mu(x^\sigma)\}$ taban vektörleri takımından hareketle tanımlanan

$$g_{\mu\nu}(x^\sigma) = \mathbf{e}_\mu(x^\sigma) \,.\, \mathbf{e}_\nu(x^\sigma) = g_{\nu\mu}(x^\sigma) \qquad \text{(IV.2.1)}$$

şeklindeki ikinci mertebeden simetrik tansöre **metrik tansör** adı verilir. Dört boyutlu bir uzayda $g_{\mu\nu}$ nün bağımsız 10 bileşene sâhip olacağı âşikârdır.



Şekil : IV.5.

Metrik bir uzayda **M** ve **M** + *d***M** vektörlerinin belirledikleri sonsuz yakın iki nokta arasındaki *ds* sonsuz küçük uzaklığının ifâdesini hesaplamak üzere

$$ds^2 = d\mathbf{M} \,.\, d\mathbf{M}$$

yazılabileceğine ve ayrıca da (IV.1.15) e göre

$$d\mathbf{M} = \mathbf{e}_\mu \, dx^\mu$$

olduğuna dikkati çekelim. Buna göre

$$\boxed{ds^2 = \mathbf{e}_\mu \, dx^\mu \,.\, \mathbf{e}_\nu \, dx^\nu = g_{\mu\nu} \, dx^\mu \, dx^\nu} \qquad \text{(IV.2.2)}$$

olur. Metrik tansörün kontravaryant bileşenleri de, bilindiği gibi,

$$g^{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} \text{ nün kofaktörü}}{\text{det. } g_{\mu\nu}} \qquad \text{(IV.2.3)}$$

ile tanımlanmaktadır. Buna binâen

$$g_{\lambda\mu} \, g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\lambda \qquad \text{(IV.2.4)}$$

olur. Bir **A** vektörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri arasındaki ilişki de

$$A_\mu = \mathbf{A} \,.\, \mathbf{e}_\mu = (A^\lambda \, \mathbf{e}_\lambda) \,.\, \mathbf{e}_\mu = g_{\lambda\mu} \, A^\lambda$$

bağıntısından görülmektedir. Bu ifâdeyi her iki yanından $g^{\mu\nu}$ ile çarparsak

$$g^{\mu\nu} A_\mu = g^{\mu\nu} g_{\lambda\mu} \, A^\lambda = \delta^\nu_\lambda \, A^\lambda = A^\nu$$

bulunur. Kısacası $g_{\mu\nu}$ metrik tansörü bir vektörün kovaryant (kontravaryant) bileşenleri verildiğinde kontravaryant (konvaryant) bileşenlerinin saptanmasına aracılık etmektedir. Daha genel olarak $A^{\mu\nu\,.\,\tau\ldots}_{\rho\,.\,\sigma\lambda\ldots}$ gibi karışık bir tansör verildiğinde de

$$A^{\mu\,.\,\alpha\tau\ldots}_{\rho\beta\,.\,\lambda\ldots} = g_{\nu\beta}\, g^{\sigma\alpha}\, A^{\mu\nu\,.\,\tau\ldots}_{\rho\,.\,\sigma\lambda\ldots}$$

yazılabileceği gösterilir.

Tanımı gereği $g_{\mu\nu}$ metrik tansörü simetrik bir tansördür. Şimdi bunu da göz önünde bulundurarak (IV.1.15) ve (IV.1.16) dan

$$d\mathbf{M} = \mathbf{e}_\alpha\, dx^\alpha \quad , \quad d\mathbf{e}_\beta = \omega_\beta^{\gamma}\, \mathbf{e}_\gamma = L^{\gamma}_{\beta\rho}\, \mathbf{e}_\gamma\, dx^\rho$$

ve bunlara dayanarak da (IV.2.1) den

$$\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= d(\mathbf{e}_\mu \,.\, \mathbf{e}_\nu) = (d\mathbf{e}_\mu) \,.\, \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu \,.\, (d\mathbf{e}_\nu) \\ &= L^{\gamma}_{\mu\rho}\,(\mathbf{e}_\gamma \,.\, \mathbf{e}_\nu)\, dx^\rho + L^{\gamma}_{\nu\rho}\,(\mathbf{e}_\gamma \,.\, \mathbf{e}_\mu)\, dx^\rho \\ &= (L^{\gamma}_{\mu\rho}\, g_{\gamma\nu} + L^{\gamma}_{\nu\rho}\, g_{\gamma\mu})\, dx^\rho \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise

$$\partial_\rho\, g_{\mu\nu} = L^{\gamma}_{\mu\rho}\, g_{\gamma\nu} + L^{\gamma}_{\nu\rho}\, g_{\gamma\mu} \tag{IV.2.5}$$

ye eşdeğerdir. (IV.2.5) de önce ρ ile μ indislerini, sonra da ρ ile ν indislerini değiş tokuş edersek, elde edilen

$$\begin{aligned} -\,\partial_\rho\, g_{\mu\nu} &= -\,L^{\gamma}_{\mu\rho}\, g_{\gamma\nu} - L^{\gamma}_{\nu\rho}\, g_{\gamma\mu} \\ \partial_\mu\, g_{\rho\nu} &= L^{\gamma}_{\rho\mu}\, g_{\gamma\nu} + L^{\gamma}_{\nu\mu}\, g_{\gamma\rho} \\ \partial_\nu\, g_{\mu\rho} &= L^{\gamma}_{\mu\nu}\, g_{\gamma\rho} + L^{\gamma}_{\rho\nu}\, g_{\gamma\mu} \end{aligned}$$

ifâdelerinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, g_{\gamma\rho}\,(L^{\gamma}_{\mu\nu} + L^{\gamma}_{\nu\mu}) &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\, g_{\rho\nu} + \partial_\nu\, g_{\mu\rho} - \partial_\rho\, g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\, g_{\gamma\mu}\,(L^{\gamma}_{\rho\nu} - L^{\gamma}_{\nu\rho}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\, g_{\gamma\nu}\,(L^{\gamma}_{\rho\mu} - L^{\gamma}_{\mu\rho}) \end{aligned} \tag{IV.2.6}$$

bulunur. Şimdi (IV.1.15) ve (IV.1.16) tanım bağıntılarını da göz önünde tutarak

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\rho}\,(\partial_\mu\, g_{\rho\nu} + \partial_\nu\, g_{\mu\rho} - \partial_\rho\, g_{\mu\nu}) \tag{IV.2.7}$$

vaz edelim. $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ nün alt indislere göre simetrik olduğu (IV.2.7) tanım bağıntısından derhâl görülmektedir. Eğer (IV.2.6) yı $g^{\lambda\rho}$ ile çarpar ve eşitliğin her iki yanına da $L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ ilâve edecek olursak gerekli düzenlemelerden sonra

$$g^{\lambda\rho}\, g_{\gamma\rho}\, L^{\gamma}_{\underline{\mu\nu}} + L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = L^{\lambda}_{\underline{\mu\nu}} + L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = L^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + g^{\lambda\rho}\, g_{\gamma\mu}\, L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + g^{\lambda\rho}\, g_{\gamma\nu}\, L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} + L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \tag{IV.2.8}$$

olur. Bu ifâdede $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ den başka, ikinci ve üçüncü terimlerin toplamının da μ ve ν indislerine nazaran simetrik olduğu görülmektedir. Buna göre $\underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ antisimetrik kısmı keyfî olarak seçildiğinde, $\underline{L}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ simetrik kısmının $g_{\mu\nu}$ metriği ile $\underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ nün aracılığıyla tek bir şekilde belirlenmiş olacağı anlaşılmaktadır.

§(IV.1B) den ilişkisel bağlantı katsayılarının antisimetrik kısımlarının geodezik eğrilerini belirlemede katkıları olmadığını bilmekteyiz. Buna göre (IV.2.8) in simetrik kısmı olan

$$\underline{L}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + g^{\lambda\rho} g_{\gamma\mu} \underset{\vee}{L}{}^{\gamma}_{\nu\rho} + g^{\lambda\rho} g_{\gamma\nu} \underset{\vee}{L}{}^{\gamma}_{\mu\rho} \tag{IV.2.9}$$

katsayıları $g_{\mu\nu}$ metriğiyle uyumlu bir **simetrik ilişkisel bağlantı ailesi** oluştururlar. Bunlara tekaabül eden geodezik eğrileri şüphesiz ki gene aynı $g_{\mu\nu}$ metriği aracılığıyla $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ katsayılarına (yâni $\underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv 0$ hâline) tekaabül edenlerden farklı olacaktır.

$\underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv 0$ hâlinin $\Omega^{\mu} \equiv 0$ hâline yâni uzayın burulmasız hâline tekaabül ettiğini görmüştük. **Derslerimizin bundan sonraki bölümlerinde, aksi açıkça belirtilmediği sürece hep, burulmasız bir metrik uzay olan dört boyutlu RİEMANN uzay-zamanı göz önüne alınacaktır.** Bu münâsebetle

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu,\rho} = g_{\lambda\rho} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} \tag{IV.2.10}$$

ile tanımlanan büyüklükler ile (IV.2.7) ile tanımlanmış olanlara, sırasıyla, **birinci ve ikinci cins CHRİSTOFFEL** (1829-1900) **sembolleri** adı verildiğini de kaydedelim. Ayrıca

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_{\mu} g_{\lambda\rho} = \frac{1}{2g} \partial_{\mu} g = \partial_{\mu} \ln \sqrt{|g|} \tag{IV.2.11}$$

olduğu da kolaylıkla hesaplanır.

Mutlak türevin metrik uzaylardaki ifâdesi için de, artık ∇_{ν} ile metrik uzaylarda x^{ν} koordinatına göre mutlak türev alma işlemini göstererek

$$\boxed{\nabla_{\nu} A^{\mu} = \partial_{\nu} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} A^{\lambda}} \tag{IV.2.12}$$

ya da kovaryant bir vektör için

$$\boxed{\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda} \tag{IV.2.13}$$

yazabiliriz. Tansör hesabında da herhangi mertebeden karışık bir tansörün mutlak türevinin de

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_\rho A_{\mu\nu\ldots}{}^{\sigma\tau\ldots} = \partial_\rho A_{\mu\nu\ldots}{}^{\sigma\tau\ldots} + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} A_{\mu\nu\ldots}{}^{\lambda\tau\ldots} + \Gamma^\tau_{\lambda\rho} A_{\mu\nu\ldots}{}^{\sigma\lambda\ldots} \\ - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} A_{\lambda\nu\ldots}{}^{\sigma\tau\ldots} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} A_{\mu\lambda\ldots}{}^{\sigma\tau\ldots}\end{aligned}} \tag{IV.2.14}$$

şeklinde tanımlanabileceği gösterilir (*bk. AHMED YÜKSEL ÖZEMRE,* a.g.e., s. 96-97). Ayrıca (IV.2.11) aracılığıyla A^μ gibi bir vektörün diverjansının da

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (A^\mu \sqrt{-g}) \tag{IV.2.15}$$

şeklinde yazılabileceği de kolayca görülür.

Metrik uzayda geodezik eğrileri iki nokta arasındaki en kısa yolu temsil eden eğriler olarak tanımlanır. Buna göre metrik bir uzaydaki geodezik eğrilerinin tesbiti

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}\, ds = 0$$

varyasyon problemine indirgenmektedir. Bunun çözümünün

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0} \tag{IV.2.16}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz (*bk. A.Y.ÖZEMRE,* a.g.e., s. 258-259).

Metrik uzayın içerdiği ilginç özelliklerden birini ortaya koymak üzere, (IV.2.14) ifâdesini göz önünde bulundurarak, metrik tansörün mutlak türevini hesaplayalım; kolaylıkla

$$\begin{aligned}\nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\mu\lambda} \\ &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\rho} + \partial_\rho g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\rho}) - \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} g^{\lambda\alpha} (\partial_\nu g_{\alpha\rho} + \partial_\rho g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\rho}) \\ &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\nu (\partial_\mu g_{\alpha\rho} + \partial_\rho g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\rho}) - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\mu (\partial_\nu g_{\alpha\rho} + \partial_\rho g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\rho})\end{aligned}$$

$$= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\rho}) - \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\nu\rho})$$

$$\equiv 0 \qquad \text{(IV.2.17)}$$

olduğu ortaya çıkar. Bu sonuç *RİCCİ* (1853 - 1925) *teoremi* olarak bilinmektedir.

Bir *RİEMANN* uzayında A^μ gibi bir vektörün kendine paralel kalarak ötelenmesi (IV.1.3c) ye binâen, ve bu türden bir uzay için $L^\mu_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ olması özelliğinden ötürü,

$$DA^\mu = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu = 0$$

ifâdesi aracılığıyla temsil edilecektir. Buna göre A^μ nün bir τ parametresiyle belirlenmiş bir eğri boyunca paralel ötelenmesi de

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad \text{(IV.2.18)}$$

denklemiyle karakterize edilecektir. Bu diferansiyel denklemin çözümü olan $x^\mu = x^\mu(\tau\,;A^\nu)$ eğrileri, göz önüne alınan *RİEMANN* uzayında, A^μ vektörünün kendi kendine paralel kalmak şartıyla üzerinde kayarak ötelenebileceği eğri ailesini teşkil ederler.

Şimdi $\xi^\mu = \xi^\mu(s)$ şeklinde bir eğri göz önüne alalım. Bunun $d\xi^\mu/ds$ ile verilen teğet vektörünün bu eğri boyunca kaydırılarak ötelenmesi esnâsında daima kendi kendine paralel kalması için $\xi^\mu = \xi^\mu(s)$ eğrisinin ne gibi bir özelliği haiz olması gerektiğini araştıralım. Buna göre

$$D\left(\frac{d\xi^\mu}{ds}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\frac{d\xi^\lambda}{ds}\frac{d\xi^\nu}{ds} = 0$$

bulunur; oysa bu ifâde bir *RİEMANN* uzayının geodezik eğrilerini veren (IV.2.16) denkleminin aynısıdır. Şu hâlde bir *RİEMANN* uzayında, teğet vektörünün kendi kendine paralel kalarak ötelenebildiği eğrilerin uzayın geodezik eğrileri olduğu anlaşılmış olmaktadır.

Bir *RİEMANN* uzayının (IV.1.31) e göre $\Omega^\mu = 0$, $\Omega = 0$, $\Omega^\mu_\lambda \neq 0$ şartlarıyla karakterize edilen metrik bir uzay olduğu anlaşılmaktadır. Özellikle $\Omega^\mu_\lambda \neq 0$ şartı eğrilik tansörünün sıfırdan farklı olması demektir. Bir *RİEMANN* uzayı söz konusu olduğunda bunun eğrilik tansörü için artık $B^\mu_{\lambda\nu\sigma}$ yerine *CHRİSTOFFEL* sembollerinin, şekli (IV.1.27) ile belirlenmiş bir fonksiyonu olan $R^\mu{}_{\lambda\nu\sigma}$ tansörü yazılır:

$$\boxed{R^\mu{}_{\lambda,\nu\sigma} = \partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \Gamma^\tau_{\lambda\sigma}\Gamma^\mu_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\nu}\Gamma^\mu_{\tau\sigma}} \qquad \text{(IV.2.19)}$$

$R^{\mu}{}_{\lambda,\nu\sigma}$ tansörüne *RİEMANN - CHRİSTOFFEL eğrilik tansörü* adı verilir. Bu ifâdede μ indisini indirmek sûretiyle de

$$R_{\mu\lambda,\nu\sigma} = g_{\rho\mu} R^{\rho}{}_{\lambda,\nu\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

$$+ \Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma} \Gamma_{\tau\nu,\mu} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu} \Gamma_{\tau\sigma,\mu} \qquad \text{(IV.2.20)}$$

ifâdesi elde edilir. Buradan $R_{\mu\lambda,\nu\sigma}$ nın ν ve σ ya göre; ve kezâ μ ve λ ya göre antisimetrik olduğu görülmektedir :

$$R_{\mu\lambda,\nu\sigma} = - R_{\mu\lambda,\sigma\nu} \quad , \quad R_{\mu\lambda,\nu\sigma} = - R_{\lambda\mu,\nu\sigma} \qquad \text{(IV.2.21)}$$

Ayrıca

$$R_{\mu\lambda,\nu\sigma} = R_{\nu\sigma,\mu\lambda} \qquad \text{(IV.2.22.)}$$

dır.

$R^{\mu}{}_{\lambda,\nu\sigma}$ dan hareketle elde edilen

$$\boxed{R_{\lambda\nu} = R^{\mu}{}_{\lambda,\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\mu} \Gamma^{\mu}_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu} \Gamma^{\mu}_{\tau\mu}} \qquad \text{(IV.2.23)}$$

tansörü 2. mertebeden simetrik bir tansör olup eğrilik tansöründen hareketle elde edilecek olan 2. mertebeden her tansör ya bir işâret farkıyla $R_{\lambda\nu}$ ye eşittir, ya da sıfırdır. **ERGT'**nde önemli bir rol oynayacağını göreceğimiz bu tansöre *RİCCİ tansörü* adı verilir. (IV.2.11) ve (IV.2.23) ifâdelerinden *RİCCİ* tansörünün simetrik bir tansör olduğu kolaylıkla tahkik olunur :

$$R_{\lambda\nu} = R_{\nu\lambda} \,. \qquad \text{(IV.2.24)}$$

RİEMANN-CHRİSTOFFEL eğrilik tansöründen hareketle tanımlanan

$$R^{\mu\tau}{}_{\nu\sigma} = g^{\lambda\tau} R^{\mu}{}_{\lambda\nu\sigma}$$

tansörünün iki kere büzülme işlemine tâbî tutulmasıyla elde edilen $R = R^{\mu\tau}{}_{\tau\mu} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu}$ skalerine de **skaler eğrilik** adı verilir.

Şimdi $\nabla_\sigma A^\mu = \partial_\sigma A^\mu + \Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} A^\alpha$ olduğunu hatırlayarak $\nabla_\nu (\nabla_\sigma A^\mu)$ yü teşkil edelim :

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu (\nabla_\sigma A^\mu) &= \partial_\nu (\nabla_\sigma A^\mu) - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} (\nabla_\tau A^\mu) + \Gamma^{\mu}_{\nu\tau} (\nabla_\sigma A^\tau) \\
&= \partial_\nu \partial_\sigma A^\mu + \partial_\nu (\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} A^\beta) - \Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} (\nabla_\tau A^\mu) + \Gamma^{\mu}_{\nu\tau} (\nabla_\sigma A^\tau) \\
&= \partial_\nu \partial_\sigma A^\mu + A^\beta (\partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}) + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} (\partial_\nu A^\beta) - \Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} (\partial_\tau A^\mu) - \Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} \Gamma^{\mu}_{\beta\tau} A^\beta \\
&\quad + \Gamma^{\mu}_{\nu\tau} (\partial_\sigma A^\tau) + \Gamma^{\mu}_{\nu\tau} \Gamma^{\tau}_{\sigma\beta} A^\beta \,.
\end{aligned}$$

Buradan

$$(\nabla_\nu \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\nu) A^\mu = A^\lambda (\partial_\nu \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \Gamma^\tau_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\tau} \Gamma^\tau_{\sigma\lambda}) = A^\lambda R^\mu{}_{\lambda\nu\sigma} \quad \text{(IV.2.25)}$$

bulunur. Bu, bize, mutlak türev almada sıranın önemli olduğunu göstermektedir. Aynı işlemler eğer kovaryant bir vektör için yapılırsa, benzer şekilde

$$(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho) A_\nu = - R^\tau{}_{\nu\rho\sigma} A_\tau \quad \text{(IV.2.26)}$$

bulunur. Eğer bir vektör alınacak yerde $A_{\mu\nu}$ gibi ikinci mertebeden bir tansör göz önüne alınacak olursa

$$(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho) A_{\mu\nu} = - R^\tau{}_{\mu\rho\sigma} A_{\tau\nu} - R^\tau{}_{\nu\rho\sigma} A_{\mu\tau}$$

bulunur. Eğer $A_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu$ seçilecek olursa

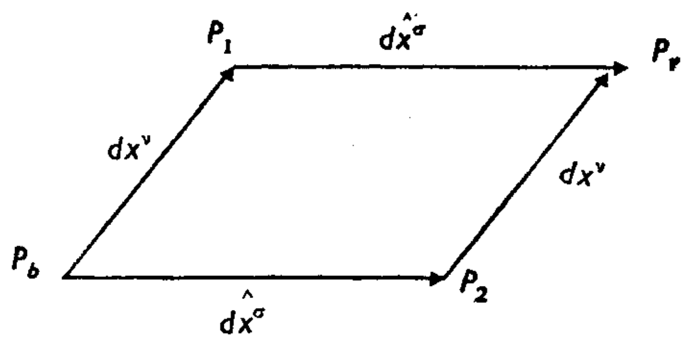
$$(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho) \nabla_\mu A_\nu = - R^\tau{}_{\mu\rho\sigma} \nabla_\tau A_\nu - R^\tau{}_{\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\tau \quad \text{(IV.2.27)}$$

olacaktır.

Bir *RİEMANN* uzayında, Şekil: IV.6 daki gibi, bir P_b başlangıç noktasından hareketle bir P_v varış noktasına giden sonsuz küçük farklı iki yol boyunca bir A^μ kontravaryant vektörünün paralel ötelenmelerinin hesaplanıp mukaayesesi de ilginçtir. A^μ nün, P_b den P_1 e kadar paralel ötelenmesi sonunda değişimi (IV.1.3a) ya binâen

$$A^\mu(P_1) - A^\mu(P_b) = dA^\mu(P_b P_1) = - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(P_b) \,.\, A^\alpha(P_b)\, dx^\nu \quad \text{(IV.2.28)}$$

dür.



Şekil : IV.6.

Öte yandan P_1 deki *CHRİSTOFFEL* sembolleri de dx^ν cinsinden *TAYLOR* serisine açılırsa

$$\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_1) = \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b) + \partial_\nu \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, dx^\nu + O(2) \quad \text{(IV.2.29)}$$

olur. Bundan yaralanarak A^μ nün P_1 ile P_ν arasındaki değişimi de kolaylıkla hesaplanır :

$$A^\mu(P_\nu) - A^\mu(P_1) = dA^\mu(P_1 P_\nu) = -\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_1)\, A^\lambda(P_1)\, d\hat{x}^\sigma =$$

$$= -\{\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b) + \partial_\nu \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, dx^\nu\}\{A^\lambda(P_b) - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}(P_b)\, A^\alpha(P_b)\, dx^\nu\}\, d\hat{x}^\sigma \qquad \text{(IV.2.30)}$$

$$= -\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, d\hat{x}^\sigma - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, dx^\nu\, d\hat{x}^\sigma$$

$$+ \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}(P_b)\, A^\alpha(P_b)\, dx^\nu\, d\hat{x}^\sigma + O(3) \qquad \text{(IV.2.31)}$$

Buna göre

$$A^\mu(P_b P_1 P_\nu) = A^\mu(P_b) + dA^\mu(P_b P_1) + dA^\mu(P_1 P_\nu)$$

$$= A^\mu(P_b) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, dx^\nu - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, d\hat{x}^\sigma$$

$$-\partial_\nu \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, dx^\nu\, d\hat{x}^\sigma + \Gamma^\mu_{\sigma\tau}(P_b)\, \Gamma^\tau_{\nu\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, dx^\nu\, d\hat{x}^\sigma \qquad \text{(IV.2.32)}$$

olur. A^μ yü paralel ötelemeyle taşıdığımızda da benzer şekilde $P_b \to P_2 \to P_\nu$ yolu için

$$A^\mu(P_b P_2 P_\nu) = A^\mu(P_b) - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, d\hat{x}^\sigma - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, dx^\nu$$

$$-\partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, d\hat{x}^\sigma\, dx^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\tau}(P_b)\, \Gamma^\tau_{\sigma\lambda}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, dx^\sigma\, d\hat{x}^\nu \qquad \text{(IV.2.33)}$$

bulunur. Buna göre A^μ nün $P_b \to P_1 \to P_\nu$ yolu üzerinde paralel ötelenmesi sonucu eriştiği değer ile $P_b \to P_2 \to P_\nu$ yolu üzerinde paralel ötelenmesi sonucu eriştiği değer arasındaki farkın da

$$A^\mu(P_b P_1 P_\nu) - A^\mu(P_b P_2 P_\nu) = \Delta A^\mu = \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\, A^\lambda\, d\hat{x}^\sigma\, dx^\nu - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\, A^\lambda\, dx^\nu\, d\hat{x}^\sigma$$

$$+ \Gamma^\tau_{\lambda\nu}\, \Gamma^\mu_{\tau\sigma}\, A^\lambda\, dx^\nu\, d\hat{x}^\sigma - \Gamma^\tau_{\lambda\sigma}\, \Gamma^\mu_{\tau\nu}\, A^\lambda\, d\hat{x}^\sigma\, dx^\nu$$

ya da (IV.2.19) u göz önünde tutarak

$$\boxed{\Delta A^\mu = R^\mu{}_{\lambda,\nu\sigma}(P_b)\, A^\lambda(P_b)\, dx^\nu\, d\hat{x}^\sigma} \qquad \text{(IV.2.34)}$$

dan ibâret olduğu tesbit edilmiş olur. Bu ifâdeden de A^μ nün, keyfî bir vektör olarak alınması şartıyla, başka bir noktadaki değerinin ancak ve ancak $R^\mu{}_{\lambda,\nu\sigma} = 0$ ise yoldan bağımsız olacağı anlaşılmaktadır.

(IV.3) BİANCHİ ÖZDEŞLİKLERİ

Şimdi (IV.2.27) ifâdesini bir kere ρ ile μ yü, ikinci kere de μ ile σ yı değiş tokuş ederek yeniden yazıp bunları (IV.2.27) den çıkaralım. Eğrilik tansöründeki antisimetri özelliklerini de göz önünde tutarak

$$(\nabla_\rho\nabla_\sigma-\nabla_\sigma\nabla_\rho)\,\nabla_\mu A_\nu-(\nabla_\mu\nabla_\sigma-\nabla_\sigma\nabla_\mu)\,\nabla_\rho A_\nu-(\nabla_\rho\nabla_\mu-\nabla_\mu\nabla_\rho)\nabla_\sigma A_\nu=\nabla_\rho\nabla_\sigma\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\sigma\nabla_\rho\nabla_\mu A_\nu-$$

$$-\nabla_\mu\nabla_\sigma\nabla_\rho A_\nu+\nabla_\sigma\nabla_\mu\nabla_\rho A_\nu-\nabla_\rho\nabla_\mu\nabla_\sigma A_\nu+\nabla_\mu\nabla_\rho\nabla_\sigma A^\nu=$$

$$=R^\tau{}_{\mu\rho\sigma}\,(\nabla_\tau A_\nu)+R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}\,(\nabla_\mu A_\tau)-R^\tau{}_{\rho\mu\sigma}\,(\nabla_\tau A_\nu)-R^\tau{}_{\nu\mu\sigma}\,(\nabla_\rho A_\tau)-$$

$$-R^\tau{}_{\sigma\rho\mu}\,(\nabla_\tau A_\nu)-R^\tau{}_{\nu\rho\mu}\,(\nabla_\sigma A_\tau)=$$

$$=(R^\tau{}_{\mu\rho\sigma}+R^\tau{}_{\rho\sigma\mu}+R^\tau{}_{\sigma\mu\rho})\,\nabla_\tau A_\nu+[R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}\,\nabla_\mu A_\tau+R^\tau{}_{\nu\sigma\mu}\,\nabla_\rho A_\tau+R^\tau{}_{\nu\mu\rho}\,\nabla_\sigma A_\tau] \quad \text{(IV.3.1)}$$

olur. Ayrıca (IV.2.26) dan μ indisine göre mutlak türev alarak

$$\nabla_\mu\,[(\nabla_\rho\nabla_\sigma-\nabla_\sigma\nabla_\rho)\,A_\nu]=(\nabla_\mu\,R^\tau{}_{\nu\rho\sigma})\,A_\tau+R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}\,\nabla_\mu A_\tau$$

dur. Bu ifâdeyi de bir kere ρ ile μ yü, ikinci bir kere de μ ile σ yı değiş tokuş ederek yeniden yazıp elde edilenleri bu ifâdeden çıkartalım; neticede

$$(\nabla_\mu\nabla_\rho\nabla_\sigma)\,A_\nu-(\nabla_\mu\nabla_\sigma\nabla_\rho)\,A_\nu-(\nabla_\rho\nabla_\mu\nabla_\sigma)\,A_\nu+(\nabla_\rho\nabla_\sigma\nabla_\mu)\,A_\nu-(\nabla_\sigma\nabla_\rho\nabla_\mu)\,A_\nu+(\nabla_\sigma\nabla_\mu\nabla_\rho)\,A_\nu=$$

$$=A_\tau\,\nabla_\mu R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}+R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}\,(\nabla_\mu A_\tau)-A_\tau\,\nabla_\rho R^\tau{}_{\nu\sigma\mu}-R^\tau{}_{\nu\mu\sigma}\,(\nabla_\rho A_\tau)-A_\tau\,\nabla_\sigma R^\tau{}_{\nu\rho\mu}-R^\tau{}_{\nu\sigma\mu}\,(\nabla_\sigma A_\tau)=$$

$$=(\nabla_\mu R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}+\nabla_\rho R^\tau{}_{\nu\sigma\mu}+\nabla_\sigma R^\tau{}_{\nu\sigma\mu})\,A_\tau+$$

$$+[R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}\,(\nabla_\mu A_\tau)+R^\tau{}_{\nu\sigma\mu}\,(\nabla_\rho A_\tau)+R^\tau{}_{\nu\mu\rho}\,(\nabla_\sigma A_\tau)] \quad \text{(IV.3.2)}$$

bulunur. (IV.3.1) ve (IV.3.2) un sol yanları özdeş olduklarından bu ifâdelerden

$$(\nabla_\mu R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}+\nabla_\rho R^\tau{}_{\nu\sigma\mu}+\nabla_\sigma R^\tau{}_{\nu\mu\rho})\,A_\tau=(R^\tau{}_{\mu\rho\sigma}+R^\lambda{}_{\rho\sigma\mu}+R^\lambda{}_{\sigma\mu\rho})\,\nabla_\tau A_\nu$$

sonucu çıkar. Ancak, A_ν vektörü tamâmen keyfî seçilmiş bir vektördür. Bu son ifâdenin bu şartlar altında geçerli olması ancak her iki yandaki parantezlerin özdeş olarak sıfır olmasıyla mümkündür. Böylelikle

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_\mu R^\tau{}_{\nu\rho\sigma}+\nabla_\rho R^\tau{}_{\nu\sigma\mu}+\nabla_\sigma R^\tau{}_{\nu\mu\rho}&\equiv 0\\ R^\tau{}_{\mu\rho\sigma}+R^\tau{}_{\rho\sigma\mu}+R^\tau{}_{\sigma\mu\rho}&\equiv 0\end{aligned}} \quad \text{(IV.3.3)}$$

özdeşlikleri elde edilmiş olur. Bunlara **BİANCHİ özdeşlikleri** adı verilir.

(IV.4) EİNSTEİN TANSÖRÜ

(IV.3.3) *BİANCHİ* özdeşliklerinden ilkini $g^{\nu\lambda}$ ile çarpıp ν indisi üzerinden toplam yaparak

$$\nabla_\mu R^{\tau\lambda}{}_{\rho\sigma} + \nabla_\rho R^{\tau\lambda}{}_{\sigma\mu} + \nabla_\sigma R^{\tau\lambda}{}_{\mu\rho} \equiv 0$$

bulunur. Eğer bu ifâdede λ ve σ indislerine göre ve kezâ τ ve μ indislerine göre büzülme işlemi uygulanırsa, (IV.2.21) simetri bağıntılarını ve $R^{\nu\sigma}{}_{\sigma\nu} = R$ olduğunu da göz önünde bulundurarak,

$$0 \equiv \nabla_\mu R^{\mu\sigma}{}_{\rho\sigma} + \nabla_\rho R^{\mu\sigma}{}_{\sigma\mu} + \nabla_\sigma R^{\mu\sigma}{}_{\mu\rho} \equiv -\nabla_\mu R^{\sigma\mu}{}_{\rho\sigma} + \nabla_\rho R - \nabla_\sigma R^{\mu\sigma}{}_{\rho\mu} \equiv$$

$$\equiv -\nabla_\sigma R^{\mu\sigma}{}_{\rho\mu} + \nabla_\rho R - \nabla_\sigma R^{\mu\sigma}{}_{\rho\mu} \equiv -2\nabla_\sigma (g^{\sigma\lambda} R^{\mu}{}_{\lambda\rho\mu}) + \nabla_\rho R$$

$$\equiv -2\nabla_\sigma (g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\rho}) + \nabla_\rho R$$

ve buradan da $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ vaz ederek

$$\boxed{\nabla_\sigma G^\sigma_\rho \equiv \nabla_\sigma \left(g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} \delta^\sigma_\rho R \right) \equiv 0} \qquad \text{(IV.4.1)}$$

bağıntısı elde edilir. Yâni G^σ_ρ yalnızca $R^{\mu}{}_{\lambda\nu\rho}$ *RİEMANN-CHRİSTOFFEL* eğrilik tansöründen hareketle elde edilen ve diverjansı özdeş olarak sıfır olan ikinci mertebeden bir tansördür. Buna göre

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \qquad \text{(IV.4.2)}$$

olarak tanımlanan tansöre **EİNSTEİN tansörü** adı verilir. Âşikâr olarak

$$G_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu} G^\lambda_\mu \quad , \quad G^{\mu\nu} = g^{\lambda\nu} G^\mu_\lambda \qquad \text{(IV.4.3)}$$

dür.

ELİE CARTAN yalnızca $g_{\mu\nu}$ lerin 1. ve 2. mertebeden türevleri cinsinden ifâde edilen ve $g_{\mu\nu}$ lerin 2. mertebeden türevlerine göre lineer olan, ayrıca da kovaryant diverjansı özdeş olarak sıfır olan tansörün, h ve Λ birer skaler olmak üzere, ancak

$$S_{\mu\nu} = h \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) \right] \qquad \text{(IV.4.4)}$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır [1].

Şimdi *RİCCİ* tansörünün sıfır olduğu hâli göz önüne alalım: $R_{\mu\nu} = 0$. Buna binâen $R = 0$ olur. Şu hâlde *EİNSTEİN* tansörü de sıfır olur :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0.$$

Tersine, eğer $G_{\mu\nu} = 0$ ise bu takdirde $R_{\lambda\nu}$ nün sıfır olacağı kolaylıkla görülür.

Buna göre G^{λ}_{μ} *EİNSTEİN* tansörünün ancak ve ancak R^{λ}_{μ} *RİCCİ* tansörünün sıfır olması hâlinde sıfır olacağı anlaşılmaktadır.

(IV.5) METRİK UZAYIN SİMETRİLERİ [2, 3]

Önceki paragraflarda bir varyete üzerinde çeşitli geometrik yapılar tanımlamak sûretiyle nasıl farklı geometriler elde edilebildiğini gördük. Bu paragrafta ise bu geometrilerin arzedebilecekleri simetri özelliklerine temas etmek istiyoruz.

Önce, herhangi bir geometrik yapıyla donatılmamış bir varyete göz önüne alındığında bunun simetri özellikleri ne olabilir onu araştıralım. Yapısız bir varyetenin temel özelliği bir noktasının bir diğerinden ayırdedilememesidir. Bir an için böyle bir varyete içinde kaybolmuş olduğumuzu farzetsek, noktaları birbirlerinden farklı kılacak işâretler olmadığından nerede bulunduğumuzu söylememize de imkân olmaz. Bir varyetenin haiz olduğu minimum özellikler, meselâ, bağımlı oluşu (yâni varyeteye ait herhangi iki nokta verildiğinde birinden ötekine varyetenin içinden çıkmasızın gidebilme) gibi topolojik özelliklerdir. Bu özellikler ise varyetenin burulma, çekme, büzme v.s. gibi deformasyonlarıyla bozulmayan, ortadan kalkmayan özellikleridir.

Bunu daha belirgin bir biçimde ifâde edebilmek üzere varyetenin kendi kendine tasviri yâni varyetenin noktalarının gene varyetenin başka noktalarına dönüşmesi fikri ithâl edilir. Şu hâlde varyetenin her bir P noktasına varyetenin bir başka P' noktası tekaabül ettiriler. Bu tekaabülde topolojik olarak yakın noktaların gene topolojik olarak yakın noktalara dönüşmesine dikkat edilir. Yâni cümlenin bir P noktasının cıvarı da kendisiyle birlikte, bu topolojik özelliği bozulmaksızın dönüşür. Şu hâlde bir P noktasından P' noktasına giderken P cıvarındaki topolojiyi de beraberimizde sürüklemiş ve bunu P' deki topoloji yerine ikaame etmiş oluruz. Yerel topolojinin daima ÖKLİTsel bir topoloji olduğu kabul edildiğine göre P' deki topolojiyi P dekiyle ikaame etmenin cümlenin tümünde hiç bir değişiklik doğurmayacağı aşikârdır. Buna göre bir varyetenin en genel topolojik dönüşümlere müsait olduğu, ve haiz olacağı simetrilerin de bütün mümkün topolojik dönüşümlerin simetri grubu olduğu anlaşılmaktadır.

Bu düşünceleri varyetemize bir koordinat sistemi ithâl etmek sûretiyle formüle edebiliriz. P noktasının koordinatlarını meselâ $\{x^{\nu}\}$ **sayıları cümlesi** aracılığıyla, P' nünkileri de $\{\bar{x}^{\mu}\}$ **sayıları cümlesi** aracılığıyla gösterelim. Noktaların bu türlü koordinatlaştırılmasının, hiç değilse sonlu bölgeler söz konusu olduğunda, sürekli olduğunu kabul ederek varyetenin kendi kendine tasvirini

$$\bar{x}^{\mu} = \bar{x}^{\mu}(\{x^{\nu}\}) \tag{IV.5.1}$$

denklemiyle ifâde edebiliriz. Eğer söz konusu 4 boyutlu bir varyete ise $\bar{x}^{\mu}(\{x^{\nu}\})$ fonksiyonlarının herhangi dördü topolojik bir dönüşüme delâlet edecektir.

Sonsuz küçük bir deformasyon (yâni bir tasvir) söz konusu olduğunda bu tasvir, elemanları, her bir P noktasını dönüşmüş olduğu P' noktasına bağlayan vektörler olan bir vektör alanı aracılığıyla temsil edilebilir. Bu takdirde varyetenin bu vektör alanının doğurduğu bir **hareket grubu**na sâhip olduğu söylenir. Yukarıda sözü edilmiş olan kısıtlamalar hâriç, varyetenin topolojisini invaryant bırakan tasvirler keyfî olduklarından varyete üzerinde tanımlanan herhangi bir vektör alanının mümkün bir harekete tekaabül edeceği âşikârdır.

Göz önüne aldığımız varyeteyi *ilişkisel bağlantı* ya da *metrik* gibi geometrik bir yapıyla donatırsak acaba uzayın simetri özellikleri ne olur? Böyle bir uzayda bir otomorfizm yâni uzayı kendi kendine dönüştüren bir tasvir uyguladığımız zaman, bir noktadaki geometrik yapıyı o noktaya tekaabül eden dönüşmüş noktadaki geometrik yapıyla mukaayese etmemiz gerekir. Ancak bu her iki geometrik yapı birbirlerine özdeş iseler söz konusu tasvirin invaryant bir tasvir olduğundan ve uzayın bir simetrisini temsil ettiğinden bahsedilebilir.

Bu görüş açısından, varyetemiz üzerinde geometrik bir yapı tanımladığımız an, simetri grubunu, mümkün bütün topolojik tasvirler grubundan belirli bir alt gruba indirgemiş olacağımız âşikârdır. Meselâ eğer varyetemizin geometrik yapısını *LORENTZ-MİNKOWSKİ* metriği ile belirlemiş bulunuyorsak uzayımızın simetri grubu da *LORENTZ* dönüşümlerininkinden ibâret olur. Başka bir tip metrik için ise hiç bir simetri grubu mevcûd olmayabilir de!

Şimdi belirli bir metrikle donatılmış bir uzayın bu metrik yapısını değiştirmeyen bir tasvirin ya da bir dönüşümün ne gibi genel şartları gerçeklemesi gerekir, onu tesbit etmek istiyoruz. Tartışmayı basitleştirmek için yalnızca sonsuz küçük dönüşümleri göz önüne alacağız. Aslında her sonlu dönüşüm sonsuz küçük dönüşümlerin peşpeşe uygulandıkları bir dizi dönüşümün bileşkesi olarak telâkki olunabildiğinden, bu bir kısıtlama teşkil etmez.

Şimdi $\{x^\mu\}$ koordinatlı P noktasını, $|\varepsilon| \ll 1$ olmak üzere, $\{x^\mu + \varepsilon\,\xi^\mu(x)\}$ koordinatlı P' noktasına tasvir eden bir $\xi^\mu(x)$ vektör alanı olsun. P' nün koordinatlarını $\bar{x}^\mu$ ile gösterirsek

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon\,\xi^\mu(x) \quad , \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{IV.5.2}$$

olacaktır. Uzayın metriğini temsil eden $g_{\rho\sigma}$ ikinci mertebeden bir tansör olmak hasebiyle (IV.5.2) dönüşümünde

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}\,g_{\rho\sigma}(x)$$

şeklinde dönüşmüş olacaktır; ya da ters dönüşüm söz konusu olduğunda

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}(\bar{x}) \tag{IV.5.3}$$

olacaktır.

Eğer (IV.5.2) dönüşümünün uzayın metrik yapısını değiştirmediği kabul edilirse bütün x ler için

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x) \quad \text{veyâ} \quad \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) \equiv g_{\mu\nu}(\bar{x}) \tag{IV.5.4}$$

olmalıdır. Bu şart altında (IV.5.3) ifâdesi

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(\bar{x}) \tag{IV.5.5}$$

şekline girer. (IV.5.5) ifâdesini gerçekleyen her $x \to \bar{x}$ dönüşümüne **eşmetrikli** (*izometrik*) **dönüşüm** adı verilir.

(IV.5.2) ile verilmiş olan sonsuz küçük koordinat dönüşümünün eşmetrikli bir dönüşüme yol açması için gerek şartın, birinci mertebeden ε yaklaşıklığıyla,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(\bar{x}) \\
&= \frac{\partial (x^\rho + \varepsilon \xi^\rho)}{\partial x^\mu} \frac{\partial (x^\sigma + \varepsilon \xi^\sigma)}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x^\tau + \varepsilon \xi^\tau) \\
&= \left\{ \delta^\rho_\mu + \varepsilon \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \right\} \left\{ \delta^\sigma_\nu + \varepsilon \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \right\} \left\{ g_{\rho\sigma}(x^\tau) + \varepsilon \xi^\tau \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x^\tau)}{\partial x^\tau} + O(\varepsilon^2) \right\} \\
&= \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu g_{\rho\sigma}(x) + \varepsilon \left\{ \delta^\sigma_\nu \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} g_{\rho\sigma} + \delta^\rho_\mu \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma} + \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu \xi^\tau \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} \right\} + O(\varepsilon^2) \\
&= g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\mu\sigma} + \xi^\tau \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} \right\}
\end{aligned}$$

ya da

$$0 = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\mu\sigma} + \xi^\tau \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} \tag{IV.5.6}$$

olduğu anlaşılmış olur. Bu ifâdeyi ξ^μ vektör alanının kovaryant bileşenleri cinsinden yazacak olursak, $\xi_\tau = g_{\tau\rho} \xi^\rho$ ve dolayısıyla

$$\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu} = \frac{\partial (g_{\rho\nu} \xi^\rho)}{\partial x^\mu} - \xi^\rho \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu}$$

olmasından ötürü (IV.5.6) nın

$$0=\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x^\mu}+\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x^\nu}+\xi^\tau\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}-\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\nu}\right]$$

$$=\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x^\mu}+\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x^\nu}-2\,\xi_\tau\,\Gamma^\tau_{\mu\nu}$$

ya da

$$\boxed{\nabla_\mu\,\xi_\nu+\nabla_\nu\,\xi_\mu=0} \tag{IV.5.7}$$

şekline indirgenebileceği görülmektedir.

(IV.5.7) bağıntısını sağlayan $\xi_\mu(x)$ gibi her dörtlü vektör alanının, $g_{\mu\nu}(x)$ metriğinin bir **KİLLİNG** (1847-1923) **vektörünü** oluşturduğu söylenir [4]. Böylece bir metriğin bütün sonsuz küçük eşmetrikli dönüşümlerini tâyin etme problemi metriğin bütün *KİLLİNG* vektörlerini tâyin etme problemine indirgenmiş olmaktadır. *KİLLİNG* vektörlerinin herhangi bir lineer kombinezonunun gene bir *KİLLİNG* vektörü olduğu gösterilebilir. Böylelikle bir metriğin eşmetrikli sonsuz küçük dönüşümlerinin *KİLLİNG* vektörlerinin taban vektörlerini oluşturdukları vektör alanları uzayı tarafından belirlenmekte olduğu görülmüş olmaktadır.

KİLLİNG vektörlerinin varlığının işâret ettiği simetrilere **uzayın metrik otomorfizmleri** adı da verilir. N boyutlu metrik bir uzayın haiz olabileceği metrik otomorfizmlerin maksimum sayısının $(N+1)N/2$ olduğu gösterilir [3, 5]. Bu özelliği haiz uzaylara da **maksimal simetrik uzaylar** adı verilir [3, 6].

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

IV.1. İlişkisel bağlantı katsayılarının hangi şartlar altında tansör vasfına sâhip olabileceklerini tesbit ediniz.

IV.2. φ ve ψ, koordinatların fonksiyonları olmak üzere belirli bir koordinat sisteminde

$$\Gamma^\mu_{\lambda\nu}=\delta^\mu_\lambda\,\partial_\nu\varphi+\delta^\mu_\nu\,\partial_\lambda\psi$$

olsun. Bu takdirde :

1) $R^\mu{}_{\lambda\nu\sigma}$ nın yalnızca ψ nın fonksiyonu olacağını, ve 2) $\psi=-\ln(a_\mu x^\mu)$ olduğunda $R_{\lambda\nu}=R^\mu{}_{\lambda\nu\mu}=0$ olacağını gösteriniz.

IV.3. E_4 deki dik kartezyen koordinatlar y^1, y^2, y^3, y^4 olmak üzere

$$y^1=R\cos\theta$$
$$y^2=R\sin\theta\cos\varphi$$
$$y^3=R\sin\theta\sin\varphi\cos\psi$$
$$y^4=R\sin\theta\sin\varphi\sin\psi$$

dönüşümü R yarıçaplı bir hiperkürenin parametrik gösterilişini temin eder. (θ, φ, ψ) bu R yarıçaplı kürenin üzerindeki koordinatları gösterirse bu hiperyüzeyin metriğini ve eğrilik tansörünün sıfırdan farklı bileşenlerini hesaplayınız.

IV.4. Metriği $ds^2 = \operatorname{sech}^2 y\,(dx^2 + dy^2)$ ile verilen iki boyutlu bir *RİEMANN* yüzeyinin geodeziklerinin denklemini tesis ediniz.

IV.5. Bir geodezik eğrisinin s ilişkisel (afin) parametresi cinsinden denklemi: $x^\mu = x^\mu(s)$ şeklinde olsun. s parametresi üzerinde eğer $\lambda = \lambda(s)$ şeklinde sürekli bir dönüşüm yapılırsa bu takdirde geodezik eğrisinin denklemi ne şekil olur? $s \to \lambda = \lambda(s)$ dönüşümünün afin bir dönüşüm olması yâni λ parametresinin de afin bir parametre olması için λ nasıl bir şartı gerçeklemelidir?

IV.6. x ve y dik kartezyen koordinatlar, φ ve θ da sırasıyla azimüt ve zenit açıları olmak üzere

$$x = \varphi \quad , \quad y = \ln \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$$

dönüşümü aracılığıyla birim küre yüzeyini düzlem üzerine tasvir etmek mümkündür. Buna *MERCATOR* izdüşümü adı verilir. Buna göre küre yüzeyinin metriğini x ve y cinsinden hesaplayıp meridyen çemberlerinin, α ve β iki parametre olmak üzere,

$$\sin y = \alpha \sin (x + \beta)$$

ile temsil edileceklerini gösteriniz.

IV.7.

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2km}{r}\right) dt^2 - r^2 (\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2km}{c^2 r}} \tag{1}$$

şeklinde bir metrik verildiğinde öyle bir koordinat sistemi bulunuz ki bu sistemde (1) metriği, uzaysal kısmı, ÖKLİTsel ifâdesiyle orantılı olacak şekilde ifâde edilebilsin (Eşyönsel küresel koordinat sistemi).

IV.8. ω açısal hızıyla dönen bir koordinat sisteminde uzaysal uzaklığa tekabül eden dl^2 yi bulunuz. dl^2 aracılığıyla, dönen bir diskin geodezik eğrilerini ve diskin üzerindeki geometriyi inceleyiniz.

IV.9. Bir O noktasındaki gözlemcinin (C) evren çizgisinin denklemi $x^\alpha = x^\alpha(s)$ ile verilmektedir. Gözlemcinin yakınında birim kütleli serbest bir P tâneciği de denklemi $x^\alpha = y^\alpha(s)$ ile belirlenen bir (Γ) yörüngesi üzerinde hareket etmektedir.

s parametresinin belirli bir değeri için P nin konumu

$$U^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}(s)}{ds} \quad , \quad U_{\alpha}U^{\alpha} = 1$$

ile belirlenen ve (C) ye O noktasında teğet olan **U** vektörüne dik bir hiperyüzey ile (Γ) nın arakesit noktasıdır.

Gözlemci P nin konumunu, doğrultusu, O dan geçen ve $x^{\alpha} = z^{\alpha}(\tau)$ denklemiyle belirlenen uzaysal bir (G) geodezik eğrisinin teğet doğrultusu olan bir r vektörüyle belirlemektedir. Buradaki τ afin parametresi O dan itibâren (G) boyunca ölçülen uzaklığı göstermektedir.

Bu şartlar altında P serbest tâneciğinin hareket denkleminin O noktasından gözlendiği şekliyle ve r mertebesinden terimler yaklaşıklığıyla tesis ediniz.

IV.10. *RİEMANN-CHRİSTOFFEL* eğrilik tansörünün N boyutlu bir uzay için haiz olduğu bağımsız bileşen sayısının $N^2(N^2 - 1)/12$ olduğunu gösteriniz.

IV.11. n boyutlu bir V_n varyetesi bir $g_{\mu\nu}$ metriğiyle donatılmıştır.

a) $$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad , \quad (\mu,\nu = 1,2,\ldots,n)$$

ile tanımlanan genelleştirilmiş *EİNSTEİN* tansörünün korunduğu gösteriniz.

b) Bir $A_{\mu\nu}$ tansörü eğer : $A_{\mu\nu} \equiv \lambda g_{\mu\nu}$ şeklinde ise, bu takdirde $A_{\mu\nu}$ tansörünün $g_{\mu\nu}$ metriğine göre eşyönlü olduğu söylenir.

$g_{\mu\nu}$ metrik tansörüne bağlı olarak tanımlanan $R_{\mu\nu}$ *RİCCİ* tansörünün esas doğrultularının, $R_{\mu\nu}$ nün eşyönlü olması hâlinde belirsiz olacaklarını gösterip λ nın değerini tesbit ediniz.

c) Buradan, $n>2$ için *RİCCİ* tansörünün haiz olduğu ilginç bir özelliği ortaya koyunuz.

IV.12. $g_{\alpha\beta}(x^{\rho})$ metrik tansörünün bileşenlerinin $g_{00} \equiv g^{00} \equiv 1$ ve $g_{0i} \equiv g^{0i} \equiv 0$ özdeşliklerini gerçekledikleri bir $\{x^{\rho}\}$ koordinat sistemine *hemzaman koordinat sistemi* adı verilir. Buna göre, $x^{\alpha} \to \bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon\, w^{\alpha}(x^{\rho})$ şeklinde sonsuz küçük bir noktasal dönüşüm verildiğinde, böyle bir dönüşümde $\{x^{\alpha}\}$ nın hemzamanlık vasfının korunması için $w^{\alpha}(x^{\rho})$ ların tâbî olmaları gereken en genel şartları tesbit ediniz.

IV.13. *MİNKOWSKİ* uzayı göz önüne alındığında bu uzayın simetri grubunu *KİLLİNG* denkleminden yararlanarak tesbit ediniz.

IV.14. Bir *KİLLİNG* vektör alanı için

$$\nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu = - R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} \xi_\lambda$$

olduğunu gösteriniz. Bu bağıntıdan yararlanarak ξ_λ nın belirli bir X noktasındaki bütün mertebeden türevlerinin $\xi_\lambda(X)$ ve $\nabla_\nu \xi_\lambda(X)$ in fonksiyonu olarak belirlenebileceklerini gösteriniz.

IV.15. Bir ξ_μ vektör alanı yardımıyla tanımlanmış bir metrik otomorfizm verilmiş olsun. Bu takdirde, s ile bir geodezik eğrisini parametrize eden yay uzunluğunu göstererek

$$\psi = \xi_\mu(x(s)) \frac{dx^\mu(s)}{ds}$$

büyüklüğünün herhangi bir $x^\mu = x^\mu(s)$ geodeziği boyunca sâbit kalacağını ispatlayınız.

Tersine, $\xi_\mu \cdot dx^\mu/ds = sâbit$ şartının geodezik denkleminin bir integrali olması için ξ_μ nün bir metrik otomorfizmin doğurganı olması gerektiğini gösteriniz.

IV.16. Eğrisel bir yüzeyin *RİEMANN-CHRİSTOFFEL* eğrilik tansörünün sıfırdan farklı bileşenlerinin yüzeyin *GAUSS* eğriliği ile orantılı olduğunu gösteriniz.

IV.17. Denklemleri $x^\mu = x^\mu(\tau)$ ile verilen, τ gibi bir invaryant aracılığıyla parametrelenmiş bir eğri göz önüne alındığında $A^\mu(\tau)$ gibi bir vektör ile T^μ_ν gibi ikinci mertebeden bir tansörün bu eğri boyunca mutlak türevlerini hesaplayınız.

IV.18. $x^\mu(\tau)$ ve $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ gibi birbirlerine sonsuz yakın iki geodezik eğrisi üzerinde serbest düşüşe terkedilmiş iki test tâneciği göz önüne alınıyor. Bu takdirde

$$\frac{D^2}{D\tau^2} [\delta x^\lambda(\tau)] = R^\lambda{}_{\nu\mu\rho} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

olduğunu gösteriniz. Bu sonuç neden yerel eşdeğerlik ilkesiyle çelişik değildir?

IV.19. Bir *RİEMANN* uzayında daima $R^\mu{}_{\mu\nu\sigma} \equiv 0$ olduğunu gösteriniz.

IV.20. N boyutlu RİEMANNsal bir uzaya tekaabül eden eğrilik tansörünün bağımsız bileşenlerinin sayısının

$$C_N = \frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1)$$

olduğu gösterilir. Buna dayanarak 2 boyutlu RİEMANNsal bir uzay için

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = (g_{\lambda\nu}\, g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma}\, g_{\mu\nu}) \frac{R}{2}$$

şeklinde yazılabileceğini gösterip R nin neye delâlet ettiğini bulunuz.

IV.21. 3 boyutlu RİEMANNsal bir uzay için eğrilik tansörünün

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = g_{\lambda\nu}\, R_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma}\, R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\, R_{\lambda\sigma} + g_{\mu\sigma}\, R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} R\, (g_{\lambda\nu}\, g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma}\, g_{\mu\nu})$$

şeklinde yalnızca metrik tansör ile *RİCCİ* tansörünün fonksiyonu olarak ifâde edilebileceğini tahkik ediniz.

REFERANSLAR

[1] E.CARTAN, *J. Math. pures et appliquées*, **1**, 141, (1922).

[2] J.L.ANDERSON, Riemannian Geometry; **Gravitation and Relativity**, ed. CHİU and HOFFMANN; W.A. Benjamin, Inc. s. 17-39, (1969)

[3] S. WEİNBERG, **Gravitation and Cosmology**; John Wiley and Sons, Inc.; s. 375-404; (1972).

[4] W. KİLLİNG, *J. f.d. reine u. angew. Math.* (*CRELLE*), **109**, s. 121-186, (1892).

[5] H.P. ROBERTSON, T.W. NOONAN, **Relativity and Cosmology**; Saunders; s. 352-327, (1969).

[6] S. HELGASON, **Differantial Geometry and Symmetric Spaces**; Academic Press, (1962).

V. BÖLÜM

... as EİNSTEİN did hope, that matter would eventually be understood in geometrical terms, it made sense to give Riemannian geometry a primary role in describing the thory of gravitation... [but] Riemannian geometry appears only as a mathematical tool for the exploitation of the Principle of Equivalence, and not as a fundamental basis for the theory of gravitation.

S. Weinberg

ALAN DENKLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

(V.I) ALAN DENKLEMLERİ

Geçen bölümlerde gravitasyonun rölâtivist bir teorisinin nasıl olması gerektiği husûsunda bazı yol gösterici ilkeler tesbit etmiştik. Bunlara dayanarak durumu kısaca özetlersek :

1) Gravitasyonun rölâtivist bir teorisinin alan denklemleri koordinat sistemlerinden bağımsız bir biçimde ifâde olunmalıdır.

2) Bu teoriye yataklık eden uzay-zaman varyetesi dört boyutlu RİEMANNsal bir uzay oluşturmalıdır.

3) Teori, maddenin, uzay-zamanın geometrik yapısına tesirini içermelidir.

4) Teorinin alan denklemleri ilk yaklaşıklıkta klâsik gravitasyon teorisinin alan denklemine (*POİSSON denklemine*) indirgenebilmelidir.

Bu şartlardan ilki genel kovaryans ilkesine eşdeğer olup teorinin tansörel vasfına işâret etmektedir. İkinci şart gerçek gravitasyon alanlarının ancak RİEMANNsal bir uzay-zaman çerçevesi içinde tutarlı bir şema oluşturacağına dair elde edilen sonucu yansıtmakta ve yerel eşdeğerlik ilkesine dayanmaktadır. Üçüncü şart uzay-zamanın geometrik yapısının, gravitasyon alanı üreteci olan maddeyle belirlenebileceğini ifâde etmekte ve, *bir bakıma*, **MACH ilkesi**nin bir ifâdesi olmaktadır. Son şart ise teorinin klâsik gravitasyon teorisiyle bağlantılı olmasını, yâni bir bakıma klâsik teorinin bir genellemesini teşkil etmesini içermektedir.

Şimdiye kadar erişmiş olduğumuz bilgilere dayanarak rölâtivist gravitasyon teorisinin alan denklemlerini, ancak indüktif bir sentezle elde etmek imkânı vardır. Bu işlem sırasında ise yukarıda zikredilmiş olan 4. şartın gerçeklenmekte olup olmadığını peşînen tesbit etmek olanağı yoktur. İlk üç şarttan hareketle alan denklemlerinin sentezini gerçekleştirdikten sonradır ki, bu denklemlerden hareketle bu sefer de bunların 4. şartı gerçekleyip gerçeklemediklerini tahlil edebiliriz.

Bununla birlikte bu son şart gene de bize, peşînen, gravitasyon alan denklemlerinin yapısı hakkında yol gösterici olacaktır.

Bu son şart rölâtivist gravitasyon denklemlerinin şekli hakkında iyice kısıtlayıcı bir şarttır. Zirâ bu şart ilk yaklaşıklıkta *POİSSON* denklemini bulabilmemiz için yeni alan denklemlerinin, koordinatların en çok ikinci mertebeden türevlerini ihtivâ etmesini gerekli kılmaktadır.

Alan denklemlerinde *MACH* ilkesi uyarınca geometriyi etkileyen maddesel katkıyı da gene bir tansör aracılığıyla ifâde etmemiz gereklidir. Bu katkı *POİSSON* denkleminin sağ yanının bir genellemesi olarak düşünülecektir.

Ancak, **ÖRT'**nden de bildiğimiz gibi madde ve enerji alanı $T_{\mu\nu}$ **enerji-impuls tansörü** aracılığıyla temsil edilebilir. İkinci mertebeden simetrik bir tansör olan $T_{\mu\nu}$ den

$$T^{\rho}_{\mu} = g^{\rho\nu} T_{\mu\nu} \quad , \quad T^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} T_{\alpha\beta}$$

tansörlerinin de türetilebileceğine dikkati çektikten sonra enerji-impuls tansörünün en önemli özelliğinin korunum özelliği olduğunu, yâni diverjansının sıfır olduğunu da kaydedelim :

$$\boxed{\nabla_{\rho} T^{\rho}_{\mu} = 0} \tag{V.1.1}$$

$T_{\mu\nu}$ tansörüyle temsil olunan madde-enerji dağılımları mekanik, termodinamik ve elektromagnetik özellikleri haiz akışkanlar olarak tasarımlanacaklardır. Bu özellikler teker teker incelenebildikleri gibi bunların birbirleriyle etkileşmelerini de göz önüne almak mümkündür. Bu görüş açısından $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörünü bir takım ikinci mertebeden tansörlerin toplamı olarak yazmak gereklidir :

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_{\mu} U_{\nu} + \Theta_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} \, . \tag{V.1.2}$$

Burada ρ toplam enerji yoğunluğunu, U_{μ} vektörü $U_{\mu} U^{\mu} = 1$ olmak üzere dörtlü -hız vektörünü, $\Theta_{\mu\nu}$ basınç ve gerilimler tansörünü, $M_{\mu\nu}$ elektromagnetik enerji tansörünü, $F_{\mu\nu}$ elektromagnetik alanla maddenin etkileşmesini temsil eden tansörü ve $Q_{\mu\nu}$ de termodinamik etkileşme tansörünü göstermektedir.

İncelenen problemlerde maddesel akışkanın bazı özellikleri çoğu kere diğerlerinden ağır basabilir. Bu takdirde $T_{\mu\nu}$ nün ifâdesini daha da basitleştirmek mümkün olur. Buna göre

1) Yalnızca etkileşmesiz madde şeması (*toz şeması*) için :

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_{\mu} U_{\nu} \tag{V.1.3}$$

2) Akışkan şeması için :

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_\mu U_\nu + \Theta_{\mu\nu} \tag{V.1.4}$$

3) Termodinamik akışkan şeması için :

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_\mu U_\nu + \Theta_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} \tag{V.1.5}$$

4) Elektromagnetik alan şeması için :

$$T_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \tag{V.1.6}$$

5) Elektromagnetik alanlı akışkan şeması için (V.1.2) ifâdesi, ve

6) Kozmolojide çok kullanılan bir şema olarak **ideal akışkan** şeması için de, p ile skaler basıncı göstererek

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)\, U_\mu U_\nu - p\, g_{\mu\nu} \tag{V.1.7}$$

ifâdesi kullanılır.

Aslında $T_{\mu\nu}$ nün bu şekilde temsil edilmesinin yetersiz olduğuna işâret etmemiz gerekir; zirâ bu şekliyle $T_{\mu\nu}$ kuvantum olaylarını hiç içermemektedir. Bu bakımdan bir kısmı elektrik yüklü, diğer bir kısmı da nötr tâneciklerden oluşan maddenin bu nihaî görünümünü yansıtamadığı için $T_{\mu\nu}$ nün maddeyi temsil edebilmek yönünden nisbeten kısır, ve geçici bir araç olduğu söylenebilir. **ERGT**'nde, günün birinde, köklü bir takım gelişmelere herhâlde $T_{\mu\nu}$ nün bu kaba ifâdesinin kuvantum olaylarını da kapsayabilecek yönde tâdil edilmesiyle erişilebilecektir.

Gravitasyonun rölâtivist teorisinde alan denklemlerindeki kaynak terimi, diverjansı sıfır olan $T_{\mu\nu}$ tansörüyle temsil olunabileceğine göre maddenin uzay-zamanın geometrik yapısı üzerine etkisini belirleyecek olan kısmın da

i) uzay-zamanın RİEMANNsal yapısını yansıtan,

ii) diverjansı özdeş olarak sıfır olan,

ii) ikinci mertebeden simetrik bir tansör

aracılığıyla temsil edilmesi gereği kendiliğinden ortaya çıkmaktadır. Hâlbuki bu üç şarta da uyan, bir sâbit çarpan yaklaşıklığıyla, ancak bir tek tansörün mevcûd olduğunu § (IV.3) den bilmekteyiz. Şu hâlde $-\varkappa$ ile uygun bir orantı katsayısını göstererek **ERGT**'nin alan denklemleri için artık

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = -\varkappa\, T_{\mu\nu}} \tag{V.1.8}$$

yazılabilir.

Bu alan denklemlerinin, eğer varsa, $T_{\mu\nu} \neq 0$ için çözümlerine **iç çözüm** $T_{\mu\nu} = 0$ için çözümlerine de **dış çözüm** adı verilir. (V.1.8) alan denklemleri Λ

ve $\varkappa$ gibi iki sâbit ihtivâ etmektedirler. Şimdi, *kozmolojik sâbit* adı verilen Λ ile *EİNSTEİN sâbiti* adı verilen $\varkappa$ nın değerlendirilmesi için, bu alan denklemlerinin ilk yaklaşıklıkta *POİSSON* denklemine indirgenebilme şartından yararlanacağız.

(V.2) Λ VE $\varkappa$ NIN DEĞERLENDİRİLMESİ

(V.1.8) alan denklemlerinden hareketle *POİSSON* denkleminin elde edilebilmesi için : 1) çok zayıf statik gravitasyon alanlarını göz önünde bulunduracak ve, 2) bu alanlardaki test tâneciklerinin de ışık hızına nisbetle çok yavaş hareket ettiklerini kabul edeceğiz. Bu şartlar zâten klâsik *NEWTON* teorisinin geçerli olduğu halleri belirleyen şartlardan başka bir şey değildir. Bu itibarla da uzay-zamanın metriğinin, bu şartlar altında, *MİNKOWSKİ* metriğinden çok az farklı olduğunu kabul edeceğiz. Şu hâlde $\varepsilon\gamma_{\mu\nu}$ ile zamandan bağımsız ve karesi de ihmâl edilebilen çok küçük bir pertürbasyonu göstererek

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + \varepsilon\,\gamma_{\mu\nu})\, dx^\mu\, dx^\nu$$

yâni

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\,\gamma_{\mu\nu} \qquad \text{ve özellikle} \qquad g_{00} = 1 + \varepsilon\,\gamma_{00} \tag{V.2.1}$$

ve ayrıca da

$$U^i \cong 0 \quad , \quad U^0 = U_0 = 1, \quad \partial_0 g_{ik} = 0 \tag{V.2.2}$$

olacaktır. Bu takdirde (V.1.3) e göre

$$T^\mu_\nu = \rho c^2\, U^\mu U_\nu \;\Rightarrow\; T^0_0 = \rho c^2 \quad \text{ve} \quad T = T^\mu_\mu = \rho c^2 \tag{V.2.3}$$

bulunur. Kezâ (V.1.8) alan denklemlerinden hareketle

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\,\delta^\mu_\nu\,(R - 2\Lambda) = -\varkappa\, T^\mu_\nu \tag{V.2.4}$$

yazılabileceğinden, buradan μ ve ν ye göre büzülme işlemi uygulayarak

$$R = \varkappa T + 4\Lambda \tag{V.2.5}$$

ve bunu (V.2.4) deki yerine yerleştirip (V.2.3) ü de göz önünde bulundurarak

$$R^\mu_\nu = -\varkappa\left(T^\mu_\nu - \frac{1}{2}\,\delta^\mu_\nu\, T\right) + \delta^\mu_\nu\,\Lambda$$

ve

$$R^0_0 = -\frac{\varkappa\rho c^2}{2} + \Lambda \tag{V.2.6}$$

bulunur. Öte yandan $R^{\mu}_{\nu} = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\nu}$ den $R^{0}_{0} = g^{\lambda 0} R_{\lambda 0} = R_{00}$ olduğundan (IV.2.23) ifâdesinden, g_{ik} nın $(i,k = 1,2,3)$ x^0 a göre türevlerinin sıfır olması ve göz önüne alınan alanın zayıflığı dolayısıyla da $\partial_j g_{ik}$ şeklindeki türevlerin karelerinin ihmâl edilebilir olmaları nedeniyle

$$R^{0}_{0} = R_{00} \cong -\partial_k \Gamma^{k}_{00} = \partial_k \left\{ \frac{1}{2} g^{ik} \partial_i g_{00} \right\} \cong \eta^{ik} \partial_i \partial_k \left(\frac{g_{00}}{2} \right) \qquad \text{(V.2.7)}$$

ya da (V.2.6) ve (V.2.7) yi beraberce göz önüne almak sûretiyle

$$-\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{g_{00}}{2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{g_{00}}{2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{g_{00}}{2}\right) \right\} = -\nabla^2 \left(\frac{g_{00}}{2}\right) = -\frac{\varkappa \rho c^2}{2} + \Lambda \qquad \text{(V.2.8)}$$

bulunur.

Diğer taraftan, vaz olunmuş olan şartlar altında bir test tâneciğinin geodezik denklemini göz önüne alalım; bu sâdece

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^{k}_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = 0$$

veyâ $x^0 = ct$ olduğundan

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\Gamma^{k}_{00}\, c^2 \cong -\frac{c^2}{2} g^{ki} \partial_i g_{00} \cong -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{c^2}{2} g_{00} \right) \qquad \text{(V.2.9)}$$

dan ibâret olur.

NEWTON'un ikinci kaanûnuyla (V.2.9) u karşılaştıracak olursak klâsik anlamdaki Φ gravitasyon potansiyelinin

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{c^2}{2} g_{00} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ \frac{c^2}{2} (1 + \varepsilon \gamma_{00}) \right\} = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{c^2}{2} \varepsilon \gamma_{00} \right)$$

bağıntısı dolayısıyla $\varepsilon \gamma_{00}$ pertürbasyonuna ve dolayısıyla g_{00} a

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \varepsilon \gamma_{00} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{00} = \eta_{00} + \varepsilon \gamma_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \qquad \text{(V.2.10)}$$

bağıntısıyla bağlı olması gerektiği bulunur. Eğer (V.2.10) u (V.2.8) e yerleştirirsek bu sefer de

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\varkappa c^4}{2} \rho - c^2 \Lambda \qquad \text{(V.2.11)}$$

bulunur. (V.2.11) denklemi (I.1.12) ile verilmiş olan *POİSSON* denkleminden, yalnızca, fazladan $-c^2\Lambda$ terimi dolayısıyla fark etmektedir. Şu hâlde *EİNSTEİN*'ın alan denklemlerinden hareketle klâsik gravitasyon teorisini elde etmek için kozmolojik sâbit için ya

$$\Lambda = 0 \tag{V.2.12}$$

olması, ya da Λ nın sıfır addedilebilecek kadar küçük olması gereklidir. Buna göre (V.2.11) de

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\varkappa c^4}{2} \rho \tag{V.2.13}$$

şekline indirgenmiş olur. Bunun (I.1.12) *POİSSON* denklemiyle karşılaştırılması *EİNSTEİN* sâbitinin değerini tesbit eder, ve

$$\boxed{\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}} \tag{V.2.14}$$

olur. Buna ve (V.2.12) ye binâen artık *EİNSTEİN*'ın alan denklemlerinin nihaî şekli de

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \tag{V.2.15}$$

olur.

(V.2.10) bağıntısı bize, *EİNSTEİN*'ın rölâtivist gravitasyon teorisinde, metrik tansörün bileşenlerinin bir nevi gravitasyon potansiyelleri gibi telâkki olunabileceğini telkin etmektedir. Alan denklemlerini çözmek demek, $T_{\mu\nu}$ ile temsil olunan madde ve enerji dağılımı verildiğinde buna tekaabül eden ve $g_{\mu\nu}$ metrik tansörüyle temsil olunan gravitasyon potansiyellerini tesbit etmek demektir. Bu münâsebetle, Genel Rölâtivite Teorisinde, bundan önce görmüş olduğumuz gravitasyon teorilerinin aksine, temel metrik tansörün bileşenlerinin, alan denklemleri tarafından belirlenmeleri dolayısıyla dinamik bir karakteri haiz olduklarına dikkati çekelim. Buna karşılık LORENTZ-invaryant gravitasyon teorilerinin temel metrik tansörünün ise daima peşinen verilmiş olan bir metrik, genellikle de $\eta_{\mu\nu}$ *MİNKOWSKİ* metriği üzerine inşâ edilmiş olduğu hatırdan çıkarılmamalıdır.

Kozmolojik sâbite gelince; bunun boyutunun L^{-2} olması gerektiği, $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ ve $g^{\lambda\mu}\, g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$ bağıntılarına binâen $g_{\mu\nu}$ ler boyutsuz büyüklükler olduklarından, $[R_{\mu\nu}] = L^{-2}$ olacağı keyfiyetinden kolaylıkla görülür. $\Lambda \neq 0$ varsayımı altında (V.1.8) alan denklemlerinin çözümünün Güneş sistemine hiç bir etkisi olmadığı gösterilmiştir [1]. Ancak bütün Evren göz önüne alındığında bazı Evren modellerinde $\Lambda \neq 0$ varsayımı önemli bir rol oynayabilmektedir [2].

(V.2.15) de $T_{\mu\nu} = 0$ vaz edersek, sol yanı $g^{\lambda\nu}$ ile çarptıktan sonra büzülme işlemini uygulayarak $R = 0$ olduğu bulunur. Buna göre dış çözüme tekaabül edecek olan gravitasyon alan denklemlerinin yalnızca

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \tag{V.2.16}$$

dan ibâret oldukları ortaya çıkar.

(V.3) KOORDİNAT ŞARTLARI

$g_{\mu\nu}$ metrik tansörü ve dolayısıyla $R_{\mu\nu}$ *RİCCİ* tansörü de $T_{\mu\nu}$ gibi simetrik olduğundan (V.2.15) alan denklemlerinin birbirlerinden cebirsel olarak bağımsız 10 denklemden ibâret oldukları âşikârdır. İlk bakışta, bu denklemlerin metrik tansörün bağımsız 10 bileşenini de tek bir şekilde tâyin etmeğe yettikleri düşünülebilir. Ancak her ne kadar $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ *EİNSTEİN* tansörünün bileşenleri birbirlerinden cebirsel olarak bağımsız iseler de bunlar,

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu \equiv 0 \tag{V.3.1}$$

bağıntıları dolayısıyla, birbirlerine 4 diferansiyel özdeşlik aracılığıyla bağlı bulunurlar. Şu hâlde alan denklemleri olarak fonksiyonel yönden bağımsız 10 değil fakat ancak $10 - 4 = 6$ denklem vardır. Bu durumda bilinmeyen 10 adet $g_{\mu\nu}$ nün tâyininde 4 serbestlik derecesi var demektir.

Bu 4 serbestlik derecesinin varlığı, eğer $g_{\mu\nu}$ ler (V.2.15) alan denklemlerinin bir çözümü iseler $\bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x^0, x^1, x^2, x^3)$ şeklinde genel bir sürekli koordinat dönüşümü yapıldığında $g_{\mu\nu}$ lerin dönüşmüşleri olan $\bar{g}_{\mu\nu}$ lerin de gene alan denklemlerinin bir çözüm takımını oluşturmalarından ileri gelmektedir. Böyle bir koordinat dönüşümünün içerdiği keyfî 4 adet $\bar{x}^\lambda$ fonksiyonu işte bu söz konusu 4 serbestlik derecesini somutlaştırır.

Şu hâlde alan denklemlerinden hareketle, önceden verilmiş bir $T_{\mu\nu}$ nün belirlediği metriğin tâyinindeki bu belirsizliği denklemleri özel bir koordinat sisteminde çözmekle ortadan kaldırmak mümkün olabilecektir; zirâ böyle bir koordinat sisteminin seçimi 4 **koordinat şartı** aracılığıyla ifâde olunur ki bunlar ile birlikte fonksiyonel olarak bağımsız 6 alan denkleminin de göz önüne alınması 10 adet $g_{\mu\nu}$ yü tek bir şekilde belirler.

Bu hususta uygun bir koordinat sistemi seçimi, **harmonik** ya da **izoterm koordinat şartları** denilen

$$\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \tag{V.3.2}$$

bağıntılarıyla temsil edilir.

(V.3.2) bağıntılarının geçerli olduğu bir koordinat sistemi seçmenin her zaman mümkün olduğunu görebilmek üzere *CHRİSTOFFEL* sembollerinin dönüşüm kuralını göz önüne alalım. (IV.1.11) den

$$\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} + \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\,\partial \bar{x}^{\beta}} \tag{V.3.3}$$

olur. Şimdi

$$\frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} = \delta^{\gamma}_{\beta}$$

özdeşliği $\bar{x}^{\alpha}$ ya göre türetilip de gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\,\partial \bar{x}^{\beta}} = -\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\,\partial x^{\mu}} = -\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} \tag{V.3.4}$$

ifâdesi elde edilir. (V.3.4) ifâdesi (V.3.3) e yerleştirilirse

$$\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}$$

bulunur. Bu bağıntı $\bar{g}^{\alpha\beta}$ ile çarpılarak büzülme işlemine tâbî tutulursa

$$\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^{\gamma} = \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \bar{g}^{\alpha\beta}\right) \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} - \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \bar{g}^{\alpha\beta}\right) \frac{\partial^2 \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} g^{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} - g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu} - g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}$$

olur. Eğer Γ^{μ} sıfır değilse bu takdirde

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu} \qquad (\gamma = 0, 1, 2, 3)$$

şeklindeki 4 adet ikinci mertebeden kısmî türevli diferansiyel denklemi çözmek sûretiyle $\Gamma^{\gamma} = 0$ olan bir $\{\bar{x}^{\gamma}\}$ koordinat sistemini tâyin etmek her zaman mümkündür.

Harmonik koordinat şartlarının ne büyük basitleştirmelere yol açabileceğini VII. Bölümde **zayıf gravitasyon alanlarını** incelediğimiz zaman göreceğiz.

Harmonik koordinat şartlarından başka, fakat bu sefer (V.3.2) gibi diferansiyel değil de cebirsel bir şart olan ve **dik zamanlı koordinat şartı** ya da **GAUSS koordinatları** denilen ve

$$g_{00}=1 \quad , \quad g_{0k}=0 \quad (k=1,2,3) \tag{V.3.5}$$

bağıntılarıyla belirlenen koordinat şartları da pekçok problemde kolaylık sağlar.

(V.4) *CAUCHY* PROBLEMİ

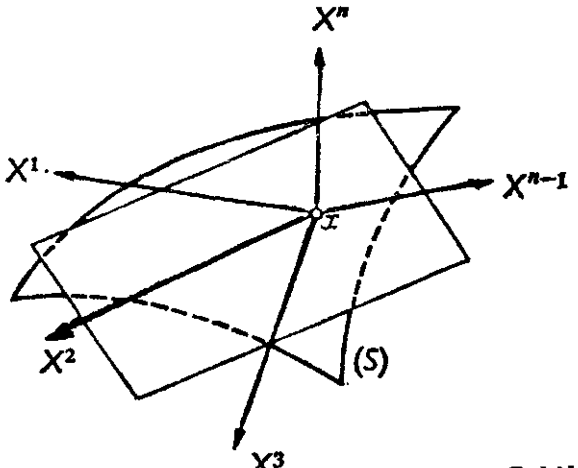
$x^1, x^2, \ldots, x^n$ değişkenleriyle karakterize edilen n boyutlu bir uzayda $n-1$ boyutlu bir (S) hiperyüzeyi verilmiş olsun. Her $x \in (S)$ noktasına da (S) ye teğet olmayan bir λ yönü tekaabül ettirilmiş olsun. (S) yüzeyinin tek ya da çift yanlı civârında

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+A_0(x)\,u=f(x) \tag{V.4.1}$$

şeklindeki kısmî türevli bir diferansiyel denklemin

$$[u]_S=\varphi_0(x) \quad , \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right]_{(S)}=\varphi_1(x) \tag{V.4.2}$$

şeklindeki **CAUCHY başlangıç şartları** altındaki çözümünü tâyin etmeğe (V.4.1) in **CAUCHY problemi**ni çözmek adı verilir [3].



Şekil : V.I. — CAUCHY yüzeyi hakkında

$\varphi_0(x)$ ve $\varphi_1(x)$ fonksiyonlarının (S) hiperyüzeyi üzerinde tanımlanmış, sürekli ve sürekli türetilebilir fonksiyonlar oldukları varsayılmaktadır. $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_1(x)$ e **CAUCHY başlangıç değerleri** ya da yalnızca **CAUCHY verileri** adı verilir. *CAUCHY* verilerinin tanımlanmış oldukları (S) hiperyüzeyine de **CAUCHY yüzeyi** denir.

Eğer *CAUCHY* başlangıç şartları bilinirse aranan fonksiyonun birinci mertebeden bütün kısmî türevlerinin *CAUCHY* yüzeyi üzerindeki değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bunu göstermek amacıyla bir $x \in (S)$ noktasında $X^1, X^2, \ldots, X^n$ ile göstereceğimiz yerel öyle bir koordinat sistemi seçelim ki $X^1, X^2, \ldots, X^{n-1}$ eksenleri (S) *CAUCHY* yüzeyine x noktasında teğet olan n-1 boyutlu teğet düzleminde ve X^n x de (S) ye dik normal vektörü doğrultusunda olsun. u fonksiyonunun (S) üzerindeki değeri bilindiğine göre, buradan derhâl

$$\left[\frac{\partial u}{\partial X^k}\right]_S = \frac{\partial \varphi_0}{\partial X^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{V.4.3}$$

türevleri hesaplanabilir. Ayrıca

$$\varphi_1(x) = \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right]_S = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial \lambda}\right]_{(S)} = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial X^k}\cos(\lambda, X^k)\right]_{(S)} = \tag{V.4.4}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial X^k}\cos(\lambda, X^k) + \frac{\partial u}{\partial X^n}\cos(\lambda, X^n)\right]_{(S)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial X^k}\cos(\lambda, X^k) + \left[\frac{\partial u}{\partial X^n}\right]_{(S)} . \cos(\lambda, X^n) \tag{V.4.5}$$

bulunur. λ doğrultusu S ye teğet bir doğrultu olmadığından $\sphericalangle(\lambda, X^n)$ de bir dik açı değildir. Şu hâlde $\cos(\lambda, X^k) \neq 0$ olduğundan (V.4.5) den

$$\left[\frac{\partial u}{\partial X^n}\right]_{(S)} = \frac{1}{\cos(\lambda, X^n)}\left\{\varphi_1(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial \varphi_0}{\partial X^k}\cos(\lambda, X^k)\right\} \tag{V.4.6}$$

bulunur. Özellikle λ doğrultusu X^n ninkinin aynı seçilirse

$$\left[\frac{\partial u}{\partial X^n}\right]_{(S)} = \varphi_1(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial \varphi_0}{\partial X^k} \tag{V.4.7}$$

olur.

(V.4.3) ve (V.4.6) ifâdeleri u nun birinci mertebeden bütün kısmî türevlerinin (S) üzerindeki değerlerinin yalnızca *CAUCHY* verileri cinsinden ifâde edilebileceğini göstermektedir. Ayrıca, bu türevlerin yerel koordinat sistemindeki değerleri bilindiğinde bunların $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ koordinat sistemindeki değerlerinin de (V.4.4) uyarınca

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x^k}\right]_{(S)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial u}{\partial X^j}\right]_{(S)} . \cos(X^j, x^k) \qquad \text{(V.4.8)}$$

ile verileceği görülmektedir.

Bu verilerden ve (V.4.4) den hareketle

$$\left[A_{nn}\frac{\partial^2 u}{(\partial x^n)^2}\right]_{(S)} = \Big\{ f(x) - A_0 u - \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial x^k} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial u}{\partial x^j}\right) - $$
$$- \sum_{i=1}^{n} (A_{in} + A_{ni}) \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial u}{\partial x^n}\right)\Big\}_{(S)} \qquad \text{(V.4.9)}$$

elde edilir. Bu ifâdenin sağındaki bütün terimlerin (S) üzerindeki değerleri mâlûm olduğundan böylece $\partial^2 u/(\partial x^n)^2$ tâyin edilmiş olur. (V.4.9) un sağ yanının ardaşık türetilmesiyle u nun her mertebedeki türevlerinin (S) üzerindeki değerleri belirlenmiş olur. Bu değerler aracılığıyla u nun (S) civarındaki ifâdesini bir *TAYLOR* serisiyle analitik bir biçimde yazabilmek, yâni (S) hiperyüzeyi üzerindeki değerlerinden hareketle u nun (S) nin dışına analitik devâmını temin etmek olanağı da doğmuş olur.

(V.5) ALAN DENKLEMLERİNE İLİŞKİN *CAUCHY* PROBLEMİ

EİNSTEİN alan denklemlerinin uzayın madde ve enerji ihtivâ etmeyen bölgesi için geçerli olan (V.2.16) ifâdesini yazarsak bu

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} = 0 \qquad \text{(V.5.1)}$$

şeklindedir. Bu denklemde yalnızca ilk iki terim $g_{\mu\nu}$ lerin ikinci türevlerini ihtivâ etmektedir ve bu terimler de bu türevler cinsinden lineer terimlerdir. Buna karşılık bütün terimler gerek $g_{\mu\nu}$ ler gerekse bunların birinci türevleri cinsinden lineer değildirler. Öte yandan (V.5.1) denklemleri $g_{\mu\nu}$ metrik tansörü bileşenlerinin zamana göre türevlerini, $g_{\mu\nu}$ lerin diğer türevleriyle $g_{\mu\nu}$ lerin kendilerine bağlayan bir diferansiyel denklem sistemi olarak da telâkki olunabilirler. Bu görüş açısından uzay-zamanın x^1, x^2 ve x^3 koordinatlarıyla belirlenen üç boyutlu alt-uzayından belirli bir $t = x^0/c$ ânında eğer $g_{\mu\nu}$ lerin bütün $x^0 > ct$ anları için nasıl değişeceklerini tesbit problemi (V.5.1) e bağlı **CAUCHY problem**ini oluşturur.

Bu, daha teknik bir deyimle, 4 boyutlu uzay-zamanda $\{x^1, x^2, x^3\}$ ile tanımlanan bir (S) hiperyüzeyi üzerinde (V.5.1) diferansiyel denklem sistemini gerçekleyen $g_{\mu\nu}$ fonksiyonlarının ve bunların birinci mertebeden türevlerinin değerleri verildiğinde (S) dışında *EİNSTEİN* alan denklemlerini gerçekleyen $g_{\mu\nu}$ gravitasyon potansiyellerini tesbit etmek demektir. Buna da alan denklemlerinin **dış CAUCHY problem**ini çözmek denir.

Genelliği bozmadan, (S) hiperyüzeyinin $x^0 = 0$ denklemiyle temsil edildiği kabul edilebilir; bu takdirde çözümünü aradığımız *CAUCHY* probleminin çözümü başlangıç değerlerinden itibâren fiziksel bir sistemin nedensel evrimini temsil edecektir.

$x^0 = 0$ ile belirlenen (S) hiperyüzeyi üzerinde $g_{\mu\nu}$ gravitasyon potansiyellerinin değerlerinin verilmiş olması (S) ye teğet olan $\partial_i g_{\mu\nu}$ $(i = 1,2,3)$ türevlerinin tesbiti için yeterlidir. Şu hâlde problemimizin başlangıç değerleri : $g_{\mu\nu}$ ile $\partial_0 g_{\mu\nu}$ nün (S) üzerindeki değerlerinden ibâret olacaktır. Amacımız bu *CAUCHY* verilerine dayanarak gravitasyon potansiyellerinin müteâkip kısmî türevlerinin (S) *CAUCHY* yüzeyi üzerindeki değerlerini tâyin etmektir.

Zamana göre birinci mertebeden daha yüksek türev ihtivâ etmemek şartıyla, $g_{\mu\nu}$ lerin bütün daha yüksek mertebeden türevlerini (S) de türev almak sûretiyle elde etmek mümkündür. Bu cins yüksek mertebeden türevler yalnızca *CAUCHY* değerlerini türetmek sûretiyle kolaylıkla elde edilebilirler. Bu yoldan elde edilemeyecek olan türevler $\partial_0\partial_0 g_{\mu\nu} = \partial^2 g_{\mu\nu}/(\partial x^0)^2$ şeklindeki, x^0 doğrultusunda alınan ve (S) üzerinde pekâlâ bir süreksizlik arz edebilecek olan türevler ile daha yüksek mertebeden benzer türevlerdir. Bu itibarla (V.5.1) alan denklemlerinde bütün $\partial_0\partial_0 g_{\mu\nu}$ şeklindeki türevleri göz önüne sermekte yarar vardır. Buna göre, ve F_{ij}, Φ_{i0} ve Ψ ile de (S) üzerindeki *CAUCHY* verilerinin fonksiyonu olan ve dolayısıyla (S) deki değerleri kolaylıkla hesaplanabilen bir takım fonksiyonlar göstererek (V.5.1) ifadeleri $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere kısaca

$$R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{00} \partial_0\partial_0 g_{ij} + F_{ij}\,(CAUCHY \text{ verileri}) = 0 \qquad \text{(V.5.2)}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{i0} &\equiv \frac{1}{2} g^{j0} \partial_0\partial_0 g_{ij} + \Phi_{i0}\,(CAUCHY \text{ verileri}) = 0 \\ R_{00} &\equiv -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_0\partial_0 g_{ij} + \Psi\,(CAUCHY \text{ verileri}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.5.3)}$$

şeklinde ifâde edilebilirler.

$g^{00} \neq 0$ şartı altında (V.5.2.) ile gösterilen 6 denklemin $\partial_0\partial_0 g_{ij}$ nin (S) *CAUCHY* yüzeyi üzerindeki değerlerini temin edebilecekleri görülmektedir. Ancak (V.5. 2-3) denklemlerinden hiç birinin $\partial_0\partial_0 g_{\mu 0}$ ı ihtivâ etmediğini de kaydetmek gerekir. Öte yandan dikkat edilmesi gereken bir husus da bu 10 denklemde, tâyin edilecek $\partial_0\partial_0 g_{ij}$ şeklinde yalnızca 6 adet bilinmeyen fonksiyon bulunduğudur. Bu 10 denklemden bu 6 bilinmeyen fonksiyonun tâyin edilebilmesi için şu hâlde F_{ij}, Φ_{i0} ve Ψ fonksiyonları (S) üzerinde zorunlu olarak belirli bir takım **uyumluluk şartlarını** gerçeklemelidirler. Bu uyumluluk şartları ise *BİANCHİ* özdeşliklerinden başka bir şey değildir. Böylelikle söz konusu 10 denklemden 4 ünü elemek ve $\partial_0\partial_0 g_{ij}$ leri tâyin etmek mümkün olur. Ancak $\partial_0\partial_0 g_{\mu 0}$ şeklindeki türevlerin (S) üzerindeki değerlerinin (V.5.2-3) denklemlerinden elde edilmesine elbette ki olanak yoktur. Yalnız şimdi göstereceğimiz gibi, (S) üzerindeki *CAUCHY* verilerini değiştirmeyen fakat (S) üzerinde $\partial_0\partial_0 g_{\mu 0} = 0$ olmasını sağlayan bir koordinat dönüşümü yapmak her zaman mümkündür.

Bu amaçla, $A^\lambda(x)$ ile (S) civârında tanımlanmış 4 fonksiyon göstererek

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \frac{1}{6}(x^0)^3 A^\lambda(x^\alpha) \tag{V.5.4}$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü göz önüne alalım. Bu amaca erişmek için (V.5.4) koordinat dönüşümündeki A^λ fonksiyonlarını açıkça tâyin etmeğe çalışacağız. Bu dönüşümün, A^λ lar ne olursa olsunlar, (S) yi muhafaza edeceği âşikârdır $(x^0 = 0 \Rightarrow \bar{x}^0 = 0)$. Ayrıca (S) üzerinde de

$$J^\lambda_\mu = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \bar{x}^\lambda = \delta^\lambda_\mu \quad \text{ve} \quad \partial_\nu\partial_\mu \bar{x}^\lambda = 0 \tag{V.5.5}$$

dır. Kezâ $\partial\bar{x}^\lambda/\partial x^\mu$ ile verilen *JACOBİ* matrisi elemanlarının

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^0}\right) = A^\lambda(x^\alpha) \tag{V.5.6}$$

hâriç olmak üzere diğer bütün ikinci mertebeden türevlerinin de (S) üzerinde sıfır oldukları kolayca görülür.

$\| J^\lambda_\mu \| = \| \partial\bar{x}^\lambda/\partial x^\mu \| \neq 0$ olduğundan (V.5.4) dönüşümü sürekli ve dolayısıyla da kabul edilebilir bir dönüşümdür. Bu dönüşümde $g_{\mu\nu}$ ile bunun (V.5.4) aracılığıyla dönüşmüşü olan $\bar{g}_{\alpha\beta}$ arasında

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}\bar{g}_{\alpha\beta} \tag{V.5.7}$$

bağıntısı olacaktır. Fakat J^μ_ν *JACOBİ* matrisinin (S) üzerinde, ikinci mertebeden türevler yaklaşıklığıyla tıpkı birim matrismiş gibi davranması dolayısıyla (V.5.5) ve (V.5.7) den, $\lambda = \sigma = 0$ hâli hâriç olmak üzere

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}\ , \quad \partial_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda \bar{g}_{\mu\nu}\ , \quad \partial_\lambda\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\lambda\partial_\sigma \bar{g}_{\mu\nu} \tag{V.5.8}$$

bulunur. $\lambda = \sigma = 0$ hâli için ise (S) üzerinde $\partial_0\partial_0 g_{\mu\nu}$ yü bir seriye açındırabiliriz:

$$\partial_0\partial_0 g_{\mu\nu} = \partial_0\partial_0 \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\alpha\nu}\,\partial_0\partial_0(\partial_\mu \bar{x}^\alpha) + \bar{g}_{\mu\beta}\,\partial_0\partial_0(\partial_\nu \bar{x}^\beta) \tag{V.5.9}$$

Buradaki son iki terim, μ veyâ ν nün sıfır olması hâli hâriç, sıfırdır. Buna göre ve (V.5.6) yı da göz önünde bulundurarak (V.5.9) dan

$$\left.\begin{array}{l} \partial_0\partial_0 g_{ij} = \partial_0\partial_0 \bar{g}_{ij} \quad , \quad \partial_0\partial_0 g_{i0} = \partial_0\partial_0 \bar{g}_{i0} + \bar{g}_{i\beta} A^\beta \\ \partial_0\partial_0 g_{00} = \partial_0\partial_0 \bar{g}_{00} + 2\bar{g}_{\alpha\beta} A^\beta \end{array}\right\} \tag{V.5.10}$$

bulunur.

Şimdi eğer (V.5.4) dönüşüm formüllerindeki A^λ fonksiyonlarını

$$\partial_0\partial_0 g_{i0} = g_{i\beta} A^\beta \quad , \quad \frac{1}{2} \partial_0\partial_0 g_{00} = g_{0\beta} A^\beta \tag{V.5.11}$$

olacak şekilde seçersek (V.5.8) e göre (S) üzerinde $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ olduğundan (V.5.4) dönüşümünün, (V.5.11) şartları altında, (S) de

$$\partial_0\partial_0 \bar{g}_{\mu 0} \equiv 0$$

olmasını sağladığı görülür. Böylelikle alan denklemlerine ilişkin *CAUCHY* probleminin çözümünde genelliği bozmadan $\partial_0\partial_0 g_{\mu 0} \equiv 0$ kabul etmenin mümkün olduğu anlaşılmaktadır.

(V.5.11) sistemi 4 adet A^β bilinmeyeni ihtivâ eden 4 denklemli cebirsel bir sistemdir; üstelik bu sistemin determinantı da $g = \det g_{\mu\nu} \neq 0$ olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır.

Böylelikle (S) üzerinde, daima $\partial_0\partial_0 g_{\mu 0} \equiv 0$ olmasını sağlayacak şekilde bir koordinat dönüşümü yapmanın mümkün olduğunu göstermiş ve netice olarak da *CAUCHY* yüzeyi üzerindeki *CAUCHY* verilerinden hareket etmek ve alan denklemlerinden yararlanmak sûretiyle gravitasyon potansiyellerinin (S) üzerindeki ikinci mertebeden türevlerini tesbit etmiş bulunuyoruz. Bu türevleri türetmek sûretiyle daha yüksek mertebeden türevleri de hesaplamak ve gravitasyon potansiyellerinin (S) dışında zamana göre evrimlerini de *TAYLOR* serisi açınımları şeklinde belirlemek mümkün olur.

Benzer düşüncelerle iç *CAUCHY* problemini yâni (V.2.15) alan denklemlerine tekaabül eden *CAUCHY* problemini de incelemek mümkündür. Bu problem ile iç ve dış *CAUCHY* problemlerinin çözümlerinin intibak şartları ve çözümlerin tekliği konuları kitabımızın kapsamını aştığından bu hususlarda tamamlayıcı bilgiler elde etmek üzere [4 - 10] numaralı referanslara ve özellikle [6] ve [9] un sonundaki kaynak listelerine baş vurulmasını öneririz.

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

V.1. 1) *MAXWELL* denklemleri **A** vektör potansiyeli cinsinden yazıldığında, **J** ile akım vektörünü göstererek

$$\Box^2 A_\alpha - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = - J_\alpha \tag{1}$$

şeklinde olup vektör potansiyeli ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \Box^2 A_\alpha - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right\} \equiv 0 \tag{2}$$

özdeşliğini gerçekler. (1) deki 4 denklemin (2) fonksiyonel bağıntısı dolayısıyla bilinmeyen dört A_α fonksiyonunu belirlemeğe yeterli olmadıklarını kaydederek Λ keyfî bir fonksiyon olmak üzere

$$A'_\alpha \equiv A_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\alpha} \tag{3}$$

ile belirlenen bir **âyâr dönüşümü** aracılığıyla tanımlanan A'_α büyüklüklerinin de *MAXWELL* denklemlerinin bir çözüm takımını oluşturduklarını, yâni (1) in **âyâr invaryansı**na sâhip olduğunu gösteriniz.

2) (1) i gerçekleyen herhangi bir A_α çözüm takımı verildiğinde

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}$$

vaz ederek (1) in

$$\partial_\alpha A'^\alpha = 0$$

olacak biçimde bir çözümünün bulunabileceğini gösteriniz ve bu takdirde Φ skaler potansiyel fonksiyonunun gerçeklemesi gereken diferansiyel denklemi tesis ediniz.

3) Bu problemin sonuçlarını **ERGT'**ndeki koordinat şartlarıyla karşılaştırınız.

V.2. a) *RİEMANN* uzayında $\Box^2$ *d'ALEMBERT* operatörünün ifâdesini, b) harmonik koordinat şartının $g^{\mu\nu}$ metriği cinsinden açık ifâdesini, ve c) harmonik koordinat şartını gerçekleyen x^μ koordinatlarının gerçeklemeleri gereken diferansiyel denklemi tesis ediniz ve bunu geçen problemde skaler potansiyelin gerçeklemesi gereken denklemle karşılaştırınız.

V.3. Kozmolojik sâbitin sıfırdan farklı olduğu boş uzay hâlini göz önüne alarak bunun, $\Lambda = 0$ olmak üzere yoğunluğu $\rho_\Lambda = c^2\Lambda/8\pi G$ ye eşit bir madde dağılımının doğurduğu gravitasyon alanına özdeş bir gravitasyon alanının varlığı demek olduğunu gösteriniz.

V.4. *NEWTON* yaklaşımı çerçevesi içinde ve küresel koordinatlarda boş uzay için gravitasyon potansiyelinin $\Phi = -c^2\Lambda r^2/G$ ile verileceğini; ve bunun da $c^2\Lambda r/3$ e eşit bir harmonik osilâtör kuvveti imiş gibi yorumlanabileceğini gösteriniz.

V.5. İki boyutlu RİEMANNsal bir uzay-zamanı tasvir eden en genel metrik

$$ds^2 = a(x,t)dt^2 + b(x, t)dx^2 + 2c(x,t)\, dx\, dt$$

şeklindeki yay elemanı karesiyle temsil edilebilir. Bunu $\nu = \nu(x,t)$ ve $\lambda = \lambda(x,t)$ olmak üzere

$$ds^2 = e^{2\nu}\, dt^2 - e^{2\lambda}\, dx^2$$

şekline indirgemenin mümkün olduğunu gösterdikten sonra *EİNSTEİN* alan denklemlerinin bileşenlerini hesaplayarak *RİCCİ* tansörünün bileşenlerinin eşit olduklarını belirleyiniz. Enerji-impuls tansörünün bileşenlerinin değerlerinin bu verilere dayanarak elde ediniz ve *EİNSTEİN* alan denklemlerinin iki boyutlu uzay-zamandaki gravitasyon olaylarını tasvir etmek bakımından uygun bir genel çerçeve oluşturamıyacağını gösteriniz.

V.6. Üç boyutlu bir uzay-zamanda *EİNSTEİN* denklemlerini *MACH* ilkesini içerdekilerini, yâni $T_{\mu\nu} = 0$ için uzay-zamanın zorunlu olarak en azından öklitselimsi bir uzay-zamana indirgeneceğini gösteriniz.

REFERANSLAR

[1] R.A.ALPHER, "Cosmological constant and perihelion precession,,' *AJP*, **35** 771, (1968).

[2] A.Y.ÖZEMRE, **Teorik Fizik Dersleri Cild 8 : Kozmolojiye Giriş** İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No. 161 (1981).

[3] J.HADAMARD, **Le Problème de CAUCHY et les Equations aux Dérivées Partielles,** (1932).

[4] A. LİCHNEROWİCZ, **Problèmes Globaux en Mécanique Relativiste**; Hermann et Cie, Paris; (1939).

[5] A. LİCHNEROWİCZ, **Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme**; Masson et Cie., Paris.: (1955),

[6] Y. FOURÈS-BRUHAT, The Cauchy Problem; **Gravitation: An Introduction to Current Research** (ed., L. WITTEN); John Wiley and Sons, New York - London; s. 130-168, (1962).

[7] K. STELLMACHER, *Math. Ann.*, **115,** s. 136-152, (1938).

[8] Y. CHOQUET - BRUHAT, Théorèmes d'existence pour les équations des fluides chargés relativistes; **Fluides et Champs Gravitationnels en Relativité Générale**; Editions C.N.R.S., Paris; s.103-129; (1969).

[9] W. KİNNERSLEY, Recent progress in exact solutions, **General Relativity and Gravitation** (Eds. G.SHAVİV and J. ROSEN); John Wiley and Sons-Halsted Press; s. 109-135; (1975).

[10] J. PACHNER, Numerical integration of exact time-dependent Einstein equations with axial symmetry, **General Relativity and Gravitation** (Eds. G.SHAVİV and J. ROSEN); John Wiley and Sons-Halsted Press; s. 143-168; (1975).

VI. BÖLÜM

L'expérience reste cependant «une norme négative» pour l'édification des théories et il est bien certain qu'aucune expérience cruciale ne peut prouver en droit ni en fait la validité globale d'une théorie... Comme toute théorie physique, la Relativité Générale n'a donc pas à être prouvée. Elle demande à être... vérifée.

Marie-Antoinette TONNELAT.

ALAN DENKLEMLERİNİN SCHWARZSCHİLD ÇÖZÜMLERİ; GENEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİNİN DENEY VE GÖZLEMLER YOLUYLA SINANMASI

EİNSTEİN'ın alan denklemleri lineer olmayan, ikinci mertebeden kısmî türevli 10 diferansiyel denklemden ibâret bir sistem oluşturmaktadır. Bu sistemin genel çözümünü inşâ etmek olanağı yoktur. Ancak özel hallerde, özel fiziksel ve geometrik şartlar altında sistemin çözümünü nisbeten kolay bir şekilde bulmak mümkün olur. Bu bölümde homogen ve küresel bir kütlenin dış ve iç gravitasyon alanlarını tasvir eden ds^2 lerin ifâdelerini tesis etmeğe çalışacağız. Bu şartlar altında elde edilen sonuçlar meselâ Güneşin cıvârındaki gravitasyon alanını iyi bir biçimde yansıtabileceğinden bu bize, aynı zamanda, *EİNSTEİN* alan denklemlerinin gravitasyonun klâsik alan denklemleriyle epistemolojik yönden karşılaştırılması olanağını da sağlayacaktır.

(VI.1) KÜRESEL SİMETRİ İNVARYANSLI METRİK

Eğer $g_{\mu\nu}$ metrik tansörü sâbit zamanlı, uzaysal, dik dönüşümlerde invaryant kalırsa, bu takdirde, $g_{\mu\nu}$ nün küresel simetriye sâhip olduğu söylenir. Bu tür dönüşümlerin, $\bar{a}^i_k$ ile dönüşüm ve a^i_k ile de ters dönüşüm matrisleri elemanlarını göstermek üzere

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x}^0 = x^0 (= ct)\,, & \bar{x}^i = \bar{a}^i_k\, x^k \\ \bar{a}^i_k\, a^l_i = \delta^l_k & , \ \bar{a}^i_k = a^k_i \\ \bar{a}^i_k = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} & , \ a^k_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \end{array}\right\} \qquad \text{(VI.1.1)}$$

bağıntılarıyla karakterize edildikleri mâlûmdur. Bunlar üç boyutlu *ÖKLİT* uzayındaki rotasyon grubuna izomorf bir grup oluştururlar.

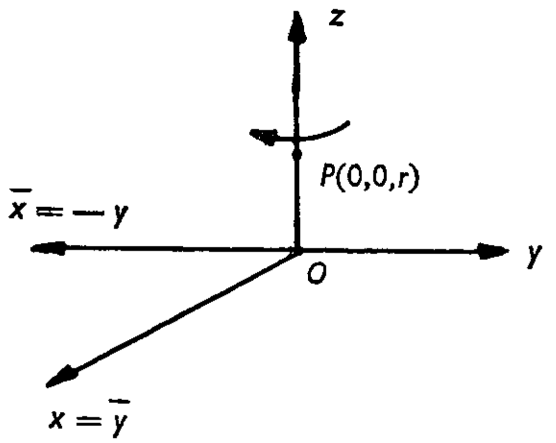
Şimdi, eğer uzay-zaman bir O noktasına göre küresel bir simetri arzediyorsa, $A(x^\alpha_A)$ ve $B(x^\alpha_B)$ ile O yu merkez kabul eden bir kürenin yüzeyindeki iki keyfî noktayı göstermek üzere bu,

$$g_{\mu\nu}(A) = g_{\mu\nu}(B) \Rightarrow g_{\mu\nu}(x^\alpha_A) = g_{\mu\nu}(x^\alpha_B) \qquad \text{(VI.1.2)}$$

olacaktır. Daha genel bir biçimde ifâde etmek gerekirse, eğer bir O noktası etrafında keyfî bir rotasyon yapıldığında yeni $\bar{g}_{\mu\nu}$ bileşenleri tıpkı $g_{\mu\nu}$ lerin x^α ların fonksiyonları oldukları biçimde yeni $\bar{x}^\alpha$ koordinatlarının fonksiyonu iseler, yâni

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha) \qquad \text{(VI.1.3)}$$

ise $g_{\mu\nu}$ metrik tansörünün küresel simetriye sâhip olduğu söylenir.



Şekil: VI.I

Şimdi, t aynı kalmak üzere, kartezyen bir $\{O;\, x,y,z\}$ referans sisteminde $P(0,\,0,\,r)$ noktasını göz önüne alalım ve sistemi Oz etrafında pozitif yönde $\pi/2$ radyan döndürmek sûretiyle yeni bir $\{O;\, \bar{x} = -y,\ \bar{y} = x,\ \bar{z} = z,\ \bar{t} = t\}$ referans sistemine geçelim. Bu takdirde

$$a^\rho_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}$$

dönüşüm matrisinin sıfırdan farklı bileşenlerinin değerleri olarak

$$a^1_2 = a^3_3 = a^0_0 = 1 \quad , \quad a^2_1 = -1 \qquad \text{(IV.1.4)}$$

bulunur. Böyle bir dönüşümde $g_{\mu\nu}$ ler de

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^\rho_\mu\, a^\sigma_\nu\, g_{\rho\sigma} \qquad \text{(V .1.5)}$$

şeklinde dönüşeceğinden metrik tansörün dönüşmüş bileşenleri de

$$\left.\begin{array}{llll}
\bar{g}_{00} = g_{00} , & \bar{g}_{01} = -g_{02} , & \bar{g}_{02} = g_{01} , & \bar{g}_{03} = g_{03} \\
\bar{g}_{11} = g_{22} , & \bar{g}_{12} = -g_{21} , & \bar{g}_{13} = -g_{23} & \\
\bar{g}_{22} = g_{11} , & \bar{g}_{23} = g_{13} & & \\
\bar{g}_{33} = g_{33} & & &
\end{array}\right\} \qquad \text{(VI.1.6)}$$

olacaktır. Öte yandan da bu dönüşümde Oz ekseni üzerinde, P noktası için

$$\bar{x}^\alpha_P = x^\alpha_P$$

dir. (VI.1.3) dolayısıyla da P noktasında

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \qquad \text{(VI.1.7)}$$

olacağından A, B, C ve D ile $z = r$ ve t nin keyfî bir takım fonksiyonlarını göstererek (VI.1.6) dan küresel simetriyi haiz $g_{\mu\nu}$ metrik tansörünün bileşenlerinin Oz üzerindeki bir P noktasında

$$g_{11} = g_{22} = -B(r,t)\ ,\ g_{33} = -A(r,t)\ ,\ g_{30} = D(r,t)\ ,\ g_{00} = C(r,t) \qquad \text{(VI.1.8)}$$

ye indirgeneceği kolaylıkla saptanır.

Şimdi Oz üzerindeki P noktasından, orijine olan uzaklığı gene r olan, yâni

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = r^2 = z^2 \qquad \text{(VI.1.9)}$$

küresi üzerindeki keyfî bir $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ noktasına geçmek için

$$\bar{x}^i = \bar{b}^i_j\, x^j\ ,\ \bar{t} = t\ ,\quad (i, j = 1,2,3) \qquad \text{(VI.1.10)}$$

şeklinde bir rotasyon icrâ edelim. Burada

$$\left.\begin{aligned} &\bar{b}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\ ,\quad \bar{b}^0_0 = 1\ ,\quad \bar{b}^i_0 = 0\ ,\quad b^3_i = \bar{b}^i_3 = \frac{\bar{x}^i}{r} \\ &(\bar{x}^1 = \bar{x}\ ,\ \bar{x}^2 = \bar{y}\ ,\ \bar{x}^3 = \bar{z}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.1.11)}$$

dir. $\bar{b}^i_j$ dönüşüm matrisi de (VI.1.1) deki gibi $\bar{b}^l_j\, b^l = \delta^l_j$, $\bar{b}^i_j = b^j_i$ diklik bağıntılarını gerçeklerler. Bu takdirde

$$\bar{g}_{\mu\nu} = b^\rho_\mu\, b^\sigma_\nu\, g_{\rho\sigma}$$

dönüşüm bağıntılarından ve (VI.1.11) den yararlanarak $g_{\mu\nu}$ metrik tansörünün dönüşmüş bileşenleri hesaplanacak olursa

$$\left.\begin{aligned} &\bar{g}_{ij} = -B\,\delta_{ij} - (A - B)\,\frac{\bar{x}^i\,\bar{x}^j}{r^2} \\ &\bar{g}_{i0} = D\,\frac{\bar{x}^i}{r}\ ,\ \bar{g}_{00} = C \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.1.12)}$$

bulunur. Şimdi de eğer

$$\bar{x} = r\cos\varphi\sin\theta\quad,\quad \bar{y} = r\sin\varphi\sin\theta\quad,\quad \bar{z} = r\cos\theta$$

bağıntılarıyla belirlenen küresel değişkenlere geçilirse bu takdirde küresel simetriye sâhip metrik tansörün $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^0 = ct$ ile belirlenen koordinat sistemindeki sıfırdan farklı bileşenleri

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{g}_{11} = -A,\quad \tilde{g}_{22} = -Br^2,\quad \tilde{g}_{33} = -Br^2\sin^2\theta \\ &\tilde{g}_{10} = D,\quad \tilde{g}_{00} = C \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.1.13)}$$

şekline girer ve bu koordinat sisteminde ds^2 nin ifâdesi de

$$ds^2 = -A\,dr^2 - Br^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + 2D\,dr\,.\,c\,dt + C\,c^2\,dt^2 \qquad \text{(VI.1.14)}$$

olur.

Buradaki $A = A(r, t)$, $B = B(r, t)$, $C = C(r, t)$ ve $D = D(r, t)$ şeklindeki dört keyfî fonksiyonun sayılarını azaltmak için

$$\left.\begin{aligned} r &= \bar{r}\,.\,f(\bar{r}) \\ \theta &= \bar{\theta} \\ \varphi &= \bar{\varphi} \\ x^0 &= \bar{x}^0 + h(\bar{r}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.1.15)}$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü yapalım. Böyle bir dönüşüm θ ve φ değişkenlerini invaryant bıraktığı için rotasyon simetrisini koruyan bir dönüşümdür. Eğer f ve h fonksiyonları

$$f^2 = \frac{1}{B} \qquad \text{ve} \qquad \frac{dh}{d\bar{r}} = -\frac{D}{Ç}\left(f + \bar{r}\frac{df}{d\bar{r}}\right) \qquad \text{(VI.1.16)}$$

şeklinde seçilecek olurlarsa, uzunca fakat kolay hesaplardan sonra, $E = E(\bar{r}, \bar{t})$ ile $\bar{r}$ ve $\bar{t}$ nin keyfî bir fonksiyonunu göstererek ds^2,

$$ds^2 = -E(\bar{r}, \bar{t})\,d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}\,d\bar{\varphi}^2) + C(\bar{r}, \bar{t})\,(d\bar{x}^0)^2$$

gibi yalnızca iki keyfî fonksiyon ihtivâ eden bir ifâdeye indirgenir. Bunu da, $\lambda = \lambda(r, t)$ ve $\nu = \nu(r,t)$ vaz ederek

$$ds^2 = e^{\nu}\,(dx^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) - e^{\lambda}\,dr^2 \qquad \text{(VI.1.17)}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu sonucu elde etmek için yapılmış olan çeşitli koordinat dönüşümlerinden sonra en son koordinatların neye delâlet etmekte olduklarını ve ölçülebilen büyüklüklerle olan ilişkilerini açıkça ortaya koymak maalesef o kadar kolay bir iş değildir. Bu itibarla bunları uygularken temkinli olmak gerekir.

(VI.1.17) de kullanılan koordinatlara **"eğrilik koordinatları"** adı verilir. *EİNSTEİN* alan denklemleri bu koordinatlarda mümkün olan en basit şekli alırlar.

(VI.2) DIŞ *SCHWARZSCHİLD* ÇÖZÜMÜ

Şimdi M kütleli küresel ve sükûnetteki bir cismin oluşturduğu **statik** gravitasyon alanını hesaplamak istiyoruz. Böyle bir gravitasyon alanı kaynağına tekaabül eden RİEMANNsal uzay-zaman varyetesi de küresel simetriyi haiz olacaktır. Buna göre böyle bir gravitasyon alanının metriği, eğrilik koordinatları cinsinden, (VI.

1.17) ile verilecektir. (VI.1.17) deki $\lambda=\lambda(r,t)$ ve $\nu=\nu(r,t)$ fonksiyonlarını belirlemek için de *EİNSTEİN* alan denklemlerinden yararlanacağız. Ancak, söz konusu gravitasyon alanı statik olduğundan artık ne λ ve ne de ν fonksiyonu t ye bağlı olabilir; şu hâlde $\lambda=\lambda(r)$ ve $\nu=\nu(r)$ vaz etmeliyiz. Önce göz önüne alınan cismin dışındaki gravitasyon alanına tekaabül eden metriği tesbit edelim. Bilindiği gibi bu **dış çözüme** tekaabül eden alan denklemleri (V.2.16) ile verilmiş olup

$$R_{\mu\nu}=\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho}-\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}-\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho}=0 \qquad \text{(V.2.16)}$$

dan ibârettir. Mükerrer indisli *CHRİSTOFFEL* sembollerinin (IV.2.11) ile verilmiş olan değerlerini göz önünde tutarsak (V.2.16) denklemleri

$$R_{\mu\nu}=\partial_\mu\partial_\nu(\ln\sqrt{|g|})-\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\,\partial_\sigma(\ln\sqrt{|g|})+\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}=0 \qquad \text{(VI.2.1)}$$

şekline girerler. (VI.1.17) metriğine göre temel metrik tansör

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.2.2)}$$

ve bunun determinantı da

$$g=\|g_{\mu\nu}\|=-e^{\nu+\lambda}\,r^4\sin^2\theta \qquad \text{(VI.2.3)}$$

dır. Buna göre de

$$\ln\sqrt{|g|}=\frac{\nu+\lambda}{2}+2\ln r+\ln|\sin\theta| \qquad \text{(VI.2.4)}$$

olur. Eğer bu metriğe göre özdeş olarak sıfırdan farklı *CHRİSTOFFEL* sembolleri (IV.2.8) e göre hesaplanırsa

$$\left.\begin{array}{lll}
\Gamma^0_{10}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\nu}{\partial r}=\dfrac{\nu'}{2}, & \Gamma^1_{00}=\dfrac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, & \Gamma^1_{11}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial r}=\dfrac{\lambda'}{2}\\
\Gamma^1_{22}=-r\,e^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta\,e^{-\lambda}, & \Gamma^2_{12}=\dfrac{1}{r}\\
\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta, & \Gamma^3_{13}=\dfrac{1}{r}, & \Gamma^3_{23}=\operatorname{cotg}\theta
\end{array}\right\} \qquad \text{(VI.2.5)}$$

değerleri bulunur. Artık buradan (VI.2.1) alan denklemlerinin özdeş olarak sıfır olmayan bileşenlerini hesaplayabiliriz. Önce R_{00} bileşenini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} 0 = R_{00} &= -\partial_\rho \Gamma^\rho_{00}\,\partial_0\partial_0(ln\sqrt{|g|}) - \Gamma^\sigma_{00}\,\partial_\sigma(ln\sqrt{|g|}) + \Gamma^\sigma_{0\rho}\,\Gamma^\rho_{\sigma 0} \\ &= -\partial_1 \Gamma^1_{00} + 0 - \Gamma^1_{00}\,\partial_1(ln\sqrt{|g|}) + 2\,\Gamma^1_{00}\,\Gamma^0_{01} \\ &= -\left(\frac{\nu'}{2}\,e^{\nu-\lambda}\right)' - \left(\frac{\nu'}{2}\,e^{\nu-\lambda}\right)\cdot\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) + 2\,\frac{\nu'}{2}\,e^{\nu-\lambda}\,\frac{\nu'}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\,e^{\nu-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{2\nu'}{r}\right) \end{aligned}$$

yâni

$$\boxed{\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{2\nu'}{r} = 0} \tag{VI.2.6}$$

olur. Şimdi de alan denklemlerinin R_{11} bileşenini açıkça hesaplayalım :

$$\begin{aligned} 0 = R_{11} &= -\partial_\rho \Gamma^\rho_{11} + \partial_1\partial_1(ln\sqrt{|g|}) - \Gamma^\sigma_{11}\,\partial_\sigma(ln\sqrt{|g|}) + \Gamma^\sigma_{1\rho}\,\Gamma^\rho_{\sigma 1} \\ &= -\partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1\partial_1(ln\sqrt{|g|}) - \Gamma^1_{11}\,\partial_1(ln\sqrt{|g|}) + \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} \\ &\quad + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\ &= -\frac{\lambda''}{2} + \left(\frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2}\right) - \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}\,\frac{2}{r}\right) + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} + \\ &\quad + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) \end{aligned}$$

yâni

$$\boxed{\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} = 0} \tag{VI.2.7}$$

olur. (VI.2.7) denklemi (VI.2.6) denkleminden çıkarılacak olursa

$$\nu' + \lambda' = 0 \tag{VI.2.8}$$

ve bu denklem de integre edilecek olursa, k ile bir sâbiti göstermek üzere,

$$\nu + \lambda = k \tag{VI.2.9}$$

bulunur. Bu k sâbiti ise sıfır olarak seçilebilir. Bunu göstermek için x^0 yerine $x^0.e^{k/2}$ almak sûretiyle yeni bir zaman birimi seçmiş olduğumuzu varsayalım. Böylece metriğin (VI.1.17) ifâdesinde e^ν olacak yerde $e^{\nu+k}$ olmuş olur. (VI.2.9) sonucuna ise bu, ν yerine $\nu + k$ vaz etmekle yansır. Buradan da

$$\lambda = -\nu \tag{VI.2.10}$$

olması gerektiği bulunur.

Şimdi (VI.2.6) da ν yerine (VI.2.10) a uygun olarak $-\lambda$ konulursa $\lambda = \lambda(r)$ fonksiyonu için

$$\lambda'' + \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad (r.e^{-\lambda})'' = 0 \tag{VI.2.11}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin r ye göre bir kere integrasyonu da

$$(r \,.\, e^{-\lambda})' = sâbit \tag{VI.2.12}$$

sonucunu verir.

Şimdi de alan denklemlerinin R_{22} bileşenini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} 0 = R_{22} &= -\partial_\rho \Gamma^\rho_{22} + \partial_2\partial_2(ln\sqrt{|g|}) - \Gamma^\rho_{22}\,\partial_\rho(ln\sqrt{|g|}) + \Gamma^\sigma_{2\rho}\Gamma^\rho_{\sigma 2} \\ &= -\partial_1\Gamma^1_{22} + \partial_2\partial_2(ln\sqrt{|g|}) - \Gamma^1_{22}\,\partial_1(ln\sqrt{|g|}) + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\ &= +(re^{-\lambda})' + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(ln|\sin\theta|) + r\,e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \\ &\quad + \cot g^2\theta \end{aligned}$$

Bu ifâde, (VI.2.8) göz önünde tutulduğunda, kolayca

$$(r.e^{-\lambda})' = 1 \tag{VI.2.13}$$

ifâdesine indirgenir. Bu ise (VI.2.12) nin aynı olup üstelik (VI.2.12) deki sâbitin değerini de vermektedir. Bunun integrasyonu, $2m$ ile bir sâbiti göstermek üzere,

$$r.e^{-\lambda} = r - 2m$$

verir. Böylece $R_{00} = R_{11} = R_{22} = 0$ denklemlerinden yararlanarak ds^2 nin (VI.1.17) ile verilen ifâdesindeki $\lambda = \lambda(r)$ ve $\nu = \nu\,(r)$ fonksiyonlarını

$$\left.\begin{aligned} e^{\nu(r)} &= e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m}{r} \\ e^{\lambda(r)} &= \frac{1}{1 - \dfrac{2m}{r}} \end{aligned}\right\} \tag{VI.2.14}$$

şeklinde tâyin etmiş olmaktayız. Ancak ortada çözümlenmesi gereken bir sorun kalmaktadır. O da, (VI.2.14) sonucunun, (VI.2.1) alan denklemlerinden yararlanmamış olduğumuz diğer yedisiyle tutarlı olup olmadığıdır.

Söz konusu diğer yedi alan denkleminin gerçekten de (VI.2.14) sonucuyla tutarlı oldukları ayrıntılı bir şekilde hesap yapıldığı zaman görülür. (Bunun tahkiki bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır). *RİCCİ* tansörünün geri kalan diğer bütün bileşenleri ise özdeş olarak sıfırdır.

Buna göre (VI.1.17) ile verilen yay elemanının karesi için artık

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \qquad \text{(VI.2.15)}$$

yazabiliriz. Buna *SCHWARZSCHİLD* yay elemanı adı verilir.

Geçen bölümde *EİNSTEİN* alan denklemlerinin, sınırda, nasıl *NEWTON* ve *POİSSON* denklemlerine indirgendiğini görmüş ve özellikle Φ ile klâsik *NEWTON* gravitasyon potansiyelini göstererek

$$g_{00} \cong 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \qquad \text{(V.2.10)}$$

bağıntısının geçerliliğini tesis etmiştik. Göz önüne almış olduğumuz sükûnetteki M kütleli küresel gök cismi için *NEWTON* anlamındaki gravitasyon potansiyeli

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

den ibârettir. Şu hâlde sınır hâlde $g_{00} \cong 1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}$ olacaktır. Bunun (VI.2.15) de $(dx^0)^2$ nin katsayısı ile karşılaştırılması

$$m = \frac{GM}{c^2} \qquad \text{(VI.2.16)}$$

olduğunu göstermektedir. m ye merkezî cismin **geometrik kütlesi** adı da verilir. Buna göre, *EİNSTEİN*'ın alan denklemlerinin merkezî M kütleli sükûnetteki bir cisim için dış çözümüne tekaabül eden ds^2 yay elemanı karesinin nihaî ifâdesi

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(dx^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) - \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}\right)}} \qquad \text{(VI.2.17)}$$

şekline girmiş olur.

Buradan kolayca görüleceği üzere merkezî M kütlesinden sonsuz uzaklıkta, (VI.2.17) *SCHWARZSCHİLD* metriği *MİNKOWSKİ* metriğine indirgenmektedir. İki metrik arasındaki fark yalnızca $2GM/c^2r$ teriminin varlığından ileri geldiğinden, bu farkın büyüklüğünü somut bir hâl için, meselâ merkezî kütlenin Güneş olması hâlinde ve Güneşten itibâren Arzın uzaklığı kadar bir uzaklıktaki bir noktada bu terimin değerini hesaplamak sûretiyle ortaya koyalım. Buna göre C.G.S. birimleri cinsinden

$$\frac{2GM}{c^2r} = \frac{2\times 6{,}67.10^{-8}\times 2.10^{33}}{9.10^{20}\times 1{,}5.10^{13}} = 10^{-8}$$

bulunur ki bu da, hemen Arz cıvârında Güneşin oluşturduğu gravitasyon alanının, uzay-zamanın geometrisini *MİNKOWSKİ* geometrisinden ne büyüklükte saptırabildiğini göstermektedir.

Eğer $r = R_s = 2GM/c^2$ ise bu takdirde (VI.2.17) de $g_{00} = 0$ ve $g_{11} = \infty$ olacaktır. r nin bu R_s değerine **SCHWARZSCHİLD yarıçapı** adı verilir. Bu, olağan yıldızlar söz konusu olduğunda çok küçük bir değeri haizdir. Meselâ Güneşin *SCHWARZSCHİLD* yarıçapının ancak 3 km cıvârında olduğu kolaylıkla hesaplanır; bu ise Güneşin içinde yâni (VI.2.17) dış çözümünün geçerli olmadığı bir bölgededir. Ancak, kendi gravitasyon kuvvetlerinin iç basınca galebe çalmasıyla olağanüstü bir hızla merkezine doğru çöken bir yıldız için yıldızın R yarıçapı $R \leqq R_s$ olabilir. Bu takdirde de, §(VI.6) da daha yakından değineceğimiz gibi, yıldız dışarıya hiçbir emisyon yapmayan bir **"karaçukur"** hâlinde indirgenmiş olur.

Ancak, 1960 da *M. KRUSKAL*, uzay-zamanın alışkın olmadığımız bir topolojiyle donatılmasına göz yumarsak bu takdirde uygun bir koordinat sistemi seçmek sûretiyle *SCHWARZSCHİLD* tekilliğinin ortadan kalkacağını keşfetmiş ve böylece bu tekilliğin, daha çok, bir koordinat sistemi seçimine bağlı olarak ortaya çıktığını göstermiştir [4a, 15].

(VI.3) İÇ *SCHWARZSCHİLD* ÇÖZÜMÜ

Bir önceki paragrafta incelemiş olduğumuz dış *SCHWARZSCHİLD* çözümü merkezî ve noktasal M kütleli bir cismin dışındaki gravitasyon alanını belirleyen metriği vermekteydi. Daha gerçekçi hâllerde, hiç şüphesiz, merkezî cismi noktasal saymak yerine kütlesi meselâ r_1 yarıçaplı bir küre içinde birbiçim bir şekilde dağılmış olarak almak daha doğru olacaktır. Klâsik gravitasyon teorisinde küresel bir kütlenin dış alanı bütün kütlesi merkezinde toplanmış bir noktanınkine eşdeğer olduğundan kürenin dışında (VI.2.17) dış *SCHWARZSCHİLD* çözümü gene de geçerli olmağa devam edecektir. Ancak küresel kütlenin içinde $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörü artık sıfırdan farklı olacağından gravitasyon alanını yansıtan metrik de farklı olacaktır.

Böyle bir küresel madde dağılımı içindeki gravitasyon alanını temsil eden metriği *EİNSTEİN* alan denklemlerinden elde etmek, öncelikle, $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörünün verilmiş olmasına bağlıdır. Bu tansör, bilindiği gibi, maddenin mâruz kaldığı etkileşmelere bağlı olarak çeşitli şekillerde ifâde olunabilmektedir. Biz bu paragrafta iç gravitasyon alanını incelemek istediğimiz cismin iç yapısının bir **ideal akışkan** şeması aracılığıyla temsil edilebileceğini ve dolayısıyla da $T_{\mu\nu}$ nün (V.1.7) deki gibi

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)\, U_\mu U_\nu - p\, g_{\mu\nu} \tag{VI.3.1}$$

ile verildiğini kabul edeceğiz. Eğer bu ideal akışkanın üstelik statik olduğunu da öngörürsek, bu takdirde akışkanın ρ yoğunluğu ile p skaler basıncı yalnızca radyal r koordinatının fonksiyonu olurlar :

$$\rho = \rho(r) \quad , \qquad p = p(r)\,.$$

Cismin içindeki maddenin her noktada sükûnette olması evrensel dörtlü hız vektörünün bileşenlerinin $(U^0, 0, 0, 0)$ şeklinde olmasını temin eder. Buna binâen de akışkanı oluşturan her bir maddî tâneciğin öz-zamanı ile koordinat zamanı arasında

$$ds^2 = g_{00}\,(dx^0)^2 = g_{00}\, c^2\, dt^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = g_{00}\,(U^0)^2 \tag{VI.3.2}$$

bağıntısı olacaktır. Buradan hareketle, ayrıca,

$$U_0 = g_{0\alpha} U^\alpha = g_{00} U^0 = \sqrt{g_{00}} \quad , \qquad U_i = 0$$

olduğu kolayca görülür. Buna göre $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörü

$$(T_{\mu\nu}) = \rho c^2 \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 0 & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

şekline girecektir. Ancak § (VI.1) de de gösterilmiş olduğu gibi küresel simetriyi haiz statik bir metriğin en genel şekli (VI.1.17) ile verildiğinden $T_{\mu\nu}$ nün küresel simetriyi haiz statik bir akışkan için ifâdesi de

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{VI.3.3}$$

şekline indirgenir. Şimdi amaç, *EİNSTEİN* alan denklemlerinden hareketle, küresel simetriyi haiz statik bir ideal akışkanın içindeki gravitasyon alanını temsil edecek olan metrikteki e^ν ve e^λ fonksiyonlarını belirlemektir. Bunun için (V.2.15) den hareketle

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T\right) \tag{VI.3.4}$$

yazılabileceğine dikkati çekelim. (VI.2.2) ile belirlenen $g_{\mu\nu}$ metriğini göz önünde bulundurarak ve ayrıca da $U^{\mu}U_{\mu} = 1$, ve $g^{\mu}_{\mu} = 4$ olması hasebiyle

$$T^{\mu}_{\mu} = T = \rho c^2 - 3p \tag{VI.3.5}$$

olduğunu da kaydederek (VI.3.4) denklemlerinin sağ yanlarının sıfırdan farklı terimleri

$$\left.\begin{aligned}
T_{00} - \frac{1}{2}\, g_{00}\, T &= \frac{e^{\nu}}{2}\,(\rho c^2 + 3p) \\
T_{11} - \frac{1}{2}\, g_{11}\, T &= \frac{e^{\lambda}}{2}\,(\rho c^2 - p) \\
T_{22} - \frac{1}{2}\, g_{22}\, T &= \frac{1}{2}\,(\rho c^2 - p)\, r^2 \\
T_{33} - \frac{1}{2}\, g_{33}\, T &= \frac{1}{2}\,(\rho c^2 - p)\, r^2 \sin^2\theta
\end{aligned}\right\} \tag{VI.3.6}$$

olur. Öte yandan (VI.3.4) ün sol yanı da *RİCCİ* tansörünün (VI.2.1) ile verilmiş olan açık ifâdesinden §(VI.2) de olduğu gibi kolayca hesaplanır :

$$\left.\begin{aligned}
R_{00} &= e^{\nu-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right] \\
R_{11} &= \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \\
R_{22} &= e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2}\right] - 1 \\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}\right\} \tag{VI.3.7}$$

Bu ifâdelerde gene $\nu' = d\nu/dr$ ve $\lambda' = d\lambda/dr$ vaz edilmiştir. Bu veriler çerçevesi içinde ν ve λ fonksiyonlarını belirleyen diferansiyel denklemlerin

$$\left.\begin{aligned}
e^{-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right] &= -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{\rho c^2}{2} + \frac{3p}{2}\right) \\
e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right] &= -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{\rho c^2}{2} - \frac{p}{2}\right) \\
e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right] - \frac{1}{r^2} &= -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{\rho c^2}{2} - \frac{p}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{VI.3.8}$$

den ibâret 3 lineer diferansiyel denklemden oluşan bir sistem olacağı görülmektedir. Buraya dördüncü bir denklemin eklenmeyişinin sebebi (VI.3.7) den de görüldüğü gibi R_{33} ün, R_{22} ile orantılı olması ve dolayısıyla, farklı bir çözüme yol açacak bir denklem oluşturmayışıdır.

(VI.3.8) denklemlerinin ilk ikisi taraf tarafa toplanacak olursa

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{r}\right)=\frac{8\pi G}{c^4}(\rho c^2+p) \qquad \text{(VI.3.9)}$$

bulunur. r, p ve ρ negatif olmayan büyüklükler olduklarından buradan ancak ve ancak $\rho=p=0$ için, yâni maddenin dışında, $\lambda'+\nu'=0$ olabileceği görülmektedir.

(VI.3.8) in son denklemi ile (VI.3.9) dan ρ ve p yi çekmek mümkündür. Ayrıca bir de (VI.3.8) in son iki denklemini birbirlerinden çıkarırsak

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{8\pi G}{c^2}\rho &= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}\\
-\frac{8\pi G}{c^4}p &= \frac{1}{r^2}-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)\\
\frac{e^{\lambda}}{r^2} &= \frac{1}{r^2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'+\lambda'}{2r}-\frac{\nu''}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.3.10)}$$

bulunur. Buradan, ikinci denklemi r ye göre türetir de ortaya çıkacak olan ν'' yü de son denklem aracılığıyla elersek

$$-\frac{8\pi G}{c^4}\frac{dp}{dr}=-\frac{2}{r^3}+e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda'}{r^2}+\frac{\lambda'\nu'}{r}-\frac{\nu''}{r}+\frac{\nu'}{r^2}+\frac{2}{r^3}\right]=\frac{\nu'}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{r}\right)$$

bulunur. Bu ifâdenin (VI.3.9) ile karşılaştırılması

$$\boxed{\frac{dp}{dr}=-(\rho c^2+p)\,\frac{\nu'}{2}} \qquad \text{(VI.3.11)}$$

sonucunu verir. Bu, zamandan bağımsız metrik hâli için ideal akışkanların temel bağıntısıdır.

Şimdi (VI.3.10) sistemini en basit hâl için çözmek üzere merkezî küresel cismin yoğunluğunu $\rho=\rho_0=$ *sâbit* varsayacağız. Bu varsayım altında sistemin ilk denklemi

$$-r\lambda' e^{-\lambda}+e^{-\lambda}=1-\frac{8\pi G\rho_0}{c^2}r^2$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $y=e^{-\lambda}$ vaz edilirse bu denklem

$$d(ry) = r \,.\, y' + y = 1 - \frac{8\pi G\rho_0}{c^2} r^2 \tag{VI.3.12}$$

şekline girer. Buna tekaabül eden sağ tarafsız denklemin genel çözümü, A ile bir sâbiti göstermek üzere, $y = A/r$ şeklindedir. Öte yandan (VI.3.12) nin bir özel çözümünün de

$$y_0 = 1 - \frac{8\pi G\rho_0}{3c^2} r^2$$

şeklinde olduğu kolaylıkla tahkik edilebilir. Buna göre (VI.3.12) nin genel çözümü

$$y = e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G\rho_0}{3c^2} r^2 + \frac{A}{r}$$

şeklindedir. Ancak, metriğin orijinde tekil nokta ihtivâ etmemesi için $A = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$R^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho_0} \tag{VI.3.13}$$

vaz ederek

$$\boxed{e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2}} \tag{VI.3.14}$$

olur. Öte yandan $\rho = \rho_0$ ın sâbit olduğu düşünülürse (VI.3.11) ideal akışkanlar bağıntısı

$$\frac{1}{p + c^2\rho_0} \; \frac{d(p + c^2\rho_0)}{dr} = -\frac{\nu'}{2} = \frac{d[ln\,(p + c^2\rho_0)]}{dr}$$

yazılabilir ve, A ile bir integrasyon sâbitini göstererek, buradan da

$$p + c^2\rho_0 = A \,.\, e^{-\nu/2}$$

ve (VI.3.9) bağıntısı dolayısıyla da

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu' + \lambda'}{r}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}(p + c^2\rho_0) = \frac{8\pi G}{c^4} A \,.\, e^{-\nu/2}$$

ya da

$$e^{\nu/2} \,.\, e^{-\lambda}\left(\frac{\nu' + \lambda'}{r}\right) = sâbit \tag{VI.3.15}$$

olur. (VI.3.14) ü göz önünde tutarak ve bu ifâdenin r ye göre türevinin de

$$\lambda' \,.\, e^{-\lambda} = \frac{2r}{R^2}$$

olduğuna işâret ederek (VI.3.15) den $\nu = \nu(r)$ fonksiyonunu belirleyecek olan

$$e^{\nu/2}\left[\frac{1}{r}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{d\nu}{dr} + \frac{2}{R^2}\right] = sâbit$$

diferansiyel denklemi elde edilir. A ve B ile biri bu denklemin sağ yanındaki sâbitin fonksiyonu olan bir sâbiti, diğeri ise bir integrasyon sâbitini göstermek üzere, bu diferansiyel denklemin çözümü

$$e^{\nu/2} = A - B\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \tag{VI.3.16}$$

olur. Buna binâen de sâbit yoğunluklu küresel bir ideal akışkanın içindeki statik gravitasyon alanını temsil eden ds^2 ifâdesi (VI.1.16), (VI.3.14) ve (VI.3.16) ya göre

$$ds^2 = \left(A - B\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right)^2 (dx^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r^2}{R^2}} \tag{VI.3.17}$$

şeklindedir.

A ve B yi tâyin etmek için (VI.3.10) sisteminin ikinci denklemini göz önüne alalım; (VI.3.15) ve (VI.3.17) aracılığıyla bu denklemden

$$\frac{8\pi G}{c^4}p = \frac{3B\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R^2}} - A}{R^2\left(A - B\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R^2}}\right)} \tag{VI.3.18}$$

bulunur. Eğer mâkûl bir varsayım olarak akışkan küresinin dış yüzünde ($r = r_1$ de) basıncın sıfır olduğu vaz edilirse (VI.3.18) den

$$A = 3B\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}} \tag{VI.3.19}$$

bulunur. Bu $r = r_1$ sınırında, ayrıca, (VI.2.17) dış çözümü ile (VI.3.17) iç çözümü tutarlı olmalıdırlar. Buna göre $r = r_1$ de

$$e^{\nu} = \left(A - B\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}}\right)^2 = 4B^2\left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_1^2}{R^2} \tag{VI.3.20}$$

bağıntısı geçerli olacaktır. Buradan

$$4B^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \pm 1/2$$

olması gerektiği bulunur. (VI.3.19) dan A ve B nin aynı işâreti haiz olacakları anlaşılmaktadır. Buna göre mümkün iki çözüm

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad B = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad A = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}} \\ &2)\quad B = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad A = -\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.3.21)}$$

değerleriyle verilecektir. Ancak, her iki çözümün de aynı metriği vermekte olduklarına işâret edelim. Buna binâen M kütleli, r_1 yarıçaplı ve sâbit yoğunluklu, küresel simetriyi haiz ideal bir akışkan içindeki (yâni $r \leqq r_1$ için) gravitasyon alanını temsil eden iç *SCHWARZSCHİLD* çözümünün

$$\boxed{ds^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right]^2 (dx^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r^2}{R^2}}}$$

(VI.3.22)

olduğu tesbit edilmiş olur.

R^2 nin (VI.3.13) ile verilen değerini (VI.3.20) ye vaz edersek

$$\frac{2GM}{c^2 r_1} = \frac{r_1^2\, 8\pi G\rho_0}{3c^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4}{3}\pi r_1^3\, \rho_0$$

bulunur ki bu da söz konusu kürenin kütlesinin tam ifâdesinden başka bir şey değildir. Bu sonuç ise iç ve dış çözümlerin $r = r_1$ sınırında tutarlı olduklarının kanıtını teşkil etmektedir.

Bundan sonraki paragraflarda *SCHWARZSCHİLD* çözümlerinin sonuçlarının gözlemsel olarak nasıl tahkik edilebilecekleri sorununa değineceğiz.

M kütleli, küresel ve sükûnetteki bir cismin dışındaki ve içindeki gravitasyon alanlarının metrikleri, *EİNSTEİN* alan denklemlerininin tam çözümleri olarak yukarıda elde edilmiş olan (VI.2.17) ve (VI.3.22) *SCHWARZSCHİLD* çözümleriyle verilmektedir. *EİNSTEİN* alan denklemlerinin, M kütleli, küresel fakat eksenlerinden biri etrâfında dönen bir cismin dışındaki gravitasyon alanını tasvir ve temsil ediyormuş gibi görünen bir başka tam çözümü de *KERR* tarafından verilmişti (*KERR* metriği) [16]. Ancak bu dış tam çözümün, dönen bir kürenin iç tam çözümüyle sınırda tutarlı bir biçimde uyuşabildiğini göstermek mümkün olmamıştır [4c].

§(X.3) de seyrelmiş ve zerrecikleri arasında gravitasyon etkileşmesinden başka bir etkileşme bulunmayan bir toz bulutu için *EİNSTEİN* alan denklemlerinin *TOLMAN* tarafından bulunmuş olan bir tam çözümünü tesis edeceğiz.

EİNSTEİN alan denklemlerinin tam çözümlerindeki yeni ilerlemeler ve bu hususta ayrıntılı bir bibliyografya için *W.KİNNERSLEY*'in makaalesine başvurulabilir [17].

(VI.4) MERKÜR'ÜN PERİHELİNİN İLERLEMESİ

Küresel simetrili merkezî bir cismin cıvarındaki gravitasyon alanını bozmayacak kadar kütlesi ihmâl edilebilen bir cismin merkezî cisim etrafında izleyeceği yörüngenin ne olacağını kısaca incelemek istiyoruz. Bu aynı zamanda, kabaca, Güneşin etrafında dolanan bir gezegenin yörüngesinin incelenmesi demektir.

Metriği dış *SCHWARZSCHİLD* çözümüyle belirlenmiş olan bir uzay-zamanda serbest bir tâneciğin mümkün yörüngeleri geodezik ilkesi gereği olarak bu metriğin temsil ettiği uzayın geodezik eğrileri olacaktır. Geodezik denklemi (VI.2.15) ile verilmiş olup bu

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0 \qquad (\mu=0,1,2,3)$$

şeklindedir. *CHRİSTOFFEL* sembollerinin (VI.2.5) ile verilmiş olan değerleri göz önüne alındığında

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-re^{-\lambda}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\frac{e^{\nu-\lambda}}{2}\nu'.\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2=0 \quad \text{(VI.4.1)}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0 \quad \text{(VI.4.2)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\,\mathrm{cotg}\,\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0 \quad \text{(VI.4.3)}$$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2}+\nu'\frac{dr}{ds}\frac{dx^0}{ds}=0 \quad \text{(VI.4.4)}$$

bulunur. $\theta=\pi/2$ ve $d\theta/ds=0$ başlangıç şartları altında, ve artık

$$\frac{d(r^2\dot\theta)}{ds}=r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2$$

şeklinde yazacağımız (VI.4.2) denklemine binâen $d\theta/ds$ nin ve $\cos\theta$ nın sürekli olarak sıfıra eşit olacağı görülür. Buna göre söz konusu denklemler de

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - re^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}\,.\,\nu'\,.\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0 \qquad \text{(VI.4.5)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dr}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} = 0 \qquad \text{(VI.4.6)}$$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \nu'\frac{dr}{ds}\,\frac{dx^0}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x^0}{ds^2} + \frac{d\nu}{ds}\,\frac{dx^0}{ds} = 0 \qquad \text{(VI.4.7)}$$

şekline indirgenmiş olurlar. Son iki denklem kolaylıkla integre edilirler; H ve k ile iki integrasyon sâbitini göstererek

$$\left.\begin{aligned} r^2\frac{d\varphi}{ds} &= H \qquad &\text{(VI.4.8)} \\ \frac{dx^0}{ds} &= ke^{-\nu} \qquad &\text{(VI.4.9)} \end{aligned}\right\}$$

bulunur. Ayrıca metriğin ifâdesinden de

$$e^{\nu}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 - e^{\lambda}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \text{(VI.4.10)}$$

yazılabilir. Bu da geodezik denklemlerinin bir ilkel integralidir. Son iki denklem arasında dx^0/ds yi eleyip e^{ν} ve e^{λ} yerine de *SCHWARZSCHİLD* metriğindeki açık ifâdelerini vaz ederek

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \frac{2GM_{\odot}}{c^2r}\left[1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right] = k^2 - 1 \qquad \text{(VI.4.11)}$$

olur. $M_{\odot}$ ile Güneşin kütlesi gösterilmektedir.

Klâsik gravitasyon teorisinde gezegen için enerji korunumuyla açısal momentum korunumu, bilindiği gibi,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2GM_{\odot}}{r} = \text{sâbit} \qquad \text{(VI.4.12)}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = \text{sâbit} \qquad \text{(VI.4.13)}$$

denklemleriyle ifâde olunurlar. Bunlara (VI.4.8) ve (VI.4.11) arasındaki benzerlik derhâl göze çarpacaktır. Şimdi (VI.4.8) i (VI.4.11) e yerleştirelim; ve

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{H}{r^2} = -H\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}$$

olduğuna dikkati çektikten sonra $u = 1/r$ vaz ederek sonucu φ ye göre türetelim. Bu takdirde

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM_\odot}{c^2H^2} + \frac{3GM_\odot}{c^2}u^2 \tag{VI.4.14}$$

olur. Bu denklem kâsik gravitasyon teorisi denkleminden alanlar sâbitinin değeri ve fazladan ikinci bir terim ile farketmektedir. Bunun için ilk bir yaklaşıklık olarak

$$p = \frac{h^2}{GM_\odot} = a\,(1 - e^2) \cong \frac{c^2H^2}{GM_\odot} \tag{VI.4.15}$$

ve kezâ

$$\varepsilon = \frac{3GM_\odot}{pc^2} \cong \frac{3G^2M_\odot^2}{c^4H^2} \tag{VI.4.16}$$

vaz edelim. ε un meselâ Merkür için 10^{-8} mertebesinde olduğu kolayca hesaplanır ; buna göre rölâtivist gravitasyon teorisinde gezegenin yörünge denklemi

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \varepsilon\, pu^2 \tag{VI.4.17}$$

şekline indirgenmiş olur. Bu denklem klâsik gravitasyon teorisindeki yörünge denkleminden yalnızca sağ yandaki εpu^2 pertürbasyon terimiyle farketmektedir. (VI.4.17) yi çözebilmek için bunun çözümünün

$$u(\varphi) = u_0(\varphi) + \varepsilon\, v(\varphi) + O(\varepsilon^2) \tag{VI.4.18}$$

şeklinde olduğunu varsayıp $u_0(\varphi)$ ve $v(\varphi)$ fonksiyonlarını belirlemeğe çalışalım. (VI.4.18) i (VI.4.17) ye yerleştirerek

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + \varepsilon\frac{d^2v}{d\varphi^2} + u_0 + \varepsilon\, v = \frac{1}{p} + \varepsilon\, pu_0^2 + O(\varepsilon^2) \tag{VI.4.19}$$

olur. ε cinsinden sıfırıncı mertebeden terimleri eşitleyerek

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 = \frac{1}{p}$$

yâni $u_0 = u_0(\varphi)$ nin klâsik gravitasyon teorisindeki yörünge denkleminin çözümü olduğu bulunur. Bu çözümün, A ve δ ile iki sâbiti göstererek,

$$u_0(\varphi) = \frac{1}{p} + A\cos(\varphi + \delta)$$

olduğu kolaylıkla tahkik olunur. Koordinat eksenlerini uygun seçmek sûretiyle her zaman $\delta = 0$ yapmak mümkündür. Buna binâen

$$u_0(\varphi) = \frac{1}{p} + A\cos\varphi \qquad \text{(VI.4.20)}$$

dir. Şimdi de (VI.4.19) da ε cinsinden birinci mertebeden terimleri eşitlersek

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = pu_0^2 = \frac{1}{p} + 2A\cos\varphi + pA^2\cos^2\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{p} + \frac{pA^2}{2}\right) + 2A\cos\varphi + \frac{pA^2}{2}\cos 2\varphi$$

yazabiliriz. Bu lineer bir diferansiyel denklemdir. Eğer şimdi

$$\frac{d^2v_1}{d\varphi^2} + v_1 = \frac{1}{p} + \frac{pA^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{p} + \frac{pA^2}{2}$$

$$\frac{d^2v_2}{d\varphi^2} + v_2 = 2A\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad v_2 = A\varphi\sin\varphi$$

$$\frac{d^2v_3}{d\varphi^2} + v_3 = \frac{pA^2}{2}\cos 2\varphi \quad \Rightarrow \quad v_3 = -\frac{pA^2}{6}\cos 2\varphi$$

denklemleri ve çözümleri dikkate alınırsa, kolaylıkla,

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = \left(\frac{1}{p} + \frac{pA^2}{2}\right) + A\varphi\sin\varphi - \frac{pA^2}{6}\cos 2\varphi$$

ve dolayısıyla da

$$u = u_0 + \varepsilon v = \left(\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} + \frac{\varepsilon pA^2}{2}\right) + \left(A\cos\varphi - \frac{\varepsilon A^2 p}{6}\cos 2\varphi\right) + \varepsilon A\varphi\sin\varphi \qquad \text{(VI.4.21)}$$

olduğu tesbit edilir. Bu ifâdedeki son terim peryodik bir terim olmadığından gezegenin yörüngesi üzerindeki hareketinde gözlenebilecek düzensizliklerin bu terimden ileri geleceği âşikârdır. Eğer $\varepsilon \ll 1$ için

$$\cos(\varphi - \varepsilon\varphi) = \cos\varphi\cos\varepsilon\varphi + \sin\varphi\sin\varepsilon\varphi \cong \cos\varphi + \varepsilon\varphi\sin\varphi$$

yazılabileceği göz önünde tutulursa (VI.4.21) çözümü

$$u = \frac{1}{p} + A\cos(\varphi - \varepsilon\varphi) + \varepsilon\left(\frac{1}{p} + \frac{pA^2}{2} - \frac{pA^2}{6}\cos 2\varphi\right) \qquad \text{(VI.4.22)}$$

şeklinde yazılır. Gezegenin klâsik eliptik yörüngesi $\frac{1}{p} + A\cos\varphi$ ile temsil edilmektedir. Son terim ise gezegenin Güneşe olan radyal uzaklığının peryodik değişimlerini dile getirmektedir. Bunlar gözlenmesi çok zor değişimler olduklarından bunlarla ilgilenmeyeceğiz. Buna karşılık kosinüsün argümentinde görülen $\varepsilon\varphi$, zamanla φ arttıkça artan ve dolayısıyla peryodik olmayan bir pertürbasyona işâret etmektedir. Şu hâlde gezegenin Güneş etrafındaki yörünge denklemini

$$u = \frac{1}{p} + A \cos(\varphi - \varepsilon\varphi) + (\varepsilon \text{ mertebesinden peryodik terimler}) \qquad \text{(VI.4.23)}$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi (VI.4.23) ile ortaya çıkan peryodik olmayan olayın gezegenin yörüngesinin Güneşe en yakın noktası **(perihel noktası)** üzerine nasıl tesir ettiğini araştıralım. Gezegenin Güneşe olan r radyal uzaklığı minimum (ya da $1/r = u$, maksimum) olduğu zaman gezegen yörüngesinin perihel noktasında bulunur. n ile bir tamsayıyı göstermek üzere, (VI.4.23) den u nun

$$\varphi(1 - \varepsilon) = 2\pi n$$

olduğu zaman maksimum olacağı görülmektedir. Buradan yaklaşık olarak

$$\varphi = 2\pi n\,(1 + \varepsilon)$$

yazılabilir. Buna göre ardarda iki perihel noktasından geçiş kutup açısının 2π değil de

$$\Delta\varphi = 2\pi(1 + \varepsilon)$$

kadar değişmesi sonucu vukuu bulmaktadır. Buna göre (VI.4.15) i ve (VI.4.16) yı da göz önünde tutarak perihelin bir dolanım başına ilerleme mikdarı olan $\delta\varphi$ açısı da, radyan cinsinden,

$$\boxed{\delta\varphi = 2\pi\varepsilon = 2\pi \frac{3GM_\odot}{c^2 a\,(1 - e^2)}} \qquad \text{(VI.4.24)}$$

den ibâret olacaktır.

Buna dayanarak meselâ Güneşe en yakın gezegen olan Merkürün perihel noktasının 100 yılda mâruz kalacağı ilerleme mikdarını hesaplayalım. Merkürün:

yarı büyük ekseni : $a = 0{,}387\ AB$ (astronomik birim)
$= 0{,}387 \times 149{,}675.10^{11}$ cm $= 0{,}579.10^{13}$ cm
dışmerkezliği : $e = 0{,}206$
$e^2 = 0{,}042$; $1 - e^2 = 0{,}958$
dolanım süresi : $T = 87{,}969$ Arz günü

dür. Ayrıca $M_\odot = 2.10^{33}$ *gram* olduğunu da hesaba katarsak bir tek dolanım süresi sonunda Merkürün perihelinin

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{3GM_{\odot}}{c^2 a(1 - e^2)} = \frac{2 \times 3{,}1416 \times 3 \times 6{,}67.10^{-8} \times 2.10^{33}}{9.10^{20} \times 0{,}579.10^{13} \times 0{,}958}$$

$$= 0{,}50344.10^{-6} \text{ radyan} = 0'',104$$

kadar ve 100 Arz yılı sonunda da

$$\delta\varphi \cdot \frac{365{,}25 \times 100}{87{,}969} = 43'',2 \qquad \text{(VI.4.25)}$$

kadar ilerlemiş olacağı anlaşılır. Oysa Merkürün perihelinin 100 yılda gözlenen ilerleme mikdarı klâsik gravitasyon teorisinin öngördüğü mümkün bütün gerçek pertürbasyon etkileri göz önünde tutulduğu hâlde 43'',03 kadar kökeni açıklanamayan bir kısım kapsamaktadır [1 , 2]. Diğer taraftan ise gezegeni her türlü pertürbasyondan soyutlayarak tasarladığımız yukarıdaki yalın hâlde rölâtivist gravitasyon teorisi gezegenin perihelinin, sırf Güneşin cıvarındaki uzay-zamanın geometrik yapısı dolayısıyla, 100 yılda 43'',2 kadar ilerleyeceğini öngörmektedir. Bu değer klâsik gravitasyon teorisiyle açıklanamamış olan 43'',03 lük değerle olağanüstü bir uyum içindedir. Bu bakımdan (VI.4.25) sonucu *EİNSTEİN*'ın rölâtivist gravitasyon teorisinin fiziksel gerçeği *NEWTON*'un klâsik gravitasyon teorisinden daha iyi bir biçimde yansıtmakta olduğunun bir kanıtını oluşturmaktadır.

(VI.5) IŞIĞIN GRAVİTASYON ALANI TARAFINDAN SAPTIRILMASI

Şimdi gene M kütleli merkezî bir cismin dışındaki *SCHWARZSCHİLD* alanının ışığın yayılması üzerine ne gibi bir etkisi olabileceğini ortaya koymak istiyoruz. Bu itibarla ışığı oluşturan fotonlara *SCHWARZSCHİLD* alanında kendi hâllerine terkedilmiş serbest tânecikler gözüyle bakacağız. Buna binâen bunların hareketleri bir yandan (VI.4.8) ve (VI.4.14) ile verilmiş olan

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = H \qquad \text{(VI.4.8)}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{c^2H^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \quad , \quad u = \frac{1}{r} \qquad \text{(VI.4.14)}$$

denklemlerine, diğer yandan da sıfır uzunluklu geodezik eğrilerinin

$$ds = 0 \qquad \text{(VI.5.1)}$$

ile verilen denklemine uygun olmalıdır. (VI.5.1) dolayısıyla (VI.4.8) de $H = \infty$ olması gerektiği ve (VI.4.14) ün de

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2 \qquad \text{(VI.5.2)}$$

ifâdesine indirgendiği görülmektedir. Şimdi

$$\varepsilon = \frac{3GM}{c^2} \tag{VI.5.3}$$

vaz edelim. ε un büyüklük mertebesini belirlemek için önce $R_s = 2GM/c^2$ ile verilen ve adına *SCHWARZSCHİLD* yarıçapı denilen büyüklüğü Güneş için değerlendirelim. Kolaylıkla, Güneş için $R_s = 2{,}96$ km bulunur. Bu takdirde $\varepsilon = 3R_s/2$ olur. Şu hâlde eğer $(3GM/c^2)u^2$ ile u yu mukaayese edersek, yâni $(3GM/c^2)\,u = 3R_s/2r$ yi göz önünde bulundurursak $r \gg R_s$ olmasından ötürü (VI.5.2) nin sağ yanındaki terime küçük bir pertürbasyon terimi gözüyle bakılabileceği anlaşılmış olur. Bu itibarla (VI.5.2) denklemini standart petürbasyon yöntemleriyle yaklaşık olarak çözmeğe çalışacağız. Bunun için de (VI.5.2) nin

$$u = u_0 + \varepsilon v + O(\varepsilon^2) \tag{VI.5.4}$$

şeklindeki bir çözümünü araştıracağız. (VI.5.4) ü (VI.5.2) ye vaz ederek

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 + \varepsilon\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v\right) = \varepsilon\, u_0^2 + O(\varepsilon^2) \tag{VI.5.5}$$

bulunur. ε^2 cinsinden terimleri ihmâl edip bu denklemin her iki yanındaki ε^0 ve ε un katsayılarını eşitleyerek

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 = 0 \tag{VI.5.6}$$

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = u_0^2 \tag{VI.5.7}$$

bulunur. İlk denklemin çözümü, R ve φ_0 ile iki integrasyon parametresini göstererek

$$u_0(\varphi) = \frac{1}{R}\sin(\varphi - \varphi_0)$$

olur. Koordinat eksenlerini uygun seçmek sûretiyle $\varphi_0 = 0$ yapmak mümkündr. Böyle bir koordinat siteminde (VI.5.6) nın genel çözümü

$$\frac{1}{r} = u_0(\varphi) = \frac{1}{R}\sin\varphi \tag{VI.5.8}$$

şeklindedir. Bu iki yaklaşıklıkta ve dik kartezyen koordinatlarda, demek ki,

$$R = r\sin\varphi = y \tag{VI.5.9}$$

dir. Bu, hiç bir pertürbasyon olmadığında ışığın yörüngesinin x-eksenine paralel bir doğru olduğunu göstermektedir.

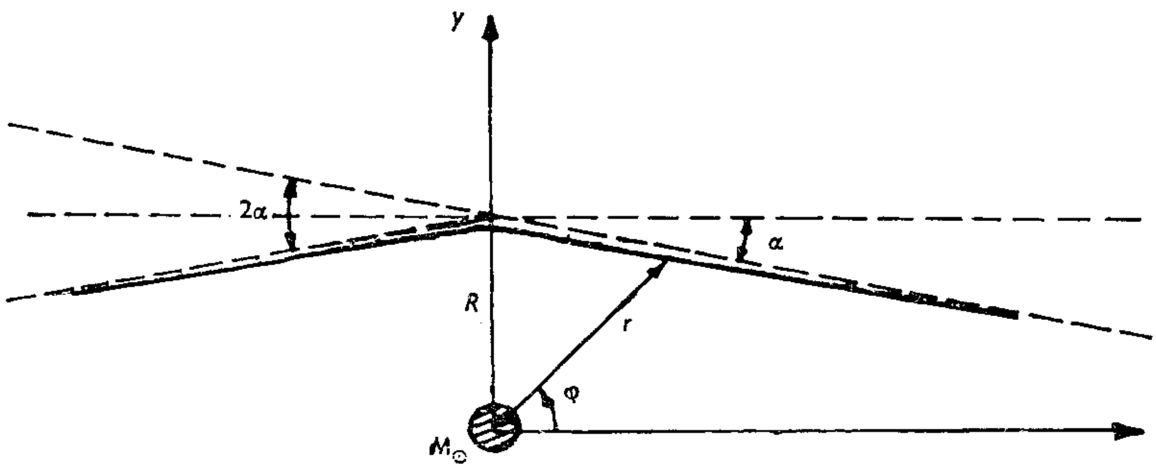
(VI.5.8) i (VI.5.7) ye vaz ederek

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = u_0^2 = \frac{1}{R^2}\sin^2\varphi = \frac{1}{2R^2}(1 - \cos 2\varphi) \qquad \text{(VI.5.10)}$$

bulunur. Bu diferansiyel denklem kolaylıkla çözülür. Eğer

$$v = B + C\cos 2\varphi$$

vaz edip bu (VI.5.10) a taşınır da B ve C tesbit edilirse çözümün



Şekil : VI.1.

$$v = \frac{1}{2R^2} + \frac{1}{6R^2}\cos 2\varphi \qquad \text{(VI.5.11)}$$

şeklinde olduğu görülür. (VI.5.8) ve (VI.5.11) e binâen (VI.5.5) in çözümü olarak

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sin\varphi + \frac{3}{2}\frac{GM}{c^2R^2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2\varphi\right) \qquad \text{(VI.5.12)}$$

ifâdesi elde edilmiş olur. Bu ifâdedeki ikinci terimin varlığı ışığın yörüngesinin M kütleli bir cismin gravitasyon alanı içinde doğrudan sapacağına delâlet etmektedir. $M \to 0$ için yörünge bir doğruya gideceğinden $M \neq 0$ için de yörüngenin iki asimtotu haiz olacağı görülmektedir. Bunlar $\varphi = 0$ ve $\varphi = \pi$ değerlerine tekaabül eden ve x-eksenine âdetâ paralel olan doğrulardan ibârettir. Buna göre önce $\varphi \to 0$ a tekaabül eden asimtotu göz önüne alırsak $r \to \infty$ için: $\sin\varphi \to \alpha$ (*bk.* Şekil: VI.1) ve $\cos 2\varphi \to 1$ olur. Şu hâlde (VI.5.12) den de

$$0 = \frac{\alpha}{R} + 2\frac{GM}{c^2R^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2GM}{c^2R}$$

olur. Diğer taraftan $\varphi = \pi$ ye tekaabül eden asimtot için de gene

$$\alpha = -\frac{2GM}{c^2R}$$

olur. Buna göre asimtotlar arasındaki toplam sapma açısı da

$$\Delta = |2\alpha| = \frac{4GM}{c^2R} \qquad \text{(VI.5.13)}$$

ye eşit olur.

Güneşi yalayarak gelen bir ışık için $R = R_{\odot}$ ve $M = M_{\odot}$ olacağından ışığın Güneşin gravitasyon alanındaki maksimum sapma açısı

$$\Delta = \frac{4\times 6{,}67.10^{-8}\times 2.10^{33}}{9.10^{20}\times 7.10^{10}} = 0{,}847.10^{-5} \text{ radyan} = 1'',75 \qquad \text{(VI.5.14)}$$

olur.

Bu olayın gözlenmesi oldukça nâzik bir mesele teşkil etmektedir. Bunun için tam bir Güneş tutulması (ya da yıldızımsı bir nesnenin, meselâ 3C 279 un Güneşin diski tarafından örtülmesi) esnâsında Güneşin (ya da 3C 279 un) hemen cıvârının fotoğrafı alınarak bu, aynı bölgenin altı ay sonra çekilen bir fotografıyla mukaayese edilir [3]. Fotograf alanındaki yıldızların görüntülerinin kaymalarından hareketle Δ değerlendirilir. 1919 dan bu yana yapılmış olan ölçümler, çoğu 1,7″ ilâ 2″ arasındaki aralığa isâbet etmek üzere 1,3″ den 2,7″ ye kadar değişen ve bu sebeple de (VI.5.14) değeriyle oldukça tutarlı sayılabilecek sonuçlar vermiştir. Bu da *EİNSTEİN*'ın rölâtivist gravitasyon teorisinin ikinci denel sınanımını oluşturmaktadır [4b].

(VI.6) GRAVİTASYON KÖKENLİ SPEKTRUM KAYMASI VE KARAÇUKURLAR

Dış *SCHWARZSCHİLD* metriğinin (VI.2.17) ile verilmiş ifâdesinde $(dx^0)^2$ nin katsayısının $\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)$ olması hasebiyle $dx^0 = c\,dt$ nin artık zamanı değil, ancak olayların zaman içindeki akışlarının işâretlenmesi bakımından işe yarayan bir koordinatı temsil edeceği âşikârdır. Bu metriğe göre orijinden r kadar uzaklıkta vukuu bulan iki olayı eğer zaman içinde t ve $t + dt$ sayılarıyla işâretlemek mümkünse bunların arasında geçen öz zaman süresi, $dr = d\theta = d\varphi = 0$ olmak hasebiyle

$$ds = c\,d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}}\; c\,dt$$

ile verilecektir. Bu M kütleli merkezî cismin yüzeyindeki $(r = R)$ bir noktadan yayınlanan elektromagnetik bir dalganın bir tepesi eğer t_1 sayısıyla, müteakip tepesi de t_2 sayısıyla işâretlenebiliyorsa dalganın öz peryodu

$$T = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}} \cdot (t_2 - t_1)$$

den, ve $r \gg R$ olmak üzere merkezden r uzaklıkta sükûnetteki bir gözlemcinin gözleyeceği peryot ise, t'_1 ve t'_2 ile ilk ve müteakip dalga tepesinin gözlemci tarafından algılandıkları zamanlara işâret eden sayılar gösterilmek üzere,

$$T' = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}} \cdot (t'_2 - t'_1)$$

den ibâret olacaktır. Ancak gözlemci sâbit olduğundan

$$t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$$

dir. Şu hâlde λ ile yayınlanan dalganın uzunluğunu, $\lambda + \Delta\lambda$ ile de gözlemcinin algıladığı dalganın uzunluğunu gösterecek olursak

$$\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = 1 + z_G = \frac{T'}{T} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}}} \cong \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}}} \qquad \text{(VI.6.1)}$$

ve eğer $1 \gg \frac{2GM}{c^2R}$ ise, bu takdirde de yaklaşık olarak

$$1 + z_G \cong 1 + \frac{GM}{c^2R} = 1 + \frac{\Phi}{c^2} \qquad \text{(VI.6.2)}$$

bulunur. Buna göre küresel simetriyi haiz R yarıçaplı ve M kütleli bir cisimden yayınlanan bir elektromagnetik dalga, $\Phi = GM/R$ ile bu gök cisminin klâsik anlamdaki gravitasyon potansiyelini göstermek üzere,

$$z_G = \frac{|\Phi|}{c^2} = \frac{GM}{c^2R} \qquad \text{(VI.6.3)}$$

mikdarında gravitasyon kökenli bir **kızıla kaymaya** mâruz kalacaktır.

Güneş misal olarak alındığında $\Delta\lambda/\lambda = z_G = 0{,}2.10^{-5}$ bulunur ki bu, meselâ $\lambda = 5000$ Å lük bir dalgaboyunu haiz bir ışınım için 0,01 Å lük bir kızıla kayma demek olup âdî spektroskopik yöntemlerle ortaya konulması son derece zordur. Ancak, §(II.3) de de değinmiş olduğumuz gibi, *MÖSSBAUER* olayına dayanan çok hassas bir teknik uygulamak sûretiyle *POUND* ve *REBKA* (*bk.* II. BÖLÜM, Ref. [4-5]) gravitasyon kökenli ve (VI.6.3) e uygun bir kızıla kaymanın varlığını Arzın gravitasyon alanı kadar zayıf bir alan için dahi göstermeği başarmışlar ve böylece *EİNSTEİN*'ın rölâtivist gravitasyon teorisini, bu hâl için öngördüğü teorik değeri %1 lik bir izafî hatâ ile denel olarak tahkik etmişlerdir. Bu da Genel Rölâtivite Teorisinin deney yoluyla 3. sınanımını oluşturmaktadır.

Yıldızımsı nesnelerin (YN'lerin) arz ettikleri büyük kızıla kayma olayının (bk. *A.Y.ÖZEMRE*; **Teorik Fizik Dersleri Cild: 8, Kozmolojiye Giriş,** IV. Bölüm) gravitasyon kökenli olduğu düşünülmüş ise de, sürüklediği sonuçların derinliğine incelenmesi bu fikrin gerçeği bütünüyle yansıtamıyacağını ortaya koymuştur. Çok yüzeysel bir biçimde soruna yaklaşır da meselâ 3C 273 yıldızımsı nesnesini göz önüne alacak olursak bunun arz etmekte olduğu kızıla kayma $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}156$ olup lâboratuvarda elde edilen H_α çizgisinin 6563 Å olmasına karşılık aynı çizgi 3C 273 ün spektrumunda 7586 Å e kaymış olarak bulunmaktadır. Eğer, tümüyle gravitasyon kökenli bir kızıla kayma olarak yorumlanırsa (yâni $z_g = 0{,}156 = GM'/c^2R'$ ise) bu, bizi, 3C 273 e Güneşinkinden 75 000 misli bir kütle izâfe edilmesi hâli ile yaklaşık 9 km lik bir yarıçap izâfe edilmesi hâli gibi iki uç hâli göz önüne almaya sevkeder. İlk uç hâl, yıldızın iç dinamiği açısından büyük bir dengesizliğe sâhip olması, diğer uç hâl de yıldızın olağanüstü zayıf parlaklığı haiz olmasını içerir. Bu iki uç hâl arasında kalan herhangi bir ara çözüm de bu ya da öteki mahzurdan arınmış değildir. Diğer taraftan $z \cong 3$ olan yıldızımsı nesneler dahi gözlenmiştir. Bu durumda eğer z yalnızca gravitasyon kökenli olsaydı $z_g = 3 = GM/c^2R$ çözümünde $(dx^0)^2$ nin katsayısı

$$1 - \frac{2GM}{c^2R} = 1 - 6 < 0$$

olurdu. Bunun ne demek olabileceğini sezinlemek için (VI.6.1) ifâdesine dönelim ve bir gök cismi için $2GM/c^2 = R$ olması hâlini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_g = z_g = \lim_{R \to \frac{2GM}{c^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}}} - 1 \right\} \to \infty \qquad \text{(VI.6.4)}$$

olacak, yâni bu gök cisminin yayınladığı hiç bir radyasyonu ve dolayısıyla da bu gök cismini görmek ya da herhangi bir şekilde detekte etmek olanağı kalmayacaktır; başka bir deyişle, bütün radyasyonlar bu gök cisminin içinde hapsedilmiş olacaktır. Kezâ bu gök cismi üzerine düşen her türlü radyasyon hiç yansımayacak, yâni artık bu gök cismini görebilmek imkânı kalmamış olacaktır. İşte bu özelliği haiz gök cisimlerine **karaçukur** adı verilmektedir.

Bir gök cismi eğer bir karaçukur ise gözlenemeyeceğinden $\Delta\lambda/\lambda = 3$ olan yıldızımsı nesnelerin karaçukur olmalarına ve dolayısıyla da arz ettikleri kırmızıya kaymanın da tümüyle gravitasyon kökenli olmasına imkân yoktur.

Bir gök cisminin evriminin bir karaçukur hâlinde son bulması, gök cisminin merkezindeki zincirleme termonükleer reaksiyonların iyice azalması ya da artık vukuu bulamaması sebebiyle basınç gradyentinin gravitasyon kuvvetlerini dengeleyememesi sonucu ortaya çıkar. Nitekim bu takdirde gök cismi kendi ağırlığı altında hızla merkezine doğru çöker. Buna **gravitasyon çöküntüsü** adı verilir.

Bu çöküntü esnâsında gök cisminin yarıçapı hızla küçülerek $R_s = 2GM/c^2$ değerine erişebilir. Bu takdirde gök cismi bir karaçukur olur. Bir karaçukur çok küçük bir hacım içine olağanüstü mikdarda maddenin sıkışması sonucu oluşur. Bu sıkışma kuvvetleri o kadar büyüktür ki bunların etkisi altında atomlardaki elektronlar çekirdeklerin üzerine düşerek protonları nötronlara dönüştürürler. Bu itibarla karaçukurlar aynı zamanda **nötron yıldızları**dır da.

Bir gök cisminin gravitasyon çöküntüsüne uğraması dolayısıyla olağanüstü bir enerji de açığa çıkar. Bunun sebebi gravitasyonun etkisinin r azaldıkça $1/r^2$ gibi artmasıdır. Eğer mâruz kaldığı gravitasyon çöküntüsüyle yarıçapı küçülüp de sonunda bir karaçukur olacak olan gök cisminin homogen bir küre şeklinde olduğu varsayılacak olursa klâsik potansiyel teorisine göre bu, bütün M kütlesi merkezinde toplanmış olarak da telâkki edilebilecektir; şu hâlde bu gök cismi üzerindeki m kütleli bir tâneciğe tesir eden gravitasyon kuvveti

$$K = -\frac{GMm}{R^2}$$

olup bu

$$U_m = \frac{GMm}{R}$$

potansiyel fonksiyonundan türemektedir. Gravitasyon çöküntüsü esnâsında açığa çıkan enerji işte bütün M kütlesini oluşturan m kütleli tâneciklere tekaabül eden toplam potansiyel enerjiden başka bir şey değildir. Bu ise

$$U_M = \frac{GM^2}{R} \qquad \text{(VI.6.6)}$$

dır. Ancak gök cismi karaçukur olduğunda

$$R = R_0 = \frac{2GM}{c^2}$$

olacağından bu son iki bağıntıdan, açığa çıkmış olan enerjinin

$$E = |U_M| = \frac{1}{2} Mc^2 \qquad \text{(VI.6.5)}$$

olduğu yâni gök cisminin sükûnet enerjisiyle aynı mertebede bir enerji olduğu anlaşılmaktadır.

Gravitasyon çöküntüsü hâlinde gök cisminin M kütlesi ile içinde bulunduğu V hacmı arasında (VI.6.5) e binâen

$$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3$$

bağıntısı olacağından gök cisminin yoğunluğu da

$$\rho = \frac{3c^6}{4\pi \times 8G^3M^2} \cong \frac{10^{83}}{M^2}\, g\,.\, cm^{-3} \qquad \text{(VI.6.7)}$$

olur. Şimdi biri Güneş mertebesinde ($M_\odot = 2.10^{33}$ *gram*) olan bir yıldızın, diğeri ise $10^8\, M_\odot = 2.10^{41}$ *gram* mertebesinde kütlesi olan bir galaksi nüvesinin gravitasyon çöküntüsüne uğradıkları takdirde yoğunluklarının ne mertebede olacağını (VI.6.7) den belirleyelim. Bu takdirde yıldızın erişeceği yoğunluğun $\rho = 2{,}5.10^{10}$ *ton*/*cm*^{3} ve galaksi nüvesininkinin ise $\rho = 2{,}5$ *g*/*cm*^{3} olacağı bulunur. Bu sonuç hiç şüphesiz, galaksi nüvelerinin gravitasyon çöküntüsüne uğramalarının bir yıldızın buna mâruz kalmasından çok daha fazla imkân dâhilinde olduğunu telkin etmektedir. M 82 gibi patlama hâlindeki galaksilerin, *SEYFERT* tipi galaksilerin, radyogalaksilerin ve hattâ yıldızımsı nesnelerin kökeninde belki de böyle bir mekanizma yatmaktadır. Bununla ilgili olarak bir de, gravitasyon çöküntüsüne uğramış bir cisme bağlı bir gözlemci için bu çöküntünün sonlu bir zaman aralığında vukuu bulmasına karşılık bu olayın cisme bağlı olmayan bir gözlemci için sonsuz bir zaman aralığında vukuu bulduğu gösterilmiştir. (Karaçukurlar için *bk.* [5-8]).

Bir gök cisminin gravitasyon kuvvetinin, cismin dışına hiç bir radyasyon çıkmayacak kadar büyük olabileceği hâlinin karaçukurların çağdaş anlayış çerçevesi içinde incelenmesinden çok önce ilk defa 1799 da *LAPLACE* tarafından incelenmiş olduğunu da kaydedelim [9-10].

(VI.7) IŞIĞIN *SCHWARZSCHİLD* ALANINDAN GEÇİŞ SÜRESİ; RADAR YANKILARI TESTİ

SCHWARZSCHİLD alanıyla ilgili bir başka problem de ışığın (ya da daha genel olarak elektromagnetik dalgaların) iki nokta arasındaki uzaklığı katetmesi için geçen zaman süresinin tesbiti problemidir. Bir gravitasyon alanı uzay-zamanın düz ÖKLİTsel bir varyete değil de eğriliği haiz RİEMANNsal bir varyete olmasını gerektirdiğinden ışığın iki nokta arasını katetmesi için geçen zaman süresi, gravitasyon alanı olmasa, aynı noktaların arasını katetmesi için geçecek olan zaman süresinden daha uzun olacaktır. Bu olay ilk defa 1964 de *SHAPİRO* tarafından öngörülmüştür [11].

Şimdi bir sinyalin $\theta = \pi/2$ düzlemi içinde ve Güneşin yüzeyinden R kadar uzaklıktan geçtiğini varsayalım (*bk.* Şekil: VI.2). Bu sinyalin yörüngesi x-eksenine hemen hemen paralel olsun. Buna göre Şekil: VI.2 den $R = r \sin\varphi$ olduğu görülmektedir. Işığın yörünge denklemi $ds = 0$ olduğundan dış *SCHWARZSCHİLD* yay elemanı karesinin ifâdesinden

$$0 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 d\varphi^2 \qquad \text{(VI.7.1)}$$

olacaktır. Diğer taraftan belirli bir sinyal için $r \sin\varphi = R = sâbit$ olacağından buradan diferansiyel alarak

$$dr \sin\varphi + r \cos\varphi \, d\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad d\varphi = - tg\,\varphi \frac{dr}{r}$$

veyâ

$$d\varphi^2 = tg^2\varphi \left(\frac{dr^2}{r^2}\right) = \frac{r^2 \sin^2\varphi}{r^2(1 - \sin^2\varphi)} \frac{dr^2}{r^2} = \frac{R^2}{r^2 - R^2} \frac{dr^2}{r^2} \qquad \text{(VI.7.2)}$$

olur. (VI.7.1) ve (VI.7.2) arasında $d\varphi^2$ elenirse neticede

$$c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2} + \frac{R^2 \, dr^2}{(r^2 - R^2)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \frac{1 - \frac{2GMR^2}{c^2 r^3}}{\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2} dr^2 \qquad \text{(VI.7.3)}$$

bulunur. (VI.7.3) ün karekökünü almak ve elde edilen ifâdeyi GM/c^2 nin ikinci mertebeli terimlerine kadar açmak sûretiyle

$$c\,dt = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}}} \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{GMR^2}{c^2 r^3}\right) + O\left\{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2\right\} \qquad \text{(VI.7.4)}$$

bulunur.

Venüs ile Arz eğer Şekil: VI.2 de gösterilmiş olduğu gibi *üst konjonksiyon* durumuna yakın iseler r_a ile Arzın radyal uzaklığını, r_v ile de Venüsünkini gösterelim. (VI.7.4) ifâdesini $r = R$ den $r = r_a$ ya ve sonra da $r = R$ den $r = r_v$ ye kadar integre eder de sonuçları toplarsak, Arzdan Venüse yollanan bir elektromagnetik sinyalin (meselâ bir radar pulsunun) katedeceği toplam yol olarak

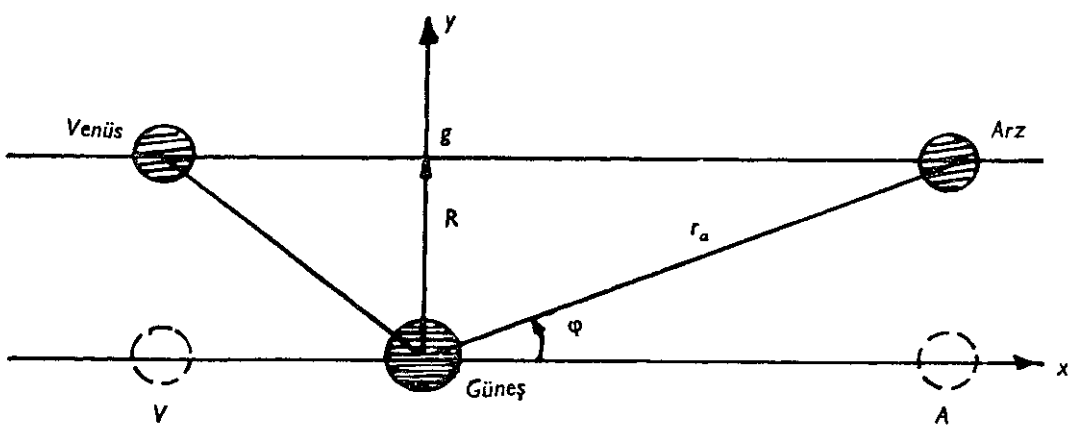
$$(ct)_{ag} + (ct)_{gv} = c\tau = \left(\sqrt{r_v^2 - R^2} + \sqrt{r_a^2 - R^2}\right) +$$

$$+ \frac{2GM}{c^2} \ln \left\{ \frac{1}{R^2} \left[\sqrt{r_v^2 - R^2} + r_v\right]\left[\sqrt{r_a^2 - R^2} + r_a\right] \right\} -$$

$$- \frac{GM}{c^2}\left[\frac{\sqrt{r_v^2 - R^2}}{r_v} + \frac{\sqrt{r_a^2 - R^2}}{r_a}\right] \qquad \text{(VI.7.5)}$$

bulunur. Bu ifâdenin sağındaki ilk terim, uzay-zamanın ÖKLİTsel olması hâlinde, sinyalin katedeceği toplam yolu vermekedir; ikinci ve üçüncü terimlerse rölâtivist farka delâlet etmektedirler.

Şimdi gene üst konjonksiyona çok yakın bir durumda iken Arzdan Venüse gönderilen radar pulsunun Güneşe teğet olması sınır hâlini göz önüne alıp bu sefer bu radar pulusunun Venüsün yüzeyinde yansımasıyla Arza dönmesi hâlini inceleyelim. Buna göre pulsun katedeceği toplam yol $c\tau = 2\,ct$ den ibaret olacaktır. Ayrıca artık R de Güneşin yarıçapı olarak alınacağından bu, r_a ve r_v nin önünde rahatlıkla ihmâl edilebilir. Buna göre radar pulsunun Arzdan Venüse gidip yansı-



Şekil : IV.2.

yarak tekrar Arza dönmesi sonucu ortaya çıkacak olan rölâtivite kökenli gecikme olarak

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\left\{\tau - 2\left(\sqrt{r_v^2 - R^2} + \sqrt{r_a^2 - R^2}\right)\right\} = \frac{4GM}{c^3}\left(ln\,\frac{4r_a r_v}{R^2} - 1\right) \quad \text{(VI.7.6)}$$

ifâdesi elde edilir. Göz önüne alınan hâl için ise, gecikme süresi olarak

$$\Delta\tau = \frac{4\times 6{,}67.10^{-8}\times 2.10^{33}}{27.10^{30}}\left(ln\,\frac{4\times 1{,}08.10^{13}\times 1{,}5.10^{13}}{49.10^{20}} - 1\right) \cong 200\,\mu s$$

bulunur. Gerçekten de bu değer %5 lik bir hatâ payı ile gözlenmiş olup bu da *EİNSTEİN*'ın rölâtivist gravitasyon teorisinin dördüncü denel tahkikini teşkil etmektedir [12-14].

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

VI.1. Geometrik özellikleri tıpkı bir dış *SCHWARZSCHİLD* alanının orijininden geçen (uzaysal) bir düzleminki gibi olan dönel bir yüzeyin ifâdesini tesis ediniz.

VI.2. $\alpha = \alpha(x^1)$ ve $\beta = \beta(x^1)$ olmak üzere , metriği

$$ds^2 = e^{2\alpha}\,(dx^0)^2 + e^{2\beta}\,(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

ile verilen bir uzay-zamanda *RİEMANN-CHRİSTOFFEL* tansörünün,

$$\alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 = 0$$

olması hâlinde, sıfır olacağını gösteriniz.

Ayrıca, a ve b ile iki sâbiti göstererek, eğer

$$\alpha = \frac{1}{2}\,ln(a + bx^1) = -\beta$$

ise uzayın ÖKLİTsel olacağını kanıtlayınız.

VI.3. $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ ve $D > 0$ olmak üzere

$$ds^2 = A\,(dx^0)^2 - B\,(dx^1)^2 - C\,(dx^2)^2 - D\,(dx^3)$$

şeklindeki bir metriğe tekaabül eden *CHRİSTOFFEL* sembollerini ve $\Lambda \neq 0$ olmak üzere alan denklemlerini hesaplayınız.

VI.4. Ne gibi bir enerji-impuls tansörünün

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - e^{\chi(t)}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

şeklindeki bir uzay-zamana tekaabül edeceğini hesaplayınız.

VI.5. *SCHWARZSCHİLD* yay elemanını öyle bir koordinat sisteminde ifâde ediniz ki $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$ olmak üzere

$$ds^2 = A(r)\,(dx^0)^2 - B(r)\,d\sigma^2$$

olsun (**izotropik** ya da **eşyönsel koordinat sistemi**).

VI.6. *SCHWARZSCHİLD* metriği için $\sqrt{-g}$ yi ve bunun tekil noktalarını hesaplayınız.

VI.7. *SCHWARZSCHİLD* yay elemanını kozmolojik sâbitin sıfırdan farklı olduğu hâl için çözüp Λ nın Merkürün perihelinin hareketine katkısını tartışınız.

VI.8. V.Bölümde bir ilk yaklaşıklıkta ve zayıf gravitasyon alanları göz önüne alındığında klâsik anlamda kuvvetin $F^k = -\partial_k\,(c^2 g_{00}/2)$ ile verildiği tesbit edilmişti [*bk.* (V.2.9)]. Bu kavramdan hareketle ideal bir akışkandan oluşan homogen bir küre içindeki bir test tâneciği üzerindeki kuvvetin yaklaşık ifâdesini tesis edip tartışınız.

VI.9. a) $e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}$ olduğunu göz önünde tutarak

$$-\frac{1}{r^2}(2m'(r)) = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho$$

yazılabileceğini ve dolayısıyla, $r = 0$ da $m = 0$ almak şartıyla, $m(r)$ nin r yarıçaplı küre içinde

$$m(r) = \int_0^m dm' = \frac{G}{c^2}\int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr$$

şeklinde ifâde edilebileceğini gösteriniz.

b) Bu sonuçtan yararlanarak ve (VI.3.10) denklemleri aracılığıyla basıncın r ye göre türevinin ifâdesini tesis ediniz (*TOLMAN-OPPENHEİMER-VOLKOFF* denklemi).

REFERANSLAR

[1] G.M.CLEMENS, *Rev.Mod.Phys.*, **19**, 361-364, (1947).

[2] G.M.CLEMENS, *Proc.Amer.Phil.Soc.*, **93**, 532-543, (1949).

[3] H.ARZELİÈS, **Relativité Généralisée, Gravitation, Fasc. II: Le Champ de Schwarzschild,** Gauthier-Villars, Paris; (1963).

[4] S.WEİNBERG, **Gravitation and Cosmology**; John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Toronto-Sydney; (1972); a) s. 207-208, b) s. 191-194, c) s. 240-241.

[5] M.REES, R.RUFFİNİ, J.A.WHEELER, **Black Holes, Gravitational Waves and Cosmology**; Gordon and Breach, Sci. Publ., New York-London-Paris; (1974).

[6] C.W.MİSNER, K.THORNE, J.A.WHEELER, **Gravitation,** W.H.Freeman and Comp., San Fransisco; s. 817-940; (1973).

[7] S.W.HAWKİNG, The quantum mechanics of black holes; *Scientific American*, January 1977.

[8] S.W.HAWKİNG, G.F.R.ELLİS, **The Large Scale Structure of Space-Time**; Cambridge University Press, London-New York, s. 299-347, (1973).

[9] Aynı Eser, s. 365-368.

[10] **Allgemeine geographische Ephemeriden,** verfasset von einer Gesellschaft Gelehrten; Ed. F.x. von Zach; IV. Bd., s. 1, (1799).

[11] İ.İ.SHAPİRO, *Phys. Rev. Letters*, **13** , 789. (1964).

[12] İ.İ.SHAPİRO, Fourth test of general relativity: New radar results, *Phys. Rev. Letters*, **26**, 1132, (1972).

---

[13] İ.İ.SHAPİRO, M.E.ASH, R.P. İNGALLS, W.B.SMİTH, D.B.CAMPBELL; R.B. DYCE, R.F.JURGENS, G.H.PETTENGİLL, *Phys. Rev. Letters*, **26**, 1132, (1971).

[14] J.D.ANDERSON, P.B.ESPOSİTO, W.L.MARTİN, D.O. MUHLEMAN, **Proceedings of the Conference on Experimental Tests of Gravitation** (ed. R.W.DAVİES); NASA-JPL Technical Memorendum, 33-499; (1971).

[15] M.D.KRUSKAL, *Phys. Rev.*, **119,** 1743, (1960).

[16] R.KERR, *Phys. Rev. Letters*, **11**, 237, (1963).

[17] W.KİNNERSLEY, Recent progress in exact solutions, **General Relativity and Gravitation** (Eds. G.SHAVİV, J.ROSEN); John Wiley and Sons; New York, Toronto; s. 109-135; (1975).

VII. BÖLÜM

Onlar O'nun İlminden ancak O'nun istediği kadarını kuşatabilirler.
KUR'ÂN (II; 255)

GRAVİTASYON RADYASYONU

(VII.I) ZAYIF GRAVİTASYON ALANLARI YAKLAŞIKLIĞI

Geçen bölümde incelemiş olduğumuz iç ve dış *SCHWARZSCHİLD* çözümleri **GRT**'nin alan denklemlerinin tam çözümleriydiler. Ancak, bu alan denklemlerinin lineer olmamaları dolayısıyla, başka tam çözümlerin elde edilmesi olağanüstü güç bir matematik problem teşkil etmektedir. Biz bu paragrafta alan denklemlerinin çözümüne bir pertürbasyon yöntemiyle yaklaşmayı deneyecek ve bu yoldan elde edilen çözümlerin özelliklerini ortaya koyacağız.

Bir pertürbasyon yönteminin uygulanabilmesi için, göz önüne aldığımız gravitasyon alanının çok zayıf bir alan olduğunu ve $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörünün temsil ettiği madde ve enerji dağılımının sebep olduğu $g_{\mu\nu}$ RİEMANNsal metriğinin de $\eta_{\mu\nu}$ *MİNKOSWSKİ* metriğinden, $|\gamma_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}|$ olmak üzere, ancak

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \quad (\text{veyâ} : g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} = -\gamma^{\mu\nu}) \tag{VII.1.1}$$

kadar fark ettiğini kabul edeceğiz. Buna göre $\gamma_{\mu\nu}$ ler, bütün ikinci mertebeden ifâdeleri ihmâl edilebilen ve μ ile ν indislerine göre simetrik olan tansörel büyüklüklerdir. Uzay-zamanın geometrik temelinde *MİNKOWSKİ* metriği olduğunu ve ortaya çıkan gravitasyon etkilerinin ise bu metriğin birinci mertebeden sonsuz küçük pertürbasyonlarını oluşturduklarını kabul ettiğimizden $\gamma_{\mu\nu}$ tansörünün indisleri üzerindeki bütün işlemler de tabiîdir ki hep $\eta_{\mu\nu}$ *MİNKOWSKİ* temel tansörü aracılığıyla olacaktır. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} \gamma^{\mu}_{\nu} &= \eta^{\mu\lambda}\gamma_{\lambda\nu} \\ \gamma &= \gamma^{\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \tag{VII.1.2}$$

dür. Buna binâen $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$ alanına tekaabül eden ikinci cins *CHRİSTOFFEL* sembolleri ile *RİCCİ* tansörünün ifâdelerinin ise

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\eta^{\lambda\rho}\,(\partial_\mu \gamma_{\rho\nu} + \partial_\nu \gamma_{\mu\rho} - \partial_\rho \gamma_{\mu\nu}) + O(\gamma^2) \tag{VII.1.3}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + O(\gamma^2) \tag{VII.1.4}$$

şekillerine indirgenmiş olacakları kolaylıkla saptanır. İkinci mertebeden terimler ihmâl edilerek de bu son iki ifâdeden

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &\cong \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\,\partial_\nu \partial_\mu\, \eta^{\lambda\rho}\, \gamma_{\lambda\rho} - \partial_\nu \partial_\rho\, \eta^{\lambda\rho}\, \gamma_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \partial_\mu\, \eta^{\lambda\rho}\, \gamma_{\rho\nu} + (\eta^{\lambda\rho}\,\partial_\lambda \partial_\rho)\, \gamma_{\mu\nu}\,\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\Box^2 \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\,\partial_\mu \partial_\nu \gamma - \partial_\nu \partial_\rho \gamma^{\rho}_{\mu} - \partial_\mu \partial_\lambda \gamma^{\lambda}_{\nu}\,\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\Box^2 \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu \partial_\lambda\, \gamma^{\lambda}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\nu}\,\partial_\mu \partial_\lambda\, \gamma\right) + \left(\partial_\nu \partial_\lambda\, \gamma^{\lambda}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,\partial_\nu \partial_\lambda\, \gamma\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\Box^2 \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\partial_\mu \left\{\partial_\lambda \left(\gamma^{\lambda}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\nu}\,\gamma\right)\right\} - \frac{1}{2}\,\partial_\nu \left\{\partial_\lambda \left(\gamma^{\lambda}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,\gamma\right)\right\}
\end{aligned} \tag{VII.1.5}$$

bağıntısı elde edilir. Bu ifâdede eğer sağ yandaki 2. ve 3. terimler sıfır olmuş olsalardı bu takdirde alan denklemleri olarak elimizde

$$\frac{1}{2}\,\Box^2 \gamma_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,T\right) \tag{VII.1.6}$$

gibi zarif bir ifâde kalmış olacaktı.

Alan denklemlerinin çözümünde 10 adet $g_{\mu\nu}$ yü tâyin ederken 4 serbestlik derecemiz olduğunu ve bundan doğan belirsizliğin de denklemlerin özel bir koordinat sisteminde çözülmesiyle ortadan kaldırılabileceğini § (VI.3) den bilmekteyiz. Buna binâen de zayıf gravitasyon alanları çözümünde koordinat şartı olarak

$$\partial_\lambda \left(\gamma^{\lambda}_{\sigma} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\sigma}\,\gamma\right) = 0\,, \qquad (\sigma = 0, 1, 2, 3) \tag{VII.1.7}$$

vaz etmemiz iyi bir seçim olacaktır; çünkü bu 4 denklem çözümdeki belirsizliğin ortadan kaldırılmasına yeteceği gibi alan denklemlerinin (VII.1.6) şekline indirgenmesini de sağlayacaktır.

Şimdi (VII.1.7) koordinat şartının neye delâlet ettiğini anlamak üzere önce (VII.1.7) denklemlerinin $\eta^{\beta\sigma}$ ile çarpıldıklarında bozulmayacaklarına dikkati çekelim. Buna göre

$$
\begin{aligned}
0 &= \eta^{\beta\sigma}\partial_\lambda\left(\gamma^\lambda_\sigma - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\sigma\gamma\right) = \eta^{\beta\sigma}\left(\partial_\lambda\gamma^\lambda_\sigma - \frac{1}{2}\partial_\sigma\gamma\right) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\beta\sigma}(2\,\partial_\lambda\gamma^\lambda_\sigma - \partial_\sigma\gamma) = \frac{1}{2}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\alpha\gamma^\alpha_\sigma + \partial_\lambda\gamma^\lambda_\sigma - \partial_\sigma\gamma) \\
&= \eta^{\alpha\lambda}\left\{\frac{1}{2}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\alpha\gamma_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda\gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma\gamma_{\alpha\lambda})\right\} \\
&= \eta^{\alpha\lambda}\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}
\end{aligned}
\tag{VII.1.8}
$$

olacaktır. Bu sonuç (VII.1.7) koordinat şartının §(V.3) de ithâl edilmiş olan **harmonik** ya da **izoterm koordinat şartı** diye bilinen koordinat şartına denk olduğunu göstermektedir. Buna göre harmonik koordinatlarda problemimize tekaabül eden *RİCCİ* tansörü de

$$
R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box^2\gamma_{\mu\nu} \tag{VII.1.9}
$$

şeklinde lineerleştirilmiş olmaktadır. Bu ifâdeden hareketle R skaler eğriliği için

$$
R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box^2\gamma \tag{VII.1.10}
$$

yazılabileceğinden alan denklemleri de

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\Box^2\left(\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma\right) = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{VII.1.11}
$$

ya da

$$
\boxed{\Box^2\left(\gamma^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\gamma\right) = -\frac{16\pi G}{c^4}T^\mu_\nu} \tag{VII.1.12}
$$

şekline girmiş olurlar. Bu denklem, elektrodinamikte gecikmiş potansiyellerle ilgili olarak karşılaşılan genelleştirilmiş *POİSSON* denklemi cinsinden lineer bir denklemdir. (VII.1.12) nin çözümünün,

$$
\varphi^\mu_\nu = \gamma^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\gamma \tag{VII.1.13}
$$

vaz ederek,

$$
\boxed{\varphi^\mu_\nu = \frac{4G}{c^4}\iiint\frac{T^\mu_\nu\left(\mathbf{r}'\,;\,t - \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}'} \tag{VII.1.14}
$$

şeklinde olduğu gösterilir [1,2]. φ^{μ}_{ν} büyüklükleri zayıf gravitasyon alanını temsil eden $\gamma_{\mu\nu}$ lere (VII.1.13) aracılığıyla bağlı olduklarından, (VII.1.14) ifâdesi, T^{μ}_{ν} kaynak fonksiyonları tarafından üretilen gravitasyonel pertürbasyonun c ışık hızıyla yayılmasını yansıttığı şeklinde yorumlanır. Gravitasyonel pertürbasyonun tıpkı elektromagnetik radyasyonların gerçekledikleri bir yayılma denklemine denk bir denklem uyarınca yayılması çoğu kere bir **gravitasyon radyasyonu**ndan söz edilmesine sebep olmaktadır.

Şimdi gravitasyon pertürbasyonuna sebep olan madde kaynağının $T^{\mu}_{\nu}=\rho c^2 U^{\mu} U_{\nu}$ şeklindeki bir enerji-impuls tansörü aracılığıyla temsil edilebildiğini ve bu tansörün de köşegensel olduğunu varsayalım. Buna göre (VII.1.13) ve (VII.1.14) aracılığıyla

$$\gamma = -\frac{4G}{c^4}\iiint \frac{[T^{\mu}_{\mu}]_g}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}'$$

ve buradan da

$$\gamma^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\nu}\gamma + \frac{4G}{c^4}\iiint \frac{[T^{\mu}_{\nu}]_g}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}'$$

$$= \frac{4G}{c^4}\iiint \frac{\left[T^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\nu}\,T\right]_g}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}' \qquad \text{(VII.1.15)}$$

bulunur. $[\ldots]_g$ ile, köşeli parantez içindeki ifâdenin zamana bağlılığının

$$t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$$

şeklinde olduğuna işâret edilmektedir.

(VII.1.15) ifâdesinden statik yâni zamana bağlı olmayan kaynaklar için

$$\gamma^0_0 = \gamma^1_1 = \gamma^2_2 = \gamma^3_3 = \frac{2G}{c^2}\iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}' \qquad \text{(VII.1.16)}$$

olacağı anlaşılır. Bu takdirde (I.1.10) ile (VII.1.16) karşılaştırılacak olursa, göz önüne almış olduğumuz zayıf gravitasyon pertürbasyonunu temsil eden γ^{μ}_{ν} büyüklükleri ile klâsik Φ *NEWTON* gravitasyon potansiyeli arasında

$$\gamma^0_0 = -\gamma^1_1 = -\gamma^2_2 = -\gamma^3_3 = \frac{2\Phi}{c^2}$$

ve kezâ

$$\gamma_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}\,, \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \frac{2\Phi}{c^2}$$

bağıntıları bulunduğu görülür. Bu sonuçlara göre zayıf gravitasyon alanları için metrik

$$\boxed{ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]} \qquad \text{(VII.1.17)}$$

şeklinde olacaktır.

(VII.2) DÜZLEM GRAVİTASYON DALGALARI [3-4]

Şimdi maddenin dışında gravitasyon pertürbasyonlarının (VII.1.9) ve (V.2.16) ya göre

$$\Box^2 \gamma_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(VII.2.1)}$$

denkleminin çözümleri olduklarına işâret ettikten sonra bu dalga denkleminin

$$\partial_\mu \gamma^\mu_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu \gamma = 0 \qquad \text{(VII.1.7)}$$

koordinat şartlarına uyan **düzlem dalga** çözümünün özelliklerini araştırmak istiyoruz.

(VII.2.1) denkleminin düzlem gravitasyon dalgası şeklindeki genel çözümü

$$\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = A_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + A^*_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \qquad \text{(VII.2.2)}$$

şeklindeki özel çözümlerin bir lineer kombinezonu olmalıdır. (VII.2.2) nin (VII.2.1) dalga denkleminin bir çözümü olabilmesi için

$$k_\mu k^\mu = 0 \qquad \text{(VII.2.3)}$$

ve (VII.1.7) koordinat şartına uyulması için de

$$k_\mu A^\mu_\nu = \frac{1}{2} k_\nu A^\mu_\mu \qquad \text{(VII.2.4)}$$

bağıntılarının geçerli olmaları gerektiği kolaylıkla görülür. Buna göre gravitasyon dalgalarına tekaabül eden dörtlü dalga vektörünün ışık cinsinden bir vektör olduğu anlaşılmaktadır.

$\gamma_{\mu\nu}$ lerin simetrik olmaları $A_{\mu\nu}$ lerin de simetrik olması sonucunu doğurur. 4×4 şeklindeki bir matris aracılığıyla temsil olunan simetrik bir matris genellikle 10 bağımsız değişkene sâhiptir. $A_{\mu\nu}$ söz konusu olduğunda, (VII.2.4) bağıntıları dolayısıyla, bu sayı 6 ya indirgenmektedir. Ancak $A_{\mu\nu}$ tansörünün yalnızca 2 bileşeni fizik yönünden anlamlı serbestlik derecelerine tekaabül etmektedirler. Bunu gösterebilmek için önce, ε^μ ile, $\partial_\nu \varepsilon^\mu$ en çok $\gamma_{\mu\nu}$ mertebesinde olacak şekilde bir parametrik vektörü göstermek üzere,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad \text{(VII.2.5)}$$

şeklinde genel bir koordinat dönüşümü yapalım. Metrik tansörün bu yeni koordinat sistemindeki ifâdesi

$$g'^{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\, \partial_\lambda x'^\mu\, \partial_\rho x'^\nu$$

dür; ancak, doğrudan doğruya hesap yapmakla kolayca görüleceği üzere

$$g^{\mu\nu} \cong \eta^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \tag{VII.2.6}$$

yazılabileceğinden yeni koordinat sistemindeki $\gamma'^{\mu\nu}$ ler için

$$\gamma'^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - \eta^{\lambda\nu}\, \partial_\lambda \varepsilon^\mu - \eta^{\rho\mu}\, \partial_\rho \varepsilon^\nu$$

ifâdesi elde edilir. Şu hâlde eğer $\gamma_{\mu\nu}$ ler (VII.2.1) in çözümleri iseler, $\varepsilon_\mu \equiv \varepsilon^\nu \eta_{\mu\nu}$ ler $\partial_\lambda \varepsilon^\mu \ll 1$ olacak şekilde x^μ koordinatlarının keyfî fonksiyonları olmak üzere

$$\boxed{\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu} \tag{VII.2.7}$$

ler de aynı denklemin bir başka çözümü olacaklardır. Alan denklemlerinin bu özelliğine **â y â r i n v a r y a n s ı** adı verilir.

Şimdi (VII.2.5) koordinat dönüşümünü, $\varepsilon^\mu = \varepsilon^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ leri

$$\varepsilon^\mu = iB^\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda) - iB^{*\mu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \tag{VII.2.8}$$

şekline seçerek yaptığımızı düşünelim. Bu takdirde zayıf gravitasyon alanının metriği de

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \;\rightarrow\; g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu}$$

şekline dönüşmüş olacaktır. (VII.2.8) i (VII.2.7) ye vaz ettiğimizde

$$\begin{aligned} \gamma'_{\mu\nu} &= (A_{\mu\nu} + k_\mu B_\nu + k_\nu B_\mu) \exp(ik_\lambda x^\lambda) + (A_{\mu\nu} + k_\mu B_\nu + k_\nu B_\mu)^* \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \\ &= \mathscr{A}_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + \mathscr{A}^*_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \end{aligned} \tag{VII.2.9}$$

bulunur. Gravitasyon dalgası, bu yeni biçimiyle dahi, (VII.1.7) ile verilmiş olan koordinat şartını gerçeklemektedir. Buna binâen keyfî dört adet B_μ parametresinin varlığına rağmen $A_{\mu\nu}$ ler ile

$$\mathscr{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + k_\mu B_\nu + k_\nu B_\mu \tag{VII.2.10}$$

lerin aynı bir fiziksel hâle tekaabül etmekte olacakları anlaşılmaktadır. Bundan ötürü de (VII.2.3) ve (VII.2.4) ü gerçekleyen $A_{\mu\nu}$ lerden ancak $6 - 4 = 2$ si fizik yönünden anlamlıdır. Bu da zâten göstermek istediğimiz sonuçtur.

Şimdi de dalga yayılım vektörünü

$$k^1 = k^2 = 0 \quad , \quad k^3 = k^0 \equiv k > 0 \tag{VII.2.1)1}$$

seçmek sûretiyle $+z$ ler yönünde ilerleyen bir gravitasyon dalgası göz önüne alalım. (VII.2.11) verileri çerçevesi içinde (VII.2.4) aracılığıyla

$$A_{31} + A_{01} = A_{32} + A_{02} = 0$$

$$A_{33} + A_{03} = -A_{03} - A_{00} = \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22} + A_{33} - A_{00})$$

olması gerektiği tesbit edilir. Buradan hareketle de A_{i0} ve A_{22} yi diğer 6 adet A cinsinden belirlemek mümkün olur :

$$A_{01} = -A_{31}\ ,\ A_{02} = -A_{32}\ ,\ A_{03} = -\frac{1}{2}(A_{33} + A_{00})\ ,\ A_{22} = -A_{11} \qquad \text{(VII.2.12)}$$

$A_{\mu\nu}$ nün bu 6 bağımsız bileşeni (VII.2.5) gibi bir koordinat dönüşümünde (VII.2.10) ifâdeleri gibi değişeceklerdir :

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{A}_{11} &= A_{11} & \mathscr{A}_{12} &= A_{12} \\ \mathscr{A}_{13} &= A_{13} + kB_1 & \mathscr{A}_{23} &= A_{23} + kB_2 \\ \mathscr{A}_{33} &= A_{33} + 2kB_3 & \mathscr{A}_{00} &= A_{00} - 2kB_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.2.13)}$$

Şu hâlde bu bağımsız 6 bileşenden ancak ikisinin A_{11} ile A_{12} nin mutlak bir fiziksel anlamı haiz oldukları, yâni yapılan koordinat dönüşümünde şekil ve değerlerinin invaryant kaldığı görülmektedir. Nitekim

$$B_1 = -\frac{A_{13}}{k}, \qquad B_2 = -\frac{A_{23}}{k}, \qquad B_3 = -\frac{A_{33}}{2k}, \qquad B_0 = \frac{A_{00}}{2k} \qquad \text{(VII.2.14)}$$

seçmek sûretiyle $\mathscr{A}_{11}$, $\mathscr{A}_{12}$ ve $\mathscr{A}_{22} = -\mathscr{A}_{11}$ hâriç bütün $\mathscr{A}_{\mu\nu}$ bileşenlerini sıfır kılmak mümkündür. Buna göre $\mathscr{A}_{\mu\nu}$ matrisinin izinin sıfır olduğu ve, bir matrisin izinin tekil olmayan dönüşümlerde invaryant kalmasından ötürü de, $A_{\mu\nu}$ nün izinin de sıfır olduğu ortaya çıkmaktadır.

Ayrıca B parametrelerine (VII.2.14) değerleri verilmesiyle ortaya çıkan durum da, (VII.2.13) aracılığıyla, A_{11} ve A_{12} nin niçin mutlak bir anlamı haiz olduklarını daha belirgin bir biçimde sergilemektedir.

$A_{\mu\nu}$ tansörünün bileşenleri arasındaki farklılığı daha da iyi ortaya koyabilmek amacıyla göz önüne alınan koordinat sistemini z-ekseni etrafında bir θ açısı kadar bir rotasyona tâbî tutalım. Rotasyon tansörünü $\Theta_{\mu\nu}$ ile gösterirsek bunun bileşenleri

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1^1 &= \cos\theta & \Theta_1^2 &= \sin\theta \\ \Theta_2^1 &= -\sin\theta & \Theta_2^2 &= \cos\theta \\ \Theta_3^3 &= \Theta_0^0 = 1 & \text{diğer } \Theta_\nu^\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.2.15)}$$

dan ibâret olacak ve $\Theta_{\mu\nu}$ ye göre k_μ invaryant kalacağından (yâni $\Theta^{\nu}_{\mu} k_\nu = k_\mu$ olacağından) bu rotasyon $A_{\mu\nu}$ yü

$$\mathscr{A}_{\mu\nu} = \Theta^{\rho}_{\mu} \Theta^{\sigma}_{\nu} A_{\rho\sigma} \tag{VII.2.16}$$

ya dönüştürecektir. Kısaltmak üzere

$$A_{\pm} = A_{11} \mp i A_{12} = - A_{22} \mp i A_{12} \tag{VII.2.17}$$

$$B_{\pm} = A_{31} \mp i A_{32} = - A_{01} \pm i A_{02} \tag{VII.2.18}$$

vaz edilecek olursa mütekaabil dönüşmüş ifâdeleri

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{A}_{\pm} = \exp(\pm 2i\theta) A_{\pm} \\ &\mathscr{B}_{\pm} = \exp(\pm i\theta) B_{\pm} \\ &\mathscr{A}_{33} = A_{33}, \qquad \mathscr{A}_{00} = A_{00} \end{aligned}\right\} \tag{VII.2.19}$$

şekline sokmak mümkün olur.

Genellikle belirli bir eksen etrafında θ kadar bir rotasyona tâbî tutularak dönüştürülen bir düzlem dalga eğer

$$\Psi = e^{ih\theta} \psi \tag{VII.2.20}$$

şeklini alırsa bu takdirde söz konusu dalganın *helezonluk derecesi* h dır denir.

Böylelikle bir düzlem gravitasyon dalgasının, helezonluk derecesi ± 2 olan $A_{\pm}$ kısımları ile helezonluk derecesi ± 1 olan $B_{\pm}$ kısımlarına ve bir de helezonluk dereceleri sıfır olan A_{33} ve A_{00} kısımlarına ayrılabildiğini göstermiş olmaktayız. Ancak yukarıda da göstermiş olduğumuz gibi, helezonluk dereceleri 0 ve ± 1 olan kısımları uygun bir koordinat sistemi seçimiyle daima ortadan kaldırmak mümkündr. Bu itibarla *fizik açısından anlamlı bileşenler helezonluk dereceleri* ± 2 *olanlardır.* $A_{\pm}$ lere de **helezonluk genlikleri** adı verilir.

$A_{\mu\nu}$ tansörü ise **polârizasyon tansörü** diye isimlendirilmektedir. h helezonluk derecesi aynı zamanda dalganın **spin**ini de gösterir. Bu duruma göre gravitasyonun, spini 2 olan dalgalarla yayıldığı söylenebilir.

(VII.3) KÜRESEL SİMETRİLİ, ZAMANA BAĞLI GRAVİTASYON ALANLARI: *BİRKHOFF* TEOREMİ

§(VII.2) de küresel simetriyi haiz M eylemsizlik kütleli bir cismin dışındaki statik gravitasyon alanını incelemiştik. Şimdi ise böyle bir cismin dışındaki *zamana bağlı* gravitasyon alanını incelemek istiyoruz.

Bu itibarla $R_{\mu\nu} = 0$ şeklindeki alan denklemlerini çözmek üzere § (V.1) de, şimdi göz önüne aldığımız hâl için tesis ettiğimiz ds^2 ifâdesine dönelim:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}(dx^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - e^{\lambda(r,t)} dr^2. \tag{VII.3.1}$$

Buna dayanarak ve (VI.2.1) formülü aracılığıyla *RİCCİ* tansörünün bileşenleri kolaylıkla hesaplanır. $\partial f/\partial r = f'$ ve $\partial f/\partial x^0 = \dot{f}$ kısaltmalarını yaparak alan denklemleri için

$$0 = R_{00} = \frac{1}{2}\left\{\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{2\nu'}{r}\right)e^{-\lambda+\nu} - \left[\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})}{2}\right]\right\} \tag{VII.3.2}$$

$$0 = R_{11} = -\frac{1}{2}\left\{\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) + \left[\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})}{2}\right]e^{\lambda-\nu}\right\} \tag{VII.3.3}$$

$$0 = R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin\theta} = -(re^{-\lambda})' - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(ln\,|\sin\theta\,|) - re^{-\lambda}\left(\frac{\lambda' + \nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) +$$

$$+ 2e^{-\lambda} - \mathrm{cotg}^2\,\theta \tag{VII.3.4}$$

$$0 = R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r} \tag{VII.3.5}$$

$$0 = R_{12} = R_{13} = R_{23} = R_{20} = R_{30} \tag{VII.3.6}$$

ifâdeleri bulunur.

(VII.3.5) den $\lambda = \lambda(r)$, yâni λ nın zamana bağlı olmayıp yalnızca r nin fonksiyonu olduğu sonucu çıkmaktadır. $\dot{\lambda} = 0$ olması dolayısıyla (VII.3.2) ve (VII.3.3) denklemleri

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{2\nu'}{r} = 0$$

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} = 0$$

ifâdelerine indirgenir. Buradan ise

$$\lambda' + \nu' = 0$$

bulunur. $\lambda = \lambda(r)$ olduğu göz önünde tutulur ve $f(x^0)$ ile de bir integrasyon sâbiti gösterilirse (VII.3.7) den r ye göre integral alarak

$$-\lambda(r) = \nu(x^0, r) - f(x^0) \tag{VII.3.8}$$

olur. Ancak eğer x değişkeni yerine

$$\bar{x}^0 = \int_0^{x^0} \exp[-f(\tilde{x}^0)/2]\, d\tilde{x}^0$$

dönüşümü aracılığıyla ithâl edilen $\bar{x}^0$ değişkeni alınacak olursa (VII.3.8) deki integrasyon sâbiti sıfır olarak alınabilir. Buna göre (VII.3.8) ifâdesi de

$$-\lambda(r) = \nu(x^0, r)$$

şekline indirgenmiş olur. Fakat $\lambda = \lambda(r)$ şeklinde olduğundan bu fonksiyonel denklemden, ν nün

$$\nu = \nu(r)$$

şeklinde yalnızca r ye bağlı olması gerektiği ve dolayısıyla da

$$-\lambda(r) = \nu(r) \qquad \text{(VII.3.9)}$$

sonucu çıkar.

(VII.3.7) dolayısıyla (VII.3.4) den de

$$(re^{-\lambda})' = 1$$

ya da $-2M$ ile bir integrasyon sâbitini göstererek

$$e^{-\lambda(r)} = e^{(\nu)} = 1 - \frac{2M}{r} \qquad \text{(VII.3.10)}$$

olduğu sonucu çıkar. Problemin bundan sonraki kısmı §(VI.2) de dış *SCHWARZSCHİLD* çözümünü tesis ederken M nin tâyininde izlenen adımlara göre kolaylıkla çözülür ve neticede M kütleli, küresel simetriyi haiz bir cismin dışındaki zamana bağlı gravitasyon alanına tekaabül eden metriğin, aslında,

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(dx^0)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}}} \qquad \text{(VII.3.11)}$$

ile verilen, bileşenleri zamandan bağımsız dış *SCHWARZSCHİLD* metriğinden başka bir şey olmadığı belirlenmiş olur. Şu hâlde : **boş uzayda küresel simetriyi haiz bir gravitasyon alanı zorunlu olarak statiktir ve metriği de dış SCHWRAZSCHİLD metriğidir.**

BİRKHOFF (1884-1944) *teoremi* diye bilinen bu sonuca göre meselâ küresel simetriyi haiz bir gök cismi radyal yönde peryodik olarak ve **kütlesi değişmeden** genişleyip daralıyor olsa, cismin içindeki gravitasyon alanının zamana bağlı olarak değişmesine karşılık cismin dışına hiç bir gravitasyon radyasyonu vukuu bulmayacak demektir.

BİRKHOFF teoreminin daha genel ve matematik yönünden daha tam bir ispatı *W.B.BONNOR* tarafından verilmiştir [3].

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

VII.1. Zayıf gravitasyon alanları yaklaşıklığında alan denklemlerinin çözümü sonucu elde edilen metriği göz önünde tutarak, gravitasyon alanını doğuran etkenin m kütleli ve R yarıçaplı bir cisim olması hâlinde

1) bu gravitasyon alanındaki ışık hızının, r ile cisme olan radyal uzaklığı göstererek

$$V_c \cong c\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)$$

olduğunu gösteriniz;

2) bu metriğe göre dolanım başına perihel noktasının ilerlemesinin

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{4Gm}{c^2 a(1 - e^2)}$$

radyan; ve

3) ışığın söz konusu cismin yakınından geçerken mâruz kaldığı maksimum sapmanın mikdarının da

$$\Delta = |2\alpha| = \frac{4Gm}{c^2 R}$$

olacağını gösteriniz.

Bulduğunuz bu değerleri *SCHWARZSCHİLD* çözümününkilerle karşılaştırınız.

VII.2. Elektrodinamikte vektörel potansiyelin

$$\Box^2 A_\mu = 0$$

dalga denklemini ve

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0$$

LORENTZ âyâr şartını gerçeklediğini göz önünde tutarak düzlem elektromagnetik dalgaların spinlerinin 1 olduğunu gösteriniz.

REFERANSLAR

[1] W.K.H.PANOFSKY, M.PHİLLİPS, **Classical Electricity and Magnetism**; Addison-Wesley Publ. Comp., 2. baskı. s. 242-245; (1962).

[2] J.R.OPPENHEİMER, **Lectures on Electrodynamics**; Gordon and Breach; s. 27-32; (1970).

[3] S.WEİNBERG, **Gravitation and Cosmology-Principles and Applications of the General Theory of Relativity**; John Wiley and Sons, İnc.; New York, London, Sydney, Toronto; s. 255-260; (1972).

[4] H.OHANİAN, **Gravitation and Spacetime,** s. 140-181; W.W.Norton and Comp., İnc.; (1976).

[5] W.B.BONNOR, *On Birkhoff's Theorem*; **Recent Development in General Relativity**; Pergamon Press; Oxford, London, New York, Paris; s. 167-169; (1962).

VIII. BÖLÜM

Ad augusta per angusta...
Victor HUGO: Hernani (IV. perde)

GENEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİNİN DİĞER TESTLERİ

(VIII.I) GEODEZİKTEN SAPMA VE JİROSKOP TESTİ

GRT çerçevesi içinde önemli bir araştırma alanı da teori tarafından biri gravitasyon alanındaki bir jiroskopun dönme ekseninin doğrultusunun mâruz kalacağı değişimdir. Diğeri ise geçen bölümde hiç değilse teorik olarak var olduklarını tesbit ettiğimiz gravitasyon dalgalarının somut bir biçimde deteksiyonudur.

Bu paragrafta incelemek istediğimiz gravitasyon alanının bir jiroskopun dönme ekseni üzerindeki etkisi daha 1919 da *J.A. SCHOUTEN* tarafından öngörülmüş [1] ve ilk defa da Arzın kendisi için 1921 de *A.D.FOKKER* tarafından hesaplanmıştır [2]. *FOKKER*, bir jiroskop gibi kabul edilebilecek olan Arzın dönme ekseninin Güneşin gravitasyon alanında yıllık $0'',019$ lik fazladan bir presesyona tâbî olması gerektiğini ve bunun, mûtad presesyonun aksine, eğer Arz mükemmel bir küre olsaydı bile gene de mevcûd olmağa devam edeceğini göstermiştir.

Arzın kendi dönme ekseni etrafındaki hareketiyle sürüklenen bir jiroskopun davranışının teorisi ise ilk defa 1960 da *L.I.SCHİFF* tarafından yapılmıştır [3]. Klâsik *NEWTON* mekaniğine göre böyle bir jiroskopun kendi dönme ekseninin yönünün, sürtünmeden ve yapısal simetrisizliklerden sarf-ı nazar edilirse, sâbit (!) yıldızların belirledikleri eylemsizlik sisteminde invaryant kalması gerekmektedir. Hâlbuki Genel ve Özel Rölâtivite Teorilerine göre jiroskopun dönme ekseni üç etkiden ötürü bir presesyon arz edecektir. Bu etkiler kısaca şöyle özetlenebilirler :

a) Jiroskopun Arzın kendi ekseni etrafındaki rotasyonuyla sürüklenmesi esnâsında ekseninin yönünün, bir vektörün bir gravitasyon alanındaki paralel ötelenmesi kuralına uygun olarak bir davranışı bulunacaktır. Böyle bir gravitasyon alanında *RİEMANN-CHRİSTOFFEL* tansörünün sıfırdan farklı olması sebebiyle (IV. 2.34) ifâdesine binâen, Arz kendi ekseni etrafında tam bir devir yaptığı zaman jiroskopun dönme ekseninin yönü bir devir önceki yönüyle çakışık olmayacaktır. Bu etkiye **geodezikten sapma etkisi** ya da **geodeziksel presesyon olayı** adı verilmektedir.

b) Rotasyon hâlindeki bir kütlenin yakınında her eylemsizlik sistemi, kütlenin haiz olduğu açısal hızın küçük bir kesri kadar bir hızla sürüklenir. Buna **LENSE-THİRRİNG etkisi** ya da presesyonu denir [4, 5].

c) Gravitasyon alanından sarf-ı nazar edilse bile bu sefer de **ÖRT'nin** sonuçlarına göre Arz üzerindeki bir jiroskopun dönme ekseni **THOMAS presesyonuna** [6, 7] mâruz kalacaktır.

Arz üzerinde ekvatorda bulunan ve dönme ekseni de Arzınkine dik olan bir jiroskop için üç olayın herbirinin yıllık etkilerinin yaklaşık olarak 0",4 lik aynı bir değere eşit olduğu hesaplanmıştır. Arz etrafında dolanan yapay bir uyduya yüklenmiş bir jiroskop göz önüne alındığında ilk iki olayın etkileri çok daha küçük olmakta; üstelik böyle bir uydudaki jiroskopun dönme ekseni *THOMAS* presesyonuna tâbî olmaktadır [8].

Şimdi geodeziksel presesyon olayını incelemek üzere Arzın etrafında dairesel bir yörünge üzerinde dolanan bir jiroskop göz önüne alacağız. Bu takdirde m ile Arzın kütlesini göstererek ve Arzın cıvarındaki gravitasyon alanının da dış *SCHWARZSCHİLD* metriği ile temsil edileceğini göz önünde tutarak (VI.4.8) ve (VI.4.9) denklemleri

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{H}{r^2} \qquad (H = \text{sâbit}) \qquad \text{(VIII.1.1)}$$

$$\frac{dx^0}{ds} = ke^{-\nu} = \frac{k}{1 - \dfrac{2Gm}{c^2 r}} \qquad (k = \text{sâbit}) \qquad \text{(VIII.1.2)}$$

şekline girerler. Ayrıca yapay uydunun yörüngesinin dairesel olması sebebiyle $dr/ds \equiv dr/d\varphi \equiv 0$ olacağından (VI.4.10) ve (VI.4.14) denklemleri de

$$\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \frac{H^2}{r^2} = k^2 - 1 + \frac{2Gm}{c^2 r} \qquad \text{(VIII.1.3)}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{Gm}{c^2 H^2} + \frac{3Gm}{c^2} \frac{1}{r^2} \qquad \text{(VIII.1.4)}$$

den ibâret olurlar. Bu son iki ifâdeden H ve k nın değerleri kolaylıkla tesbit edilir ve

$$H=\sqrt{\frac{\frac{Gmr}{c^2}}{1-\frac{3Gm}{c^2r}}}\,, \qquad k=\frac{1-\frac{2Gm}{c^2r}}{\sqrt{1-\frac{3Gm}{c^2r}}} \tag{VIII.1.5}$$

bulunur. Buna göre uydunun ve dolayısıyla da jiroskopun Arz etrafında x^0 koordinatına göre Ω açısal hızı

$$\Omega=\frac{d\varphi}{dx^0}=\frac{d\varphi}{ds}\,\frac{ds}{dx^0}=\sqrt{\frac{Gm}{c^2r^3}} \tag{VIII.1.6}$$

olur. Uydunun yörünge düzleminin $\theta=\pi/2$ ile belirlendiğini varsayarsak, haiz olduğu dörtlü hız vektörünün de

$$U^\mu=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3Gm}{c^2r}}}(1,\ 0,\ 0,\ \Omega) \tag{VIII.1.7}$$

dan ibâret olacağı kolaylıkla tesbit edilir. Öte yandan bir geodezik eğrisi üzerinde paralel ötelenmeye tâbî N^σ gibi bir vektörün (IV.2.18) e binâen

$$\frac{dN^\sigma}{ds}+\Gamma^\sigma_{\lambda\nu}N^\lambda\frac{dx^\nu}{ds}=0 \tag{VIII.1.8}$$

denklemini gerçekleyeceğini bilmekteyiz. Şimdi uydunun taşıdığı jiroskopun dönme eksenini N^σ vektörüyle gösterelim ve bu vektörün uydunun hızına dik bir şekilde yönlenmiş olduğu hâli yâni

$$g_{\mu\nu}N^\mu U^\nu=g_{\mu\nu}N^\mu\frac{dx^\nu}{ds}=0 \tag{VIII.1.9}$$

hâlini göz önüne alalım.

(VIII.1.8) denklemleri açıkça yazılırlarsa, $\mu=Gm/c^2$ vaz ederek,

$$\frac{dN^0}{ds}+\frac{\mu}{r^2}\,\frac{1}{1-\frac{2\mu}{r}}\,N^1U^0=0 \tag{VIII.1.10}$$

$$\frac{dN^1}{ds}+\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)\frac{\mu c^2}{r^2}\,N^0U^0-\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)r\,N^3\,U^3=0 \tag{VIII.1.11}$$

$$\frac{dN^2}{ds}=0 \tag{VIII.1.12}$$

$$\frac{dN^3}{ds}+\frac{N^1U^3}{r}=0 \tag{VIII.1.13}$$

olur. Burada (VIII.1.12) ifâdesi hemen integre edilebilir ve $N^2=$ *sâbit* bulunur.

Öte yandan (VIII.1.9) ile verilmiş olan jiroskopun ekseninin, yörüngesi üzerinde haiz olduğu hız vektörüne dik olması şartından

$$N^0 = \frac{\Omega r^2}{\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)} N^3 \qquad \text{(VIII.1.14)}$$

olduğu bulunur. (VIII.1.14) ifâdesi (VIII.1.10) ve (VIII.1.13) e yerleştirildiğinde bu son iki ifâdenin özdeş oldukları gözlenir; aynı ifâdeyi (VIII.1.11) yerleştirmekle de

$$\frac{dN^1}{ds} = \frac{\Omega r N^3}{U^0} \qquad \text{(VIII.1.15)}$$

bulunur. (VIII.1.13) ifâdesi ise, (VIII.1.7) ye binâen $U^3 = \Omega U^0$ olduğu göz önünde tutularak yeniden yazılırsa

$$\frac{d}{ds}(rN^3) + \Omega U^0 N^1 = 0 \qquad \text{(VIII.1.16)}$$

olur. (VIII.1.15) ve (VIII.1.16) denklemlerinin çözümünün

$$U^0 N^1 = \sin \Omega s$$

$$rN^3 = \cos \Omega s$$

ile verildiği kolaylıkla tahkik edilebilir. Bu çözüm N^1 ve N^3 ün N^2 nin etrafında $\Omega = d\varphi/dx^0$ açısal hızıyla bir presesyona mâruz kaldıklarına işâret etmektedir.

Öte yandan uydu ve dolayısıyla taşıdığı jiroskop $U^0\Omega$ ya eşit bir açısal hızla devretmektedirler. Bu itibarla jiroskopun eylemsizlik eksenleri de, pozitif φ ler yönünde, $(U^0\Omega - \Omega)$ açısal hızıyla sonsuzdaki eylemsizlik eksenlerine nazaran bir rotasyona tâbî olacaklardır. Buna göre jiroskopun eksenlerinin dönme peryodu eğer T ile gösterilirse açısal hızın $\Omega = 2\pi/T$ olmasına karşılık uydunun açısal hızı: $U^0\Omega > \Omega$ olduğundan, aynı T zamanında uydunun eksenlerinin süpüreceği açı da 2π den büyük olacaktır. Aradaki açı farkı, radyan cinsinden, $\delta\varphi$ ile gösterilirse ve $\delta\varphi \ll 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{T} = \frac{U^0\Omega}{2\pi + \delta\varphi} \cong \frac{U^0\Omega}{2\pi}\left(1 - \frac{\delta\varphi}{2\pi}\right)$$

olmak gerekir. Buradan da

$$\delta\varphi = 2\pi\left(1 - \frac{1}{U^0}\right) = 2\pi\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3\mu}{r}}\right) \cong \frac{3\pi\mu}{r} = \frac{3\pi Gm}{c^2 r} \qquad \text{(VIII.1.17)}$$

bulunur.

rel alanların etkilerine bağlı) düpedüz ârızî bir raslantı olabilir. Bu ârızî raslantıları probabilite teorisi aracılığıyla ve telekomünikasyon mühendisliğinin standart bazı yöntemlerini uygulayarak bir bilgisayar eleyebilmektedir [10].

WEBER 1969 dan itibâren her iki detektöründe de yüksek genlikli pulslar arasında o kadar çok koensidans olayı gözlemiş bulunmaktadır ki bunların ârızî raslantılar olmaları ihtimâli olağanüstü küçüktür. Bunların gravitasyon dalgalarından başka etkenlerin eseri olabilecekleri ihtimâlini sınamak üzere tâbî tutuldukları sayısız testlerin sonucu, bu koensidansların kökeninde o zamana kadar bilinen etkenlerin hiç birinin bulunmadığına hükmedilmesine yol açtığından *WEBER*, böylelikle gravitasyon dalgalarının etkilerinin ilk defa gözlenmiş olduğuna hükmetmiştir. Ancak, bu etkiyi doğurduğu kabul edilen gravitasyon dalgalarını üreten kökenin eksiksiz idantifikasyonu ayrı bir sorun teşkil etmektedir. Gravitasyon dalgaları detektörünün teorisi (*bk.*, meselâ, [11 - 14]), böyle bir detektörün farklı doğrultulardan gelen ve farklı polârizasyonu haiz gravitasyon dalgaları için farklı duyarlılığı haiz olacağını ve bu duyarlılığın antene dik olarak gelen dalgalar için maksimuma erişeceğini öngörmektedir. Eğer θ dalganın geliş doğrultusu ile antenin normali arasındaki açıyı gösterirse duyarlılığın θ ya bağlılığının $\cos^2\theta$ ile orantılı olacağı gösterilmiştir. Buna göre antenin duyarlılığı her ne kadar gelen dalganın doğrultusuna çok keskin bir bağlılık arz etmemekteyse de yeteri kadar uzun bir süre sürekli gözlem yapmak sûretiyle bu özellikten yararlanarak gravitasyon dalgalarının kaynağının yeri hakkında bir bilgi elde etmek mümkün olabilecektir. Eğer bu kaynak yaygınlığı bakımından sınırlı ve de Güneş sisteminin dışında bulunan bir kaynaksa bu takdirde aynı doğrultuda yönlendirilmiş detektörler tarafından kaydedilen sinyallerin şiddetlerinin **yarım yıldız günlük bir peryotla** değişmesi beklenecektir. Nitekim her biri sürekli olarak 6 ay sürmüş olan dört bağımsız gözlem dizisi sonuçları gerçekten de koensidanslı pulsların şiddetlerinin yarım yıldız günlük bir peryotla değişmekte olduklarını ve bu değişimin Galaksimizin merkezindeki bir muhtemel kaynakla tutarlı olduğu ortaya konmuş bulunmaktadır.

Bu pulslar eğer gerçekten de gravitasyon dalgalarının sebep olduğu pulslar ise bu takdirde $\Delta f = 0{,}1$ *Hz* lik bir frekans bandı içinde, gelen gravitasyon radyasyonunun ortalama akısının 0,1 $erg/cm^2.\,san$ mertebesinde olması gerekeceği de tesbit edilmiştir. Öte yandan Galaksimizin merkezinin Arzdan yaklaşık olarak $2{,}5.10^{22}$ *cm* uzakta olduğu göz önünde tutulacak olursa söz konusu frekans aralığında gözlenen bu 0,1 $erg/cm^2.\,san$ lik radyasyon akısı, Galaksimizin yaklaşık olarak

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\Delta f=0{,}1} = 8.10^{44}\, erg/san = 0{,}013\, \frac{M_{\odot}c^2}{\text{yıl}}$$

lık bir enerji kaybına uğradığına delâlet etmektedir. Bu ise yaklaşık olarak

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{top} \cong \frac{1000\, M_{\odot} c^2}{\text{yıl}}$$

lık bir toplam enerji kaybına delâlet eder. Buradan, ve Galaksimizin kütlesinin 10^{11} $M_{\odot}$ mertebesinde olduğu göz önünde tutularak bütün Galaksinin 10^8 yılda tükenmesi gerektiği sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, ve eğer gözlenenler yalnızca gravitasyon dalgalarının etkisi ise, *WEBER* ya Galaksinin gravitasyon radyasyonunun en büyük kısmının neşredildiği frekansın üzerine tesâdüfen düşmüş ya da akıl almaz derecede kudretli bir yeni enerji kaynağı keşfetmiş bulunmaktadır.

Böyle bir enerji kaynağının tümüyle termonükleer kökenli olamıyacağı âşikârdır; zirâ termonükleer enerji sükûnet kütlesinin ancak %0,1 lik bir etkenlikle enerjiye dönüşmesini içermektedir. Öte yandan *REES, RUFFİNİ* ve *WHEELER* gravitasyon dalgalarının üremesine köken olabilecek: birbiri etrafında dönen çift yıldız sistemleri, kendi ekseni etrafında dönen nötron yıldızları, atar yıldızlar **(pulsar'** lar), bir karaçukurun etrafında dolanan bir gök cismi, *SCHWARZSCHİLD* tipi bir karaçukura radyal doğrultuda düşen bir gök cismi gibi kozmik bazı olayları göz önüne alarak bunlardan ötürü üreyen gravitasyon radyasyonunun 1000 *pc* ve 10 000 *pc* uzaklıktaki akısını çeşitli parametre değerleri için hesaplamışlardır ([13], s.136-141). Bu hesaplar *WEBER*'in detekte etmiş olduğu sinyallerin, bazı hâllerde, yukarıda sıralanmış olan kozmik olaylardan bazılarında yayınlanabilecek gravitasyon radyasyonuyla tutarlı olduklarını göstermiştir.

Ayrıca *HAWKİNG*, açısal momentumu olmayan fakat aynı *M* kütlesine sâhip iki gök cisminden birinin gravitasyon çöküntüsü safhasında iken diğerini yakalaması hâlinde açığa çıkacak olan gravitasyon radyasyonunun üst sınırının $(2-\sqrt{2})M$ olacağını yâni bu hâlde kütlenin enerjiye dönüşmesi etkenliğinin %60 civarında olacağını göstermiştir [15]. Bu, termonükleer kökenli dönüşümünkinden 600 misli daha yüksek bir etkenlik demektir.

Öte yandan *SCİAMA, FİELD* ve *REES* ister gravitasyon radyasyonuyla olsun isterse başka bir mekanizma aracılığıyla olsun sükûnet enerjisinden kaybın Galaksinin genişlemesine yol açacağına işâret ederek hidrojenin 21 *cm* lik çizgisi üzerine yapılan çalışmaların böyle bir genişlemeğe delâlet edebilecek sonuçlar vermiş olduğunu kaydetmişler ve Güneşin yakınındaki yıldızların hareketlerinden Galaksinin son 10^8 senedeki gravitasyon radyasyonu neşri için üst sınırın ancak 200 $M_{\odot}c^2$ mertebesinde olabileceği sonucuna varmışlardır [16]. Bu sonuçla *WEBER*'inki ararasındaki uyuşmazlık bu enerji meselesi aydınlığa kavuşuncaya kadar gravitasyon dalgaları hakkındaki bilgilerimizin tam sayılmaması gerektiğini telkin etmektedir.

Gravitasyon dalgalarının deteksiyonu için *WEBER*'in grubundan başka hâlen A.B.D. nde 3 ayrı grup, Moskova'da bir, Roma Üniversitesinde bir, Batı Almanya'da *MAX PLANCK Enstitüsünde* bir ve İngilterede başka bir grup farklı deteksiyon düzenleri gerçekleştirerek gözlemler yapmak üzere çalışmaktadırlar. Şimdilik yapılacak en iyi şey bütün bu grupların, yapacakları gözlemler ve ölçümler sonunda, gravitasyon dalgalarının gerçekten de gözlenmiş olduğu hususunda bir kanaat birliğine varmalarını beklemekten ibârettir.

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

VIII.1. M kütleli ve R yarıçaplı küresel bir merkezî cismin etrafında r yarıçaplı dairesel bir yörüngeyi haiz olarak dolanan bir uydu göz önüne alınıyor. Bu takdirde uydunun zamanının merkezî cismin zamanına oranının, $\mu = GM/c^2$ olmak üzere, ilk yaklaşıklıkta

$$\frac{ds}{ds_0} = 1 - \frac{3\mu}{2r} + \frac{\mu}{R}$$

ile verileceğini gösteriniz.

Merkezî cisim Arz ise ve uydu da Arz yüzeyini yalayarak dolanıyorsa bu oranın değeri ne olur? Bu oran ne zaman 1 e eşit olur?

REFERANSLAR

[1] J.A.SCHOUTEN, *Proc. Amst. Ac.* **21**, 533, (1919).

[2] A.D.FOKKER, *Proc.Amst.Ac.*, **23**, 729, (1921).

[3] L.İ.SCHİFF, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **46**, s. 871, (1960)

[4] H.THİRRİNG, J.LENSE, *Phys.Z.* **19**, 156, (1918).

[5] H.P. ROBERTSON, T.W. NOONAN, **Relativity and Cosmology**; W.B. Saunders Comp.; Philadelphia, London, Toronto; 288-289; (1969).

[6] L.W.THOMAS, *Phil. Mag.*, **3**, 1, (1927).

[7] S. WEİNBERG, **Gravitation and Cosmology-Principles and Applications of the General Theory of Relativity**; John Wiley and Sons. İnc.: New York, London, Sydney, Toronto; s. 121-124; (1972).

[8] H.Y.CHİU, W.F.HOFFMANN (Ed.), **Gravitation and Relativity**; W.A. Benjamin, İnc.; New York, Asmterdam; s. XXVII; (1964).

[9] C.W.F. EWERİTT, J.A.LİPA, W.M.FAİRBANK, P. W. WORDEN Jr., *The Gyroscope Experiment*; **Experimental Gravitation** (B.BERTOTTİ, Ed.); Academic Press; New York, London; s. 331-402; (1974).

[10] J. WEBER, *Gravitational Radiation Experiments and Instrumentation*; **Experimental Gravitation** (B.BERTOTTİ, Ed.); s. 263-279; (1974).

[11] J. WEBER, **General Relativity and Gravitational Waves**; İnterscience, New York; (1961).

[12] S. WEİNBERG, **a.g.e.,** s. 259-295.

[13] M. REES, R. RUFFİNİ, J.A. WHEELER, **Black Holes, Gravitational Waves and Cosmology**; Gordon and Breach; New York, London, Paris; (1974).

[14] C.W. MİSNER, K.S. THORNE, J.A. WHEELER, **Gravitation**; W.H.Freeman and Comp., San Fransisco; s. 1004-1044; (1973).

[15] S.W. HAWKİNG, *Phys. Rev. Letters*, **26**, s.1344-1346, (1971).

[16] D.W. SCİAMA, G.B.FİELD, M.J.REES, *Phys. Rev. Letters*, **23**, s. 1514, (1969).

IX. BÖLÜM

Non nova, sed nove.
Lâtin atasözü

VARYASYON FORMALİZMİ VE KORUNUM KAANUNLARI

(IX.1) GENEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİNİN ALAN DENKLEMLERİNİN BİR VARYASYON İLKESİNDEN ÇIKARTILMASI

Bu paragrafta **GRT'**nin (V.5.15) ile verilmiş olan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

şeklindeki alan denklemlerinin, biri yalnızca geometriye bağlı

$$S_g = \frac{1}{c} \int_{\Omega} L_g \sqrt{-g}\, d^4x = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} R \sqrt{-g}\, d^4x \tag{IX.1.1}$$

şeklindeki bir S_g aksiyonu ile, diğeri de

$$L_a = L_a(g^{\mu\nu}, \partial_\alpha g^{\mu\nu})$$

şeklinde yalnızca metrik tansörün bileşenleri ile bunların birinci mertebeden türevlerine bağlı olan skaler bir *LAGRANGE* yoğunluğu aracılığıyla tanımlanan

$$S_a = \frac{1}{c} \int_{\Omega} L_a \sqrt{-g}\, d^4x \tag{IX.1.2}$$

şeklindeki bir S_a aksiyonunun toplamının stasyoner olması şartının sonucu olarak da, yâni

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_a = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

olarak da yorumlanabileceklerini göstermek istiyoruz.

Gerek (IX.1.1) deki gerekse (IX.1.2) deki integraller dört boyutlu d^4x hacım elemanı üzerinden alınmış dört katlı integrallerdir. $g_{\mu\nu}$ lerin kendilerinin ve türevlerinin varyasyonlarının da Ω içinde keyfî fakat Ω yı sınırlandıran Σ hiperyüzeyi üzerinde sıfır olduklarını kabul edeceğiz. Buna göre $S = S_g + S_a$ aksiyonunun stasyoner olması

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_a = \left(\frac{c^3}{16\pi G}\right)\delta \int_{\Omega} R\sqrt{-g}\, d^4x + \delta S_a = 0 \qquad \text{(IX.1.3)}$$

demek olacaktır. Önce δS_g varyasyonunu göz önüne alalım; $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ olduğundan

$$\delta S_g = \left(\frac{c^3}{16\pi G}\right)\delta \int_{\Omega} R\sqrt{-g}\, d^4x$$

$$= \frac{c^3}{16\pi G}\int_{\Omega} [\delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + R_{\mu\nu}\,\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})]\, d^4x \qquad \text{(IX.1.4)}$$

yazılabilir.

Bu ifâdede ortaya çıkan $R_{\mu\nu}$ ve $\sqrt{-g}$ üzerindeki varyasyonları ayrı ayrı hesaplamak üzere önce (IV.2.19) a göre $R^{\mu}_{\lambda\nu\sigma}$ *RİEMANN-CHRİSTOFFEL* eğrilik tansörünün ifâdesinin

$$R^{\mu}_{\lambda\nu\sigma} = -\partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} + \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\tau\sigma} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\mu}_{\tau\nu}$$

olması dolayısıyla $\delta R^{\mu}_{\lambda\nu\sigma}$ nın da

$$\delta R^{\mu}_{\lambda\nu\sigma} = -\partial_\sigma(\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}) + \partial_\nu(\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}) - \delta\Gamma^{\tau}_{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\tau\sigma} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\tau\sigma} +$$
$$+ \delta\Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\mu}_{\tau\nu} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\mu}_{\tau\nu} \qquad \text{(IX.1.5)}$$

ile verileceğine dikkati çekelim. Ayrıca (IV.1.11) dolayısıyla *CHRİSTOFFEL* sembollerinin tansör vasfına sâhip olmadıklarını biliyoruz. Ancak eğer Γ ların $\Gamma + \delta\Gamma$ şeklindeki artışlarının bir koordinat dönüşümünde nasıl değiştiklerini araştırırsak, (IV.1.11) aracılığıyla, bu dönüşüm kuralının

$$\overline{\delta\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta}\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\mu}$$

şeklinde 3. mertebeden bir tansörün dönüşüm kuralını yansıtmakta olduğu tesbit edilir. Şu hâlde Γ ların tansör olmamalarına karşılık $\delta\Gamma$ ların tansör oldukları ve dolayısıyla da bunların, meselâ

$$\nabla_\sigma(\delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu}) = \partial_\sigma(\delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu}) + \Gamma^\mu_{\tau\sigma}\,\delta\Gamma^\tau_{\lambda\nu} - \Gamma^\tau_{\sigma\lambda}\,\delta\Gamma^\mu_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\sigma\nu}\,\delta\Gamma^\mu_{\tau\lambda} \qquad \text{(IX.1.6)}$$

şeklindeki mutlak türevlerinin bir anlamı olduğu anlaşılmış olur. (IX.1.6) gibi ifâdelerden $\partial_\sigma(\delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu})$ şeklindeki terimlerin değerleri çekilip de (IX.1.5) e vaz edilirse, sonunda

$$\delta R^\mu_{\ \lambda\nu\sigma} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}) \qquad \text{(IX.1.7)}$$

bulunur. Bu ifâdede μ ile σ indisleri üzerinden büzülme yapıp geri kalan indisleri de yeniden isimlendirerek

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu(\delta\Gamma^\tau_{\mu\tau}) - \nabla_\tau(\delta\Gamma^\tau_{\mu\nu}) \qquad \text{(IX.1.8)}$$

şeklindeki *PALATİNİ denklemi* elde edilmiş olur [1].

Şimdi $g = \det g_{\mu\nu}$ üzerindeki varyasyonu hesaplayalım:

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\,\delta g_{\mu\nu}$$

dür. Ancak öte yandan da bir kare matrisin determinantının değeri, $\Delta^{\mu\nu}$ ile μ-nüncü satır ν-nüncü sütûna tekaabül eden elemanın kofaktörünü göstermek üzere, bilindiği gibi

$$g = \sum_\mu \Delta^{\mu\nu}\,g_{\mu\nu}$$

şeklinde bir açılım olarak yazılabilmektedir. Buradan

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu}$$

ve kofaktörün tanımı dolayısıyla da

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}$$

ya da $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \equiv 4$ özdeşliğinden $\delta g_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \equiv 0$ yazılabilmesi dolayısıyla

$$\delta g = g\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} = -\,g\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \qquad \text{(IX.1.9)}$$

ve buradan da

$$\delta\,(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,g_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta} \qquad \text{(IX.1.9')}$$

olur. (IX.1.8) ve (IX.1.9) sonuçlarına göre (IX.1.4) ifâdesi artık

$$\delta S_g = \left(\frac{c^3}{16\pi G}\right)\left\{\int_\Omega [\nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\tau_{\mu\tau}) - \nabla_\tau(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\tau_{\mu\nu})]\sqrt{-g}\,d^4x\right.$$

$$\left. + \int_\Omega \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\,d^4x\right\}$$

$$= \left(\frac{c^3}{16\pi G}\right)\left\{\int_\Omega \nabla_\sigma(g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\tau_{\mu\tau} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu})\sqrt{-g}\,d^4x\right.$$

$$\left. + \int_\Omega \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\,d^4x\right\} \qquad \text{(IX.1.10)}$$

şekline girmiş olur. Buradaki $g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\tau_{\mu\tau} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ büyüklüğü kontravaryant bir vektördür. Buna (IV.2.14) formülünü uygulayarak (IX.1.10) un sağ yanındaki ilk integralin nihaî şekli için

$$I = \int_\Omega \nabla_\sigma(g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\tau_{\mu\tau} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu})\sqrt{-g}\,d^4x$$

$$= \int_\Omega \partial_\sigma([g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\tau_{\mu\tau} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}]\sqrt{-g})\,d^4x \qquad \text{(IX.1.11)}$$

yazılır. Bu son integrant ise bir vektörün diverjansıdır. *GAUSS* formülü aracılığıyla, Ω hacmı üzerinden alınan bu integrali Ω yı sınırlandıran Σ hiperyüzeyi üzerinden alınan üç katlı bir integrale dönüştürmek mümkündür. Ancak, metrik tansörün gerek bileşenlerinin gerekse bu bileşenlerin türevlerinin varyasyonlarının Σ hiperyüzeyi üzerinde sıfır oldukları kabul edilmiş olduğundan $I = 0$ olacağı da anlaşılmış olur. Buna göre de δS_g varyasyonu

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G}\int_\Omega \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\,d^4x \qquad \text{(IX.1.12)}$$

den ibâret olur.

Şimdi S_a aksiyonunun varyasyonunu inceleyelim :

$$\delta S_a = \frac{1}{c}\int_\Omega \left\{\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial\left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\delta\left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\right\}d^4x \qquad \text{(IX.1.13)}$$

dir. Bu ifâdedeki integrantın ikinci terimi

$$\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\delta g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\,\delta\left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\partial g^{\mu\nu}\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right\}-$$

$$-\,\delta g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right\}\qquad\text{(IX.1.14)}$$

şeklinde de ifâde edilebilir. (IX.1.14) ün sağındaki ilk terim bir vektörün diverjansı olduğundan (IX.1.13) de buna tekaabül eden integral gene *GAUSS* formülü aracılığıyla, Σ hiperyüzeyi üzerinden alınmış bir integrale dönüştürülebilir. Ancak gerek $g^{\mu\nu}$ lerin gerekse $\partial_\alpha g^{\mu\nu}$ lerin Σ üzerinde sıfır olmaları dolayısıyla bu integral de sıfır olacaktır. Buna binâen de δS_a varyasyonu

$$\delta S_a=\frac{1}{c}\int_\Omega\left[\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right]\delta g^{\mu\nu}\,d^4x\qquad\text{(IX.1.15)}$$

den ibâret olmuş olur. Buradaki integrantta köşeli parantez içindeki ifâdenin ikinci mertebeden bir tansör olduğu âşikârdır. Bu itibarla biz de, $T_{\mu\nu}$ ile ikinci mertebeden bir tansörü göstermek üzere,

$$\left[\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial(L_a\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right]=\frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\qquad\text{(IX.1.16)}$$

vaz edeceğiz. Bu takdirde (IX.1.16), (IX.1.15), (IX.1.12) ve (IX.1.3) ü göz önünde tutarak S aksiyonunun stasyoner olması için

$$\delta S=\int_\Omega\left\{\frac{c^3}{16\pi G}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]+\frac{1}{2c}T_{\mu\nu}\right\}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\,d^4x=0$$

olması gerektiği bulunur. Buradan da, $\delta g^{\mu\nu}$ lerin $g^{\mu\nu}$ lerin Ω içindeki keyfî değişimlerini temsil etmeleri özelliği dolayısıyla,

$$\frac{c^3}{16\pi G}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]+\frac{1}{2c}T_{\mu\nu}=0$$

olması gerektiği ya da

$$\boxed{R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}\qquad\text{(IX.1.17)}$$

ifâdesi bulunur ki bu da (V.2.15) ile verilmiş olan *EİNSTEİN* alan denklemlerinin aynıdır.

S_g aksiyonunun varyasyonunu hesaplarken dikkat, eğer, buna ilişkin L_g *LAGRANGE* yoğunluğu üzerinde toplanırsa S_a aksiyonunun varyasyonunu hesaplarken izlemiş olduğumuz yöntem aracılığıyla, ve (IX.1.12) yi de göz önünde tutarak,

$$\delta S_g = \frac{1}{c} \int_\Omega \left[\frac{\partial (L_g \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (L_g \sqrt{-g})}{\partial \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\delta x^\alpha} \right)} \right] \delta g^{\mu\nu} \, d^4x$$

$$= \frac{c^3}{16\pi G} \int_\Omega \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \sqrt{-g} \, \delta g^{\mu\nu} \, d^4x$$

ya da

$$\frac{\partial (L_g \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (L_g \sqrt{-g})}{\partial \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)} = \frac{c^4}{16\pi G} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \sqrt{-g} \qquad \text{(IX.1.18)}$$

olduğu sonucuna varılır.

Böylelikle Genel Rölâtivite Teorisinin *LAGRANGE* formalizmine göre formülâsyonunu takdim etmiş olmaktayız. Teorinin bir de *HAMİLTON* formalizmine göre formüle edilmesi, gravitasyon alanlarının kuvantalaştırılması problemi yönünden önem arz eder. Ancak bu tür bir formülâsyon, bir takım çetrefil kavramsal ve formel güçlükleri içerdiğinden, derslerimizin kapsamı dışında kalmaktadır [2].

(IX.2) GRAVİTASYON ALANININ ENERJİ-İMPULS DÜZMECE-TANSÖRÜ

Özel Rölâtivite Teorisinde enerji-impuls tansörünün diverjansı, bilindiği gibi

$$\partial_\nu T^\nu_\mu = 0 \qquad \text{(IX.2.1)}$$

bağıntısını gerçeklemekte olup enerji ve impulsun korunum kaanunlarını elde etmek için de (IX.2.1) i üç uzay koordinatı üzerinden yâni âdî anlamdaki V hacmı üzerinden integre etmek yeterlidir. Buna göre

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_V T^0_\mu \, d^3x = - \int_V \left(\frac{\partial T^1_\mu}{\partial x^1} + \frac{\partial T^2_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial T^3_\mu}{\partial x^3} \right) d^3x$$

ya da sağdaki integrali de *GAUSS* formülü aracılığıyla V yi sınırlandıran Σ yüzeyi üzerinden alınmış iki katlı bir integrale dönüştürmek sûretiyle,

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_V T^0_\mu \, d^3x = - \int_V \left(\frac{\partial T^1_\mu}{\partial x^1} + \frac{\partial T^2_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial T^3_\mu}{\partial x^3} \right) d^3x = - \int_\Sigma {}_i T^i_\mu \, d\Sigma_i \qquad \text{(IX.2.2)}$$

olur. Buna göre belirli bir V hacmındaki enerji değişimi bunu sınırlandıran Σ yüzeyinden V ye giren enerji-impuls akısına bağlanmaktadır.

Ancak durum, metriğin *MİNKOWSKİ* metriğinden farklı olduğu hâllerde tamâmen değişiktir. Bu takdirde enerji-impuls tansörü, (IX.2.1) yerine, artık

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0 \tag{IX.2.3}$$

bağıntısını gerçekler. İki indisine göre büzülme işlemine tâbî tutulmuş olan *CHRİSTOFFEL* sembollerinin (IV.2.11) ile verilen ifâdesi aracılığıyla, ikinci mertebeden T_μ^ν gibi simetrik bir tansörün diverjansının

$$\boxed{\nabla_\nu T_\mu^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\nu(T_\mu^\nu\sqrt{-g}) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\,T^{\alpha\beta}} \tag{IX.2.4}$$

şeklinde yazılabileceği kolaylıkla gösterilebilir. Bu ifâdenin ilk terimi âdî mânâdaki türev alma işlemine göre bir diverjanstır. Eğer ikinci terim de

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\,T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\nu(t_\mu^\nu\sqrt{-g}) \tag{IX.2.5}$$

şeklinde, âdî mânâdaki türev alma işlemine göre bir diverjans gibi ifâde edilebilseydi bu takdirde (IX.2.4) ve (IX.2.3) den

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = \partial_\nu[T_\mu^\nu + t_\mu^\nu)\sqrt{-g}] = 0 \tag{IX.2.6}$$

olacaktı. Bu ise (IX.2.2) ifâdesindeki işlemlerin rahatlıkla, fakat artık *MİNKOWSKİ* uzayı için değil de *RİEMANN* uzayı için yapılmasını ve bunun sonucu olarak da gravitasyon alanının korunum kaanunlarının tesisini mümkün kılar. Ancak şunu belirtmek gerekir ki (IX.2.5) ifâdesi t_μ^ν yü tek bir şekilde tâyin etmek için yeterli değildir. Kezâ ayni ifâdenin sol yanı bir tansör olmadığından t_μ^ν nün kendisi de bir tansör değildir. t_μ^ν ancak özel bazı dönüşüm gruplarına göre tansör gibi davranır. Bu itibarla t_μ^ν ye **enerji-impuls düzmece-tansörü** adı verilir.

Şimdi

$$\tau_\beta^\alpha\sqrt{-g} = \delta_\beta^\alpha L_g\sqrt{-g} - \frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \tag{IX.2.7}$$

bağıntısı aracılığıyla bir τ_β^α büyüklüğü tanımlayalım. Bu takdirde

$$\partial_\alpha(\tau_\beta^\alpha\sqrt{-g}) = \frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right]\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\,\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} \tag{IX.2.8}$$

olur. Ancak,

$$\frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial x^\beta}=\frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}$$

olduğundan (IX.2.7) ifâdesi, (IX.1.18) i ve (IX.1.17) yi de göz önünde tutarak

$$\partial_\alpha(\tau^\alpha_\beta\sqrt{-g})=\left[\frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right]\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta}=$$

$$=\frac{c^4}{16\pi G}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta}=-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\qquad\text{(IX.2.9)}$$

olur. (IX.2.4) ü de göz önünde bulundurarak bu son ifâdeden

$$\partial_\alpha[(T^\alpha_\beta+\tau^\alpha_\beta)\sqrt{-g}]=0\qquad\text{(IX.2.10)}$$

bulunur ki bu, (IX.2.6) ile karşılaştırıldığında enerji-impuls düzmece-tansörü için

$$t^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta L_g-\frac{\partial(L_g)}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\qquad\text{(IX.2.11)}$$

yazılabileceğini gösterir; ya da $L_g=(c^4/16\pi G)R$ olduğundan t^α_β için

$$\boxed{\frac{16\pi G}{c^4}t^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta R-\frac{\partial R}{\partial\left(\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta}}\qquad\text{(IX.2.12)}$$

ifâdesi elde edilmiş olur.

Bu münâsebetle, gravitasyon enerjisi için hem a) diğer enerji şekillerine ilâve edildiğinde toplam enerjinin korunumunu mümkün kılacak, hem de b) belirli, üç boyutlu bir hacım içinde belirli bir anda mevcûd bulunan enerjiyi koordinat sisteminden bağımsız olacak şekilde bir ifâde elde etmenin mümkün olamadığını da kaydedelim. Yâni, daha açık bir deyimle, **gravitasyon enerjisini belirli bir yere inhisar ettirmek imkânsızdır.** Bu hususta yapılabilecek en iyi şey a) şartını gerçekleyen fakat b) şartını gerçekleyemeyen enerji-impuls düzmece-tansörünü kullanmaktır. Böylelikle, gravitasyon enerjisi hakkında, hattâ bazı özel hallerde bayağı kesin bir vasfı haiz olabilen yaklaşık bir bilgi elde etmemiz mümkün olur.

Şimdi $\tau^\alpha_\beta=t^\alpha_\beta$ olmak üzere (IX.2.10) ifâdesinden hareketle (IX.2.2) ye benzer şekilde

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_V [T^0_\mu + t^0_\mu] \sqrt{-g}\, d^3x =$$

$$= -\int_V \frac{\partial}{\partial x^i} [(T^i_\mu + t^i_\mu) \sqrt{-g}]\, d^3x = -\int_\Sigma (T^i_\mu + t^i_\mu) \sqrt{-g}\, d\Sigma_i \qquad \text{(IX.2.13)}$$

yazabiliriz. $V \to \infty$ için eğer ikinci integral yakınsak ise ve üstelik eğer Σ yüzeyini kateden akı da sıfıra gidiyorsa (IX.2.13) den

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(\int_{V \to \infty} [T^0_\mu + t^0_\mu] \sqrt{-g}\, d^3x \right) = -\int_{V \to \infty} \frac{\partial}{\partial x^i} [(T^i_\mu + t^i_\mu) \sqrt{-g})]\, d^3x = 0$$

olacağı cihetle

$$\boxed{P_\mu = \frac{1}{c} \int (T^0_\mu + t^0_\mu) \sqrt{-g}\, d^3x = \text{sâbit}} \qquad \text{(IX.2.14)}$$

ifâdeleri zamandan bağımsız olarak korunmuş olurlar. Ancak t^0_μ nün genellikle tansör vasfına sâhip olmaması P_μ nün değerinin seçilen koordinat sistemine bağlı olması sonucunu doğurur. Bununla ilgili somut bir örnek için [3] numaralı referansa bakınız. Ayrıca **GRT'**ndeki korunum kaanunları ile ilgili ayrıntılı daha geniş bilgi için de [4] numaralı referansa baş vurulabilir.

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

IX.1. Klâsik gravitasyon teorisinde boş uzaydaki gravitasyon alanını veren $\nabla^2\Phi = 0$ şeklindeki *LAPLACE* denkleminin, V ile kapalı Σ yüzeyinin sınırladığı bir hacmı göstermek ve Φ nin varyasyonunun da Σ üzerinde sıfır olduğunu kabul etmek şartıyla

$$\delta S = \delta \int_V (\mathbf{grad}\, \Phi)^2\, d^3x = 0$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesi aracılığıyla da elde edilebileceğini gösteriniz.

IX.2. Λ kozmolojik sâbitini de ihtivâ eden **GRT** alan denklemlerini bir varyasyon ilkesi aracılığıyla tesis ediniz.

REFERANSLAR

[1] A.PALATİNİ, Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton, *Rend.Circ.Mat.Palermo*, **43**, s.203-212, (1919).

[2] J.L. ANDERSON, Quantization of General Relativity; **Gravitation and Relativity** (Eds. CHİU and HOFFMANN); s.279-290; W.A.Benjamin, İnc.; New York, Amsterdam; (1964).

[3] J.WEBER, **General Relativity and Gravitational Waves**; İnsterscience Publ. İnc., New York; s.78-79; (1961).

[4] A.TRAUTMAN, Conservation Laws in General Relativity; **Gravitation: An Introduction to Current Research** (ed. L.WİTTEN); John Wiley and Sons; New York, London; s.169-198; (1962).

X. BÖLÜM

GENEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİNDE HAREKET DENKLEMLERİ VE ALAN DENKLEMLERİNİN TOLMAN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde iki ayrı mesele üzerine eğilecek ve önce Genel Rölâtivite Teorisinde hareket denklemlerinin, ayrıca bir postülât olarak vaz edilmelerine lûzum kalmaksızın, bu teorinin alan denklemlerinin bir sonucu olarak elde edilebildikleri hallere değineceğiz. Değineceğimiz ikinci mesele ise Genel Rölâtivite Teorisinin alan denklemlerinin, *TOLMAN* çözümü denilen ve özellikle son yıllarda homogen olmayan kozmoloji problemlerinde önem kazanmış olan bir kesin çözümünün elde edilmesi olacaktır.

(X.I) HAREKET DENKLEMLERİ

Bilindiği gibi gerek klâsik gravitasyon teorisinde gerekse elektromagnetik alan teorisinde alan denklemleri, yalnızca, maddî cisimlerin arasındaki belirli bir tip etkileşmeyi tasvir ederler ama alanın cisimler üzerindeki dinamik etkisini eksiksiz olarak yansıtmaya da yetmezler. Bu eksikliği gidermek üzere, alanın her bir cisim üzerindeki dinamik etkisini temsil eden kuvvet yoğunluğunun ifâdesi alan denklemlerinden bağımsız olarak ayrıca vaz edilir. Bilindiği gibi gravitasyonun klâsik alan teorisinde Φ gravitasyon potansiyelini veren *POİSSON* denklemi yanında ayrıca

$$\mathbf{k} = -\rho\,\mathbf{grad}\,\Phi$$

şeklinde kuvvet yoğunluğunu ifâde eden ayrı bir denklem, ve elektromagnetik alan teorisinde de *MAXWELL* alan denklemleri yanında ayrıca

$$\mathbf{k} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

şeklindeki *LORENTZ* kuvvetini ifâde eden ayrı bir denklem vaz edilmektedir.

EİNSTEİN'ın **GRT**'nde ise alan denklemlerine ek olarak, tansör vasfına sâhip bir kuvvet yoğunluğunun varlığını kabul etmek mümkün değildir. Bunun sebebi de eşdeğerlik ilkesi gereğince gravitasyon kuvvetlerinin yerel olarak eylemsizlik kuvvetleri imiş gibi kabul edilebilmeleri ve eylemsizlk kuvvetlerinin de uygun koordinat dönüşümü aracılığıyla elenebilmeleridir. Bu sebepten de **GRT'**nin alan denklemlerini kuvvet denklemi yerine daha farklı tipte bir denklemle tamamlamak gerekmiş ve bu amaçla gravitasyon alanının yalnızca geometrik olarak tasvir edilebilmesi keyfiyeti de geodeziksel hareket kaanûnunun ayrı bir aksiyom olarak vaz edilmesine yol açmıştır. Ancak, geodeziksel hareket kaanûnunun mevcûd gravitasyon alanını bozmayacak kadar küçük test tânecikleri için geçerli olduğu âşikârdır. Eğer, kütleleri aynı mertebede olan sonlu yaygınlığı haiz iki cisim göz önüne alınırsa gravitasyon alanı bunların her birinin içinde ihmâl edilemeyecek kadar önemli farklılıklar arz edecektir. Bundan ötürü de her iki cismin de sanki birer test tâneciği imiş gibi kabul edilebilecekleri bir temel gravitasyon alanı tanımlamak imkânı yoktur. Bu ise, geodeziksel hareket kaanûnunun, test tâneciği dışında sonlu yaygınlığı haiz cisimlere, yâni gerçek çok-cisim probleminin çözümüne, şüphe götürmez bir şekilde uygulanamıyacağını göstermektedir.

Bu durum karşısında, klâsik alan teorilerindeki gibi alan denklemlerinden ayrı olarak vaz edilecek yerde, cisimlerin genel hareket kaanunlarının **GRT'**nde bizzat alan denklemlerinden çıkartılıp çıkartılamıyacakları araştırılmıştır. Geodeziksel hareket kaanûnunu ayrı bir aksiyom olarak vaz etmeksizin, test tâneciklerinin hareketinin **GRT'**nin alan denklemlerinden hareketle incelenmesi hususundaki ilk teşebbüs, *EİNSTEİN* ile *GROMMER*'in 1927 de yapmış oldukları ortak bir çalışmadır [1]. Bu çalışmada kütleli bir cismin dışında oluşan gravitasyon alanındaki bir tekil noktanın (bir **sengülârite**nin) hareketinin, ilk mertebeden yaklaşıklıkta, dış alanın bir geodeziği boyunca vukuu bulacağı gösterilmiştir. 1938 de ise *EİNSTEİN*, *İNFELD* ve *HOFFMANN* küresel simetriyi haiz ağır cisimlerin, etkisi altında bulundukları gravitasyon alanının noktasal tekil kaynakları gibi telâkki edilebileceklerini kabul ederek bunların hareket kaanunlarını da gravitasyon alan denklemlerinden çıkartmayı başarmışlardır [2, 3]. Cisimlerin gravitasyon alanının tekil noktaları olarak kabul edilmeleri, enerji-impuls tansörünün şekli için herhangi bir seçim yapmayı önlediğinden ötürü, uygun bir kabul teşkil etmektedir. *EİNSTEİN-İNFELD-HOFFMANN*'ın geliştirmiş oldukları yöntem **(EİH Yöntemi)** $g_{\mu\nu}$ lerin $1/c$ parametresi cinsinden kuvvet serilerine açılması esâsına dayanmaktadır. Alan denklemleri böylelikle $n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $1/c^n$ nin farklı mertebeden denklemlerine ayrışmaktadırlar. Bunların integrasyonuna ise en alt mertebedeki denklemden başlanmaktadır. Birbirlerine kuple olan bu çeşitli mertebeden denklemlerden $(n+1)$-inci mertebeden olanların integre edilebilirlik şartlarının, $m \leqq n$ olmak üzere, m-ninci mertebeden alan büyüklükleri içinde ihtivâ edildikleri tesbit edilmiştir. Bu integre edilebilirlik şartları da her bir cismi kuşatan iki boyutlu yüzeyler üzerinden alınmış integraller cinsinden ifâde olunmaktadırlar. $(n+1)$-inci mertebeden denklemlerin integre edilebilirlik şartı n-ninci mertebeden yaklaşıklık için cisimlerin hareket denklemlerini tesbit etmektedir.

EİH yöntemine göre $n = 2$ mertebesinde elde edilen sonuç klâsik *NEWTON* hareket kaanunlarının aynıdır. Bir hayli uzun hesaplardan sonra $n = 4$ mertebesindeki yaklaşıklığa tekaabül eden hareket denklemlerini çıkartmak mümkün olmuş ve bu sonucu çift yıldız sistemlerine uygulayan *H.P.ROBERTSON* da yıldızların birbirlerine en yakın oldukları **periastron** noktasının hareketini inceleyerek **GRT**'nin iki (noktasal olmayan) cisim problemini çözmüş ve periastron noktasının hareketindeki rölâtivist etkiyi incelemiştir [4]. Buna tekaabül eden periastron ilerlemesi, perihel ilerlemesinin bir genelleştirmesi olarak karşımıza çıkmaktadır.

EİH yöntemi oldukça küçük cisimlere uygulanabilmektedir. Bundan başka, yöntemin dayandığı çok uzun hesaplar şimdiye kadar bunun ancak küresel simetriye sâhip cisimlere uygulanabilmesini mümkün kılmıştır.

V.FOCK'un geliştirmiş olduğu ikinci bir yöntemde ise [5, 6] cisimlerin içini ideal sıvı modeline göre tavsir eden bir enerji-impuls tansörü göz önüne alınmakta ve gravitasyon alanının hem cismin dışında, hem de içinde zayıf olduğu kabul edilmektedir. Bu yöntemde denklemlerin integre edilebilirlik şartları

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{X.1.1}$$

şeklindeki korunum kaanûnuna sıkı sıkıya bağlı bulunmakta ve her bir cismin hacmı üzerinden (X.1.1) in integrali aracılığıyla ifâde edilmektedirler. Bu yöntemin sistematik bir şekilde (X.1.1) bağıntısından yararlanması, hareket denklemlerinin alan denklemlerinden çıkarılmasının **EİH** yöntemine göre çok daha basit olması sonucunu doğurmaktadır. *FOCK* yöntemi ile **EİH** yönteminin sonuçları küresel simetrili cisimler için aynıdır. Ancak *FOCK* yöntemi, açısal momentuma sâhip cisimlerin hareket denklemlerini de alan denklemlerinden hareketle çıkartmağa müsait olduğundan **EİH** yöntemine göre daha üstündür [6, 7]. *A.PAPAPETROU*'nun da bu yönteme zarif katkıları olmuştur [8 - 10], öyle ki bu yöntem şimdi bazı müelliflerce *FOCK-PAPAPETROU yöntemi* diye isimlendirilmektedir [11].

EİH yönteminde hareket denklemlerinin $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ ile verilen *EİNSTEİN* tansörü aracılığıyla tanımlanmalarına karşılık *FOCK-PAPAPETROU* yönteminde bunlar $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörü aracılığıyla tanımlanmaktadırlar. Bu tanımlar arasında belirli bir vüs'atte bir sentezi *İNFELD*'in 1954 deki bir çalışmasında bulmak mümkündür [12]. Bu çalışmada cisimler gene gravitasyon alanının tekil noktaları olarak telâkki edilmekte, ancak bu tekil noktalar enerji-impuls tansörünün ifâdesine *DİRAC*'ın δ distribüsyonları aracılığıyla

$$T_{\mu\nu}\sqrt{-g} = \sum_{A=1}^{N} m^A(t)\, \delta(\mathbf{r} - \xi^A)\, \partial_0 \xi^A_\mu\, \partial_0 \xi^A_\nu$$

şeklinde yansımaktadırlar.

GRT'nde hareket denklemleri meselesi 1960 da *İNFELD* ve *PLEBANSKİ*'nin yayınladıkları bir kitapta müelliflerin yeni orijinal katkılarıyla birlikte bütün ayrıntılarıyla ortaya serilmiş bulunmaktadır 13].

GRT'nde hareket denklemleri konusuna bütün ayrıntılarıyla değinmek derslerimizin kapsamı dışında kaldığından aşağıdaki paragrafta *LEVİ-CİVİTA*'nın (1873-1942) bir çalışmasından esinlenerek, birbirleriyle gravitasyon etkileşmesinden başka bir şekilde etkileşmeyen test tâneciklerinin oluşturdukları çok düşük yoğunluklu bir toz bulutu göz önüne alındığında birer test tâneciği gibi telâkki edilebilecek olan toz zerreciklerinin hareket denklemlerinin alan denklemlerinden nasıl çıkartılabileceğini göstereceğiz.

(X.2) *LEVİ-CİVİTA* YÖNTEMİ [14-15]

Bilindiği gibi seyrelmiş ve zerrecikleri arasında gravitasyon etkileşmesinden başka bir etkileşme bulunmayan bir toz bulutu

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 c^2 U^\mu U^\nu \tag{X.2.1}$$

şeklindeki bir enerji-impuls tansörü aracılığıyla tasvir edilebilmektedir. Gravitasyon alanı denklemlerine binâen enerji-impuls tansörünün diverjansı sıfır olduğundan (X.2.1) den

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}/c^2 = [\nabla_\nu(\rho_0 U^\nu)]\, U^\mu + \rho_0(U^\nu \nabla_\nu U^\mu) = [\nabla_\nu(\rho_0 U^\nu)]\, U^\mu + \rho_0 A^\mu = 0 \tag{X.2.2}$$

bulunur. Burada, kolaylık olmak üzere, $A^\mu = U^\nu \nabla_\nu U^\mu$ vaz edilmiş bulunmaktadır. Ayrıca da, bilindiği gibi, dörtlü hız vektörü

$$U^\lambda U_\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} g_{\lambda\sigma} = 1 \tag{X.2.3}$$

bağıntısını gerçeklemektedir. Bunu s parametresine göre türetecek olursak, ister âdî mânâda isterse mutlak türev alınmış olsun, sonuç sıfır olacaktır:

$$[\partial_\nu(U^\lambda U_\lambda)]\, U^\nu = [\nabla_\nu(U^\lambda U_\lambda)]\, U^\nu = 2[U^\nu(\nabla_\nu U^\lambda)]\, U_\lambda = 0 \tag{X.2.4}$$

(X.2.4) ile (X.2.2) yi karşılaştırırsak U_λ ile A^λ nın birbirlerine dik oldukları, yâni

$$A^\lambda U_\lambda = 0 \tag{X.2.5}$$

olduğu görülür. Şimdi (X.2.2) yi U_μ ile çarpar ve μ ler üzerinden toplam yaparsak (X.2.5) i de göz önünde tutarak

$$[\nabla_\nu(\rho_0 U^\nu)]\, U^\mu U_\mu + \rho_0 A^\mu U_\mu = \nabla_\nu(\rho_0 U^\nu) = 0 \tag{X.2.6}$$

olduğu yâni $\rho_0 U^\nu$ impuls yoğunluğunun korunduğu anlaşılmış olur. Ancak, (X.2.6) ile (X.2.2) nin karşılaştırılması daha da ilginç bir sonucu, $\rho_0 A^\mu$ vektörünün özdeş olarak sıfır olduğu sonucunu ortaya çıkarmaktadır :

$$\rho_0 A^\mu = \rho_0 U^\nu \nabla_\nu U^\mu = \rho_0 U^\nu (\partial_\nu U^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} U^\lambda) = 0. \qquad \text{(X.2.7)}$$

U^ν dörtlü vektörü toz bulutunun bir akım çizgisini temsil eder. Eğer bir toz zerreciğinin koordinatları x^ν ise, $U^\nu = dx^\nu/ds$ yazılabilir ve böylelikle (X.2.7) denklemi de zerreciğin hareketi için bir bağ şartı ifâde eder. Bu denklem artık

$$\rho_0 \left[\frac{dx^\nu}{ds} \partial_\nu \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right] = 0,$$

ya da, $\rho_0 \neq 0$ olan noktalar için, yâni toz zerrelerinin yörüngeleri için,

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0} \qquad \text{(X.2.8)}$$

şekline girer ki bu da göz önüne alınan toz zerreciğinin, gravitasyon alanının geodezik eğrisi boyunca hareket edeceğini ifâde eden hareket denkleminden başka bir şey değildir.

Böylelikle gravitasyon alan denklemlerinin toz zerreciklerinden oluşan seyrelmiş bir bulutun elemanları için tek bir hareket denklemini içerdiğini tesbit etmiş bulunmaktayız.

Bu paragrafı kapatırken son bir hususa daha değinmek istiyoruz. **GRT**'nde hareket denklemlerinin alan denklemlerinden çıkartılabilmesi bu denklemlerin lineer olmamalarının doğal bir sonucudur. Nitekim gerek klâsik gravitasyon teorisinin gerekse elektromagnetik alan teorisinin alan denklemleri lineer olduklarından bu teorilerde hareket denklemlerini alan denklemlerinden çıkartma imkânı bulunmamakta ve bunları alan denklemlerine ilâveten fakat onlardan bağımsız bir biçimde vaz etmek zorunlu olmaktadır.

(X.3) BİR TOZ BULUTU MODELİ İÇİN *TOLMAN* ÇÖZÜMÜ

Bu paragrafta, geçen paragrafın sonuçlarından da yararlanarak, çok seyrelmiş ve zerrecikleri arasında gravitasyon etkileşmesinden başka bir etkileşme bulunmayan, küresel simetriyi haiz bir toz bulutu için *EİNSTEİN* alan denklemlerinin önce *TOLMAN* [16] tarafından bulunmuş olan bir tam çözümünü tesis etmek istiyoruz. Böyle bir çözüm özellikle Kozmolojide, galaksi kümelerini bir toz bulutu gibi kabul eden bir modelin geliştirilmesi ve incelenmesinde önem taşımaktadır [17-20].

Bunun için önce küresel simetri invaryanslı metriğin (VI.1.14) ile verilmiş olan

$$ds^2 = -A\,dr^2 - Br^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + 2D\,dr\,d\overline{x}^0 + C\,(d\overline{x}^0)^2 \qquad \text{(X.3.1)}$$

şeklindeki genel ifâdesini göz önüne alalım. Burada

$$A = A(r, \overline{x}^0), \quad B = B(r, \overline{x}^0), \quad C = C(\overline{x}^0), \quad D = D(r, \overline{x}^0)$$

ile dört keyfî fonksiyon gösterilmektedir. Bunların sayılarını azaltmak üzere, ve $h = h(r)$ ile de yalnızca r ye bağlı bir fonksiyonu göstererek,

$$\overline{x}^0 = x^0 + h(r)\,, \quad d\overline{x}^0 = dx^0 + dh(r)$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapalım. Eğer $h(r)$ fonksiyonu

$$dh = -\frac{D}{C}\,dr$$

olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} r^2\,B(r, \overline{x}^0) &= r^2\,B(r, x^0 + h(r)) = R^2(r, x^0) \\ C(\overline{x}^0) &= \gamma(x^0) \\ A + \frac{D^2}{C} &= e^{\mu(r, x^0)} \end{aligned}$$

vaz ederek (X.3.1) ifâdesi artık

$$ds^2 = \gamma\,(dx^0)^2 - e^{-\mu}\,dr^2 - R^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad \text{(X.3.2)}$$

şekline girmiş olur.

Toz bulutunun evrimini tasvir etmek üzere problemi, kolaylık sağlayacak bir koordinat sisteminde inceleyeceğiz. Bulutun çok seyrelmiş bir gaz gibi kabul edilmesi, toz zerrelerinin birbirleriyle çarpışmadan hareket etmeleri demektir. §(X.2) ye binâen, bu toz zerrelerinin yörüngelerinin geodezik eğrileri olacağını biliyoruz. Şu hâlde birbirleriyle çarpışmadan hareket eden bu toz zerrelerinin geodezik eğrileri birbirleriyle hiç arakesit noktası bulunmayan zamansal eğrilerden oluşan tek parametreli bir kongrüans meydana getireceklerdir. Bu takdirde öyle bir $\{x^\mu\}$ koordinat sistemi ithâl etmek mümkün olur ki bu kongrüansı oluşturan eğriler $x^0 = ct$ koordinatının parametrik çizgilerinden ibâret olsun. Yâni geodezik eğrileri üzerinde $r = \theta = \varphi = s\hat{a}bit$ olur. Böyle bir koordinat sistemine **eşhareketli koordinat sistemi** adı verilir. Şu hâlde t parametresinin değerleri, söz konusu kongrüansa dik 3 boyutlu uzaysal bir hiperyüzey ailesi belirler. Buna göre bir toz zerresinin dörtlü hız vektörünün bileşenleri

$$U^\lambda = (U^0, 0, 0, 0)$$

dan, ve geodezik denklemi de

$$\frac{dU^{\lambda}}{ds} + \Gamma^{\lambda}_{00} (U^0)^2 = 0 \qquad (X.3.3)$$

dan ibâret olur. Bu denklemden

$$\Gamma^{i}_{00} \equiv 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (X.3.4)$$

olduğu kolayca tesbit edilir. (X.3.4) özdeşliği ise

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad g_{00} = \gamma(x^0)$$

sonucunu sürükler. Eğer bir de

$$\sqrt{\gamma(x^0)}\, dx^0 = (dx'^0) = c\, dt$$

şeklinde yeni bir zaman koordinatı ithâl edilirse artık (X.3.2) metriği

$$\boxed{ds^2 = c^2\, dt^2 - e^{\mu} dr^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)} \qquad (X.3.5)$$

şekline girmiş olur.

Böylelikle de, $g_{00} = 1$ vaz edilmiş olmasının sonucu

$$U^{\lambda} = (1, 0, 0, 0) = U_{\lambda}\,, \quad U^{\lambda} U_{\lambda} = 1$$

olacağı ve (X.3.3) ün $\lambda = 0$ bileşeninin de özdeş olarak gerçekleneceği anlaşılmış olur. Şu hâlde $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörünün bileşenleri de

$$T_{00} = \rho c^2 \quad , \quad T_{ij} = 0 \qquad (X.3.6)$$

dan ibârettir.

Şimdi eğer (X.3.5) metriğini ve $\dfrac{\partial}{\partial x^0} = \dfrac{1}{c}\,\dfrac{\partial}{\partial t}$ olduğunu da göz önünde tutarak *EİNSTEİN* tansörünün sıfırdan farklı bileşenlerini hesaplarsak basit fakat biraz uzunca hesaplardan sonra

$$G_{00} = \frac{1}{R^2} e^{-\mu} \left[2RR'' + R'^2 - RR'\mu' \right] - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{c^2} R\dot{R}\dot{\mu} + \frac{1}{c^2} \dot{R}^2 + 1 \right] \qquad (X.3.7)$$

$$G_{11} = \frac{1}{R^2} e^{\mu} \left[\frac{1}{c^2} 2R\ddot{R} + \frac{1}{c^2} \dot{R}^2 + 1 \right] - \frac{R'^2}{R^2} \qquad (X.3.8)$$

$$G_{22} = e^{-\mu} \left[-RR'' + \frac{1}{2} RR'\mu' \right] + \frac{1}{4c^2} \left[4R\ddot{R} + 2R^2\ddot{\mu} + R^2\dot{\mu}^2 + 2R\dot{R}\dot{\mu} \right] \qquad (X.3.9)$$

$$G_{01} = \frac{1}{c} \left[2\dot{R}' - R'\dot{\mu} \right] \qquad (X.3.10)$$

bulunur. Burada, her zaman olduğu gibi gene (′) ile r ye göre ve (˙) ile de t ye göre kısmî türevler gösterilmektedir.

Enerji-impuls tansörünün bileşenlerinin(X.3.6) ile verilen değerlerini de göz önünde tutarak

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)$$

alan denklemlerinin bileşenleri kolaylıkla hesaplanabilir ve (X.3.7), (X.3.8) ve (X.3.10) a tekaabül etmek üzere, sırasıyla,

$$e^{-\mu}(2RR'' + R'^2 - RR'\mu') - \frac{1}{c^2}(R\dot{R}\dot{\mu} + \dot{R}^2 + c^2) = -\frac{4\pi G}{c^2}\rho R^2 \qquad \text{(X.3.11)}$$

$$\frac{e^{\mu}}{c^2}(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2) - R'^2 = 0 \qquad \text{(X.3.12)}$$

$$2\dot{R}' - R'\dot{\mu} = 0 \qquad \text{(X.3.13)}$$

ifâdeleri bulunur. $G_{22} = 0$ a tekaabül eden denklemin ise (X.3.12) ve (X.3.13) ün bir sonucu olduğu kolaylıkla tahkik edilebilir. Bu itibarla da $G_{22} = 0$ a tekaabül eden denklemden sarf-ı nazar edilebilir.

Şimdi (X.3.5) metriğinden hareketle $r = sâbit$ küresinin dış yüzeyinin $4\pi R^2$ olacağı kolayca görülebilir. Bu ise $R' > 0$ olmasını gerektirir. Bu da R nin bir çeşit uzaklık olarak yorumlanabilmesini mümkün kılar. Bu husûsu göz önünde tutarak (X.3.13) ü kısaca

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\, ln\, R' - \mu) = 0$$

şeklinde de yazmak mümkündür. Bu denklemin x^0 a göre integrasyonu, $2\,E(r)/c^2$ ile keyfî bir fonksiyonu göstererek,

$$2\, ln\, R' - \mu = ln\left(1 - \frac{2E(r)}{c^2}\right)$$

şeklindedir. Buradan da

$$e^{\mu(r,x^0)} = \frac{R'^2(r,t)}{1 + \dfrac{2E(r)}{c^2}} \qquad \text{(X.3.14)}$$

bulunur. (X.3.5) metriğinin işâretinin değişmemesi için ise

$$1+\frac{2E(r)}{c^2}>0 \quad \Rightarrow \quad E(r)>-\frac{c^2}{2} \tag{X.3.15}$$

olması gerekeceği görülmektedir.

Buna göre (X.3.5) ile verilen yay elemanının karesi de

$$\boxed{ds^2 = c^2\,dt^2 - \frac{R'^2(r,t)}{1+\dfrac{2E(r)}{c^2}}\,dr^2 - R^2(r,t)\,[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]} \tag{X.3.16}$$

şekline girmiş olur.

Şimdi (X.3.12) denklemini ele alalım. Bu, $\dot{R} \neq 0$ için,

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(R\dot{R}^2 - 2ER) = 0 \tag{X.3.17}$$

şeklinde de yazılabilir. Bunun integrasyonu ise, $G\,M(r)/2$ ile keyfî bir fonksiyonu göstererek,

$$\boxed{\frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{G\,M(r)}{R(r,t)} = E(r)} \tag{X.3.18}$$

verir. Öte yandan (X.3.18) i ve bu ifâdenin r ye göre kısmî türevinin ifâdesini (X.3.14) ile birlikte (X.3.11) e vaz edersek sonunda

$$\boxed{\frac{M'}{R'} = 4\pi\rho\, R^2} \tag{X.3.19}$$

bulunur.

(X.3.18) denkleminin $E = E(r)$ fonksiyonunun pozitif, sıfır ya da negatif olması hallerine tekaabül eden çözümleri *BONNOR* [21] ve *PERİSSON* [22] tarafından bulunmuştur. Bu çözümler bir u parametresi aracılığıyla

I. $E(r) > 0$ için :

$$\left.\begin{aligned} R(r,u) &= \frac{G\,M(r)}{2\,E(r)}\,(\mathrm{ch}\,u - 1) \\ t - T_0(r) &= \frac{G\,M(r)}{[2\,E(r)]^{3/2}}\,(\mathrm{sh}\,u - 1) \end{aligned}\right\} \tag{X.3.20}$$

II. $E(r) \equiv 0$ için :

$$R(r,t) = \left[\frac{9G}{2} M(r)\right]^{1/3} . [t - T_0(r)]^{2/3} \tag{X.3.21}$$

II. $E(r) < 0$ için :

$$\left.\begin{aligned} R(r,u) &= -\frac{G\,M(r)}{2\,E(r)}(1 - \cos u) \\ t - T_0(r) &= \frac{G\,M(r)}{[-2\,E(r)]^{3/2}}(u - \sin u) \end{aligned}\right\} \tag{X.3.22}$$

şeklinde ifâde edilirler. Görüldüğü üzere bu çözümler $T_0(r)$ gibi yeni bir keyfî fonksiyonun daha ortaya çıkmasına yol açmaktadırlar.

Şimdi tekrar (X.3.18) e dönecek olursak $E(r) \equiv 0$ olmasının, $R \to \infty$ için $\dot{R} = 0$ olmasını sürüklediğini görürüz. NEWTONsal noksa mekaniğinde bu, **parabolik hareket** diye isimlendirilen bir özelliğe tekaabül etmektedir. Eğer $E(r) > 0$ ise, toz zerreleri gene $R = \infty$ a erişebilirler ama $R = \infty$ da $\dot{R} \neq 0$ olur; bu da **hiperbolik hareket** özelliğini yansıtmaktadır. Buna karşılık eğer $E(r) < 0$ ise toz zerresi, $\dot{R}$ hızının değişeceği

$$R_{\text{Max}} = -\frac{GM}{E}$$

ile verilen maksimum bir uzaklığa erişir ve bu noktaya kadar genişleyerek sürüklenmiş olan toz bulutu da bu noktadan başlayarak artık büzülmeye başlar. Bu da **eliptik hareket** diye isimlendirilen bir özelliği yansıtmaktadır.

Şimdi (X.3.16) ile verilen *TOLMAN* metriğindeki $R(r,t)$, $M(r)$, $E(r)$ ve $T_0(r)$ fonksiyonlarının fiziksel anlamlarını kavramağa çalışalım.

BONDİ 1947 de, *TOLMAN* metriği göz önüne alındığında $r = 0$ orijininde bulunan bir elektromagnetik ışınım kaynağının (r, θ, φ) noktasında bulunan bir gözlemci tarafından t ânında ölçülen U ışıma gücünün (yâni **görünen kadiri**nin)

$$U = \frac{C}{(1 + z)^2\, R^2(t,r)} \tag{X.3.23}$$

ile verileceğini göstermiştir [23]. Burada C ile yalnızca kaynağın yayınladığı ışıma gücüne yâni **mutlak kadiri**ne bağlı bir sâbit gösterilmektedir. $z = \Delta\lambda/\lambda$ olup bu, kaynağın yayınladığı ışınımın mâruz kaldığı *DOPPLER* olayı ile gravitasyon kökenli kızıla kaymanın toplam etkilerinin ölçüsüdür. $R(r,t)$ fonksiyonuna **parlaklık uzaklığı** adı verilir. Parlaklık uzaklığının geometrik olarak

$$\int_0^r \frac{R'(r,t)}{\sqrt{1+\frac{E(r)}{c^2}}}\,dr \tag{X.3.24}$$

ile tanımlanan **metrik uzaklık**tan genellikle farklı olacağı ve her iki büyüklük arasında özdeşliğin de ancak $E(r) \equiv 0$ olması hâlinde gerçekleşeceği âşikârdır.

Öte yandan belirli bir t ânında, belirli bir hacımdaki toplam kütle, dV_M ile ds^2 nin ifâdesinden çıkartılan **metrik hacım** elemanını göstermek üzere, $\rho\, dV_M$ nin o hacım üzerinden integralidir. (X.3.16) metriğine göre

$$dV_M = \frac{R'(r,t)}{\sqrt{1+\frac{E(r)}{c^2}}}\,dr.\ R(r,t)\,d\theta\ .\ R(r,t)\sin\theta\, d\varphi \tag{X.3.25}$$

dir. Bu takdirde $M_M = \int_V \rho\, dV_M$ ye de **metrik kütle** diyeceğiz.

Şimdi r ile $r+dr$ noktaları arasındaki parlaklık uzaklığının

$$R(r+dr,\, t) - R(r,t) = R'(r,t)$$

den ibâret olacağına işâret edelim. Bu sonuçtan yararlanarak, ve radyal uzaklık yerine metrik uzaklık alacak yerde parlaklık uzaklığını vaz ederek

$$dV_P = R'(r,t)dr.\ R(r,t)d\theta\ .\ R(r,t)\sin\theta\, d\varphi \tag{X.3.26}$$

şeklinde bir de **parlaklık hacmı** tanımlayalım. Buna göre de $M_P = \int_V \rho\, dV_P$ **parlaklık kütlesi** telâkki olunacaktır. Eğer merkezi orijinde olan ve yüzeyi r radyal koordinatını haiz noktalardan geçen bir kürenin içindeki parlaklık kütlesi hesaplanırsa, (X.3.18) i de göz önünde bulundurarak,

$$M_P = \int_0^r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \rho(r,t)\, R'(r,t)\, R^2(r,t)\sin\theta$$

$$= 4\pi \int_0^r \rho(r,t)\, R'(r,t)\, R^2(r,t)dr = M(r) \tag{X.3.27}$$

bulunur. Yâni (X.3.17) diferansiyel denkleminin integrasyonuyla ortaya çıkan $M(r)$ fonksiyonu radyal r koordinatlı bir kürenin içindeki **parlaklık kütlesi** olarak yorumlanabilmektedir. Bu r koordinatı eşhareketli bir koordinat olduğundan böylece tanımlanan parlaklık kütlesinin zamana bağlı olmaması doğaldır.

Parlaklık kütlesinin metrik kütleye ancak $E(r)=0$ için eşit olabileceği de kolayca görülmektedir.

Bu yorumdan sonra eğer (X.3.18) ifâdesine dönecek olursak bu denklemdeki ilk terimin birim kütle başına **parlaklık kinetik enerjisi**, ikinci terimin ise gene birim kütle başına **parlaklık potansiyel enerjisi** ve nihâyet bu ikisinin toplamı olan $E(r)$ nin de birim kütle başına **parlaklık toplam enerjisi** olarak telâkki olunabileceğini ve (X.3.18) in de bir çeşit enerji korunumu ilkesi olarak yorumlanabileceği anlaşılır.

Son olarak $T_0(r)$ fonksiyonunun neyi temsil ettiğini görmek üzere $t = T_0(r)$ hiperyüzeyini göz önüne alalım. Bu takdirde (X.3.20) ve (X.3.22) ifâdelerinden

$$R(r,t=T_0(r)) = 0 \quad \Rightarrow \quad R'R^2 = 0,$$

bulunur; ve bu ifâde de (X.3.19) a vaz edilirse

$$\rho(r,t=T_0(r)) = \infty$$

elde edilir. Bu sonuçlar $t = T_0(r)$ hiperyüzeyinin tekil bir yüzey olduğunu göstermektedir.

Problemin başında vaz etmiş olduğumuz küresel simetri şartı yalnızca radyal hareketlere müsaade etmekte olduğundan eğer toz bulutunu oluşturan zerrelerden birinin hareketini **geçmişe doğru** izlersek $T_0(r)$ nin, r radyal koordinatını haiz zerrenin bu tekil yüzeyden geçtiği ânı gösterdiğini görürüz. Burada dikkat edilecek olan husus, toz bulutunu oluşturan bütün zerrelerin aynı bir anda söz konusu tekil yüzeyden geçmiş olmadıkları, ancak aynı bir r ye tekaabül eden küre üzerindekilerin geçmişte aynı bir $t = T_0(r)$ ânında bu tekil hiperyüzeyi katetmiş oldukları keyfiyetidir. Buna göre zerreciklerin belirli bir anda bu tekil yüzeyi geçtikten sonra oluşturdukları bulut genişleyecek demektir. Bütün toz zerrelerinin bu tekil yüzeyden dışarı fırlamaları bir çeşit karaçukurların tersine tekaabül eden bir görüntüdür. Bu benzetime dayanarak, göz önüne alınan bu hâl için söz konusu tekil yüzeyin bir **akçukur** olduğundan söz edilir.

R E F E R A N S L A R

[1] A.EİNSTEİN, J.GROMMER, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, s.2-13, (1927).

[2] A.EİNSTEİN, L.İNFELD, B.HOFFMANN, *An.Math.*, **39**, s.65-100, (1938).

[3] P.G.BERGMANN, **Introduction to the Theory of Relativity**; Prentice Hall. Inc.,; s.223-242; (1960).

[4] H.P.ROBERTSON, *Ann. Math.*, **39**, s.101-104, (1938).

[5] V.FOCK, *J.Phys., Moskova*, **I**, s. 81, (1939).

[6] V.FOCK, **The Theory of Space, Time of and Gravitation**; Pergamon Press; New York, Oxford, London, Paris; s. 215-294; 1. baskı (1959).

[7] S.KALİTZİN, *Nuovo Cim.*, **11**, 178, (1959).

[8] A.PAPAPETROU, *Proc.Phys. Soc.*, **A64**, s.57, (1951).

[9] A.PAPAPETROU, *Proc. Phys. Soc.* , **A64**, s. 302, (1951).

[10] A.PAPAPETROU, *Proc.Roy.Soc.*, **209**, s.248, (1951).

[11] J.N.GOLDBERG, The Equation of Motion; **Gravitation: An Introduction to Current Research** (ed. L. WİTTEN); John Wiley-and Sons, İnc.: New York, London; s. 102-129; (1962).

[12] L.İNFELD, *Acta Phys. Polon.*, **13**, 187, (1954).

[13] L.İNFELD, J.PLEBANSKİ, **Motion and Relativity**; Pergamon Press;(1960).

[14] T.LEVİ-CİVİTA, a) **Le Problème des n Corps en Relativité Générale**; Gauthier-Villars Paris; s.23-25; (1950). b) **The N-Body Problem in General Relativity**; D. Reidel Publ. Comp.; Dordrecht; (1964).

[15] R.J.ADLER, M.J.BAZİN, M.SCHİFFER, **Introduction to General Relativity**; Mc Graw Hill Book Comp;. s.352-354; 2. baskı, (1957).

[16] R.C.TOLMAN, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **20**, 169, (1934).

[17] A.TARANTOLA, Etude en Relativité Générale de l'Evolution des Amas de Galaxies; Paris VII (PİERRE ET MARİE CURİE) Üniversitesine takdim edilmiş, İhtisas Doktorası Tezi, (1976).

[18] A.TARANTOLA, *C.R.Acad. Sc. Paris*, **283B**, 405-408, (1976).

[19] S.MAVRİDÈS, A.TARANTOLA, *Gen. Rel. Grav.*, **8**, 665-672, (1976).

[20] S.MAVRİDÈS, *M.N.R.A.S.*, **177**, 709-716, (1977).

[21] W.B.BONNOR, *M.N.R.A.S.*, **167**, 55, (1974).

[22] J.PERİSSON, [17] de zikredilmiş olduğu üzere.

[23] H.BONDİ, *M.N.R.A.S.*, **107**, 410, (1947).

XI. BÖLÜM

Fluctuat nec mergitur...

BRANS-DİCKE TİPİ SKALER-TANSÖREL GRAVİTASYON TEORİLERİ

(XI.I) SKALER-TANSÖREL BİR GRAVİTASYON TEORİSİNİN MOTİVASYONU

BRANS ve *DİCKE*, *MACH* ilkesini *EİNSTEİN* teorisindekinden çok daha belirgin bir biçimde temele yerleştirmek sûretiyle nasıl bir rölâtivist gravitasyon teorisi inşâ edilebileceğini araştırmışlardır [1 - 4].

§(V.1) de de değinmiş olduğumuz gibi *MACH* ilkesi *EİNSTEİN* teorisinin alan denklemlerinin vaz'ında yol gösterici bir rol oynamıştır. Buna rağmen *EİNSTEİN* teorisi *MACH* ilkesini tümüyle kapsayamamaktadır. Bunun sebebi ise *BERKELEY* [5] ve *MACH*'dan [6] esinlenen *EİNSTEİN*'ın, herhangi bir cismin eylemsizliğinin Evrendeki tüm kütle dağılımına bağlı olduğu fikrini benimsemiş olmasına rağmen, bu bağlılığın şeklini ya da başka bir deyimle bir cisim ile Evrendeki diğer bütün cisimler arasında mevcûd olması ve eylemsizliği doğurması umulan etkileşmenin cinsini açıkça belirtememiş, formüle edememiş olmasında aranmaldır.

BRANS ve *DİCKE*'ye göre bir cismin eylemsizlik kütlesi, bu cisim ile ϕ gibi evrensel bir skaler alan arasındaki etkileşmeyi temsil eden bir ölçüdür. Böyle bir telâkki *MACH* ilkesiyle çelişik değildir. Ancak, bir cismin eylemsizlik kütlesi cisim ile ϕ skaler alanı arasındaki etkileşmeyi yansıttığından, buradan, temel tâneciklerin eylemsizlik kütlelerinin mutlaka sâbit olmaları gerekmediği ve ϕ ye bağlı olacakları sonucu çıkar. Öte yandan ise temel tâneciklerin kütleleri sâdece Gm/r^2 şeklindeki gravitasyonel ivmeleri ölçmek sûretiyle değerlendirilebildiğinden buradan da G gravitasyon sâbitinin de Evrenin kütle yoğunluğuna bağlı olması gereken skaler bir ϕ alanının ortalama değerine bağlı olması gerektiği yâni G sâbitinin mutlak anlamda bir sâbit olamıyacağı ortaya çıkmaktadır.

MACH ilkesini teorik bir temele oturtmak üzere *SCİAMA*'nın ele aldığı bir modelden [7, 8] hareket edilecek olursa, Evrenin R yarıçaplı küresel bir kabukta toplandığı varsayılan M kütlesine nazaran yaptığı γ ivmeli bir hareket dolayısıyla, m kütleli bir cismin üzerinde hâsıl olan K_E eylemsizlik kuvvetinin

$$K_E \sim \frac{GM}{c^2R} m\gamma \tag{XI.1.1}$$

ile verileceği sonucu çıkartılmaktadır (*bk.* [3],s.126). Eğer

$$\frac{GM}{c^2R} \sim 1 \tag{XI.1.2}$$

olacak olursa (XI.1.1) denklemi mâlûm

$$K_E = m\gamma$$

denklemi ile uyuşacaktır. (XI.1.2) bağıntısı

$$\frac{1}{G} \sim \frac{M}{c^2R} \tag{XI.1.3}$$

şeklinde de ifâde edilebilir. Bu bağıntının şekli $1/G$ nin, Evrenin ortalama ρ yoğunluğunu kaynak olarak kabul eden

$$\nabla^2\phi \sim \frac{\rho}{c^2} \tag{XI.1.4}$$

şeklinde *POİSSON* tipi bir denklem aracılığıyla belirlenen ϕ gibi bir alanla özdeş kılınabileceğini telkîn eder biçimdedir. Nitekim bu denklem için

$$\phi \sim \frac{M}{c^2R}$$

âşikâr bir çözüm oluşturmaktadır. ϕ yi her zaman

$$\langle \phi \rangle \cong \frac{1}{G}$$

olacak şekilde normalize etmek de mümkündür. (XI.1.4) denkleminin en basit ve kovaryant bir biçimde dört boyutlu uzay-zaman hâline genelleştirilmiş şekli, λ ile yeni bir kuplâj sâbitini ve T^μ_ν ile de yalnızca maddeye tekaabül eden enerji-impuls tansörünü göstermek üzere

$$\Box^2\phi = \frac{4\pi\lambda}{c^2} T^\mu_\mu \tag{XI.1.5}$$

dür. Bu denklem *MACH* ilkesinin ontolojik temeli olan ϕ alanının madde tarafından nasıl hâsıl edildiğini yansıtmaktadır.

Bu sonuçları göz önünde tutan *BRANS* ve *DİCKE*, *MACH* ilkesini geniş bir biçimde içeren bir gravitasyon teorisinin alan denklemlerinin, $G = 1/\phi$ vaz etmek ve $\Phi_{\mu\nu}$ ile de gravitasyon alanının kaynağındaki skaler ϕ alanına tekaabül eden enerji-umpuls tansörünü göstermek üzere,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{c^4\phi} (T_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}) \qquad \text{(XI.1.6)}$$

olması gerektiğini ileri sürmüşlerdir.

Böylece bu teori gravitasyon alanının tek bir tansör yerine bir $T_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}$ tansörü ve bir de ϕ skaleri aracılığıyla üretildiğini temel varsayım olarak kabul eden skaler-tansörel bir gravitasyon teorisi niteliğindedir.

(XI.2) ALAN DENKLEMLERİ

Eşdeğerlik ilkesinin geçerliliğini teorilerinde de muhafaza etmek isteyen *BRANS* ve *DİCKE* test tânecikleri ile fotonların hareket denklemlerinin ϕ alanına değil de yalnızca $g_{\mu\nu}$ lere bağlı olmasını kabul etmişlerdir. Buna göre madde ile gravitasyon arasındaki enerji alış verişi tıpkı *EİNSTEİN* teorisinde olduğu gibi

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} T^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} T^\mu_\sigma = 0 \qquad \text{(XI.2.1)}$$

denklemiyle tasvir olunmaktadır. Bu takdirde (XI.1.6) nın her iki yanını ϕ ile çarptıktan sonra bunun kovaryant diverjansı alınırsa, bir yandan (XI.1.6) nın sol yanının diverjansının özdeş olarak sıfır olması özelliğinden diğer yandan da (XI. 2.1) bağıntısı dolayısıyla

$$\left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R \right) . \, \partial_\mu \phi = - \frac{8\pi}{c^4} \nabla_\mu \Phi^\mu_\nu \qquad \text{(XI.2.2)}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı Φ^μ_ν yü elde etmek için yeterlidir. Bunun için ϕ nin kendisi ve türevleri aracılığıyla inşâ edilebilen en genel ikinci mertebeden simetrik tansörün

$$\begin{aligned} \Phi^\mu_\nu = {} & A(\phi)\, \partial^\mu \phi\, \partial_\nu \phi + B(\phi)\, \delta^\mu_\nu\, \partial_\rho \phi\, \partial^\rho \phi \\ & + C(\phi)\, \partial^\mu \partial_\nu \phi + D(\phi)\, \delta^\mu_\nu\, \Box^2 \phi \end{aligned} \qquad \text{(XI.2.3)}$$

şeklinde olacağına dikkati çekelim. Buradan hareketle, ve üslü ifâdelerle ϕ ye göre alınmış türevleri göstererek,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Phi^\mu_\nu = {} & [A'(\phi) + B'(\phi)]\, (\partial^\mu \phi)\, (\partial_\nu \phi)\, (\partial_\mu \phi) \\ & + [A(\phi) + D'(\phi)]\, (\partial_\nu \phi)\, (\Box^2 \phi) \\ & + [A(\phi) + 2\, B(\phi) + C'(\phi)]\, (\partial^\mu \partial_\nu \phi)\, (\partial_\mu \phi) \\ & + D(\phi)\, \partial_\nu (\Box^2 \phi) + C(\phi)\, \Box^2 (\partial_\nu \phi) \end{aligned} \qquad \text{(XI.2.4)}$$

bulunur. Şimdi (IV.2.26) yı göz önünde bulundurarak

$$(\partial_\sigma\phi)\,R^\sigma_\nu = \partial_\nu(\Box^2\phi) - \Box^2(\partial_\nu\phi) \tag{XI.2.5}$$

yazılabileceğine; ve ayrıca da (XI.1.5) i de göz önünde bulundurarak da (XI.1.6) dan

$$R = \frac{8\pi}{c^4}\left\{\frac{1}{4\pi\lambda}\Box^2\phi + [A(\phi) + 4\,B(\phi)]\,(\partial^\mu\phi)\,(\partial_\mu\phi) + \right.$$

$$\left. + \; [C(\phi) + 4\,D(\phi)]\,\Box^2\phi\right\} \tag{XI.2.6}$$

elde edilebileceğine dikkati çektikten sonra (XI.2.2) nin sol yanının (XI.2.5) ve (XI.2.6) ifâdelerinin ışığında

$$\left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R\right)\partial_\mu\phi = \partial_\nu(\Box^2\phi) - \Box^2(\partial_\nu\phi) -$$

$$-\frac{4\pi}{c^4\phi}(\partial_\nu\phi)\left\{\left[\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\phi) + 4\,D(\phi)\right]\Box^2\phi + [A(\phi) + 4\,B(\phi)]\,(\partial^\mu\phi)\,(\partial_\mu\phi)\right\} \tag{XI.2.7}$$

bulunur. (XI.2.4) ile (XI.2.7) ifâdeleri (XI.2.2) ye yerleştirilirse katsayıların eşitliği ilkesinden A, B, C, D ile bunların ϕ ye göre türevleri arasında

$$\left.\begin{aligned}
1 &= -\frac{8\pi}{c^4}\,D(\phi)\\
-1 &= -\frac{8\pi}{c^4}\,C(\phi)\\
-\frac{4\pi}{c^4\phi}\left[\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\phi) + 4\,D(\phi)\right] &= -\frac{8\pi}{c^4}\,[A(\phi) + D'(\phi)]\\
-\frac{4\pi}{c^4\phi}[A(\phi) + 4\,B(\phi)] &= -\frac{8\pi}{c^4}\,[A'(\phi) + B'(\phi)]\\
0 &= A(\phi) + 2\,B(\phi) + C'(\phi)
\end{aligned}\right\} \tag{XI.2.8}$$

bağıntılarının mevcûd olması gerektiği kolaylıkla tesbit edilir. Şimdi

$$\omega = \frac{1}{\lambda c^2} - \frac{3}{2}$$

ya da

$$\lambda = \frac{2}{c^2(2\omega + 3)} \tag{XI.2.9}$$

vaz etmek sûretiyle λ ya bağlı yeni bir kuplâj sâbiti tanımlanarak (XI.2.8) in yegâne çözümünün

$$\left.\begin{array}{ll} A(\phi) = \dfrac{\omega c^4}{8\pi\phi} \quad , & B(\phi) = -\dfrac{\omega c^4}{16\pi\phi} \\ C(\phi) = \dfrac{c^4}{8\pi} \quad , & D(\phi) = -\dfrac{c^4}{8\pi} \end{array}\right\} \tag{XI.2.10}$$

olduğu bulunur. Böylece (XI.1.5) ve (XI.2.2) alan denklemleri de, (XI.2.9) ve (XI. 2.10) bağıntıları dolayısıyla

$$\Box^2\phi = \frac{8\pi}{c^2(3+2\omega)} T^{\mu}_{\mu} \tag{XI.2.11}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{c^4\phi} T_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2}\left[\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, \partial_\rho\phi\, \partial^\rho\phi\right]$$
$$-\frac{1}{\phi}\left[\partial_\mu\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box^2\phi\right] \tag{XI.2.12}$$

şekline bürünürler. *BRANS-DİCKE* tipi skaler-tansörel alan teorilerinde, bir geometrik büyüklük olan $g_{\mu\nu}$ temel tansörünün bileşenlerini gene gravitasyon potansiyelleri olarak yorumlamak mümkün ise de ϕ ye tekaabül eden geometrik hiç bir büyüklük yoktur. Bu teorilerde, *EİNSTEİN*'ın Genel Rölâtivite Teorisinde olduğu gibi fiziğin aynı derecede geometrileştirilmiş olduğundan artık söz edilemez. Bu durum, skaler-tansörel alan teorilerinin Genel Rölâtivite Teorisine nazaran estetik yönünden noksan olduklarını ortaya koymaktadır.

BRANS-DİCKE teorisinin (XI.2.12) ile verilen alan denklemlerinin

$$S = \int \left\{ \phi R + \frac{8\pi}{c^4} L_g + \frac{\omega}{\phi}\, \partial_\alpha\phi\, \partial_\beta\phi\, g^{\alpha\beta} \right\} \sqrt{-g}\, d^4x$$

ile verilen bir aksiyon integralinin varyasyonunun sıfır kılınmasıyla ifâde edilen bir varyasyon ilkesi aracılığıyla da elde edilebileceği gösterilir ($\delta S = 0$ hesabının ayrıntıları için *bk.* [9])

Eğer $\omega \gg 1$ olursa

$$\Box^2\phi \sim O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

ve

$$\phi = \langle \phi \rangle + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \sim \frac{1}{G} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

olacaktır. Buradan hareketle $\omega \gg 1$ hâlinde (XI.2.12) için

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

yazılabilir. Buradan da $\omega \rightarrow \infty$ için *BRANS-DİCKE* teorisinin alan denklemlerinin *EİNSTEİN* teorisinin alan denklemlerine indirgeneceği görülmektedir.

Burada, ayrıca, 1963 de *FEZÂ GÜRSEY* tarafından teklif edilmiş ve motivasyonu da tıpkı *BRANS-DİCKE*'ninki gibi *MACH İlkesinin* kesin bir matematik formalizme kavuşturulması olan fakat daha çok kozmolojik bir kavramsal çerçeveden kaynaklanan bir skaler-tansörel teorinin varlığına işâret etmek istiyoruz. Bizzat *GÜRSEY*'in gösterdiği gibi bu teori, eylemsizlik sistemlerinde, *BRANS-DİCKE* tipi teorilerin $\omega = 6$ ya tekaabül eden özel bir hâli gibi telâkki olunabilmektedir [28].

(XI.3) TEORİNİN GÖZLEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

BRANS-DİCKE teorisinden, gözlemlerle karşılaştırılabilecek sonuçlar çıkartılabilmesi için: 1) (XI.2.12) alan denklemlerini, tıpkı *SCHWARZSCHİLD* metriği için olduğu gibi merkezî, küresel ve hareketsiz bir cismin kendi cıvarında hâsıl ettiği eşyönlü ve statik gravitasyon alanı hâli için çözmek; ve 2) böylece elde edilen metriğin Güneşe uygulanmasıyla: a) Merkürün perihel noktasının presesyonunun, b) ışığın Güneşin gravitasyon alanındaki maksimum sapmasının, c) zaman aralıklarının Güneşin gravitasyon alanında uzamasının (gravitasyon kökenli spektrum kaymasının), ve d) ışığın Güneşin gravitasyon alanından geçiş süresinin bu teoriye göre haiz olacakları değerleri hesaplamak gereklidir. Bu değerlerin gözlenenlerle ve *EİNSTEİN* teorisinin öngörmüş olduklarıyla karşılaştırılması ise *BRANS-DİCKE* teorisi ile *EİNSTEİN* teorisinden hangisinin gerçeği daha iyi yansıttığına ışık tutacaktır.

Burada, *BRANS-DİCKE* teorisinden hareketle merkezî ve küresel bir cismin gravitasyon alanına tekaabül eden metriğin ve bu metrikten de hareketle yukarıda sözü edilen dört teste ilişkin teorik değerlerin nasıl elde edildiklerinin ayrıntılarına girmeyeceğiz. Yalnızca bu sonuçların, *EDDİNGTON*, [10], *ROBERTSON* [11] ve *SCHİFF* [12, 13] tarafından öngörülmüş ve *BAİERLEİN* [14], *NORDTVEDT* [15], *WİLL* [16] ve *WİLL* ve *NORDTVEDT* [17] tarafından geliştirilmiş olan **parametreli NEWTON-sonrası formalizmi** (*PNS formalizmi*) diye bilinen bir yöntem aracılığıyla elde edilmiş olduklarını da kaydedelim [18, 19]. Gravitasyonun Diğer Rölâtivist Teorileri'ne değineceğimiz XII. Bölümde *PNS formalizmi*nin mâhiyeti hakkında da bilgi verilecektir.

Şimdi bu dört test ile ilgili olarak *BRANS-DİCKE* teorisinin öngördüğü teorik sonuçları vermeden önce Merkürün perihel noktasının, §(I.2) de açıklanmış olduğu vechile, gözlenen presesyon mikdarının gerçeği yansıtıp yansıtmadığı hakkında *DİCKE*'nin ileri sürmüş olduğu şüpheye dikkati çekmek istiyoruz. *DİCKE*, Güneşin basıklığının yâni Güneşin ekvator düzlemine tekaabül eden çapı ile, kutuplarını birleştiren çapı arasındaki farkın gerçekte bilinen değerinden belki de daha büyük olabileceğini ileri sürmüştür. Bu basıklık değeri 1891-1902 arasında Göttingen'de yapılmış çok hassas ölçümler sonucu $(0{,}36 \pm 0{,}78).10^{-5}$ olarak belirlenmiş bulunmaktadır. *DİCKE* ve arkadaşları ise bu şüphelerini tahkik etmek üzere 1966 da yaptıkları bir dizi ölçüm sonucu Güneşin basıklığı için $(5{,}0 \pm 0{,}7).10^{-5}$ değerini bulmuşlardır [20, 21]. Güneşin bu basıklığının ise Merkürün hareketi üzerinde fazladan bir pertürbasyon icrâ edeceği ve bu pertürbasyonun Merküre, fazladan, yüzyılda 3,4″ lik bir presesyon vereceği hesaplanmıştır. Bu göz önünde tutulacak olursa Merkürün klâsik *NEWTON* gravitasyon teorisiyle açıklanamıyan presesyonu, sâdece, yüzyılda 39,71″ ye indirgenmektedir. Bu değer *EİNSTEİN* teorisinin öngördüğü teorik değerden % 8 kadar daha düşüktür. Fakat *BRANS -DİCKE* teorisinde Merkürün perihelinin dolanım başına presesyonu

$$(\delta\varphi)_{BD} = \frac{6\pi G M_\odot}{c^2 a(1-e^2)}\left(\frac{3\omega+4}{3\omega+6}\right) = (\delta\varphi)_E\left(\frac{3\omega+4}{3\omega+6}\right) \qquad \text{(XI.3.1)}$$

ile verildiğinden bu değer, ω kuplâj sâbitinin değerinin

$$\omega = 6{,}4 \qquad \text{(XI.3.2)}$$

olması hâlinde *BRANS* ve *DİCKE*'nin öngördükleri bir değer olur [22]. Ancak, Güneşin *DİCKE*'nin tesbit ettiğini sandığı kadar bir basıklığa sâhip olması hâlinde, dış yüzey tabakasının yaklaşık 25 günde bir devir olarak gözlenen rotasyon hızına karşılık Güneşin içinin bir ya da iki günde bir devirlik bir rotasyon hızına sâhip olması gerekeceği hesaplanmıştır. Bu her iki rotasyon hızı arasındaki farkı açıklayabilmek üzere *DİCKE*, Güneşin çok ayrıntılı ve girift bir modelini geliştirmek zorunda kalmıştır [23, 21]. Ancak, *WEİNBERG*'in ifâdesine göre [24] böyle bir Güneş modelinin dinamik bakımdan kararlı olduğu kesin değildir.

Apayrı bir mesele de, Güneşin görünen yüzeyi *DİCKE*'nin tesbit ettiği kadar basık olsa bile, bunun Güneşin içindeki kütle dağılımı ve Güneşin gravitasyon alanı hakkında ne ifâde edebileceği hususudur. *DİCKE*, kurduğu Güneş modelinde, Güneşin gözlenen yüzeyinin Güneşin gravitasyon alanının bir eşpotansiyel yüzeyi ile çakıştığını varsaymıştır. Güneşin içindeki kütle dağılımını bilmediğimizden bu varsayım gerçeği, pekâlâ, yansıtmıyor da olabilir.

DİCKE'nin teklif ettiği Güneş modeliyle ilgili olarak ortaya çıkan bu ve bunlara benzer meseleler, yalnızca Merkürün perihelinin presesyonuna dayanarak *BRANS -DİCKE* teorisinin *EİNSTEİN* teorisine tercih edilmesi hususunda fizikçileri büyük bir temkine sevketmiş ve her iki teori arasında kesin bir tercihin ancak diğer testlerin sonuçlarını da gözden geçirdikten sonra yapılabileceği kanaatini pekiştirmiştir.

Güneşin gravitasyon alanından geçen bir ışığın mâruz kalacağı Δ maksimum sapma mikdarı için *BRANS-DİCKE* teorisi

$$\Delta_{BD} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) = \Delta_E \, . \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) \qquad \text{(XI.3.3)}$$

değerini öngörmektedir. *BRANS-DİCKE* teorisinde ω kuplâj sâbiti için kabul edilen (XI.3.2) değeri göz önünde tutulduğunda

$$\Delta_{BD} = 1{,}64'' < \Delta_E = 1{,}75''$$

bulunur. Ancak bu test, her iki teori arasında kesin bir tercih yapılabilmesi için müsait değildir. Zirâ bu sapma için çeşitli gözlemlerde tesbit edilen değerler 1,3″ ilâ 2,7″ arasında dağılmakta olup gözlem verilerinin çoğu da 1,7″ ilâ 2″ arasındaki aralıkta toplanmaktadırlar [25].

Gravitasyon kökenli spektrum kayması da, her iki teori arasında bir tefrik ve tercih unsuru olamamaktadır; zirâ gravitasyonun bütün metrik teorileri bu olay için aynı teorik değeri öngörmektedirler.

Geriye kalan en son ümit, ışığın Güneşin gravitasyon alanından geçiş süresinin ölçülmesinin her iki teori arasında kesin ve nihaî bir tercih kriteri oluşturabilmesi ümididir. Bu münâsebetle iki cins deney yapılmıştır. Pasif deneyler Arzdan, üst konjonksiyon durumunda bulunan Venüse ya da Merküre elektromagnetik pulslar gönderip bunların Güneşin gravitasyon alanını geçip söz konusu gezegende yansıdıktan sonra tekrar Arza dönmelerini kaydedip gidiş-dönüş sürelerini tesbitten ibârettir. Aktif denilen deneylerde ise gönderilen elektromagnetik pulsları yansıtan bir gezegenin yüzü değil fakat bir uzay aracına bu iş için yerleştirilmiş olan elektronik bir düzendir. Pasif deneylerin mahzûru gezegenin yüzündeki engebelerin hâsıl ettiği pertürbasyonlar ve yansıyan pulsların zayıflığıdır. Aktif deneylerin mahzûru da Güneş rüzgârı ve Güneşin radyasyon alanındaki dalgalanmalar dolayısıyla uzay aracının hareketinin mâruz kaldığı pertürbasyonlardır.

Bütün bu deneyler, *PNS formalizmi* çerçevesi içinde bir kütlenin oluşturduğu uzay-zaman eğriliğinin bir çeşit ölçüsü olan γ parametresinden hareketle $(1+\gamma)/2$ büyüklüğünü ölçmeye yöneliktir. *EİNSTEİN* teorisinde $\gamma = 1$ ve dolayısıyla $(1+\gamma)/2 = 1$; *BRANS-DİCKE* teorisinde de $\gamma = (\omega + 1)/(\omega + 2) = 0{,}88$ ve $(1 + \gamma)/2 = 0{,}94$ tür. 1969 dan 1972 ye kadar yapılmış olan pasif deneylerin temin ettiği değerlerin ağırlıklı ortalamasının

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma) = 0{,}99 \pm 0{,}03$$

olduğu tesbit edilmiştir [26]. *MARİNER VI* ve *MARİNER VII* uzay araçlarıyla yapılan iki aktif deneyde ise

$$\frac{1}{2}(1+\gamma) = \begin{cases} 1{,}02 \pm 0{,}05 \\ 1{,}00 \pm 0{,}04 \end{cases}$$

sonuçları elde edilmiştir.

En son olarak 1975 de *R.A.SRAMEK* ve *E.B.FOMALONT*'u A.B.D.nde Green Bank'daki Ulusal Radyoastronomi Rasathânesinin büyük interferometresi aracılığıyla ve olağanüstü uygun gözlem şartlarında gerçekleştirmiş oldukları, bu gibi ölçümler için olağanüstü duyarlı sayılabilecek bir ölçüm de

$$\frac{1}{2}(1+\gamma) = 1{,}00 \pm 0{,}01$$

vermiş [27]. Bu sonuçlar, *EİNSTEİN* teorisiyle $\omega = 6{,}4$ için *BRANS-DİCKE* tipi skaler-tansörel teoriler arasında, *EİNSTEİN* teorisi lehinde bir tercih için yeterli görülmektedir.

Son bir husus olarak, deney verilerine göre gravitasyonun skaler-tansörel teorileri arasında kuplâj sâbitinin $\omega = 6{,}4$ değerine tekaabül eden *BRANS-DİCKE* teorisinin gerçeği *EİNSTEİN* teorisinden daha iyi yansıtamadığına hükmetmemize rağmen bunun, bütün skaler-tansörel gravitasyon teorilerinin mutlak olarak yanlış olduklarına ve *EİNSTEİN* teorisinin de mutlak olarak gerçeği yansıttığına hükmetmek anlamına gelmediğine de işâret etmek istiyoruz. Nitekim gözlem ve ölçümlerimiz, şimdilik, ω nın çok mu büyük yoksa sonsuz mu olduğu hususunda kesin bir yargıya varmamız için gereği kadar duyarlı değildirler. *EİNSTEİN* teorisi ise skaler-tansörel gravitasyon teorisinin ancak $\omega \to \infty$ için sınır hâli olarak telâkkî edilebilmektedir.

REFERANSLAR

[1] C.H.BRANS, R.H.DİCKE, *Phys. Rev.*, **124**, 925, (1961).

[2] R.H.DİCKE, *Phys.Rev.*, **125**, 2163, (1962).

[3] R.H.DİCKE, The many faces of Mach, **Gravitation and Relativity** (ed.H. Y.CHIU, W.F. HOFFMANN); W.A.Benjamin, İnc.; New York, Amsterdam; s. 121-141; (1964).

[4] R.H.DİCKE, The significance for the solar system of time-varying gravitation, a.g.e., s. 142-174.

[5] BERKELEY, **The Principles of Human Knowledge**; A.Brown and Sons, London; (1937).

[6] E.MACH, **The Science of Mechanics**; 5th english ed.; La Salle, İll.; 1. Bölüm; (1942).

[7] D.SC AMA, *M.N.R.A.S.*, **113**, 34-42; (1953).

[8] A.Y.ÖZEMRE, bu kitap, XII. Bölüm.

[9] R.J.ADLER, M.J.BAZİN, M.SCHİFFER, **Introduction to General Relativity**; 2. baskı; Mc Graw Hill Book Comp.; s.381-383; (1975).

[10] A.S.EDDİNGTON, **The Mathematical Theory of Relativity**; Cambridge University Press, London; (1922).

[11] H.P.ROBERTSON, **Space Age Astronomy** (ed. A.J.DEUTSC, W.B.KLEMPERER); s.228; (1962).

[12] L.İ.SCHİFF, Relativity Theory and Astrophysics, **Relativity and Cosmology** (ed.J.EHLERS), Providence, R.I.; (1967).

[13] L.I.SCHİFF, *Proc.Nat.Acad.Sci.*, **46**, 871, (1960).

[14] R.BAİERLEİN, *Phys.Rev.*, **162**, 1275, (1967).

[15] K.NORDTVEDT Jr., *Phys.Rev.*, **169**, 1017, (1968).

[16] C.M.WİLL, *Astrophys.J.*, **163**, 611, (1971).

[17] C.M.WİLL, K.NORDTVEDT, Jr., *Astrophys. J.*, **177**, 757, (1972).

[18] C.M.WİLL, The theoretical tools of experimental gravitation, **Experimental Gravitation**, (ed.B.BERTOTTİ) ; Academic Press ; New York, London ; s.1-110 ; s.1-110 ; (1974).

[19] S.WEİNBERG, **Gravitation and Cosmology-Priniples and Applications of the General Theory of Relativity**; John Wiley and Sons Inc; New York, London, Sydney, Toronto; s.244-248; (1972).

[20] R.H.DİCKE, H.M.GOLDENBERG, *Phys.Rev.Letters*, **18**, 313, (1967).

[21] R.H.DİCKE, Relativity and Solar Oblateness, **Experimental Gravitation,** s. 200-234.

[22] S.WEİNBERG, a.g.e., s.197.

[23] R.H.DİCKE, *Astrophys.J.*, **159**, 1, (1970).

[24] S.WEİNBERG, a.g.e., s. 200.

[25] S.WEİNBERG, a.g.e., s.192-194.

[26] J.LEQUEUX, La Relativité Générale Verifiée, **La Recherche, 4**, s.482-483, (1973).

[27] **La Recherche, 6**, s.657, (1975).

[28] F.GÜRSEY, *Ann. of Phys.*, **24**, 211-242, (1963).

XII. BÖLÜM

Se non è vero, è bene trovato!

DİĞER GRAVİTASYON TEORİLERİ

(XII.I) GRAVİTASYON TEORİLERİNİN GEÇERLİLİK ÖLÇÜTLERİ

Epistemolojik görüş açısından, mevcûd gravitasyon teorilerinin geçerliliklerinin ölçütlerini

1) iç-tutarlılık,
2) tamlık, ya da kendi kendine yeterlilik,
3) deney ve gözlemlerle uyumluluk

olarak vaz etmek uygundur.

Bir teorinin iç-tutarlılığa sâhip olması demek, birbirleriyle mantıksal ya da fiziksel açıdan çelişik olan sonuçlara yol açmaması demektir. Gravitasyon teorileri arasında iç-tutarsızlığa sâhip bir teori olarak, II. Bölümde, *KUSTAANHEİMO*'nun teorisini görmüştük. Bu teorinin ışığın dalgalardan oluştuğu kabul edildiğinde gravitasyon kökenli kızıla kayma için öngördüğü değer, fotonlar söz konusu olduğunda öngördüğü diğerden farklı idi. İç-tutarlılıktan yoksun bir başka gravitasyon teorisi de *BİRKHOFF*'unkidir. Gene II. Bölümde değinmiş olduğumuz gibi *BİRKHOFF* teorisi farklı iki çeşit hareket denklemine yol açmaktadır.

İç-tutarlılığı olmayan gravitasyon teorilerine üç örnek daha vermek mümkündür. Bunlardan biri *HÜSEYİN YILMAZ*'ın 1958 tarihli teorisidir [1]; bu teoriye göre, aynı bir dinamik sisteme alan denklemlerinin çözümü olarak ∞^1 adet $g_{\mu\nu}$ tekaabül ettirilebileceği *ÖZEMRE* tarafından gösterilmiştir [2]. Diğer teori gene *H.YILMAZ*'ın, fakat 1971 tarihli teorisidir [3]; bu teoride uzay-zamanın metriğini tansör alanları cinsinden veren denklem integre edilebilir bir diferansiyel denklem değildir [4a]. Son örnek ise *FİERZ* ve *PAULİ*'nin 1939 da yaptıkları spini 2 olan tâneciklerin (gravitonların) alan teorisidir [5, 6]; bu teorinin alan denklemlerinin bütün cisimlerin *LORENTZ* referans sitemlerinde yalnızca doğrular boyunca hareket etmelerini içermesine karşılık aynı teorinin hareket denklemleri, gravitasyon alanlarının cisimlerin hareketlerinin yörüngelerini doğrusal yörüngelerden saptıracağını öngörmektedir.

Tam olmayan gravitasyon teorilerine de, *LORENTZ*-invaryanslı gravitasyon teorilerini gözden geçirdiğimizde değinmiştik. II. Bölümde vermiş olduğumuz tanım uyarınca *HOYLE* ve *NARLİKAR*'ın teorisi de tam sayılamıyacak olan bir teoridir [7, 8]. Bu teori Evrenin *BONDİ* ve *GOLD* tarafından ileri sürülmüş olan **durağan hâl teorisi**ne temel olmak üzere inşâ edilmiş olup, *EİNSTEİN* denklemlerini

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \varkappa T_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}$$

şeklinde, ikinci mertebeden simetrik bir tansörel $C_{\mu\nu}$ yaratım alanının ithâliyle değiştirmektedir. Ancak, teori, bu *C*-alanının tânecik yaratma hızını veren bir denklemi içermediğinden eksik bir teoridir.

Gravitasyonun rölâtivist teorilerini a) metrik teoriler, ve b) metrik olmayan teoriler diye de sınıflandırmak mümkündür. Metrik bir gravitasyon teorisi: 1) temelindeki uzay-zaman varyetesinin bir metrikle donatılmış olduğu, ve 2) bu metriğin de eşdeğerlik ilkesine uyduğu bir teoridir. II. Bölümde *BELİFANTE-SWİHART* teorisinin metrik olmayan bir gravitasyon teorisine örnek olduğunu gördüktü. Metrik gravitasyon teorilerini birbirlerinden farklı kılan yalnızca metriğin oluşum kaanûnudur. Genel Rölâtivite Teorisinde metrik, doğrudan doğruya, maddesel enerji-impuls tansörü ve gravitasyon kökenli olmayan diğer alanlar aracılığıyla üretilir. *P.JORDAN*'ın teorisinin özel bir hâli olan ve XI. Bölümde incelemiş olduğumuz *BRANS-DİCKE* teorisinde madde, ve gravitasyon kökenli olmayan diğer alanlar önce skaler bir ϕ alanı yaratmakta ve sonra bu ϕ alanı, bu sefer, maddeyle ve diğer alanlarla etkileşerek tansörel gravitasyon alanını, yâni metriği doğurmaktadır. Çok daha dolmbaçlı bir metrik teori ise *W.T.Nİ* tarafından tasarlanmıştır. [10]. Bu teori öklitselimsi bir $\eta_{\mu\nu}$ metriği ile evrensel bir zaman koordinatı ihtivâ etmekte olup, önce, madde ve gravitasyon kökenli olmayan diğer alanlarla etkileşerek skaler bir ϕ alanının doğmasına sebep olmaktadır; sonra da $\eta_{\mu\nu}$ evrensel zaman ve skaler ϕ alanı ile birlikte eşdeğerlik ilkesinin geçerliliğini sağlayan $g_{\mu\nu}$ metriğini doğurmaktadırlar.

Metrik bir teori olmayan ve sonuçları bakımından, bugünün teknolojik imkânları çerçevesinde, Genel Rölâtivite Teorisinin denel sonuçlarından farklılık göstermeyen gravitasyon teorisi *E.CARTAN*'ın burulmalı ilişkisel bir uzay-zaman çerçevesi içinde kurmuş olduğu teoridir [11-13].

Bu durumda, *CARTAN* (1869-1915) teorisinden sarf-ı nazar edilirse, aslında Genel Rölâtivite Teorisine ciddî rakip olabilecek teorilerin hepsi de metrik gravitasyon teorileridir. Bunların deney ve gözlemler karşısında bir karşılaştırılmasını yapmak üzere XI. Bölümde söz konusu etmiş olduğumuz **parametreli NEWTON-sonrası formalizmi** (PNS formalizmi) hakkında ek bilgi edinelim.

(XII.2) PNS FORMALİZMİ [4,.6b, 14, 15]

Bugünkü teknolojiyle Genel Rölâtivite Teorisinin denel olarak sınanması hep Güneş Sisteminin sınırları içinde olmuştur. Bu itibarla metrik gravitasyon teorileri arasında bir tercih için en uygun bölge gene Güneş Sistemi olacaktır. Hâlbuki Güneş Sistemindeki gravitasyon alanı

$$\left| \frac{\Phi}{c^2} \right| = |\text{NEWTONsal potansiyel}| \lesssim 10^{-6}$$

gibi zayıf bir değere sâhip olup bu bölgedeki çekim alanını üreten madde de çok yavaş hareket etmektedir; sistemin kütle merkezine göre bir cismin hızının karesinin c^2 ye oranı ise

$$\frac{v^2}{c^2} \lesssim 10^{-7}$$

mertebesindedir. Bu durum *EİNSTEİN* denklemlerinde zayıf alan ve yavaş hareket yaklaşıklıklarının yapılmasına müsaittir. Buna göre eğer *NEWTONsal* potansiyel, hız, yoğunluk, basınç, enerji-impuls tansörü ve özgül iç enerji gibi büyüklükler parametrik bir biçimde serilere açılırlarsa böyle bir **zayıf alan + yavaş hareket** açılımı: 1) sıfırıncı mertebede; boş, öklitselimsi uzay-zamanı, 2) birinci mertebede: Güneş Sisteminin *NEWTONsal* tasvirini, ve 3) ikinci mertebede ise bu *NEWTONsal* tasvire eklenen *NEWTON*-sonrası düzeltmeleri verir. Bu son kademede ifâdeler γ, β, α_1, α_2, α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 diye gösterilen 9 parametre ihtivâ ederler. Bunlara **NEWTON-sonrası yaklaşım parametreleri** adı verilir. Metrik tansörün, enerji-impuls tansörünün ve hareket denklemlerinin bileşenlerinin açık ifâdelerini bu parametreler cinsinden açıkça ifâde etmek kaabildir [4b]. Ayrıca bu parametrelerin fiziksel olarak neye delâlet ettiklerini yorumlamak da mümkündür. Buna göre

γ : birim kütlenin doğurduğu uzay eğriliğinin bir ölçüsüdür;

β : gravitasyon alanının non-lineer olmasının bir ölçüsüdür;

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\right\}$$ glôbal korunum kaanunlarının geçersizliklerinin ölçüleridir;

$$\left.\begin{array}{l}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\\ \zeta_4\end{array}\right\}$$ Ayrıcalıklı evrensel bir referans sisteminin var olmasının ölçüleridir.

Bütün metrik teoriler kendi aralarında, kuvvetli alan sınırında, farklı olsalar bile hemen hepsi de PNS formalizmi için aynı şekli haizdirler. Bunların birbirlerinden farklı olmalarını temin eden, yalnızca, söz konusu 9 parametrenin her teori için aldığı farklı değerlerdir. Özellikle bunlar arasından 6 parametrenin değerlerine göre metrik gravitasyon teorileri, P^i ile momentum 3-lü vektörünün ve J^{ij} ile de açısal momentuma tekaabül eden çarpık bakışımlı 3 × 3 lük tansörü göstermek sûretiyle, şöyle bir sınıflandırılmaya tâbî tutulabilirler:

$\{\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3\ \zeta_4\}$	$\{\alpha_1\ \alpha_2\}$	Teorinin Tipi	Korunan Büyüklükler
Hepsi sıfır	Hepsi sıfır	Tümüyle korunumlu	P^i , J^{ij}
Hepsi sıfır	Hepsi sıfır değilse	Yarı-korunumlu	P^i
Hepsi sıfır değilse	Herhangi bir değer	Korunumsuz	P^0

Söz konusu bu 9 parametreye henüz özel değerler verilmemiş hâliyle PNS formalizmi, bütün metrik gravitasyon teorilerinin *NEWTON*-sonrası sınırlarını özel hâller olarak ihtivâ eden süpermetrik bir gravitasyon teorisi görünümündedir. Buna göre bütün metrik teorilerin Güneş Sisteminde aynı cins gözlenebilir olayları öngörebilecekleri söylenebilir. Ancak her olayın vüs'ati hangi metrik teori göz önünde tutuluyorsa o teoriye tekaabül eden NS parametrelerinin değerlerine bağlı olacaktır. 196. sayfadaki cetvelde bazı metrik gravitasyon teorilerinin NS parametrelerinin değerlerinin Genel Rölâtivite Teorisininkilerle mukaayesesi verilmektedir. Burada **katmanlı teori** deyimi zamana dik olan konform uzay katları ihtivâ eden teorilere delâlet etmektedir.

PNS formalizmi çerçevesi içinde bir gezegenin perihelinin ilerleme mikdarı

$$(\delta\varphi)_{PNS} = \frac{1}{3}(2 - \beta + 2\gamma)\,(\delta\varphi)_{GRT}$$

ve ışığın gravitasyon alanındaki maksimal sapması da

$$(\Delta)_{PNS} = \frac{1}{2}(1 + \gamma)\,(\Delta)_{GRT}$$

	γ	β	α_1	α_2	α_3	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
1) GENEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİ	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2) *BRANS-DİCKE* TEORİSİ	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	1	0	0	0	0	0	0	0
3) VEKTÖREL-METRİK TEORİ	1	1	0	$\frac{K^2}{1+\frac{1}{2}K^2}$	0	0	0	0	0
4) *Nİ*'nin GENEL KONFORM TEORİSİ	—1	1—q	0	0	0	0	$4+p-2q$	0	0
5) a.*PAPAPETROU*'nun KATMANLI TEORİSİ	1	1	—8	—4	0	0	0	0	0
b.*H.YILMAZ*'ın TEORİSİ	1	1	—8	0	—4	0	—2	0	—2
6) *WHİTEHEAD* TEORİSİ	1	1	0	0	0	—6	0	—1	—1

ile verilmektedir. Metrik teoriler (ve *CARTAN*'ın metrik olmayan teorisi) için ışığın gravitasyon kökenli kızıla kayma mikdarı hep aynıdır.

Şimdi bütün gravitasyon teorilerinin geçerliliğini incelersek ortaya 197. sayfadaki gibi sinoptik bir cetvel çıkar. Bu duruma göre hâlen birbirlerine rakip sayılabilecek olan teoriler şunlardır :

1) *EİNSTEİN*'ın 1916 tarihli Genel Rölâtivite Teorisi
2) *CARTAN*'ın metrik olmayan teorisi
3) $\omega > 6{,}4$ için *BRANS-DİCKE* teorisi
4) $\omega > 6$, $\Lambda = 0$ için *BERGMANN-WAGONER-NORDTVEDT*'in skaler-tansörel teorisi [23-25].
5) $K = 0$ için vektörel metrik teori [26].

Bu teorilerden son üçü, ancak ihtivâ ettikleri kuplâj sâbitlerinin usturuplu bir biçimde seçilmiş olmaları şartı altında Genel Rölâtivite Teorisinin öngörmüş olduğu sonuçları verebilmektedirler. *CARTAN* teorisine gelince onun da *EİNSTEİN* teorisinin öngördüğü sonuçlara, daha girift bir geometrik temelden (burulmalı ilişkisel uzay kavramından) hareket ederek varmış olduğunu söylemiştik. Buna göre yaklaşık iki düzine rakip teoriye rağmen *EİNSTEİN*'ın Genel Rölâtivite Teorisinin iç-tutarlılığı, kendi kendine yeterliliği ve kavramsal basitliği ile deney ve gözlemlerle uyumu bakımından 60 yıldır başta gitmekte olduğunu söyleyebiliriz. Gelecekte, teorileri yeni testlere tâbî tutmak ve de şimdiki testlerin duyarlılıklarını arttırmak sûretiyle bu beş rakip arasında belki en son **pratik** seçimi yapmak mümkün olabilecektir.

ÖLÇÜT	ELENEN TEORİLER
İÇ-TUTARLILIK	*POİNCARÉ, ROBERTSON-NOONAN, BİRKHOFF, YILMAZ* (1958), *YILMAZ* (1971) *FİERZ-PAULİ, WHİTROW-MORDUCH* ($p \neq 0$), *KUSTAANHEİMO*
TAMLIK	*HOYLE-NARLİKAR* (1964), *WHİTROW-MORDUCH*
EÖTVÖS-DİCKE-BRAGİNSKİ DENEYİ, EŞDEĞERLİK İLKESİ	*NEWTON, BELİFANTE-SWİHART*
GRAVİTASYON KÖKENLİ KIZILA KAYMA	*ABRAHAM, NORDSTRÖM, MİLNE LİTTLEWOOD-BERGMANN*
IŞIĞIN SAPMASI VE RADAR TESTİ	*EİNSTEİN* (1912), Bütün konform teoriler: *NORDSTRÖM-EİNSTEİN-FOKKER, Nİ*'nin konform teorileri, *BRANS-DİCKE* ($\omega \leq 6{,}4$)
PERİHEL İLERLEMESİ	*ROSEN* [16, 17] *COLEMAN* [18], *PAPAPETROU* [19-21], *PAGE-TUPPER* [22], *Nİ*'nin katmanlı teorileri [16].
GALAKSİNİN DOĞURDUĞU GEL-GİT OLAYLARI	*WHİTEHEAD*
ONTOLOJİK BASİTLİK (Birden fazla alanlı teoriler)	*BRANS-DİCKE* tipi teoriler ($\omega > 6{,}4$), *BERGMANN-WAGONER-NORDTVEDT* tipi teoriler ($\omega > 6$, $\Lambda = 0$), Vektörel Metrik Teoriler ($K = 0$)
GEOMETRİK BASİTLİK	*CARTAN*
BÜTÜN BU ÖLÇÜTLERE TAKILMAYAN YEGÂNE TEORİ	*EİNSTEİN*'IN GENEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİ

REFERANSLAR

[1] H.YILMAZ, *Phys. Rev.*, **111**, 1417, (1958).

[2] A.Y.ÖZEMRE, *Rev.Fac.Sci.İstanbul, Série: C*, **33**, 57-63, (1969).

[3] H.YILMAZ, *Phys. Rev. Letters*, **27**, 1399, (1971).

[4] C.M.WİLL, The Theoretical Tools of Experimental Gravitation; **Experimental Gravitation** (Ed.B.BERTOTTİ); Academic Press; New York, London; (1974), a) s.10, b) s. 26.

[5] M.FİERZ, W.PAULİ, *Proc. Roy. Soc.*, **173 A**, 211-232, (1939).

[6] C.M.MİSNER, K.S.THORNE, J.A.WHEELER, **Gravitation**; W.H.Freeman and Comp.; (1973); a) 181-186, b) 1067-1131.

[7] F.HOYLE, J.NARLİKAR, *Proc.Roy.Soc.*, **273 A**, 1, (1963).

[8] F.HOYLE, J.NARLİKAR, *Proc.Roy.Soc.*, **278 A**, 465, (1964).

[9] H.BONDİ, T.GOLD, *M.N.R.A.S.*, **108**, 252, (1948).

[10] W. -T.Nİ, *Astrophys.J.*, **176**, 769-796, (1972).

[11] E.CARTAN, *Comptes Rend. Acad. Sci. Paris*, **174**, 593-595, (1922).

[12] E.CARTAN, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **40**, 325-412, (1923); idem., **41**, 1-25, (1924).

[13] A.TRAUTMAN, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (Math., Astr., Phys.)*, **20**, 185-190, (1972).

[14] C.M.WİLL, Einstein on the Firing Line; *Physics Today*, October 1972; 23-29.

[15] S.WEİNBERG, **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**; John Wiley and Sons; New York, London, Sydney, Toronto; 211-249, (1972).

[16] N.ROSEN, *Phys. Rev.*, **D3**, 2317, (1971).

[17] N.ROSEN, *Gen. Rel. and Grav.*, **2**, 129, (1971).

[18] C.J.COLEMAN, *Journ. Phys.*, **A4**, 611, (1971).

[19] A.PAPAPETROU, *Math. Nachr.*, **12**, 129, (1954).

[20] A.PAPAPETROU, *Math. Nachr.*, **12**, 143, (1954).

[21] A.PAPAPETROU, *Zeits. Phys.*, **139**, 518, (1954).

[22] C.PAGE, .B.O.J. TUPPER, *M.N.R.A.S.*, **138**, 67, (1968).

[23] P.G.BERGMANN, *Int.Journ. Theor. Phys.*, **1**, 25, (1968).

[24] R.V.WAGONER, *Phys. Rev.*, **D1**, 3209, (1970).

[25] K.NORDTVEDT, *Astrophys.J.*, **161**, 1059, (1970).

[26] C.M.WİLL, K.NORDTVEDT, *Astrophys.J.*, **177**, 757, (1972).

İÇİNDEKİLER

IV. BÖLÜM

GENEL RÖLÂTİVİTENİN GEOMETRİK TEMELLERİ

V. BÖLÜM

ALAN DENKLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

VI. BÖLÜM

ALAN DENKLEMLERİNİN SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMLERİ; GENEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİNİN DENEY VE GÖZLEMLER YOLUYLA SINANMASI

XII. BÖLÜM

DİĞER GRAVİTASYON TEORİLERİ