TEORİK FİZİK DERSLERİ

Dizinin Yöneticisi: AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

"Teorik Fizik Dersleri" şimdilik 6 sı Lisans ve 6 sı da Lisansüstü düzeyinde 12 cild metin kitabı ile 15 cild de çözümlü problem kitabından oluşan bir dizi olarak plânlanmış bulunmaktadır.

METİN KİTAPLARI:

Lisans Düzeyinde

1. **Fizikte Matematik Metotlar**: A.Y. Özemre (1. *baskısı İTÜ Yayınları No.* 826, 1971; *genişletilmiş* 2. *baskısı hazırlanıyor*).
2. **Klâsik Teorik Mekanik**; A.Y. Özemre (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No.* 132, 1976).

3/B **Kuvantum Mekaniğinin Temel İlkeleri**; A. Ferendeci (*İst.Üniv. Fen. Fak. Yay. BASKIDA*).

4. **Elektrodinamik**; A. Y. Özemre (*HAZIRLANIYOR*).
5. **Isı Teorisi**; A.Y. Özemre (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No.* 140, 1977).
6. **Özel Rölâtivite Teorisi**; A.Y. Özemre ve E.M. Rıza (*HAZIRLANIYOR*).

Lisansüstü Düzeyinde

7. **Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri**; A.Y. Özemre (*BASKIDA*).
8. **Kozmolojiye Giriş**; A.Y. Özemre (*BASKIDA*).
9. **İleri Kuvantum Mekaniği**
10. **Çekirdek Teorisi**; Ç. Cansoy (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No.* 143, 1978).
11. **Alan Teorilerine Giriş**
12. **Temel Tânecikler Teorisi**; F. Koıtel (*HAZIRLANIYOR*).

ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTAPLARI:

Dizinin tasarlanan 15 adet Çözümlü Problem Kitabından hâlen baskıda ya da hazırlanmakta olanlar şunlardır:

1/I **Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı Cild I**; E. M. Rıza ve K.G. Akdeniz (*HAZIRLANIYOR*).

1/II **Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı Cild II**; E.M. Rıza (*BASKIDA*).

2/I **Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı**; A.Y. Özemre ve Ş. Zebitayan (*HAZIRLANIYOR*).

3/I **Kuvantum Mekaniği Çözümlü Problem Kitabı**; E.M. Rıza (*BASKIDA*).

5/I **Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı**; A.Y. Özemre ve E. M. Rıza (*İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No.* 147, 1978).

7/I **Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri Çözümlü Problem Kitabı**; Ş. Zebitayan ve A.Y. Özemre (*HAZIRLANIYOR*).

10/I **Çekirdek Teorisi Çözümlü Problem Kitabı**; Ç. Cansoy (*HAZIRLANIYOR*).

TEORİK FİZİK DERSLERİ

CİLD 5/I

ISI TEORİSİ
ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTABI

Dr. AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

Dr. EMİNE M. RIZA

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ

1978

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
YAYINLARINDAN
Sayı : 2522

FEN FAKÜLTESİ
Sayı : 147

TEORİK FİZİK KÜRSÜSÜ
Sayı : 6

Bu kitabın 2000 adetlik birinci basımı İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevinde Ekim 1978 de tamamlanmıştır.

Bu Kitabımızı

Muhterem Hocalar ve Azîz Dostlarımız

Prof. Dr. Sadrettin Tunakan

ile

Prof. Dr. Hilmi Benel'*e*

En İyi Dileklerimizle İthaf Ediyoruz.

A. Y. ÖZEMRE'NİN ESERLERİ

* **Çözülmüş Atom ve Reaktör Fiziği Problemleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1962 (Çeviri).
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 2. Cild**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
* **Geometrik Eşitsizlikler**; Türk Matematik Derneği, 1963 (Çeviri).
* **Contributions à la Théorie de la Diffusion des Neutrons Dépendant du Temps**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1964.
* **Kuvantum Mekaniği Matematiğine Giriş**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1965 (Çeviri).
* **Reaktör Kritikliğinin Nötronların Difüzyon Teorisine Göre Analitik Vecheleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
* **Hızlı Reaktörlerin Fiziksel Analizine Giriş**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild (düzeltilmiş ikinci baskı)**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969.
* **Nükleer Reaktörler Fiziğinin Matematik Temelleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969 (Çeviri).
* **Çağdaş Fiziğe Giriş Çözümlü Problem Kitabı** (*Şehsuvar Zebitayan ile birlikte*); İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
* **Çağdaş Fiziğe Giriş Ders Kitabı, 1. Cild**; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
* **Fizikte Matematik Metotlar Ders Kitabı**; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1971.
* **Klâsik Teorik Mekanik**; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1976.
* **Isı Teorisi**, İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1977.
* **Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı** (*Emine Rıza ile birlikte*), İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1978.
* **Çağdaş Fiziğe Giriş Ders Kitabı (2. tıpkıbasım)**; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1978.
* **Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri**; İst. Üniv. Fen Fakültesi (Baskıda).
* **Kozmolojiye Giriş**; İst. Üniv. Fen Fakültesi (Baskıda).

E. M. RIZA'NIN ESERLERİ

* **Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı** (*A.Y. Özemre ile birlikte*); İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1978.
* **Kuvantum Mekaniği Çözümlü Problem Kitabı**; İst. Üniv. Fen Fakültesi (Baskıda).
* **Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı, Cild II**; İst. Üniv. Fen Fakültesi, (Baskıda).

ERRATA

(* işaretli satırlar sayfanın altından itibaren sayılacaktır.)

Sayfa	Satır	Y a n l ı ş	D o ğ r u
2	8	$\Delta Q = \Delta U + W_{14} + \Delta W_{42}$	$\Delta Q = \Delta U + \Delta W_{14} + \Delta W_{42}$
14	3	z ve dz	z ve $z + dz$
16	17	Z_0 yükseklığinde	z_0 yüksekliğinde
17	12	$P_0 = P_0 \exp [\ldots]$	$P = P_0 \exp [\ldots]$
17	23	alt piston durgunumsu	alt pistonun durgunumsu
18	4	$NMg\ [e^{-\alpha Z_1}\ e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\ S^{-1}$	$NMg\ [e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\ S^{-1}$
18	14	$Z_1 = \alpha^{-1} + \dfrac{Z_1 e^{-\alpha Z_1} - \ldots}{e^{-\alpha Z_1} - \ldots}$	$Z_A = \alpha^{-1} \dfrac{Z_1 e^{-\alpha Z_1} - \ldots}{e^{-\alpha Z_1} - \ldots}$
21	15	merkezindeki basıncı	merkezindeki P_0 basıncı
26	9	$f(T) = C =$ *sâbit*	$f(T) = K =$ *sâbit*
31	6	konan ortaya	ortaya konan
32	21	**olan yay bir**	**olan bir yay**
32	22	**içindebir**	**içinde bir**
34	1	$c(x) - c_v = P \dfrac{dv}{dT} = PS \dfrac{dx}{dT}$	$c(x) - c_v = -P \dfrac{dv}{dT} = -PS \dfrac{dx}{dT}$
36	8	**eettirilen**	**ettirilen**
36	5*	$= -RT \displaystyle\int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v-b} - a \int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v^2}$	$= -RT \displaystyle\int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v-b} + a \int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v^2}$
42	8	$\left(\dfrac{\partial \varkappa_T}{\partial T}\right)_P = \left[\dfrac{\partial}{\partial P}\left(\ldots\right.\right.$	$\left(\dfrac{\partial \varkappa_T}{\partial T}\right)_P = \left[\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\ldots\right.\right.$

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
44	14	**(i) Gazın** a, c, e	**(i) Gazın** b, c, e
49	12	a **hâlinde** b **hâline**	a **hâlinden** b **hâline**
51	7 ve 10	$\ln \frac{T_a}{T_b}$	$\ln \frac{T_b}{T_a}$
58	1	$\ldots + (n_A + n_B) \frac{a}{v_v} + \ldots$	$\ldots + (n_A + n_B) \frac{a}{v_0} + \ldots$
60	8*	$U_2 = A_1^{3/2} \lambda^{-3/2} = \ldots$	$U_1 = A_1^{3/2} \lambda^{-3/2} = \ldots$
64	6*	$\ldots \geqslant \alpha \ln T_1 + \ln T_2$	$\ldots \geqslant \alpha \ln T_1 + \beta \ln T_2$
72	4*	$\ldots = c_v \frac{dT}{T} c + \ldots$	$\ldots = c_v \frac{dT}{T} + \ldots$
73	6	$\Delta s = \frac{R}{\gamma - 1} \ln 3 + \ln 3$	$\Delta s = \frac{R}{\gamma - 1} \ln 3 + R \ln 3$
74	9*	$S = 1 \times 880 \times \ln \frac{373}{300}$	$\Delta S = 1 \times 880 \times \ln \frac{373}{300}$
76	7	önce eşısılı	önce eşsıcaklıklı
81	13	$dS = \frac{\delta Q}{T} = mc_P \ln \frac{dT}{T}$	$dS = \frac{\delta Q}{T} = mc_P \frac{dT}{T}$
88	7	BC eşsısı dönüşümünde	eşısılı BC dönüşümünde
91	1*	$4^{\frac{1}{\gamma - 1}}$	$4^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$
92	1	$4^{\frac{1}{\gamma - 1}}$	$4^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$
103	9	$\ldots + \frac{P}{V} dV - \ldots$	$\ldots + \frac{P}{T} dV - \ldots$
109	7	**genişletilmekdir.**	**genişletilmektedir.**
115	1	$e^x \simeq 0$	$e^x \simeq \infty$
122	8	$\ldots + \frac{2a}{v^3} dv$	$\ldots + \frac{2a}{v^2} dv$
132	8*	$\left(\frac{2a}{RT} + b \right)$	$\left(\frac{2a}{RT} - b \right)$
132	3*	$\frac{2a}{RT} - b < 0$	$\frac{2a}{RT} - b > 0$

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
143	1*	dönüşüme ayrıştıralm.	dönüşüme ayrıştıralım.
148	2*	Tv_u	T
172	8*	Problem V.20 de	Problem V.19 da
173	3*	$c_g - c_s = \frac{dH_g}{dT} = \frac{dH_s}{dT} - \ldots$	$c_g - c_s = \frac{dH_g}{dT} - \frac{dH_s}{dT} - \ldots$
175	14*	$U = \sum_{i=1}^{N} u_i(P, T) = \ldots$	$U = \sum_{i=1}^{N} U_i(P, T) = \ldots$
181	9	$\ldots = \left[\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\alpha}{T}\right)\right]_E$	$\ldots = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\alpha}{T}\right)\right]_E$
187	12	$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{v,T} = \ldots$	$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{v,P} = \ldots$
187	13	$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v,T} = \ldots$	$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v,P} = \ldots$
213	10	$(\Delta v^2) = \ldots$	$(\Delta v)^2 = \ldots$
214	7	$\frac{v}{v_{max}} = V$	$\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2 = V$
216	3	**Hızı 100°K deki hızı**	**100°K deki hızı**
234	4*	**dağılımının ifâdesi**	**dağılımının ifâdesini**
239	9	$Y = C e^{\beta y} y + D e^{-\beta y}$	$Y = C e^{\beta y} + D e^{-\beta y}$
241	9	$E = -\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}\, 2c}$	$E = -F\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}\, 2c}$
241 242	3* ve 5* 1	$(1 - \mathrm{e}^{-2c})$	$\left(1 - \mathrm{e}^{-2c\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}}\right)$
243	6	$\ldots + \mathscr{B}_n R_1^{n\pi/2\alpha}\Big) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}$	$\ldots + \mathscr{B}_n R_1^{-n\pi/2\alpha}\Big) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}$
243	8	$\ldots + \mathscr{B}_n R_1^{n\pi/2\alpha} = \ldots$	$\ldots + \mathscr{B}_n R_1^{-n\pi/2\alpha} = \ldots$
244	9	$[1 + (1 -)^{n-1}]$	$[1 + (-1)^{n-1}]$
246	7*	$+ \mathscr{C}_n R^{1n} + \ldots$	$+ \mathscr{C}_n R_1^{n} + \ldots$
247	1	$\ldots + B_0 + \ln R_2 + \ldots$	$\ldots + B_0 \ln R_2 + \ldots$
255	6	$\ldots = \frac{4T_2}{am\pi}\Big[\int_0^a \ldots$	$\ldots = \frac{4T_2}{am\pi}\int_0^a \ldots$

ERRATA

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
259	1	$B_\beta = \frac{1}{2\pi}\int_{+0}^{\infty}\ldots$	$B_\beta = \frac{1}{2\pi}\int_{+0}^{L}\ldots$
271	2*	$\Big[-x_2(Z'_{2m}-Z_{2n}-Z'_{2n}Z_{2m}\Big]_0^{h_2}$	$\Big[-x_2(Z'_{2m}Z_{2n}-Z'_{2n}Z_{2m})\Big]_0^{h_2}$
279	10*	$\ldots\Big(\sum_{i_N} e^{-\beta\varepsilon_N}\Big)$	$\ldots\Big(\sum_{i_N} e^{-\beta\varepsilon_{i_N}}\Big)$
285	5*	$c_v = 3R\,\genfrac{}{}{0pt}{}{w^2 e^w}{(e^w-1)^2}$	$c_v = 3R\,\frac{w^2 e^w}{(e^w-1)^2}$

ÖNSÖZ

Bu kitap **TEORİK FİZİK DERSLERİ** dizisinin 5. cildi olan **Isı Teorisi**'nde bölüm sonlarındaki 104 alıştırma ve problem ile ayrıca 131 de ilâve problemin ayrıntılı çözümlerini ihtivâ etmektedir. İlâve problemler metinde, **Isı Teorisi** ders kitabındaki problemlerin çözümlerinden yıldızlı bir çizgiyle ayrılan bölümlerde takdim edilmiş bulunmaktadırlar.

Kitapta yer alan toplam 235 alıştırma ve problemin 170 kadarı 1974-1978 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsünde ya Isı Teorisi dersinin uygulamalarında çözülmüş, ya vize yoklamalarında ya da dersin sınavlarında sorulmuş olan problemlerden oluşmaktadır. Bunların bir kısmı da, metni ağırlaştırmış olmamak için ders kitabına ilâve edilmemiş konuların problem şekli altında incelenmesine hasredilmiştir.

Böyle bir kitaptaki problemlerin hepsinin de ilk defa vaz edilip çözülmüş olduğunu sanmak yersizdir. Bunların çoğu Isı Teorisi kitabının "Yararlanılan Kaynaklar" listesinde gösterilmiş kitaplardan bazan sayısal verileri değiştirilmiş fakat, çoğu kere de, yıllardır okutageldiğimiz Isı Teorisi dersinin rûhuna uygun bir tarzda redaksiyonu yeniden yapılmış olarak aktarılmış olan problemlerdir.

Kitabın, öğrencilerin Isı Teorisi dersini daha rahat bir şekilde özümlemelerine etkin bir yardımcı olmasını temenni eder, dizgi ve tashîhlerde gözümüzden kaçmış olan ve düzeltmelerini kitabın sonunda takdim ettiğimiz hatâlardan dolayı da özür dileriz.

Kitabın zahmetli dizgisi mürettip Tayfur Lâçin'in titizliği ve sabrı, ve basımı da başta Fen Fakültesi Basımevi Müdürü Mehmet Mardinligil olmak üzere bütün Basımevi elemanlarının ve özellikle Şâkir Çelik'in titizliği ve güleryüzlülüğüyle gerçekleştirilmiştir. Hepsine pekçok teşekkür ederiz.

Bu kitabımızı İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Genel Fizik Kürsüsünün temel iki direği olan muhterem hocalar ve azîz dostlarımız Prof.Dr. Sadrettin Tunakan ile Prof.Dr. Hilmi Benel'e hörmetlerimiz ve en iyi dileklerimizle ithaf ediyoruz.

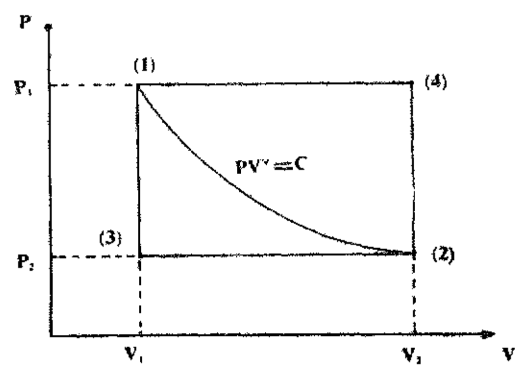
A. Y. Özemre, E. M. Rıza

İÇİNDEKİLER

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TERMODİNAMİĞİN BİRİNCİ İLKESİ

I.1. Sâbit kütleli bir ideal gazın eşısılı termodinamik dönüşümlerinin, γ ile gazın karakteristik sâbitini göstermek üzere $PV^{\gamma} = C =$ *sâbit* bağıntısına uydukları saptanmış olsun. (P_1, V_1) ve (P_2, V_2) ile aynı eşısılı eğri üzerindeki iki hâl göstererek bunların arasındaki $\Delta U = U(2) - U(1)$ iç enerji farkını; $1 \to 3 \to 2$ ve $1 \to 4 \to 2$ dönüşümlerinde sistemin kazandığı işi ve ısıyı hesaplayınız.



Sayısal uygulama : $\gamma = 5/3$,

$V_1 = 1$ **litre,** $P_1 = 32$ **atm.,** $V_2 = 8$ **litre.**

ÇÖZÜM : Eşısı eğrisi (*adyabat*) boyunca evrimleşen sisteme ısı ithâl olunmuş olmadığından Termodinamiğin birinci ilkesine göre $\Delta U = -\Delta W$ olur. Şu hâlde

$$\Delta U = U(2) - U(1) = -\Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV = -C\int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma}\,dV$$

olur. $\gamma \neq 1$ için ve $C = P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$ olduğunu göz önünde tutarak

$$U(2) - U(1) = (\gamma - 1)^{-1} C (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = (\gamma - 1)^{-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

olur.

$1 \to 3$ eşhacımlı değişim eğrisi üzerinde sistem üzerinde yapılan iş sıfırdır (zirâ $dV = 0 \to P\,dV = dW = 0$). $3 \to 2$ eşbasınçlı değişim eğrisi üzerinde sistemin kazandığı iş ise:

$W_{32} = P_2 (V_2 - V_1)$ dir. Bu itibarla sistemin $1 \to 3 \to 2$ sürecinde kazandığı ısı

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W_{13} + \Delta W_{23}$$
$$= U(2) - U(1) + 0 + P_2(V_2 - V_1) = (\gamma - 1)^{-1}(P_2 V_2 - P_1 V_1) + P_2(V_2 - V_1)$$
$$= \gamma(\gamma - 1)^{-1} P_2 V_2 - [P_2 + (\gamma - 1)^{-1} P_1] V_1$$

den ibârettir.

$1 \rightarrow 4$ eşbasınç eğrisi boyunca sistemin kazandığı iş $\Delta W_{14} = P_1(V_2 - V_1)$ dir. Diğer yandan $4 \rightarrow 2$ eşhacım eğrisi boyunca da sistem iş kazanmamaktadır. Buna göre sistemin $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ sürecinde kazandığı ısı

$$\Delta Q = \Delta U + W_{14} + \Delta W_{42} = U(2) - U(1) + P_1(V_2 - V_1) + 0$$
$$= (\gamma - 1)^{-1}(P_2 V_2 - P_1 V_1) + P_1(V_2 - V_1)$$
$$= -(\gamma - 1)\gamma P_1 V_1 + [P_1 + (1 - \gamma)^{-1} P_2] V_2$$

olur.

Sayısal uygulama :

$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$ dan $32 \times 1 = P_2 (8)^{5/3} \rightarrow P_2 = 1$ atm. bulunur.

$P_1 V_1 = 32$ [atmosfer] $\times$ 1 [litre] $= 32\,(10^5$ Newton $\times$ metre$^{-2}) \times 10^{-3}$ (metre^3)

$= 3200$ (Newton $\times$ metre) $= 3200$ N.m $= 3200$ Joule $= 3200$ J.

$P_2 V_2 = 1$ (atmosfer) $\times$ 8 (litre) $= 8.10^{-5}$ N.m^{-2} . 10^{-3} m^3 $= 800$ J.

$$U(2) - U(1) = \left(\frac{5}{3} - 1\right)^{-1} (800 - 3200)\ \mathrm{J} = \frac{3}{2}(-2400)\ \mathrm{J} = -3600\ \mathrm{J}.$$

Benzer şekilde $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ için : $\Delta W = 700$ J ve $\Delta Q = -2900$ J ve $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ için de : $\Delta W = 22400$ J ve $\Delta Q = 18800$ J bulunur.

I.2. Bir önceki alıştırmadaki söz konusu gazın iç enerjisi, A bir sâbiti göstermek üzere, $U = A\,PV$ şeklindedir. Bu alıştırmanın sayısal verilerini göz önünde tutarak: 1) A sâbitinin değerini, 2) $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 4$ ve $4 \rightarrow 2$ dönüşüm süreçlerinde sisteme kazandırılan ısı mikdarlarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM : 1) Bu şartlar altında

$$U(2) - U(1) = A(P_2 V_2 - P_1 V_1) = (\gamma - 1)^{-1}(P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

olacağından A sâbiti için

$$A = \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{3}{2}$$

bulunur.

2) (a) 1→3 üzerinde iş sıfırdır ve $\Delta Q = U(3) - U(1) = \frac{3}{2}(P_2 V_1 - P_1 V_1)$ $= -4560$ J dur.

(b) 3→2 üzerindeki ısı 1→3→2 üzerindeki ısıdan 1→3 üzerindeki ısıyı çıkarmakla bulunacaktır:

$$-2900 \text{ J} - (-4650 \text{ J}) = 1750 \text{ J}.$$

(c) 4→2 üzerindeki iş de sıfırdır ve $\Delta Q = U(2) - U(4) = \frac{3}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_2)$ $= -37200$ J olur.

(d) 1→4 üzerindeki ısı da, 1→4→2 sürecindeki ısıdan 4→2 sürecindeki ısının çıkartılmasıyla bulunacaktır:

$$18800 \text{ J} - (-37200 \text{ J}) = 56000 \text{ J}.$$

I.3. Eşısı eğrileri $P v^{\gamma} =$ *sâbit* şeklinde olan bir mol'lük bir gazın u iç enerjisinin P ve v ye bağlılığının en genel şeklini tesis ediniz.

ÇÖZÜM : $X = P v^{\gamma}$ olsun. Serbest değişkenler olarak v ile X i göz önünde tutalım ve $u(v, X)$ i tesbit etmeye çalışalım. Bir eşısı eğrisi üzerinde $dX = 0$ ve kezâ $du = -P\,dv = -Xv^{-\gamma}\,dv$ olacaktır. Buradan, derhâl,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_X = -v^{-\gamma} X$$

ve

$$u = \frac{X v^{1-\gamma}}{\gamma - 1} + f(X)$$

olması gerektiği tesbit edilir. Sonuç olarak u için

$$u(v, P) = \frac{P v}{\gamma - 1} + f(P v^{\gamma})$$

bulunur.

I.4. A. 1 gramlık bir ideal gaz P_1, v_1 ve $T_1 = 300$ °K başlangıç şartlarında bulunmaktadır. Bu, eşısılı bir biçimde, hacmı $v_2 = v_1/12$ oluncaya kadar sıkıştırılmaktadır; bu takdirde basıncı da P_2 ye yükselmiştir. Bu verilere dayanarak a) T_2 nihaî sıcaklığını, b) yapılan w_1 işini hesaplayınız.

B. P_2 basıncı sâbit tutularak gaz T_1 e kadar soğutulmakta ve bunun sonucu olarak da hacmı v_3 olmaktadır. Buna göre a) v_3 ü ve b) ortaya çıkan q_2 ısı mikdarını hesaplayınız.

C. Bundan sonra gaz eşsıcaklıklı bir genleşmeye tâbî tutularak tekrar v_1 hacmına sâhip olmaktadır. Buna göre a) nihaî basıncı, ve b) bu son dönüşümde ortaya çıkan w_3 işi ile q_3 ısı mikdarını hesaplayınız.

D. Bütün bu dönüşümler sırasında sistemin iç enerjisinin toplam değişimini hesaplayınız. ($c_P = 1$ J.g^{-1}. °C^{-1} ; $\gamma = 7/5$).

ÇÖZÜM : **A.** İdeal bir gaz söz konusu olduğunda gazın eşısılı termodinamik dönüşümleri, C' bir sâbiti göstermek üzere,

$$P\, v^{\gamma} = C'$$

bağıntısı uyarınca oluşurlar. Öte yandan ideal bir gazın hâl denklemi olan $Pv = RT$ bağıntısını göz önüne alır da bu iki bağıntıyı taraf tarafa bölersek, $C = C'/R$ ile yeni bir sâbiti göstererek, eşısı eğrilerinin denklemi

$$\boxed{T\, v^{\gamma-1} = C}$$

şekline girmiş olur.

a) Şu hâlde

$$T_2 = T_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{c_P - c_v}{c_v}} = 300 \left(\frac{12}{1}\right)^{0,4} = 810\ °K$$

dir.

b) $\delta q = 0$ olduğundan $du = -\delta w$ dir. İdeal bir gaz için $du = c_v(T_2 - T_1)$ olduğundan (*JOULE* kaanûnu)

$$w_1 = |\,\delta w\,| = \frac{1}{1,4}(810 - 300) \simeq 364 \text{ J}$$

dur.

B. a) Basınç değişmediğine göre hacım sıcaklıkla orantılı olacaktır; ve dolayısıyla da

$$v_3 = v_2 \frac{T_1}{T_2} = 0,37\, v_2 = 0,031\, v_1$$

olur.

b) Sâbit basınçlı bu dönüşümde ortaya çıkan q_2 ısı mikdarı

$$q_2 = c_P \int_{T_1}^{T_2} dT = c_P(T_2 - T_1) = 510 \text{ J}$$

dur.

C. a) Gaz v_1 hacmını haiz olarak T_1 sıcaklığına geri döndü ise basıncı da $P_1 = R\,T_1/v_1$ olacaktır.

b) Eşsıcaklıklı genleşmede gazın yaptığı iş

$$w_3 = \int_{v_3}^{v_1} P\,dv = \int_{v_3}^{v_1} R\,T_1 \frac{dv}{v} = R\,T_1 \ln \frac{v_1}{v_3} = 298 \text{ J}$$

dur. Eşsıcaklıklı bir genleşmede sistemin iç enerjisi değişmediği için $q_3 = -w_3$ olacaktır; yâni sistemin yaptığı işe denk bir ısı mikdarının sisteme ithâl edilmiş olması gereklidir.

D. İlk dönüşümde:

$$q_1 = 0 \quad , \quad w_1 = c_v(T_2 - T_1)$$

$$\Delta u_1 = c_v(T_2 - T_1).$$

İkinci dönüşümde:

$$q_2 = -c_P(T_2 - T_1), \quad w_2 = P_2(v_2 - v_1) = P_2\,v_2\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right)$$

$$P_2\,v_2 = R\,T_2 = (c_P - c_v)\,T_2\,, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

yâni

$$w_2 = (c_P - c_v)(T_2 - T_1) \quad \text{ve} \quad \Delta u_2 = -c_v(T_2 - T_1)$$

olur.

Üçüncü dönüşümde ise:

$$q_3 = -w_3 \quad \text{ve} \quad \Delta u_3 = 0$$

olmaktadır. Buna göre

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 = 0$$

olmakta yâni gaz tam bir çevrim sonucu ilk hâline dönüşmektedir.

I.5. Sâbit basınçtaki ve sâbit hacımdaki özgül ısıları sırasıyla c_P ve c_v olan, $Pv = RT$ hâl denklemini haiz bir ideal gazın tersinir bir dönüşümünde ortaya çıkan ısı mikdarı

$$\delta q = A\,dP + B\,dv$$

şeklindedir.

a) A ve B yi c_P, c_v, R, P ve v cinsinden hesaplayınız.

b) c_P ve c_v nin sıcaklığa bağlı olmadıkları kabul olunmaktadır. Bu takdirde ve $\gamma = c_P/c_v$ vaz ederek $f(P, v, \gamma) = 0$ şeklinde, bu gazın basıncıyla hacmını birbirlerine γ aracılığıyla bağlayan bir bağıntı tesis ediniz.

c) c_P ve c_v nin sıcaklığa bağlı olduklarını ve bu bağlılığı da

$$\gamma = \gamma_0 - aT$$

bağıntısının yansıttığını varsayarak v yi T ye bağlayan bir bağıntı tesis ediniz.

ÇÖZÜM : a) Sâbit basınçlı ($dP = 0$) bir dönüşümde $\delta q = B\,dv$ olur. Fakat öte yandan tanımı gereği $\delta q = c_P\,dT$ dir de. Bu itibarla

$$B = c_P\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P$$

dir. Bundan başka hâl denklemi $Pv = RT$ olduğuna göre ayrıca

$$P\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = R \quad \to \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = \frac{P}{R}$$

de yazılabildiğinden

$$B = \frac{c_P P}{R} \tag{I.5.1}$$

bulunur. Buna benzer bir muhakeme ile, ve sâbit hacımlı ($dv = 0$) dönüşümlerden hareket ederek,

$$A = \frac{c_v v}{R} \tag{I.5.2}$$

olduğu tesbit edilebilir.

b) Bu sonuçların ışığı altında $\delta q = A\,dP + B\,dv$ bağıntısı

$$\delta q = \frac{v\,c_v}{R}\,dP + \frac{P\,c_P}{R}\,dv$$

şekline girer. Eşısılı bir dönüşümde $\delta q = 0$ olduğundan bu denklem

$$v\,dP + \gamma\,P\,dv = 0$$

şekline girer ki bunun integrasyonuyla da

$$P\,v^\gamma = C = \textit{sâbit} \quad \to \quad (P\,v^\gamma - C) = f(P, v, \gamma) = 0$$

bulunur.

c) Şimdi aranan $f(v, T) = 0$ şeklinde bir bağıntıdır; ayrıca da $\gamma = \gamma_0 - aT$ olduğu bilinmektedir. Bu itibarla δq yu v ile T nin fonksiyonu olarak ifâde edebilmekte yarar vardır. Öte yandan bunu gerçekleştirebilmek için P basıncını da v ile T nin fonksiyonu olarak ifâde etmemiz gereklidir. Bu bizi

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dT$$

yazmağa sevk eder. Bunu $\delta q = A\, dP + B\, dv$ ifâdesine yerleştirirsek

$$\delta q = A\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dT + \left[B + A\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T\right] dv \qquad \text{(I.5.3)}$$

olur. Şimdi eşısılı ($\delta q = 0$) bir dönüşüm tasarlıyalım. Öte yandan da (I.5.1) ve (I.5.2) dolayısıyla

$$\frac{B}{A} = \gamma \frac{P}{v}$$

olduğuna dikkat edilirse (I.5.3) den

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dT + \left[\gamma \frac{P}{v} + \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T\right] dv = 0 \qquad \text{(I.5.4)}$$

bulunur. Hâl denkleminden hareketle

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v}, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -\frac{P}{v}$$

bulunur; bir de $\gamma = \gamma_0 - aT$ olduğundan, bu son üç bağıntının yardımıyla (I.5.4) bağıntısı

$$\frac{R}{v} dT + \left[\gamma \frac{P}{v} - \frac{P}{v}\right] dv = 0$$

$$\frac{R}{P} dT + [\gamma_0 - aT - 1]\, dv = 0, \qquad \frac{R}{P} = \frac{v}{T}$$

$$v\, dT + [(\gamma_0 - 1)\, T - a\, T^2]\, dv = 0 \qquad \text{(I.5.5)}$$

şekline girer. Eğer $b = (\gamma_0 - 1)/a$ vaz edilirse bu bağıntı

$$a\frac{dv}{v} = \frac{a\, dT}{aT^2 - (\gamma_0 - 1)\, T} = \frac{a}{(\gamma_0 - 1)} \frac{dT}{(T - b)} - \frac{a}{(\gamma_0 - 1)} \frac{dT}{T} \qquad \text{(I.5.6)}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer $a = 0$ ise (I.5.5) bağıntısı

$$(\gamma_0 - 1)\frac{dv}{v} = -\frac{dT}{T}$$

ye indirgenmiş olur ki buradan da, bilinen

$$T\, v^{\gamma - 1} = \text{sâbit}$$

bağıntısı elde edilir. Eğer $a \neq 0$ ise bu takdirde de (I.5.6) dan

$$(\gamma_0 - 1) \ln v = \ln \frac{T - b}{T} + \text{sâbit}$$

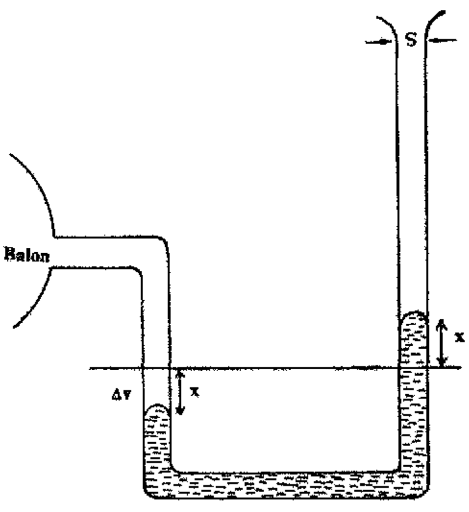
yâni

$$f(v, T) = \frac{T\, v^{\gamma_0 - 1}}{T - \dfrac{\gamma_0 - 1}{a}} = \text{sâbit}$$

bağıntısı elde edilmiş olur.

I.6. $v = 250$ cm³ hacımlı bir balon $P = 10^5$ N.m^{-2} = 1 atmosfer basıncı altında ve 27 °C sıcaklıkta, sâbit hacımdaki özgül ısısı $c_v = 0{,}25$ J/°C olan ideal bir gaz ihtivâ etmektedir. Bu balon, dik kesiti $S = 1$ cm² olan ve bu şartlar altında her iki kolundaki su, aynı seviyede bulunan bir de sulu manometre ile donatılmıştır. Belona $q = 1{,}5$ J luk bir ısı ithâl edilerek içindeki gazın serbestçe genişlemesi sağlanmaktadır. Δv, ΔP ve ΔT değişimlerinin de hesaplarda diferansiyel mikdarlar gibi telâkki edilecek kadar küçük oldukları varsayıldıklarında, manometrenin açık ucunda vukuu bulan x su seviyesi yükselmesini ve ΔT sıcaklık farkını hesaplayınız. (Suyun özgül kütlesi : $\rho = 10^3$ kg m^{-3} ve yerçekimi ivmesi de $g = 10$ m s^{-2} olarak alınacaktır). ($\gamma = 7/5$)

ÇÖZÜM : Balon içindeki ideal gazın hâl denklemi



$$Pv = RT = (c_P - c_v)\, T$$

dir. Buradan, özgül ısıların sâbit olduklarını varsayarak,

$$P\,\Delta v + v\,\Delta P = (c_P - c_v)\,\Delta T \qquad \text{(I.6.1)}$$

yazılır. Böylelikle Δv, ΔP ve ΔT büyüklükleri arasında bir bağıntı tesis edilmiş olmaktadır. Öte yandan, gerek Δv hacım farkının gerekse ΔP basınç farkının manometredeki x su seviyesi farkı cinsinden kolaylıkla ifâde edilebileceğine dikkati çekelim. Gerçekten de

$$\Delta v = S\,x \quad , \quad \Delta P = 2\,g\,\rho\,x$$

den ibârettir.

İdeal gazlar için *JOULE* kaanûnuna göre gazın iç enerjisindeki Δu değişikliği

$$\Delta u = c_v \, \Delta T$$

şeklindedir. Oysa Termodinamiğin birinci temel ilkesi gereği ayrıca

$$c_v \, \Delta T = \Delta u = q - P \, \Delta v \qquad (I.6.2)$$

dir de. (I.6.1) i (I.6.2) ile taraf tarafa bölersek neticede

$$\frac{10\,x + 5\,x}{1{,}5 - 10\,x} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1 = 0{,}4$$

bulunur. Buradan

$$x = \frac{0{,}6}{19} \text{ metre} \approx 3{,}1 \text{ mm}$$

ve (I.6.2) yardımıyla da

$$\Delta T = \frac{q - P\,S\,x}{c_v} \approx 4{,}8 \text{ °C}$$

bulunur.

I.7. İdeal bir gazın eşısılı sıkıştırılmasında yapılan w işinin gazın iç enerjisindeki Δu değişimine eşit olduğunu gösteriniz, ve buradan w nin ifâdesini c_v sâbit hacımdaki özgül ısısı, T_0 başlangıç ve T_1 nihaî sıcaklıkları cinsinden tesis edip ayrıca w yi $a = v_0/v_1$ sıkıştırma oranı cinsinden ifâde ediniz.

ÇÖZÜM : Eşısılı bir termodinamik dönüşümde ısı mikdarında hiç bir değişme olmaz. Bu itibarla iç enerjinin diferansiyeli

$$du = -P\,dv$$

şeklindedir. v_0 hacmından v_1 hacmına kadar bir sıkıştırma yapıldığında iç enerjinin Δu değişimi de

$$\Delta u = w = -\int_{v_0}^{v_1} P\,dv$$

olur. Öte yandan *JOULE* kaanûnuna göre ideal bir gazın iç enerjisi yalnızca sıcaklığın bir fonksiyonudur. Gazın c_v sâbit hacımdaki özgül ısısını sâbit varsayarak

$$\Delta u = c_v \,(T_1 - T_0) = c_v \, T_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)$$

olur. Bir taraftan ideal gazların hâl denkleminin

$$Pv = RT$$

ile verilmesi, diğer taraftan da eşısı eğrilerinin

$$T v^{\gamma-1} = sâbit$$

denklemini gerçeklemesi dolayısıyla, iç enerjideki değişimin

$$\Delta u = c_v \frac{P_0 v_0}{R} (a^{\gamma-1} - 1)$$

veyâ $R = c_P - c_v$ (*MAYER* bağıntısı) olması hasebiyle

$$\Delta u = w = \frac{P_0 v_0}{\gamma - 1} (a^{\gamma-1} - 1)$$

bağıntısıyla verileceği saptanmış olur.

I.8. Kısmen şişirilmiş ve cidarları ısı geçirmeyen bir balonun toplam kütlesi *M* kg olsun; *m* ile de, gene kg cinsinden, balon içindeki havanın kütlesini gösterelim. Balonun içindeki havanın sıcaklığı *T* °K ve dışındaki havanın sıcaklığı da *T'* °*K* olsun.

a) Bu balonun yükselişinin, eğer $M/m = T/T'$ ise tersinir olacağını gösteriniz.

b) Bu şartlarda eğer uygun mikdarda ısı ithâliyle *T* sıcaklığı sâbit tutulacak olursa yükselme işinin balon içindeki havanın basınç kuvvetinin yaptığı işe eşit olacağını gösteriniz.

c) Eğer belirli bir andan itibâren, b) şıkkında sözü edilen ısı ithâli kesilirse yükselişin tersinir bir biçimde sürüp gitmesi için *T'* sıcaklığının değişim kaanûnunun ne biçimde olması gerektiğini saptayınız.

ÇÖZÜM : a) Yükselme hareketi, eğer hareket ettirici kuvvet sistemin bir denge hâlinden, asla hissedilir derecede uzaklaşmamasını temin edecek kadar küçük ise tersinirdir. Sınır hâlde bu tersinirlik şartı hareket ettirici kuvvetin sıfır olmasını yâni yer değiştiren havanın icrâ ettiği itme kuvvetinin balonun ağırlığına eşit olmasını gerektirir.

Yer değiştiren havanın *M* kütlesi ile balonun içindeki havanın *m* kütlesi aynı basınç şartları altında ölçülmektedirler; ayrıca bunlar aynı hacma da sâhiptirler Buna göre ideal gazların hâl denkleminden

Yer değiştiren hava için : $PV = M R T'$

Balondaki hava için : $PV = m R T$

olacaktır. Bunların taraf tarafa bölünmesi sonucu

$$\frac{M}{m} = \frac{T}{T'}$$

bağıntısının geçerli olacağı görülür.

b) Balonun dz kadar bir yükseklik kazanması hâlinde yerçekimi kuvvetinin yaptığı iş $Mg\,dz$ olur. Balonun sıcaklığı sâbit tutulduğuna göre içindeki hava

$$PV = sâbit \rightarrow P\,dV + V\,dP = 0$$

BOYLE-MARİOTTE kaanûnuna uygun olacaktır. dV hacım değişimine bağlı elemanter iş: $-P\,dV = V\,dP$ dir; öte yandan da dP basınç değişimi, ρ ile dışarıdaki havanın özgül kütlesini göstererek, akışkanlar statiğinin temel bağıntısı olan $dP = -\rho g\,dz$ bağıntısı aracılığıyla dz ye bağlıdır. Buradan, yapılan elemanter işin

$$dW = M\,g\,dz = -\frac{M}{\rho}\,dP = -V\,dP$$

olduğu görülmektedir.

c) Eğer sisteme artık, ısı ithâl edilmezse balonun içindeki hava eşısılı (adyabatik) bir genleşmeye mâruz kalır; ideal bir gazın eşısılı dönüşümleri, bilindiği gibi,

$$PV^{\gamma} = \text{sâbit}$$

denklemi gerçeklenecek şekilde oluştuklarından buradan diferansiyel alarak, sonsuz küçük bir hâl değişimi için

$$\gamma P\,dV + V\,dP = 0 \tag{I.8.1}$$

olacağı saptanmış olur. Öte yandan sistemin iç enerjisindeki değişim de: $dU = m\,c_v\,dT = \delta Q - P\,dV = -P\,dV$ dir. Buradan ve (I.8.1) den

$$m\gamma c_v\,dT = m\,c_P\,dT = -\gamma\,P\,dV = V\,dP = V\rho\,g\,dz = -Mg\,dz$$

yazılır. Eğer yükseliş tersinir ise $M/m = T/T'$ olacağından

$$dT = \frac{M}{m}\,dT'$$

olacak ve buradan da

$$dT' = -\frac{g}{c_p}\,dz \tag{I.8.2}$$

ile verilecektir. T_0' ile $z = 0$ da, yâni yerdeki, sıcaklığı göstererek (I.8.2) nin integrasyonu da

$$T' = T_0' - \frac{g}{c_P}\,z$$

verir.

I.9. Yerde iken kısmen şişirilmiş olan bir sonda balonu V_0 hacmını ve $m=80$ kg kütlesini haizdir. Havanının yer düzeyindeki özgül kütlesi $\rho_0 = 1{,}2$ kg/m³ olup, yerçekimi ivmesi de yaklaşık olarak $g = 10$ m/s² dir.

a) Yer düzeyindeki K_0 yükselme kuvvetini hesaplayınız.

b) Atmosferin eşsıcaklıklı dengede olduğunu varsayarak z yüksekliğinin fonksiyonu olarak P atmosfer basıncını hesaplayınız. Yer düzeyindeki basınç $P_0 = 10^5$ N/m² olarak verilmektedir. Bu takdirde havanın ρ özgül kütlesini de z nin fonksiyonu olarak belirleyiniz.

c) Balon yükseldikçe hacmı de artmaktadır. Balon cidarlarının ısı geçirmez olduğu varsayımı altında z yüksekliğinde balonun V hacmının ve K yükselme kuvvetinin ifâdelerini tesis ediniz. Eğer $V = 8V_0$ olursa balonun erişeceği en büyük Z yüksekliği ne olur? V_0 ın değeri nedir?

ÇÖZÜM : a) K_0 yükselme kuvveti, âşikâr olarak, havanın balon üzerinde icrâ ettiği ω_0 *ARŞİMED* itkisi ile balonun ağırlığı arasındaki farka eşittir:

$$K_0 = \omega_0 - mg = V_0\,\rho_0\,g - mg = (12\,V_0 - 800)\ \text{Newton}.$$

b) $(P_0\,,\,V_0)$ ve $(P\,,\,V)$ hâlleri göz önüne alındığında eğer birinden diğerine geçiş eşsıcaklıkta vukuu buluyorsa ideal gazların hâl denklemi aracılığıyla $P_0\,V_0 = PV$ yazılır. Diğer taraftan her iki hâlde de balondaki havanın M kütlesi değişmemiş olduğundan

$$P_0\,\frac{V_0}{M} = P\,\frac{V}{M} \quad\rightarrow\quad \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{P}{\rho} \tag{I.9.1}$$

olur. Öte yandan akışkanlar statiğinin temel denklemi de

$$dP = -\rho\,g\,dz \tag{I.9.2}$$

dir. (I.9.1) ile (I.9.2) arasından ρ elenirse

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0\,g}{P_0}\,dz \quad\rightarrow\quad P = P_0\,e^{-\alpha z}\,, \qquad \left(\alpha = \frac{\rho_0\,g}{P_0}\right) \tag{I.9.3}$$

bulunur. z yi kilometre cinsinden ifâde edersek

$$P = P_0\,e^{-0{,}12\,z} \tag{I.9.4}$$

olur. z yüksekliğinde havanın özgül kütlesinin değeri de (I.9.1) ve (I.9.4) den tesbit edilir:

$$\rho(z) = \rho_0\,e^{-0{,}12\,z}.$$

c) Hacmın artışı eşısılı (*adyabatik*) bir biçimde gelişmektedir. İdeal gazlar için eşısılı termodinamik hâl dönüşümlerini karakterize eden denklem

$$P\,V^{\gamma} = \text{sâbit}$$

olduğundan (P_0, V_0) ve $(P\,, V)$ hâlleri arasındaki adyabatik dönüşümde, (I.9.4) ü de göz önünde tutarak

$$P_0 V_0^{\gamma} = P V^{\gamma} \quad \rightarrow \quad V = V_0 \left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/\gamma} = V_0\, e^{\frac{\alpha}{\gamma} z} \tag{I.9.5}$$

bulunur. Buradan *ARŞİMED* itkisi için

$$\omega(z) = V \rho\, g = V_0\, \rho_0\, g\, e^{\alpha\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) z}$$

ifâdesi elde edilmiş olur. Şu hâlde $K(z)$ yükselme kuvveti de

$$K(z) = 12\, V_0 e^{\alpha\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) z} - 800 \tag{I.9.6}$$

olur.

Şimdi, (I.9.5) de $V = 8V_0$ vaz edilirse maksimal Z yüksekliğinin de

$$Z = 24{,}3 \text{ km}$$

olduğu kolayca saptanır. Bu anda yükselme kuvveti sıfır olacağından (I.9.6) dan V_0 ın değeri için de

$$V_0 = 153 \text{ m}^3$$

bulunur.

I.10. Arz atmosferinin incelenmesi. **Havanın ideal gazlar kaanûnuna uyduğu ve yerçekimi ivmesinin de yüksekliğe bağlı olmadan sâbit $g = 10$ m.s^{-2} değerini haiz olduğu kabul edilmektedir.**

1) Atmosferin T sıcaklığının sâbit olduğu varsayılmaktadır. Bu takdirde N ve N_0 ile z ve z_0 yüksekliklerinde hacım birimi başına hava moleküllerinin sayısını gösterelim.

a. N molekül yoğunluğu ve P basıncının değişim kaanûnlarını z yüksekliğinin fonksiyonu olarak tesis ediniz. (Bir molekülün ortalama kütlesini m ile gösteriniz.)

b. Hangi yükseklikteki basınç yerdeki P_0 basıncının yarısına eşit olur?

2) Şimdi de T sıcaklığının, N molekül yoğunluğu sâbit kalacak biçimde z nin fonksiyonu olarak değiştiği varsayılmaktadır.

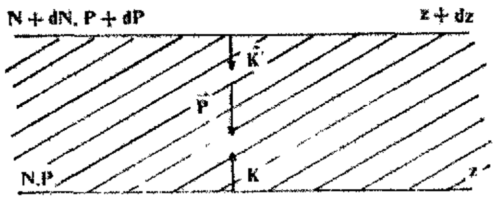
a. Bu varsayımı kısaca doğrulayınız.

b. Sıcaklık ve basıncın değişim kaanûnlarını tesis ediniz.

c. Basınç hangi yükseklikte, yerdekinin yarısına erişir? Bu takdirde sıcaklık ne olur?

(Yerdeki sıcaklık: 17 °C, yerdeki basınç: $P_0 = 10^5$ N.m^{-2}, havanın moleküler kütlesi: $m = 29$ g ve gazlar sâbiti de $R = 8{,}32$ J/mol/°K olarak alınacaktır.)

ÇÖZÜM : **1) a.** z ve dz yükseklikleri arasında kalan, dz kalınlığında ve S tabanlı bir hava tabakası göz önüne alalım. Bunun haiz olduğu $d\tau = S\,dz$ hacmı içinde $N\,d\tau = NS\,dz$ molekül bulunacağı âşikârdır.



Bu hava tabakasının kendi **p** ağırlığı ile **K** ve **K'** basınç kuvvetlerinin etkisi altında denge hâlinde bulunduğunu yazalım:

$$\mathbf{p} + \mathbf{K}' + \mathbf{K} = 0.$$

Bu üç kuvvetin doğrultusu da aynı olduğundan kuvvetlerin dengesi cebirsel olarak

$$p + K' - K = 0$$

denklemiyle ifâde edilecektir. Bu ise

$$mg\,(NS\,dz) + (P + dP)\,S - PS = 0$$

ya da

$$mg\,N\,dz + dP = 0 \tag{I.10.1}$$

demektir.

Öte yandan μ mol'lük bir gaz için ideal gazların hâl denklemi

$$P\,v = \mu RT \quad \text{veyâ} \quad P = \frac{\mu}{v}RT$$

dir. Şu hâlde ideal gazın basıncı "hacım birimi başına mol sayısı" demek olan μ/v ile orantılı olmaktadır. $\mathcal{N}$ ile *AVOGADRO* sayısını gösterirsek, bir mol'deki molekül sayısı demek olan bu sayı aslında $\mathcal{N} = M/m$ demek olduğundan

$$\frac{\mu}{v} = \frac{N}{\mathcal{N}} = N\frac{m}{M}$$

ve gazın basıncı da

$$P = N\frac{mRT}{M} \tag{I.10.2}$$

olur. Sıcaklığı sâbit varsayarak bu bağıntıyı N ye göre türetelim; buradan

$$dP = \frac{mRT}{M}\,dN$$

bulunur. Bu bağıntı göz önünde tutulduğunda (I.10.1) ifâdesi de

$$m\left(gN\,dz + \frac{RT}{M}\,dN\right) = 0$$

şekline girer. Buradan, değişkenlere ayırarak

$$\frac{dN}{N} = -\frac{Mg}{RT}\,dz$$

ya da z_0 ile z yükseklikleri arasında integre ederek

$$\boxed{N(z) = N_0 \exp\left[-\frac{Mg}{RT}(z - z_0)\right]} \qquad (I.10.3)$$

bulunur. (I.10.2) ve (I.10.3) den de

$$P = \frac{N_0 mRT}{M} \exp\left[-\frac{Mg}{RT}(z - z_0)\right]$$

veyâ

$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left[-\frac{Mg}{RT}(z - z_0)\right]} \qquad (I.10.4)$$

bulunur. Buna göre eşsıcaklıklı bir atmosfer içinde gerek N molekül yoğunluğunun, gerekse P basıncının z yüksekliğinin fonksiyonu olarak üstel bir biçimde azalacağı saptanmış olur.

b. (I.10.4) e binâen

$$z - z_0 = \frac{RT}{Mg}\ln\frac{P_0}{P}$$

dır. Yerde $z_0 = 0$ olduğundan yerdeki basıncın yarısı olan basıncın

$$z = \frac{8{,}32 \times (273 + 17)}{29.10^{-3} \times 10}\ln 2 = 5740 \text{ metre}$$

yükseklikte hüküm süreceği anlaşılmaktadır.

2) a. Gazın hacımsal kütlesi

$$\rho = \frac{\text{Bir molekülün kütlesi} \times \text{Moleküllerin sayısı}}{\text{Hacım}}$$

şeklinde tanımlanır; bu ise $\rho = mN$ demektir. $N =$ *sâbit* varsayımı, moleküllerin kütleleri de değişmeyeceğinden, $\rho =$ *sâbit* olmasını gerektirmektedir. Hâlbuki ideal bir gazın hacımsal kütlesi basınçla doğru, mutlak sıcaklıkla da ters orantılıdır :

$$\rho = \rho_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T}.$$

ρ=*sâbit* demek $P/T = P_0/T_0$ = *sâbit* kabul ediliyor, yâni z yüksekliği arttığında basıncın azalması, hacımsal kütle sâbit kalacak şekilde, sıcaklığın azalmasıyla telâfi ediliyor demektir. Bu da N= *sâbit* varsayımının bir doğrulanmasıdır.

b. N = *sâbit* varsayıldığından (I.10.2) den

$$dP = \frac{NmR}{M} dT$$

yazılır. Bunun aracılığıyla da (I.10.1) genel bağıntısı

$$Nm\left(g\,dz + \frac{R}{M}\,dT\right) = 0$$

veyâ

$$dT = -\frac{Mg}{R}\,dz$$

şekline girer. z_0 dan z ye kadar integre edildiğinde bu diferansiyel denklemden

$$\boxed{T = T_0\left[1 - \frac{Mg}{RT_0}(z - z_0)\right]} \qquad (I.10.5)$$

bağıntısı elde edilmiş olur. (I.10.5) eğer (I.10.2) ye yerleştirilirse

$$P = -Nmg\,(z - z_0) + \frac{NmRT_0}{M}$$

olur. Z_0 yüksekliğinde basınç, bu son ifâdeye binâen,

$$P_0 = \frac{NmRT_0}{M}$$

olacağından, yâni

$$Nm = \frac{MP_0}{RT_0}$$

yazılabileceğinden $P(z)$ artık

$$\boxed{P(z) = P_0\left[1 - \frac{Mg}{RT_0}(z - z_0)\right]} \qquad (I.10.6)$$

olur.

c) $P = P_0/2$ için $z = RT_0/2Mg = 4160$ metre bulunur. (I.10.5) bağıntısı (I.10.6) ile tarafa bölünürse

$$\frac{P}{T} = \frac{P_0}{T_0} = \text{sâbit}$$

yâni $\rho = \rho_0 =$ sâbit bulunur; ve buradan da

$$T = T_0 \frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} T_0 = 145\ °K = -128\ °C$$

bulunur.

I.11. Moleküler kütlesi M olan ideal bir gazdan N molekül, dik kesiti S ve kotları da sırasıyla Z_1 ve Z_2 olan, hareketli iki pistonla sınırlandırılmış bir dik silindir içinde bulunmaktadır. Moleküller sâbit bir T sıcaklığında olup yukarıdan aşağıya doğru yönelik birbiçim bir g gravitasyon alanına tâbi bulunmaktadırlar.

1) Bu şartlar altında basıncın ve gaz yoğunluğunun

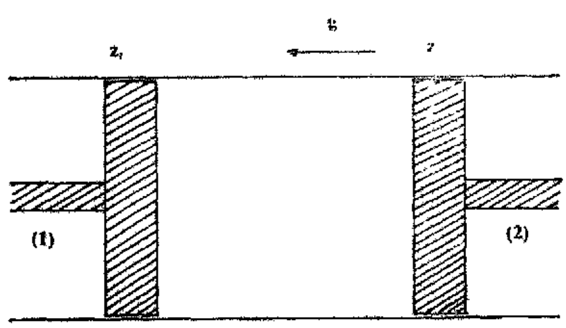
$$P_0 = P_0 \exp\left[-\frac{MgZ}{RT}\right], \qquad \rho = \rho_0 \exp\left[-\frac{MgZ}{RT}\right]$$

ile verildiği bilindiğinde P_0 büyüklüğünü verilerin fonksiyonu olarak belirleyip gazın ağırlık merkezinin Z_A kotunu hesaplayınız.

2) Alt piston sâbit tutularak üst piston durgunumsu bir biçimde Z_2 kotundan Z'_2 kotuna geçtiğinde bu dönüşüm süreci içinde gaza intikaal ettirilen W_2 işini hesaplayınız.

3) Üst piston Z_2' kotunda sâbit tutularak alt piston durgunumsu bir biçimde $Z'_2 - Z'_1 = Z_2 - Z_1$ olacak şekilde bir Z_1' kotuna geçmesi hâlinde sisteme intikaal ettirilecek olan W_1 işini hesaplayınız.

ÇÖZÜM : 1) $\alpha = Mg/RT$ vaz edelim. Buna göre



$$P = P_0\, e^{-\alpha Z}\ , \quad \rho = \frac{MP}{RT} = \frac{MP_0}{RT}\, e^{-\alpha Z}$$

olur. Gazın toplam kütlesi ise

$$NM = \int_{Z_1}^{Z_2} S\,\rho(Z)\,dZ = S\,\frac{MP_0}{\alpha RT}\,[e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}]$$

olur. Buradan derhâl P_0 ın değeri çıkarılır:

$$P_0 = NRT\alpha\,[e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\,S^{-1}$$

$$= NMg\,[e^{-\alpha Z_1}\, e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\,S^{-1}\,.$$

Ayrıca

$$P(Z_1) = P_0\,e^{-\alpha Z_1} = NMg\,S^{-1}\,[1 - e^{\alpha(Z_1 - Z_2)}]^{-1}\,,$$

$$P(Z_2) = P_0\,e^{-\alpha Z_2} = NMg\,S^{-1}\,[e^{\alpha(Z_2 - Z_1)} - 1]^{-1}$$

dir.

Ağırlık merkezinin Z_A kotu, tanımı gereği,

$$(NM)\,Z_A = \int_{Z_1}^{Z_2} Z\,\rho(Z)\,S\,dZ = NMg\,S^{-1}\,[e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\,\frac{MS}{RT}\int_{Z_1}^{Z_2} Z\,e^{-\alpha Z}\,dZ$$

ile verilecektir. Buradan

$$Z_A = [e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\,\alpha^{-1}\int_{Z_1}^{Z_2} x\,e^{-x}\,dx \qquad (x = \alpha Z)$$

bulunur. Bu ifâdedeki integral kısmî integrasyonla kolayca hesaplanır ve nihâyet

$$\boxed{Z_1 = \alpha^{-1} + \frac{Z_1 e^{-\alpha Z_1} - Z_2 e^{-\alpha Z_2}}{e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}}}$$

bulunur.

2) $$W_2 = -\int_{Z_2}^{Z_2'} P(Z_2)\,S\,dZ_2 = -NMg\int_{Z_2}^{Z_2'} \frac{dZ_2}{e^{\alpha(Z_2 - Z_1)} - 1}$$

$$= -NRT\int_{x_2}^{x_2'} \frac{dx}{e^x - 1} \qquad ; \qquad x = \alpha\,(Z_2 - Z_1)$$

ve nihâyet

$$\boxed{W_2 = NRT \ln \left[\frac{1 - e^{-\alpha(Z_2 - Z_1)}}{1 - e^{-\alpha(Z_2' - Z_1)}} \right]}$$

bulunur.

3) Aynı şekilde

$$W_1 = -\int_{Z_1}^{Z_1'} P(Z_1) S\, dZ_1 = -NMg \int_{Z_1}^{Z_1'} \frac{dZ_1}{1 - e^{\alpha(Z_1 - Z_1')}}$$

$$= -NRT \int_{x_1}^{x_1'} \frac{dx}{1 - e^x} \quad ; \quad x = \alpha(Z_1 - Z_2)$$

olur. Nihâyet

$$\boxed{W_1 = NRT \ln \left[\frac{e^{\alpha(Z_2' - Z_1)} - 1}{e^{\alpha(Z_2' - Z_1')} - 1} \right]}$$

bulunur.

Süreç esnâsında sisteme intikaal ettirilmiş olan iş

$$W = W_1 + W_2 = NRT \ln \left[\frac{1 - e^{-\alpha(Z_2 - Z_1)}}{1 - e^{-\alpha(Z_2' - Z_1)}} \; \frac{e^{\alpha(Z_2' - Z_1)} - 1}{e^{\alpha(Z_2' - Z_1')} - 1} \right]$$

$$= NRT \ln \left[\frac{e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}}{e^{-\alpha Z_1'} - e^{-\alpha Z_2'}} \right] = NRT \ln \{e^{\alpha(Z_1' - Z_1)}\} = NMg(Z_1' - Z_1')$$

den ibârettir. Bu iş şüphesiz ki, bütün süreç boyunca $Z_1' - Z_1 = Z_2' - Z_2$ öteleme hareketinden başka bir şey yapmamış olan gazın kazanmış olduğu potansiyel enerjiden başka bir şey değildir.

I.12. a) Güneşin küresel simetriyi haiz bir gaz kütlesi olduğunu; ve ρ özgül kütlesi, P basıncı, T mutlak sıcaklığının da yalnızca r radyal uzaklığının fonksiyonu olduklarını varsayarak r yarıçaplı küre içindeki $M=M(r)$ kütlesi ile $P=P(r)$ basıncının radyal değişimlerinin ölçüsü olan dM/dr ve dP/dr büyüklüklerini hesaplayınız. Ayrıca bütün Güneş küresi içinde ρ özgül kütlesinin sâbit olduğunu varsayarak Güneşin merkezindeki P_0 basıncının ifâdesinini tesis edip hesaplayınız.

b) Güneşin ρ özgül kütlesinin gene sâbit olduğu: gazın atom çekirdeklerinin ve elektronların, globâl olarak nötr olan, bir karışımından teşekkül etmiş olduğunu;

ve çekirdeklerin de büyük bir sayıda proton ve aynı sayıda nötrondan oluşmuş olduklarını kabul ederek her şeyin sanki göz önüne alınan, moleküler kütlesi $\mu = 2$ olan bir gazmış gibi cereyan edeceğini gösteriniz.

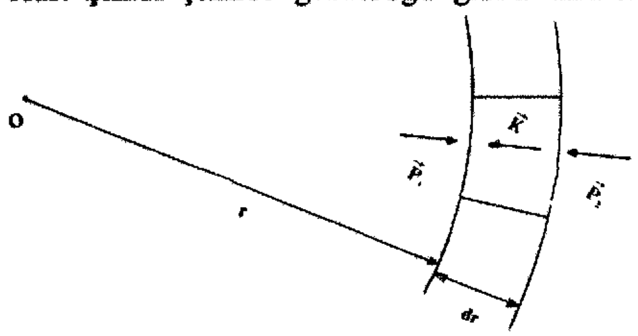
c) Bu şartlar altında Güneşin merkezindeki mutlak sıcaklığı hesaplayınız.

İdeal gazlar sâbiti: $R = 8{,}32$ J/°K; Güneşin kütlesi: $M = 2.10^{30}$ kg; ortalama özgül kütle: $\rho = 1{,}4$ g/cm³ ve evrensel gravitasyon sâbiti de $G = 6{,}64.10^{-11}$ *MKS* birimi alınacaktır.

ÇÖZÜM : **a)** Güneş küresel simetriyi haiz, gazdan bir kütle olduğundan eğer $M(r)$ ile r yarıçaplı küre içinde kalan gazın kütlesini gösterirsek Güneşin merkezinden r uzaklığında yerçekimi ivmesi

$$g = \frac{G\,M(r)}{r^2}$$

olur. Şimdi şekilde görüldüğü gibi dr kalınlığındaki küresel bir tabaka içinde dS taban yüzeyi ve dr yüksekliğini haiz sonsuz küçük bir silindir göz önüne alalım. Bu silindirin yan yüzlerine etkiyen basınç kuvvetleri birbirlerini dengeleyeceklerinden silindire etkiyen diğer kuvvetler r uzaklığındaki dS tabanı üzerindeki $|\mathbf{P}_1| = P(r)\,.\,dS$,



ve $r + dr$ uzaklığındaki dS tavanı üzerindeki $|\mathbf{P}_2| = P(r+dr).\,dS$ ile silindirin ağırlık merkezine etkiyen $|\mathbf{K}| = g\rho\; dS\; dr$ ağırlığıdır. Güneşin dengede olması bütün bu sonsuz küçük silindirlerin dengede olmasıyla gerçekleşir; şu hâlde denge şartı

$$\mathbf{P}_2 + \mathbf{K} + \mathbf{P}_1 = 0 \;\rightarrow\; P(r+dr) + \rho\, g dr = P(r)$$

dir. Bu son ifâdede ilk terimi r civarında *MACLAURİN* serisine açıp $dr \rightarrow 0$ limiti alınırsa

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho G\, M(r)}{r^2}} \qquad \text{(I.12.1)}$$

bulunur. Hâlbuki r yarıçapı içinde kalan $M(r)$ kütlesi tanımı gereği

$$M(r) = \int_0^r \rho(r)\, 4\pi r'^2\, dr' \qquad \text{(I.12.2)}$$

olduğundan

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)}$$

olur. Eğer Güneşin özgül kütlesi $\rho(r) = \rho =$ sâbit ise (I.12.2) den

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \quad \text{ve} \quad M(R) = M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

elde edileceğinden

$$\frac{M(r)}{r^3} = \frac{M}{R^3} \tag{I.12.3}$$

de yazılabilir.

Güneşin merkezindeki P_0 basıncı ise (I.12.1) i $r = R$ den $r = 0$ a kadar integre etmekle tesbit edilir:

$$P_0 = -\int_R^0 \frac{G M(r')\rho}{r'^2} dr' .$$

Bu ifâdeden, (I.12.3) ü göz önünde tutarak

$$P_0 = -\int_R^0 \frac{G M(r')\rho}{r'^2} dr' = -\int_R^0 \frac{GM\rho}{R^3} r' dr'$$

yâni

$$\boxed{P_0 = \frac{G\rho M}{2R}}$$

bulunur. G, ρ, M ve R nin değerleri yerlerine yerleştirildiğinde de Güneşin, merkezindeki basıncı olarak

$$P_0 = 1{,}32.10^{14}\ \text{N/m}^2 = 1{,}32.10^9\ \text{atm.}$$

bulunur.

b) Güneşi oluşturan gazın, elektrik bakımından nötr olan, bir çekirdek ve elektron karışımından ibâret olduğu farzedilmektedir. Çekirdeklerin her biri çok sayıda proton ve aşağı yukarı aynı sayıda da nötron ihtivâ eder. Güneşte hüküm süren yüksek sıcaklık dolayısıyla bütün atomların tamamiyle iyonlaşmış oldukları kabul edilebileceğinden gazı oluşturan atomların ve elektronların fevkalâde küçük yarıçapa mâlik olmaları dolayısıyla bu gazın ideal bir gaz gibi davrandığı savunulabilir. Öte yandan gazı oluşturan tânecikler arasındaki kuvvetler de bunların kinetik enerjileri yanında hatırı sayılır bir potansiyel enerji oluşturamazlar. Bütün bunlar, gazı oluşturan tâneciklerin aralarındaki etkileşmelerin ihmâl edilebilecek kadar küçük olduğuna yâni gazın ideal bir gaz gibi addedilebileceğine delâlettir.

Şimdi Güneşi oluşturan maddenin moleküler kütlesini μ ile gösterelim. Z de atom (ve aynı zamanda elektron) sayısı olsun. Çekirdeklerin çok sayıda proton ihtivâ etmekte oldukları kabul edileceği için Z de büyük bir sayı olacaktır. $\mathcal{N}$ ile *AVOGADRO* sayısı gösterilirse

$$\text{Protonun kütlesi} \simeq \text{Nötronun kütlesi}$$

olduğundan çekirdeğin kütlesi: $2Z/\mathcal{N}$ den ibâret olur. Bir mol'de $\mathcal{N}$ çekirdek bulunduğundan bir mol'ün kütlesi de $2Z$ olur. Şu hâlde

$$\mu = \text{Ortalama moleküler kütle} = \frac{\text{Moleküler kütle}}{\text{Tânecik sayısı}} = \frac{2Z}{Z+1}$$

olur. (Z adet elektron + 1 adet çekirdek)

Z büyük olduğu için de

$$\boxed{\mu = \frac{2Z}{Z+1} \simeq 2}$$

olur.

c) Güneşin merkezindeki sıcaklık için ideal gazların hâl denkleminden

$$P_0 = \frac{RT_0\rho}{\mu} \rightarrow T_0 = \frac{P_0}{R}\frac{\mu}{\rho}$$

ve

$$T_0 = 22.10^6\ °K$$

bulunur.

I.13. Bir mol'lük bir karbon gazı

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

şeklindeki *VAN DER WAALS* hâl denklemine uyar.

1) Bağımsız, v hacım ve T sıcaklık değişkenlerinin fonksiyonu olarak sâbit basınçtaki α genleşme katsayısı ile sâbit hacımdaki β basınç artışı katsayısını hesaplayınız.

2) Sâbit sıcaklıktaki $\varkappa_T$ sıkıştırılabilirlik katsayısı ile α, β ve P arasında genel bir bağıntının var olduğunu gösteriniz.

3) Gazın iç basıncının ihmâl edildiği hâllerde $\varkappa_T = \alpha^2 v/\beta R$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : 1) Basınç sâbit tutularak gazın hâl denklemi türetilirse

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)dv - (v-b)\frac{2a}{v^3}\,dv = R\,dT$$

olur. Bu ifâdede yalnızca bağımsız v ve T değişkenlerini muhafaza etmek için hâl denkleminden hareketle $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)$ yerine $\frac{RT}{v-b}$ yerleştirilirse

$$\left(\frac{RT}{v-b} - \frac{(v-b)\,2a}{v^3}\right)dv = R\,dT \tag{I.13.1}$$

ifâdesi elde edilir. Sâbit basınçtaki genleşme katsayısının tanımı göz önünde tutulursa (I.13.1) den yararlanarak

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \frac{Rv^2\,(v-b)}{RTv^3 - 2a\,(v-b)^2}} \tag{I.13.2}$$

bulunur.

Şimdi de aynı hâl denklemini sâbit hacımda türetelim :

$$(v-b)\,dP = R\,dT.$$

Buradan

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} \tag{I.13.3}$$

olduğu anlaşılır. Öte yandan da P eğer v ve T nin fonksiyonu olarak belirlenirse

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{I.13.4}$$

olacaktır. Buna göre β nın tanımından, ve ayrıca (I.13.3) ile (I.13.4) ü de göz önünde tutarak,

$$\boxed{\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{Rv^2}{RTv^2 - a\,(v-b)}}$$

bulunur.

2) Bilindiği gibi $\varkappa_T$ sâbit sıcaklıktaki sıkıştırılabilirlik katsayısı

$$\varkappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

ile tanımlanır. Öte yandan mâlûm

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = -1$$

matematik bağıntısı α, β ve $\varkappa_T$ katsayılarının tanım bağıntıları göz önünde tutulursa

$$-\varkappa_T\, v\, \beta\, P \frac{1}{v\alpha} = -1$$

olacağından, buradan

$$\boxed{\varkappa_T = \frac{\alpha}{\beta P}}$$

genel bağıntısı elde edilir. α nın ifâdesi (I.13.2) ile, βP nin ifâdesi de (I.13.3) ile verilmiş olduğundan *VAN DER WAALS* gazının sâbit sıcaklıktaki $\varkappa_T$ sıkıştırılabilirlik katsayısı, şu hâlde,

$$\boxed{\varkappa_T = \frac{v^2 (v-b)^2}{RTv^3 - 2a(v-b)^2}}$$

şeklindedir.

3) *VAN DER WAALS* gazının iç basıncının ihmâl edilebilir olması demek: $a=0$ olması demektir. Bu takdirde

$$\alpha = \frac{v-b}{Tv} \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{(v-b)^2}{T^2 v^2}, \qquad \text{(I.13.5)}$$

$$\beta = \frac{1}{T}, \qquad \text{(I.13.6)}$$

$$\varkappa_T = \frac{(v-b)}{RTv} \qquad \text{(I.13.7)}$$

olur. Bu üç bağıntıdan hareketle

$$\boxed{\varkappa_T = \frac{v}{R}\frac{\alpha^2}{\beta}}$$

olacağı kolaylıkla saptanır.

I.14. Hâl denklemi *VAN DER WAALS* denklemi olan gerçek bir gaz için $Pv = RT$ şeklindeki ideal gazlar denklemini gerçekleyen (P, T) hâllerinin geometrik yerini tâyin ediniz ve $P \to 0$ için gazın ideal gazlar denklemine uyduğu T_0 sıcaklığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM : Hem

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \tag{I.14.1}$$

hem de

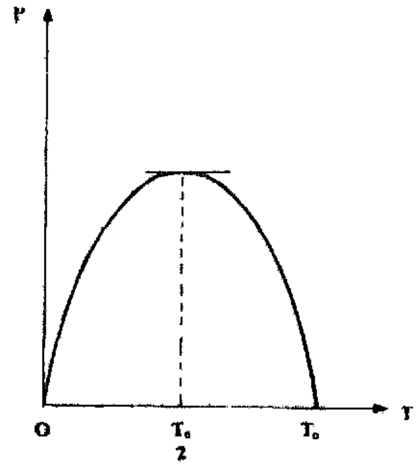
$$P\,v = RT \tag{I.14.2}$$

denklemlerini ayni anda gerçekleyen P ve T değerlerini bulmak için (I.14.2) yi (I.14.1) e taşırsak

$$(a - b\,RT)\;v = ab$$

veyâ

$$\boxed{(a - b\,RT)\,RT = ab\,P}$$



bulunur ki bu, şekilde görüldüğü gibi bir parabol yayıdır. Eğer $P = 0$ ise $T_0 = a/bR$ olur.

I.15. Azotun, 0 ile 40 atmosfer basınç altında, basıncının diferansiyelinin, bir mol'e indirgenmiş olan

$$dP = -\frac{RT}{v^2}\left(1 + \frac{2A}{v}\right)dv + \frac{R}{v}\left(1 + \frac{A}{v}\right)dT \tag{I.15.1}$$

ifâdesiyle temsil edilebileceği saptanmıştır.

Göz önüne alınan bu basınç aralığı içinde azotun hâl denklemini tesis ediniz.

ÇÖZÜM : $P = P(v, T)$ nin tam diferansiyeli

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dT$$

dir; bunu v değişkenine göre integre edersek (I.15.1) i de göz önünde bulundurarak ve $f(T)$ ile sıcaklığın keyfî bir fonksiyonunu göstererek

$$P = \int \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T dv + f(T) = -\int \frac{RT}{v^2}\left(1 + \frac{2A}{v}\right) dv + f(T) =$$

$$= -RT \int \frac{dv}{v^2} - ART \int \frac{2\,dv}{v^3} + f(T) = \frac{RT}{v} + \frac{ART}{v^2} + f(T) \qquad \text{(I.15.2)}$$

bulunur. Öte yandan

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v}\left(1 + \frac{A}{v}\right) = \frac{R}{v} + \frac{AR}{v^2}$$

olduğundan bu bağıntı ile, (I.15.2) den sâbit v şartı altında elde edilen,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v} + \frac{AR}{v^2} + \frac{df}{dT}$$

bağıntısı karşılaştırılırsa $df/dT = 0$, yâni $f(T) = C = sâbit$ bulunur. Buna göre (I.15.2)

$$Pv = RT\left(1 + \frac{A}{v}\right) + K$$

şekline girer.

Alçak basınçlarda gaz, ideal bir gaz gibi davranacaktır; yâni $T \to 0$ için $Pv \to 0$ olacaktır. Bu ise $K = 0$ olması demektir. Buna göre bir mol'lük azot gazının göz önüne alınan basınç aralığında haiz olduğu hâl denkleminin

$$\boxed{Pv = RT\left(1 + \frac{A}{v}\right)}$$

şeklinde olacağı saptanmış olur.

I.16. Deneyler belirli bir gazın bir mol'ü için α ve $\varkappa_T$ katsayılarının

$$\alpha = \frac{R}{RT + bP} \quad , \quad \varkappa_T = \frac{RT}{P(RT + bP)}$$

şeklinde olduğunu telkin etmişler ise acaba bu gazın bir mol için hâl denklemi nasıl olur? (R ve b ile iki sâbit büyüklük gösterilmektedir).

ÇÖZÜM : α nın tanımından derhâl

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad \rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \alpha\, dT + \ln \varphi(P)$$

yazmak mümkündür. Burada $\varphi(P)$, basıncın keyfî bir fonksiyonudur. Son ifâdedeki integral alma işlemleri yapılırsa

$$\boxed{v = (RT + bP)\,.\,\varphi(P)} \tag{I.16.1}$$

bulunur. Öte yandan (I.16.1) i de göz önünde tutarak $\varkappa_T$ için

$$\varkappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \frac{RT}{P(RT+bP)} =$$

$$= -\frac{1}{(RT+bP)\,.\,\varphi(P)}\left\{(RT+bP)\frac{d\varphi}{dP} + b\,\varphi(P)\right\}$$

ya da, basitleştirmelerden sonra,

$$(RT+bP)\left(\frac{\varphi(P)}{P} + \frac{d\varphi}{dP}\right) = 0$$

bulunur. Bu ise: $\varphi\, dP + P\, d\varphi = 0$, yâni $d(\varphi P) = 0$ olduğuna işâret etmektedir; yâni

$$\varphi(P)\,.\,P = A = s\hat{a}bit \quad \rightarrow \quad \varphi(P) = \frac{A}{P}$$

demektir. Buna göre (I.16.1) denklemi

$$Pv = A(RT + bP)$$

şekline girer.

Alçak basınçlarda gaz tıpkı bir ideal gazmış gibi davranacağından ($P \rightarrow 0$ için $Pv \rightarrow RT$), $A = 1$ olması gerektiği âşikârdır. Buna göre, aranan hâl denkleminin

$$\boxed{P(v - b) = RT}$$

şeklinde olduğu anlaşılmış olmaktadır.

I.17. Bir mol'e nisbet edilmiş gerçek bir gazın hâl denklemi Pv çarpımının seri şeklinde bir açınımı ile ya v cinsinden

$$Pv = A\left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \dots\right)$$

şeklinde, ya da P cinsinden

$$Pv = A(1 + B'P + C'P^2 + \ldots)$$

şeklinde yazılabilir.

***VAN DER WAALS* hâl denklemini ikinci mertebeden terimlere kadar (bunlar da dâhil olmak üzere) önce v, sonra da P cinsinden seriye açıp A, B, C, B', C' viryel katsayılarını T sıcaklığı ve gazın a, b ve R sâbitleri cinsinden hesaplayınız.**

ÇÖZÜM : *VAN DER WAALS* denklemi

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad \rightarrow \quad Pv = RT - \frac{a}{v} + Pb + \frac{ab}{v^2} \qquad (I.17.1)$$

şeklindedir. *VAN DER WAALS* denklemi kezâ

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

şeklinde de yazılabilir. P nin bu değerini (I.17.1) in sağ yanındaki 3. terime vaz edersek

$$Pv = RT - \frac{a}{v} + \left(\frac{RTb}{v-b} - \frac{ab}{v^2}\right) + \frac{ab}{v^2} = RT\left(1 - \frac{b}{v-b} + \frac{a}{RTv}\right)$$

bulunur. $b/v \ll 1$ olmasını göz önünde bulundurup b/v nin karesi cinsinden terimlerle yetinmek şartıyla

$$\frac{b}{v-b} = \frac{b}{v\left(1 - \frac{b}{v}\right)} \simeq \frac{b}{v}\left(1 + \frac{b}{v}\right) = \frac{b}{v} + \frac{b^2}{v^2}$$

yazılabileceğinden

$$\boxed{Pv = RT\left[1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right)\frac{1}{v} + \frac{b^2}{v^2}\right]}$$

olur. Buna göre **viryel katsayıları** denilen A, B ve C açınım katsayılarının

$$A = RT\,, \qquad B = b - \frac{b}{RT}\,, \qquad C = b^2$$

olduğu tesbit edilmiş olur.

Şimdi ise *VAN DER WAALS* denklemini $Pv = \varphi(P)$ şeklinde yazmaya çalışalım. Kolaylıkla,

$$v = \frac{RT}{P+\frac{a}{v^2}} + b = \frac{RT}{P\left(1+\frac{a}{Pv^2}\right)} + b \simeq \frac{RT}{P}\left(1-\frac{a}{Pv^2}\right) + b =$$

$$= \frac{RT}{P}\left(1-\frac{a}{Pv^2}+\frac{Pb}{RT}\right) \tag{I.17.2}$$

yazılabileceği görülür. İlk yaklaşıklıkta $Pv = RT$ alınabileceğinden

$$\frac{a}{Pv^2} = \frac{aP}{P^2 v^2} \simeq \frac{aP}{R^2 T^2} \tag{I.17.3}$$

yazılabilir. (I.17.2) nin tersini alır da bu ifâdeye (I.17.3) ü yerleştirirsek

$$\frac{1}{v} = \frac{P}{RT}\left(1+\frac{aP}{R^2T^2}-\frac{bP}{RT}\right)$$

olur. Bu son ifâdenin ışığı altında (I.17.1)

$$Pv = RT - \frac{aP}{RT}\left(1+\frac{aP}{R^2T^2}-\frac{bP}{RT}\right) + Pb + \frac{abP^2}{R^2T^2}\left(1+\frac{aP}{R^2T^2}-\frac{bP}{RT}\right)^2$$

veyâ

$$Pv \simeq RT - \frac{aP}{RT} - \frac{a^2P^2}{R^3T^3} + \frac{ab\,P^2}{R^2T^2} + Pb + \frac{ab\,P^2}{R^2T^2}\left(1+\frac{2a\,P}{R^2T^2}-\frac{2bP}{RT}\right)$$

ya da P nin ikinci mertebeden terimleriyle yetinerek nihâyet

$$\boxed{Pv = RT\left[1+\frac{1}{RT}\left(b-\frac{a}{RT}\right)P + \frac{2a}{R^3T^3}\left(b-\frac{a}{2RT}\right)P^2\right]}$$

ifâdesi elde edilir. Buradan da viryel katsayılarının

$$A = RT\,, \quad B' = \frac{1}{RT}\left(b-\frac{a}{RT}\right), \quad C' = \frac{2a}{R^3T^3}\left(b-\frac{a}{2RT}\right)$$

olduğu görülmektedir.

I.18. Sâbit sıcaklıktaki sıkıştırılabilme katsayısı $\varkappa_T$ ve sâbit basınçtaki genleşme katsayısı da α olan v_0 hacımlı bir katı cisim

*** $A_0(P_0\,, T_0)$ hâlinden $A(P_0\,, T_1{=}kT_0)$ hâline geçmesini sağlayan eşbasınçlı tersinir bir ısıtılmaya,**

*** Sonra da A hâlinden $A_1(P_1\,, T_1)$ hâlinde geçmesini sağlıyan eşsıcaklıklı bir sıkıştırılmaya mâruz kalmaktadır.**

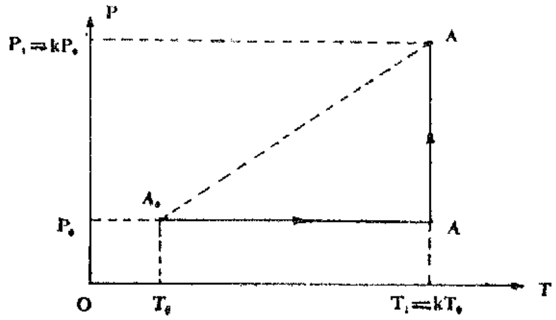
v_0, α ve $\varkappa_T$ sâbit olmak üzere $(P\,,\,T)$ diyagramında:

1) A_0AA_1 yolunu izleyerek, ve

2) A_0A_1 yolunu izleyerek

A_0 hâlinden A_1 hâline geçerken sistem üzerinde yapılmış olan işin P_0, v_0, T_0, k, α ve $\varkappa_T$ nin fonksiyonu olarak ifâdesini tesis ediniz.

ÇÖZÜM : 1) Elemanter tersinir dönüşüm esnâsında katı cisme intikaal eden iş



$$dW = -P\,dv =$$

$$= -P\left[\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP\right]$$

dir. Hâlbuki

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \alpha v_0\,, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = -\varkappa_T v_0$$

dır. Buradan

$$\boxed{dW = -Pv_0\,(\alpha\,dT - \varkappa_T\,dP)} \qquad (I.18.1)$$

sonucu çıkar.

Eşbasınçlı A_0A ısınması esnâsındaki elemanter iş, $dP = 0$ olduğundan,

$$dW = -P_0\,v_0\,\alpha\,dT$$

olacaktır. Buradan integral alarak

$$W_{A_0A} = -\alpha\,P_0\,v_0\,(T_1 - T_0) = -\alpha\,P_0\,v_0\,T_0\,(k-1)$$

bulunur.

Eşsıcaklıklı ($dT = 0$) sıkıştırma esnâsında da elemanter iş $dW = \varkappa_T\,v_0\,P\,dP$ dir; buna göre yapılmış olan W_{AA_1} işinin de, buradan integral alarak,

$$W_{AA_1} = \varkappa_T\,v_0\,\frac{P_1^2 - P_0^2}{2} = \frac{\varkappa_T\,v_0\,P_0^2}{2}\,(k^2 - 1)$$

ile verileceği anlaşılmış olur. Buna göre A_0 hâlinden A_0AA_1 yolunu izleyerek A_1 hâline geçişte ortaya konan toplam iş de

$$W_{A_0AA_1} = W_{A_0A} + W_{AA_1}$$

yâni

$$\boxed{W_{A_0AA_1} = \frac{P_0 v_0 (k^2 - 1)}{2} \left[\varkappa_T P_0 - \frac{\alpha T_0}{k+1} \right]} \qquad (I.18.2)$$

olur.

2) $A_0 A_1$ dönüşümü, şekilden, $P = kT$ denklemiyle temsil edilebildiği için (I.18.1) elemanter işinin ifâdesi

$$dW = -k \alpha v_0 T\, dT + \varkappa_T v_0 P\, dP$$

şekline girer. Şu hâlde konan ortaya toplam iş de

$$W = -k \alpha v_0 \frac{T_1^2 - T_0^2}{2} + \varkappa_T v_0 \frac{P_1^2 - P_0^2}{2}$$

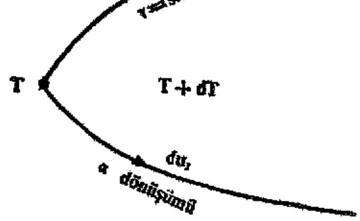
olur. $k = P_0/T_0$ olduğunu da hesaba katarak

$$\boxed{W_{A_0A_1} = \frac{P_0 v_0 (k^2 - 1)}{2} (\varkappa_T P_0 - \alpha T_0)} \qquad (I.18.3)$$

bulunur. (I.18.2) ve (I.18.3) ifâdeleri katı cismin bir A_0 başlangıç hâlinden bir A_1 nihaî hâline geçmesi için ortaya konan işin izlenen «yol» a tâbi olduğunu açıkça göstermektedirler.

I.19. $dP/P = \alpha\, dv/v$ **bağıntısıyla tanımlanan bir dönüşüm göz önüne alınmaktadır. İdeal bir gaz için bu dönüşüme tekaabül eden** c_α **özgül ısısını hesaplayınız.** $\alpha = 0$ **ya da** $\alpha = \infty$ **olursa bu ifâde ne olur?** $Pv^\gamma = sâbit$ **denklemiyle belirlenen eşısılı bir dönüşümde** c_α **nın değerini çıkarınız.**

ÇÖZÜM : $\dfrac{dP}{P} = \alpha \dfrac{dv}{v}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Böyle bir dönüşüme tâbî olan gaz ideal bir gaz olduğu için bunun iç enerjisinde vukuu bulan değişim, gazı aynı başlangıç sıcaklığından aynı nihaî sıcaklığa intikaal ettiren sâbit hacımlı bir dönüşümdeki iç enerjinin değişimi kadardır:



$$du_1 = c_v\, dT = du_2 .$$

Hâlbuki

$$du_2 = \delta q - \delta w = c_\alpha\, dT - \delta w$$

dir. Buna göre

$$c_v \, dT = c_\alpha \, dT - P \, dv$$

ya da

$$c_\alpha - c_v = P \frac{dv}{dT}$$

olur. Göz önüne alınan ideal bir gaz olduğundan $Pv = RT$ ve

$$\frac{dP}{P} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v}(1 + \alpha) = \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dv}{dT} = \frac{v}{T} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \quad \text{ve} \quad \frac{P\,dv}{dT} = \frac{R}{1+\alpha}$$

ve dolayısıyla da

$$\boxed{c_\alpha - c_v = \frac{R}{1+\alpha}}$$

olur.

Eğer $\alpha = 0$ ise $c_\alpha - c_v = R \rightarrow c_\alpha = c_P$ olur. Eğer $\alpha = \infty$ ise, bu sefer de $c_\alpha - c_v = 0 \rightarrow c_\alpha = c_v$ olur.

$\dfrac{dP}{P} = \alpha \dfrac{dv}{v}$ yi integre edersek $Pv^{-\alpha} =$ *sâbit* bulunur ki eşısılı (adyabatik) bir dönüşümde ideal gazlar için $Pv^{\gamma} =$ *sâbit* bağıntısı geçerli olduğundan buradan $\alpha = -\gamma$ olması gerektiği sonucu çıkar. Şu hâlde

$$c_\alpha - c_v = \frac{R}{1-\gamma}$$

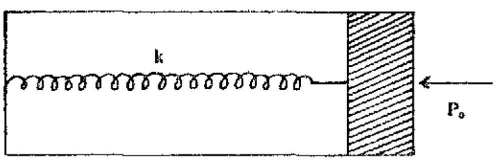
$$c_\alpha = c_v + \frac{R}{1-\gamma} = \frac{c_v - \gamma c_v + R}{1-\gamma} = \frac{c_v - c_P + R}{1-\gamma}$$

bulunur. Hâlbuki ideal gazlar için bilindiği gibi

$$c_P - c_v = R$$

dir. Şu hâlde $c_\alpha = 0$ olur ki bu $\delta q = c_\alpha dT = 0$ demektir; yâni dönüşüm gerçekten de eşısılı bir dönüşümdür.

I.20. Yay sâbiti k olan yay bir ile şekilde görüldüğü gibi bağlı S dik kesitli bir pistonla kapatılmış bir silindir içindebir mol'lük bir ideal gaz bulunmaktadır.



a) Gazın basıncı dıştaki P_0 basıncına eşit olduğunda yayın uzaması ne kadar olur? Bu denge hâline tekaabül eden gaz hacmı v_0 olsun. Yayın x kadar uzaması hâlinde gazın P basıncı ve v hacmını hesaplayınız.

b) Yayın uzamasında dx lik bir değişim söz konusu olduğunda dT sıcaklığının değişimini hesaplayınız.

c) Buna tekaabül eden iç enerji değişimi nedir? Ortaya çıkan ısı mikdarı, $c(x)$ ile bir özgül ısıyı göstermek üzere, $\delta q = c(x)\,dT$ şeklindedir. c_v ile sâbit hacımdaki özgül ısıyı göstererek $[c(x) - c_v]$ farkını hesaplayınız.

ÇÖZÜM : **a)** Dışarıdan piston üzerine etkiyen (P_0S) değerindeki kuvvet ile yayın pistona icrâ ettiği (kx) değerindeki kuvveti ayni yönde olup gazın içeriden piston üzerine icrâ ettiği (PS) değerindeki kuvvet bunlara aksi yöndedir. Pistonun denge hâli

$$PS = P_0S + kx \quad \rightarrow \quad \boxed{P - P_0 = \frac{kx}{S}}$$

ile verilecektir. Buradan,

$$dP = \frac{k}{S}\,dx$$

olması gerektiği görülmektedir. Hacım için de

$$\boxed{v = v_0 + x\,S} \quad \rightarrow \quad dv = S\,dx$$

yazılabileceği âşikârdır.

b) $Pv = RT$ olduğundan $P\,dv + v\,dP = R\,dT$, veyâ diferansiyellerin yukarıda saptanmış değerlerini bu ifâdeye yerleştirerek

$$\left(P_0 + \frac{kx}{S}\right) S\,dx + (v_0 + xS)\frac{k}{S}\,dx = R\,dT$$

ve buradan da

$$\boxed{dT = \frac{dx}{R}\left[P_0S + \frac{kv_0}{S} + 2kx\right]}$$

bulunur.

c) $du = c_v\,dT = c\,(x)\,dT + P\,dv$ dir. Buradan da

$$\boxed{c(x) - c_v = P\frac{dv}{dT} = PS\frac{dx}{dT}}$$

ifâdesi elde edilmiş olur.

I.21. Γ **toplam ısı sığası 400 gram suyunkine eşdeğer olan** $\theta_0 = 15\,°C$ **taki bir kalorimetrenin içine, ısı sığası ihmâl edilebilen ve** $k = 1$ **g/s lik bir debi ile içinden c = 0,4 cal/g/ °C lık bir özgül ısıyı haiz bir sıvı geçen bir serpantin daldırılmaktadır. Bu sıvı, kalorimetreye** $\theta_1 = 80\,°C$ **da girmekte ve** θ **sıcaklığını haiz olarak kalorimetreyi terketmektedir. Sistemdeki ısı kaçakları da ihmâl edilebilir bir düzeydedir.**

1) Kalorimetrenin θ **sıcaklığını** t **zamanının fonksiyonu olarak veren bağıntıyı tesis ediniz.**

2) Bu sıvıdan 100 g kadarı serpantinden geçtiği an kalorimetrenin sıcaklığı ne olacaktır?

3) Serpantin boş olmak şartıyla eğer θ_1 **sıcaklığındaki 100 g sıvı doğrudan doğruya kalorimetrenin içine boşaltılmış olsaydı, başlangıç sıcaklığı** θ_0 **olan kalorimetrenin denge hâline tekaabül eden sıcaklığı ne olurdu?**

4) Şimdi serpantinden $\theta_1 = 80\,°C$ **başlangıç ve** θ **çıkış sıcaklıklarını haiz hidrojen geçmekte olsun. Kalorimetrenin başlangıç sıcaklığının** $\theta_0 = 15\,°C$**, toplam ısı sığasının** $\Gamma = 400$ **g olduğu göz önünde bulundurulmak ve t = 100 saniye sonunda** $\theta = 52\,°C$ **olduğu kaydedilmek şartıyla, eğer debisi gene k = 1 g/s ise, hidrojenin özgül ısısının değerinin ne olacağını saptayınız.**

ÇÖZÜM : 1) t ve $t + dt$ anları arasında kalorimetrenin sıcaklığı da θ dan $\theta + d\theta$ ya yükselmiş olsun. Buna göre kalorimetreye intikaal etmiş olan ısı mikdarı da $\Gamma\, d\theta$ olur. Öte yandan serpantinin içinden geçen sıvının terk ettiği ısı mikdarı da, m ile kütleye işâret ederek, $dm = k\,dt$ olmak üzere

$$(k\ dt)\, c\, (\theta_1 - \theta)$$

dır. Buna göre denge hâli için

$$\Gamma\, d\theta = kc\,(\theta_1 - \theta)\, dt$$

ya da

$$\frac{d\theta}{\theta - \theta_1} = -\frac{kc}{\Gamma}\, dt$$

olur. Bu ifâdeyi integre ederek, ve $\ln K$ ile integrasyon sâbitini göstererek

$$\ln(\theta - \theta_1) = -\frac{kc}{\Gamma}t + \ln K$$

yâni

$$\theta = \theta_1 + K e^{-\frac{kc}{\Gamma}t}$$

bulunur. $t = 0$ ânında kalorimetrenin sıcaklığının $\theta = \theta_0$ olması şartından $K = \theta_0 - \theta_1$ bulunur. Buna göre θ sıcaklığının değişim kaanûnu da

$$\boxed{\theta = \theta_1 - (\theta_1 - \theta_0)\, e^{-\frac{kc}{\Gamma}t}} \qquad \text{(I.12.1)}$$

şeklinde olacaktır.

2) Sıvının debisi k olduğuna göre serpantinden m=100 g lık bir sıvı kütlesi

$$t = \frac{m}{k} = 100 \text{ s}$$

içinde geçmiş olacaktır. Bu takdirde de kalorimetrenin sıcaklığı (I.21.1) e göre

$$\theta = 80 - (80 - 15)\,.\exp(-0{,}4 \times 100/400) = 80 - 65\, e^{-0{,}1} = 21{,}5\ °\text{C}$$

olacaktır.

3) Denge hâlinde kalorimetre denklemi

$$\Gamma(\theta - \theta_0) = mc(\theta_1 - \theta)$$

olacağından buradan θ nın değeri çıkarılır:

$$\boxed{\theta = \frac{mc\,\theta_1 + \Gamma\theta_0}{mc + \Gamma}} \qquad \text{(I.21.2)}$$

Buradan da kolaylıkla

$$\theta = 20{,}9\ °\text{C}$$

bulunur.

4) Bu hâlde de gene (I.21.1) denklemi geçerli olacaktır. Bu denklemden

$$e^{\frac{kc}{\Gamma}t} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_1 - \theta}$$

yazılır ve bu ifâdeden de c özgül ısısının değeri olarak

$$c = \frac{\Gamma}{kt} \ln \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_1 - \theta}$$

ya da sayısal veriler göz önünde tutulduğunda

$$c = \frac{400}{1 \times 100} \ln \frac{80-15}{80-52} = 3{,}37 \text{ cal/g/ °C}$$

bulunur.

I.22. ***VAN DER WAALS*** **hâl denklemine uyan bir mol'lük CO_2 gazı göz önüne alınıyor. ($a = 0{,}36$, $b = 42{,}7.10^{-6}$, $R = 8{,}32$).**

1) v_1 ve v_2 hacımları arasında sâbit bir T sıcaklığında vukuu bulan eşsıcaklıklı tersinir bir sıkıştırma esnâsında gaza intikaal eettirilen w işinin ifâdesini tesis ediniz.

2) Bu işin ifâdesi alçak basınçlarda ($b \ll v$) ne olur?

3) Bu takdirde a, b ve R nin fonksiyonu olarak ifâde edilecek olan belirli bir T_1 sıcaklığı için gazın tıpkı bir ideal gaz gibi davranacağını gösteriniz. Bu T_1 sıcaklığı için eşsıcaklık eğrisinin $Pv = f(P)$ şekline konulacak olan hâl denklemi göz önünde tutulup da çizilen diagramında (*AMAGAT* diyagramında) $P \to 0$ hâli için yatay bir teğeti haiz olacağını gösteriniz. CO_2 için T_1 in değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM : 1) *VAN DER WAALS* hâl denklemi

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

şeklinde olduğundan, buradan basınç için

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

ve eşsıcaklıklı bir sıkıştırma sürecinde gaz üzerinde yapılan iş olarak da

$$w = -\int_{v_1}^{v_2} P\,dv = -RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v-b} - a \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^2}$$

$$= RT \ln \frac{v_1 - b}{v_2 - b} + a\left(-\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_1}\right)$$

ya da

$$\boxed{w = RT \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \, \frac{1 - \dfrac{b}{v_1}}{1 - \dfrac{b}{v_2}} \right) + a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right)} \qquad \text{(I.22.1)}$$

bulunur.

2) Eğer basınç sıfıra giderse b, v nin önünde ihmâl edilebilir; şu hâlde

$$\frac{1-\dfrac{b}{v_1}}{1-\dfrac{b}{v_2}} \approx 1-\frac{b}{v_1}+\frac{b}{v_2}=1-b\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)$$

ve (I.22.1) ifâdesi de, $\varepsilon \ll 1$ olması hâlinde $\ln(1+\varepsilon)\approx\varepsilon$ olacağını da göz önünde tutarak,

$$w=RT\ln\frac{v_1}{v_2}+RT\ln\left[1-b\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)\right]+a\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)$$

veyâ

$$\boxed{w \approx RT\ln\frac{v_1}{v_2}+(a-RTb)\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)} \qquad \text{(I.22.2)}$$

şekline girer.

3) Eğer gaz, ideal bir gaz ise: $a=b=0$ dır; buna göre de (I.22.2) den, eşsıcaklık şartı altında işin

$$w=RT\ln\frac{v_1}{v_2} \qquad \text{(I.22.3)}$$

ifâdesiyle verileceği anlaşılır. Gene (I.22.2) ye dönerek

$$a-RTb=0$$

olması hâlinde, yâni gazın sıcaklığının

$$\boxed{T_1=\frac{a}{Rb}}$$

şeklinde olması hâlinde, bir *VAN DER WAALS* gazına eşsıcaklıklı $v_1 \rightarrow v_2$ sıkıştırması esnâsında intikaal ettirilen işin aynı şartlar altında bir ideal gaza intikaal ettirilecek işe eşit olacağı anlaşılmaktadır. Bu T_1 sıcaklığına kritik-ötesi (metakritik) sıcaklık adı verilir.

$Pv=f(P)$ şeklindeki eşsıcaklık eğrisi, eğer

$$\left[\frac{\partial(Pv)}{\partial P}\right]_T=0$$

ise yatay bir teğeti haizdir. Hâlbuki *VAN DER WAALS* denklemi

$$Pv = RT + Pb - \frac{a}{v} + \frac{ab}{v^2}$$

şeklinde de yazılabilir. Düşük basınçlarda $b \ll v$ olacağı için ab/v^2 yi RT önünde ihmâl edebiliriz. Buna göre

$$Pv = RT + P\left(b - \frac{a}{Pv}\right)$$

yazılabilir. Bunun ise düşük basınçlarda gazın bir ideal gazmış gibi ($Pv = RT$) davranması hasebiyle

$$Pv = P\left(b - \frac{a}{RT}\right) \tag{I.22.4}$$

ifâdesine eşdeğer olduğu kolaylıkla gerçeklenebilir. Bu itibarla da eşsıcaklık eğrisinin eğimi (I.22.4) e binaen

$$\left[\frac{\partial (Pv)}{\partial P}\right]_T = b - \frac{a}{RT} \tag{I.22.5}$$

ile verilecektir. T_1 metakritik sıcaklığı için $T_1 = a/Rb$ olacağından (I.22.5) in sağ yanı sıfır olacaktır; yâni Pv değerlerinin ordinata, P değerlerinin de apsise taşınması sûretiyle çeşitli eşsıcaklık değerleri için çizilen *AMAGAT* diyagramında T_1 sıcaklığına tekaabül eden eşsıcaklık eğrisinin teğeti yataydır.

Sayısal uygulama : CO_2 için

$$T_1 = \frac{a}{Rb} = \frac{0{,}36}{8{,}32 \times 42{,}7.10^{-6}} = 1013{,}2\ ^\circ K$$

bulunur.

I.23. ***P*, *v* ve *T* değişkenleriyle tasvir edilen bir sistem için bu değişkenlerin gerçekledikleri hâl denkleminin diferansiyeli**

$$\frac{dv}{v} = \alpha\, dT - \frac{dP}{\beta}$$

ifâdesiyle verilmektedir.

1) $\alpha = \dfrac{1}{T}\left(1 + \dfrac{3a}{vT^2}\right)$ ve $\beta = \dfrac{P}{1 + \dfrac{a}{vT^2}}$

olarak verildiği takdirde bu bağıntıların kendi aralarında uyumlu olup olmadıklarını araştırınız.

2) Sistemin hâl denklemi nasıldır? Buradan hareketle ideal gazlar denklemini bulmak mümkün müdür? Bu takdirde α ve β nın değeri nedir?

3) Pekçok katı cismin hâl denklemini

$$Pv + g(v) = \Gamma\, u$$

şeklinde ifâde etmek mümkündür. Buradaki Γ ya *GRUNEİSEN* sâbiti adı verilir ; *u* da sistemin mol başına iç enerjisidir.

$\bar{c}_v$ ile sâbit hacımdaki birim hacım başına özgül ısıyı göstermek üzere

$$\frac{\alpha\beta}{\bar{c}_v} = \Gamma$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : 1) Hâl denkleminin diferansiyeli, α ve β nın değerlerini de yerlerine koymak sûretiyle,

$$\frac{dP}{P} = \frac{v + \dfrac{3a}{T^2}}{v + \dfrac{a}{T^2}} \frac{dT}{T} - \frac{dv}{v + \dfrac{a}{T^2}} = \frac{\partial f(T,v)}{\partial T} dT + \frac{\partial f(T,v)}{\partial v} dv$$

şekline girer. Bu, integre edildiği takdirde, $\ln P = f(T, v)$ şeklinde bir hâl denklemi verecektir. α ve β nın ifâdelerinin birbirleriyle uyumlu olup olmamaları T ve v bağımsız değişkenlerine bağlı $f(T, v)$ fonksiyonunun kısmî türevleri arasındaki

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T\, \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v\, \partial T} \tag{I.23.1}$$

bağıntısını gerçekleyip gerçeklememelerine bağlıdır.

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{v + \dfrac{3a}{T^2}}{T\left(v + \dfrac{a}{T^2}\right)} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{1}{v + \dfrac{a}{T^2}} \tag{I.23.2}$$

olduğuna göre buradan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\, \partial T} = \frac{1}{T}\left\{\frac{1}{v + \dfrac{a}{T^2}} - \frac{v + \dfrac{3a}{T^2}}{\left(v + \dfrac{a}{T^2}\right)^2}\right\} = -\frac{2a}{T^3} \frac{1}{\left(v + \dfrac{a}{T^2}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T\, \partial v} = \frac{1}{\left(v + \dfrac{a}{T^2}\right)^2}\left(-\frac{2a}{T^3}\right)$$

bulunur ki bu da (I.23.1) bağıntısının gerçeklendiğini, yâni α ve β ifâdelerinin birbirleriyle uyumlu olduklarını göstermektedir.

2) $$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-1}{v + \frac{a}{T^2}} \quad \rightarrow \quad f(T,v) = -\ln\left(v + \frac{a}{T^2}\right) + \ln g(T)$$

yâni

$$f(T,v) = \ln\left[\frac{g(T)}{v + \frac{a}{T^2}}\right] \tag{I.23.3}$$

şeklindedir. Buradan ve (I.23.2) den

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{g'(T)}{g(T)} + \frac{\frac{2a}{T^3}}{v + \frac{a}{T^2}} = \frac{v + \frac{3a}{T^2}}{v + \frac{a}{T^2}}$$

bulunur. Böylelikle, ve A bir sâbit olmak üzere,

$$\frac{g'(T)}{g(T)} = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad g(T) = AT \tag{I.23.4}$$

olması gerektiği görülmektedir. $\ln P = f(T, v)$ olduğundan bu husûsu ve bir de (I.23.3) ile (I.23.4) ü göz önünde tutarak

$$\ln P = \ln \frac{AT}{v + \frac{a}{T^2}}$$

veyâ aranan hâl denklemi olarak

$$\boxed{P\left(v + \frac{a}{T^2}\right) = AT}$$

ifâdesi bulunur. Eğer $a = 0$ ise buradan $A = R$ olmak üzere ideal gazların hâl denklemi elde edilmiş olur. Buna göre de $\alpha = 1/T$ ve $\beta = 1/P$ olacağı da anlaşılmaktadır.

3) Katı cisim için

$$Pv + g(v) = \Gamma u \tag{I.23.5}$$

$$\frac{dv}{v} = \alpha\, dT - \frac{dP}{\beta}$$

ve eşhacımlı ($dv = 0$) bir dönüşüm için de

$$\delta q = du = c_v\, dT$$

olacağına göre

$$\alpha\, dT = \frac{dP}{\beta} \quad \text{ve} \quad du = c_v \frac{dP}{\alpha\beta} \tag{I.23.6}$$

olması gerektiği görülmektedir.

Hacmı sâbit tutarak (I.23.5) hâl denklemi türetilirse

$$v\, dP = \Gamma\, du \quad \rightarrow \quad du = \frac{v\, dP}{\Gamma} \tag{I.23.7}$$

olacağından (I.23.6.) ve (I.23.7) nin mukayesesinden derhâl

$$\boxed{\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\dfrac{c_v}{v}} = \frac{\alpha\beta}{\bar{c}_v}}$$

olacağı görülür.

* * * * * * * * * * * *

I.24. (i) $P(v - b)\, e^{A/vRT} = RT$ $(a, b = \text{sâbitler})$ *DİETERİCİ* **hâl denklemine uyan bir gaz için α, β ve $\varkappa_T$ yi hesaplayınız.**

(ii) T ve v nin çok büyük değerleri için bu denklemin ideal gaz denklemini ve α, β, $\varkappa_T$ nin de ideal gazın sâbit basınçtaki genleşme, sâbit hacımdaki basınç artışı ve sâbit sıcaklıktaki sıkışabilirlik katsayılarını verdiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM : (i) $$\alpha = -\frac{R + \dfrac{a}{vT}}{\dfrac{a}{v} - \dfrac{v}{v-b}RT}, \qquad \beta = \frac{1}{T}\left(1 + \frac{a}{vRT}\right),$$

$$\varkappa_T = -\frac{1}{v}\,\frac{v-b}{RT}\,\frac{e^{a/vRT}}{-\dfrac{1}{v-b} + \dfrac{a}{v^2 RT}}.$$

I.25. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial T\,\partial P} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial P\,\partial T}$ **bağıntısından faydalanarak**

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial \varkappa_T}{\partial T}\right)_P$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM : $\alpha = \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial T}\right)_P$ tanımından hareketle

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P}\right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\right)\right]_T = -\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P + \frac{1}{v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial P\,\partial T} \qquad (I.25.1)$$

bulunur.

$\varkappa_T = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial P}\right)_T$ tanımından hareketle de

$$\left(\frac{\partial \varkappa_T}{\partial T}\right)_P = \left[\frac{\partial}{\partial P}\left(-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T\right)\right]_P = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T - \frac{1}{v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial T\,\partial P} \qquad (I.25.2)$$

olduğu görülür. (I.25.1) ve (I.25.2) den

$$\frac{\partial^2 v}{\partial P\,\partial T} = \frac{\partial^2 v}{\partial T\,\partial P}$$

bağıntısının da yardımı ile

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial \varkappa_T}{\partial T}\right)_P$$

eşitliği elde edilir.

I.26. Hidrostatik bir sistemde herhangi bir süreçte yapılan işin diferansiyelinin

$$\delta w = Pv\alpha\, dT - Pv\,\varkappa_T\, dP$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

I.27. ***a* ve *b* sâbitler olmak üzere eğer α ve $\varkappa_T$**

$$\alpha = \frac{bT^2}{P}\,, \qquad \varkappa_T = \frac{aT^3}{P^2}$$

şeklinde iseler hâl denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM : $\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$ tanımından

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = b\,\frac{T^2}{P}$$

yâni

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{b}{P}\int T^2\,dT + \ln A(P)$$

ve

$$v = A(P)\exp(bT^3/3P) \qquad \text{(I.27.1)}$$

bulunur. Buradan

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \frac{dA}{dP}\exp(bT^3/3P) + A(P)\,.\left(-\frac{bT^3}{3P^2}\right)\exp(bT^3/3P)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $\varkappa_T$ nin tanımı ve verilen değeri yardımıyla

$$-\frac{1}{v}\,\frac{dA}{dP}\exp(bT^3/3P) + \frac{bT^3}{3P^2 v}\,A(P)\exp(bT^3/3P) = \frac{aT^3}{P^2}$$

yâni

$$\frac{dA}{dP} - \frac{bT^3}{3P^2}\,A = \frac{aT^3 v}{P^2}\exp(-\,bT^3/3P)$$

bulunur. Bu bir lineer diferansiyel denklemdir.

İkinci tarafsız homogen denklemin genel çözümü

$$\frac{dA_H}{A_H} = \frac{bT^3}{3P^2}\,dP \;\rightarrow\; \ln\frac{A_H(P)}{C} = -\,\frac{bT^3}{3P}$$

$$A_H(P) = C\exp(-\,bT^3/3P)$$

dır. İkinci taraflı denklemin bir özel çözümü

$$A_ö(P) = C(P)\exp(-\,bT^3/3P)$$

farzedilir ve denklemde yerine konursa $C(P)$ için

$$dC(P) = \frac{aT^3\,v}{P^2}\,dP$$

ve

$$C(P) = -\,\frac{aT^3\,v}{P}$$

bulunur. O hâlde

$$A_\delta(P) = -\frac{aT^3 v}{P} \exp(-bT^3/3P)$$

şeklindedir. Buradan

$$A(P) = A_H + A_\delta(P) = \left(C - \frac{aT^3 v}{P}\right) \exp(-bT^3/3P) \qquad \text{(I.27.2)}$$

olur. Buna göre (I.27.1) ve (I.27.2) den

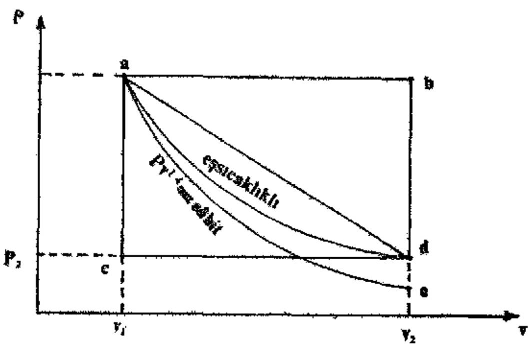
$$v = C - \frac{aT^3 v}{P}$$

bulunur. Şu hâlde aranan hâl denklemi de

$$\boxed{\left(1 + \frac{aT^3}{P}\right) v = C}$$

dir.

I.28. $v_1 = 8\ \text{m}^3$, $v_2 = 24\ \text{m}^3$; $P_1 = 3\ \text{atm.}$, $T_a = 300\ °\text{K}$ **veriliyor. İdeal bir gaz tersinir olarak, şekilde gösterilen süreçlere tâbi tutulduğu zaman**



(i) Gazın a, c, e **hâllerindeki sıcaklığını,**

(ii) abd, acd, aed, **eşsıcaklıklı** ad, **ve lineer** ad **süreçlerinde yapılan işi bulunuz.**

ÇÖZÜM : (i) İdeal gaz denklemi sırasıyla a ve b hallerine uygulanırsa

$$P_a v_a = R T_a, \qquad P_b v_b = RT_b$$

bulunur. Bu denklemler taraf tarafa bölünerek ve $P_a = P_b = P_1$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\boxed{T_b = 900\ °\text{K}}$$

olduğu görülür.

Gaz, a hâlinden d hâline eşsıcaklıklı olarak geçtiğinden

$$P_a v_a = P_d v_d$$

yâni

$$P_2 = P_d = 1 \text{ atm.}$$

dir. T_b nin değerlendirilmesinde olduğu gibi hareket edilerek

$$\boxed{T_e = 100\ °\mathrm{K}}$$

elde edilir.

İdeal gaz ($\gamma = 7/5$), *a* hâlinden *e* hâline eşısılı olarak geldiğinden

$$P_a v_a^{\gamma} = P_e v_e^{\gamma}$$

yâni

$$P_e = P_a \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

dür. Diğer taraftan

$$T_e = T_a \frac{P_e}{P_a} \frac{v_e}{v_a}$$

bağıntısı vardır. Buradan kolayca

$$\boxed{T_e = 193\ °\mathrm{K}}$$

elde edilir.

(ii) *adb* sürecinde yapılan iş *ab* sürecinde yapılan iş ile *bd* sürecinde yapılan işin toplamından ibârettir. Hâlbuki *bd* sürecinde yapılan iş hacmın sâbit kalması nedeniyle sıfırdır. Buna göre

$$w_{abd} = \int_{v_a}^{v_b} P\, dv = P_1 (v_b - v_a) = 3 \times 1{,}013.10^5 \times (24 - 8) \text{ Joule}$$

$$\boxed{w_{abd} = 4\ 862\ 400 \text{ Joule}}$$

dur.

Benzer şekilde

$$w_{acd} = \int_{v_a}^{v_c} P\,dv + \int_{v_c}^{v_d} P\,dv = P_2(v_d - v_c) = 1\,620\,800 \text{ Joule}$$

$$\boxed{w_{acd} = 1\,620\,800 \text{ Joule}}$$

dur.

$$w_{aed} = \int_{v_a}^{v_e} P\,dv + \int_{v_e}^{v_d} P\,dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{P_a v_a^{\gamma}}{v^{\gamma}}\,dv = 3 \times 1{,}013.10^5 \times 8^{1,4} \times \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^{\gamma}}$$

$$= 2\,159\,690 \text{ Joule}$$

$$\boxed{w_{aed} = 2\,159\,690 \text{ Joule}}$$

dır. Ayrıca

$$w_{\substack{eşsı.\\ad}} = \int_{v_a}^{v_d} P\,dv = P_a v_a \int_{v_a}^{v_d} \frac{dv}{v} = P_a v_a \ln \frac{v_d}{v_a}$$

ve değerleri yerine konarak

$$\boxed{w_{\substack{eşsı.\\ad}} = 1\,159\,970 \text{ Joule}}$$

bulunur.

$w_{\substack{lineer\\ad}}$ yi hesaplamak için önce *ad* doğrusunun denklemini bulmak gereklidir.

$$P = mv + n$$

doğrusunun (8, 3) ve (24, 1) noktalarından geçmesi özelliğinden *m* ve *n* hesaplanarak yerine konursa, doğrunun

$$P = -\frac{1}{8}v + 4$$

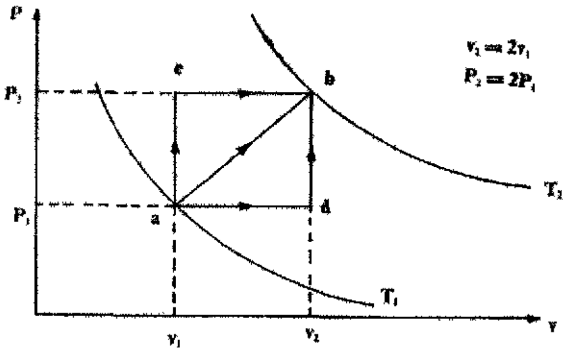
olduğu görülür. O hâlde

$$w_{\substack{\text{lineer}\\ ad}} = -\frac{1}{8}\int_{8}^{24} v\,dv + 4\int_{8}^{24} dv = 3\,241\,600 \text{ Joule}$$

$$\boxed{w_{\substack{\text{lineer}\\ ad}} = 3\,241\,600 \text{ Joule}}$$

dur.

I.29. Sâbit hacımdaki özgül ısısı $c_v = \frac{5}{2} R$ olan ideal bir gaz tersinir olarak *a* dan *b* ye *acb*, *adb*, ve *ab* yollarından getiriliyor.



(i) Her üç hâlde gazın bir mol'üne verilen ısı mikdarını R ve T_1 cinsinden hesaplayınız.

(ii) Gazın *ab* boyunca moler özgül ısı sığası ne olur?

ÇÖZÜM : (i) *acb* sürecinde gaza verilen ısı mikdarı *ac* ve *cb* süreçlerinde gaza verilen ısı mikdarlarının toplamına eşittir, yâni

$$q_{acb} = q_{ac} + q_{cb}$$

dir. Termodinamiğin birinci ilkesine göre

$$\delta q = c_v\,dT + P\,dv$$

dir. Buna göre

$$q_{ac} = \int_{T_1}^{T_c} c_v\,dT + \int_{v_1}^{v_1} P\,dv = c_v(T_c - T_1),$$

$$q_{cb} = \int_{T_c}^{T_2} c_v\,dT + \int_{v_1}^{v_2} P\,dv = \frac{5}{2} R\,(T_2 - T_c) + P_2\,(v_2 - v_1)$$

olur. O hâlde

$$q_{acb} = \frac{5}{2} R(\,T_2 - T_1) + P_2(v_2 - v_1) = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) + 2P_1\,v_1$$

$$= \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) + 2\,R\,T_1$$

dir. Fakat

$$P_1 v_1 = R\,T_1\,, \quad P_2 v_2 = R\,T_2$$

bağıntılarından

$$T_2 = 4T_1$$

bulunur. Buna göre de

$$\boxed{q_{acb} = \frac{19}{2}\,R\,T_1}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\boxed{q_{adb} = \frac{17}{2}\,R\,T_1}$$

bulunur. Ayrıca

$$q_{ab} = \int_{T_1}^{T_2} c_v\,dT + \int_{v_1}^{v_2} P\,dv = c_v \int_{T_1}^{T_2} dT + \frac{P_1}{v_1} \int_{v_1}^{v_2} v\,dv$$

$$= \frac{5}{2}\,R\,(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}\,P_1\,v_1 = \frac{5}{2}\,R\,3T + \frac{3}{2}\,R\,T_1 = 9\,R\,T_1$$

$$\boxed{q_{ab} = 9\,RT_1}$$

dir.

(ii) Ortalama değer tanımından *ab* boyunca *c* özgül ısısı için de,

$$c = \frac{\Delta q}{\Delta T} = \frac{q_{ab}}{T_2 - T_1} = \frac{9RT_1}{3T_1} = 3R$$

$$\boxed{c = 3R}$$

bulunur.

I.30. Çok düşük sıcaklıklar dışında, bir çok cismin sâbit basınçtaki moler öz-gül ısısı $c_P = a + 2bT - cT^{-2}$ (a, b, c = sâbitler) şeklinde ifâde edilebilir.

(i) Böyle bir cismin n mol'ünün sıcaklığını sâbit basınçta T_1 den T_2 ye çıkarmak için cisme verilmesi gereken ısı mikdarını bulunuz.

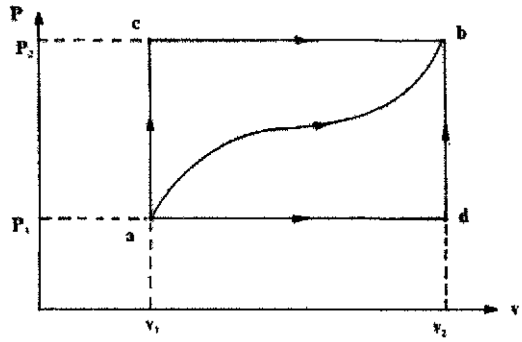
(ii) Magnezyum için $a = 25{,}7.10^3$, $b = 3{,}13$, $c = 3{,}27.10^8$, $[c_P]$ = Joule kilomol^{-1} °K^{-1} dir. Magnezyumun 300 °K deki c_P si ile 300 °K ve 500 °K arasındaki ortalama c_P sini hesaplayınız.

CEVAP : (i) $$Q = n\left[a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2) + c\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right],$$

(ii) $c_P = 23{,}945.10^3$ Joule kilomol^{-1} °K^{-1},

$\overline{c_P} = 28.10^3$ Joule kilomol^{-1} °K^{-1}.

I.31. Bir sistem şekildeki *acb* eğrisi boyunca *a* hâlinde *b* hâline götürülmekte ve bu sırada sisteme 80 Joule ısı verilmektedir. Sistem de 30 J luk iş yapmaktadır.



(i) *adb* süreci boyunca yapılan işin 10 J olması için sisteme ne kadar ısı verilmesi gerekir?

(ii) Sistem *a* hâlinden *b* hâline şekildeki eğri boyunca getirildiğinde sisteme yapılan iş 10 J dur. Bu sırada sisteme ısı verilmesi mi yoksa sistemden ısı alınması mı gerekir?

(iii) $U_a = 0$, $U_d = 40$ J ise *ad* ve *db* süreçlerinde sisteme giren ısı mikdarını bulunuz (U sistemin iç enerjisidir).

ÇÖZÜM : (i) *acb* eğrisi boyunca sisteme 80 J luk ısı verildiğine ve sistem de 30 J luk iş yaptığına göre, iç enerjisindeki artış: 80 J — 30 J = 50 J olur. *adb* eğrisi boyunca sisteme verilen ısı mikdarının bir kısmı iç enerjiyi 50 J arttırırken öteki kısmının da 10 J luk iş yapması istendiğine göre

$$Q = 50\text{ J} + 10\text{ J} = 60\text{ J}$$

dur.

(ii) $(\Delta U)_{ab} = 50$ J olduğundan ve sisteme 20 J luk iş yapıldığına göre, sisteme 30 J luk ısı vermek gerekir.

(iii) *ad* sürecinde sistemin 10 J luk iş yaptığını biliyoruz. İç enerji 40 J arttığına göre, sisteme giren ısı mikdarının 40 J + 10 J = 50 J olması gerekir. *db* sürecinde iç enerji 50 J — 40 J = 10 J artmaktadır. Hacım sâbit kaldığından yapılan iş sıfırdır. Sisteme girmesi gereken ısı mikdarı da 10 J dur.

I.32. (i) P-V şemasında P_0, V_0 başlangıç hâlinden hareketle, hacmın $2V_0$ a kadar genişlediği (*a*) eşısılı, (*b*) eşsıcaklıklı, (*c*) eşbasınçlı hâl değişimi süreçlerini temsil eden eğrileri çiziniz. Bu grafiği kullanarak hangi süreç için yapılan işin en az olduğunu bulunuz.

(ii) Aynı işlemleri gazın P_0, V_0 başlangıç hâlinden hacmı $V_0/2$ oluncaya kadar sıkıştırılması için tekrarlayınız.

I.33. P_1, V_1 başlangıç hâlinde bulunan ideal bir gaz, sâbit hacımda basıncı ilk basıncının 2 katı olana kadar ısıtılmakta sonra, basıncı sâbit sıcaklıkta ilk değerine düşürülmekte ve daha sonra da gaz sâbit basınçta hacmı ilk hacmına eşit oluncaya kadar sıkıştırılmaktadır.

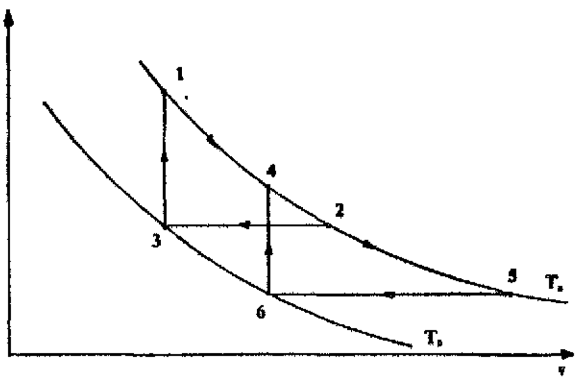
(i) Bu süreçleri P-V, P-T düzlemlerinde çiziniz.

(ii) $N = 2$ kilomol, $P_1 = 2$ atm., $V_1 = 4$ m³ olduğuna göre her süreçte yapılan işi hesaplayınız.

I.34 1 mol ideal gaz şekilde gösterilen süreçlere tâbi tutulmaktadır. Bu takdirde

$$w_{1231} = w_{4564}, \qquad q_{1231} = q_{4564}$$

olduğunu gösteriniz.



ÇÖZÜM: $w_{1231} = w_{12} + w_{23} + w_{31}$ ve

$$w_{12} = \int_1^2 P\,dv = RT_a \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$w_{23} = P_2(v_2 - v_3), \qquad w_{31} = 0$$

olduğundan

$$w_{1231} = RT_a \ln \frac{v_1}{v_2} + P_2(v_2 - v_3),$$

dür. Benzer şekilde

$$w_{4564} = RT_a \ln \frac{v_5}{v_4} + P_5(v_5 - v_6)$$

olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan 2 hâlinden 3 hâline geçiş eşbasınçlı olduğundan, ideal gaz denkleminden,

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{T_a}{T_b}$$

ve $v_3 = v_1$ olduğu için de

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_a}{T_b}$$

dir. Buna göre

$$w_{1231} = RT_a \ln \frac{T_a}{T_b} + RT_a\left(1 - \frac{T_b}{T_a}\right) \qquad \text{(I.34.1)}$$

olur.

Ayni işlemler 5, 6 hâllerine uygulanır ve $v_6 = v_4$ olduğu hatırlanırsa

$$w_{4564} = TR_a \ln \frac{T_a}{T_b} + RT_a\left(1 - \frac{T_b}{T_a}\right) \qquad \text{(I.34.2)}$$

elde edilir. (I.34.1) ve (I.34.2) den de

$$w_{1231} = w_{4564}$$

bulunur.

Termodinamiğin birinci ilkesine göre

$$\delta q = du + P\,dv$$

olup bunun süreçlere uygulanmasıyla da

$$q_{1231} = (c_P + c_v)(T_a - T_b) + w_{1231}\,,$$

$$q_{4564} = (c_P + c_v)(T_a - T_b) + w_{4564}$$

elde edilir. Buna göre

$$q_{1231} = q_{4564}$$

olduğu âşikârdır.

I.35. $Pv^2 = s\hat{a}bit$ **kaanûnuna göre genişleyen bir ideal gaz soğur mu, ısınır mı? Olay esnasında gazın moler özgül ısısı ne kadardır?**

CEVAP : Genişleme esnasında gaz soğur ; $c = 2c_v - c_P$

I.36. Bir mol ideal gaz, özgül ısısı $c = \alpha T$ olacak şekilde bir sürece tâbi tutuluyor (α bir sâbittir). İdeal gazın bu süreçte uyacağı hâl denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: Bu süreç için Termodinamiğin birinci ilkesi

$$\alpha T\, dT = du + P\, dv = c_v\, dT + P\, dv$$

yâni

$$(\alpha T - c_v)\, dT - P\, dv = 0$$

eşitliğini verir. P, ideal gaz denklemi yardımıyla yok edilirse

$$(\alpha T - c_v)\, dT - RT\frac{dv}{v} = 0,$$

ve buradan da integrasyonla

$$\alpha T - c_v \ln T - R \ln v = \text{sâbit}$$

bulunur. Hâlbuki

$$c_P - c_v = R\,, \quad \gamma = \frac{c_P}{c_v}$$

yâni

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

dir. Buna göre yukarıdaki bağıntı da

$$\alpha T - \ln T^{R/(\gamma-1)}\, v^R = \text{sâbit}$$

ve

$$\boxed{v^R\, T^{R/(\gamma-1)}\, e^{-\alpha T} = \text{sâbit}}$$

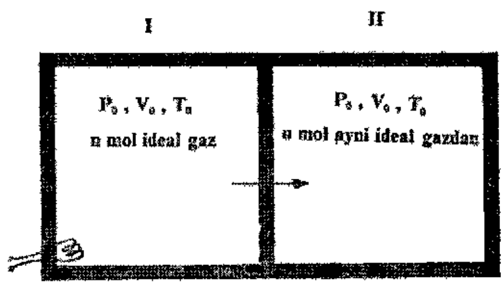
şeklini alır.

I.37. 2 atomlu bir ideal gaz eşısılı olarak hacmı ilk hacmının 1,35 i olana kadar genişletiliyor. İlk sıcaklığının 18 °C olması hâlinde son sıcaklığı ne olur? Bu süreçte yapılan işi hesaplayınız.

CEVAP: $\gamma = \dfrac{7}{5}\,, \quad T = \dfrac{291}{(1{,}35)^{0{,}4}}\ {}^\circ\mathrm{K}\,,$

$$w = \frac{5}{2} \times 291 \times \left(1 - \frac{1}{(1{,}35)^{0{,}4}}\right) \times R \text{ Joule.}$$

I.38. Isı geçirmeyen maddeden yapılmış bir silindir, gene aynı maddeden yapılmış sürtünmesiz olarak kayabilen bir piston ihtiva etmektedir. I-inci bölmedeki gaz ısıtılıyor ve piston II-inci bölmedeki gazın basıncı $27/8\ P_0$ oluncaya kadar ok yönünde hareket ediyor.



$$\gamma = 1{,}5\,, \quad \partial c_v/\partial T = 0$$

dır.

(i) II-inci bölmedeki gaz üzerinde ne kadar iş yapılmıştır?

(ii) II-inci bölmedeki gazın son sıcaklığı nedir?

(iii) I-inci bölmedeki gazın son sıcaklığı nedir?

(iv) I-inci bölmedeki gaza ne kadar ısı verilmiştir?

CEVAP: (i) $W = \dfrac{1}{2}\, n\, c_v\, T_0$

(ii) $T_1 = \dfrac{3}{2}\, T_0\,,$

(iii) $T_1 = \dfrac{21}{4}\, T_0$

(iv) $Q = \dfrac{19}{4}\, n\, c_v\, T_0\,.$

I.39. Isı geçirmeyen bir maddeden yapılmış bir tank, hacımları farklı olacak şekilde, iki kısma bölünmüştür. Birinci kısımda P_A, V_A, T_A hâlinde n_A mol ve ikinci kısımda da P_B, V_B, T_B hâlinde n_B mol ideal gaz bulunmaktadır. Hacımları biribirinden ayıran bölme kaldırıldıktan sonra oluşan karışımın sıcaklığını ve basıncını bulunuz. (c_v = sâbit farzedilecektir.)

CEVAP: $T = T_A\, T_B \left(\dfrac{P_A\, V_A + P_B\, V_B}{P_A\, V_A\, T_B + P_B\, V_B\, T_A} \right), \quad P = \dfrac{P_A\, V_A + P_B\, V_B}{V_A + V_B}\,.$

I.40. Hâl denklemi $(P + b)\, v = RT$ olan bir gaz için özgül iç enerji $u = aT + bv + u_0$ $(a, b, u_0 = \text{sâbit})$ ifâdesiyle verildiği takdirde:

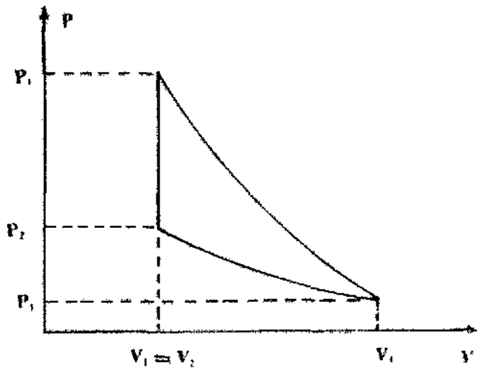
(a) c_v yi hesaplayınız,

(b) $c_P - c_v = R$ olduğunu ve

(c) $T\, v^{R/c_v} = \textit{sâbit}$ eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

I.41. Tek atomlu bir ideal gaz V_1, P_1, T_1 hâlinden sâbit hacımda V_1, kP_1, T_2 ($k \in [0, 1]$) hâline, daha sonra da bu hâlden eşsıcaklıklı olarak V_3, P_3, T_3 hâline geçmektedir. Gazın eşısılı olarak sıkıştırıldığında, tekrar V_1, P_1, T_1 hâline gelebilmesi için P_3, V_3 ne olmalıdır? Bu kapalı süreç boyunca gazın iç enerjisi ne kadar değişir?

ÇÖZÜM: Gaz 2 hâlinden 3 hâline eşsıcaklıklı ve 3 hâlinden 1 hâline de eşısılı olarak geçtiğine göre, sırasıyla



$$P_2 V_2 = P_3 V_3,$$
$$P_3 V_3^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$$

eşitlikleri vardır. Bunlardan, $P_2 V_2 = k P_1 V_1$ yardımıyla

$$P_3 = k^{\gamma/(\gamma-1)} P_1$$

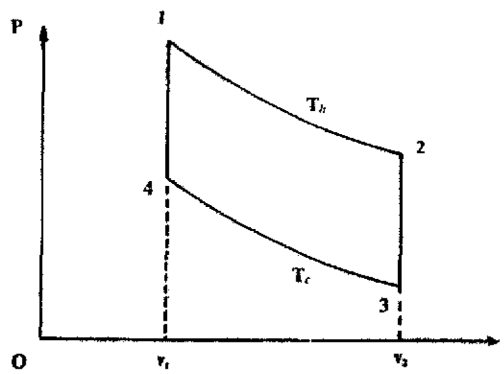
ve

$$V_3 = \frac{V_1}{k^{1/(\gamma-1)}}$$

bulunur.

Kapalı bir süreç (çevrim) boyunca ise ideal gazın iç enerjisi değişmez.

I.42. Bir mol ideal gaz P_1, v_1 hâlinden sâbit basınçta v_2 hacmına daha sonra da $Pv^2 =$ *sâbit* kaanûnuna göre $2v_2$ hacmına kadar genişletilmektedir. Daha sonra sâbit basınçta hacmı v_2 oluncaya kadar sıkıştırılan gazın nihayet $P^2v =$ *sâbit* kaanûnuna göre hâl değiştirerek tekrar P_1, v_1 hâline gelebilmesi için v_1 ve v_2 arasındaki bağıntı ne olmalıdır? Bu çevrimde yapılan işi ve alınan ısı mikdarını hesaplayınız.



I.43. Sâbit hacımdaki özgül ısısı $5/2\,R$ olan bir ideal gaz, şekilde gösterilen ve 1-2, 4-3 eşsıcaklık eğrileri ile 1-4, 2-3 eşhacım eğrileri tarafından oluşturulan çevrime tâbi tutuluyor (*STİRLİNG* çevrimi).

(i) Bütün çevrim boyunca yapılan işi hesaplayınız.

(ii) Bütün çevrim boyunca sistemden çekilen veyâ sisteme verilen toplam ısı miktarı ne kadardır?

ÇÖZÜM: (i) $$w_{23} = w_{14} = 0$$

ve

$$w_{12} = \int_{v_1}^{v_2} P\,dv = R\,T_h \ln \frac{v_2}{v_1}\,,$$

$$w_{34} = \int_{v_1}^{v_2} P\,dv = R\,T_c \ln \frac{v_1}{v_2} = -R\,T_c \ln \frac{v_2}{v_1}$$

olduğundan

$$w = R\,T_h \ln \frac{v_2}{v_2} - RT_c \ln \frac{v_2}{v_1} = R(T_h - T_c) \ln \frac{v_2}{v_1}$$

dir.

(ii) $1 \to 2$ sürecinde sisteme verilen ısı mikdarı

$$q_{12} = w_{12}\,,$$

$3 \to 2$ sürecinde sistemden çekilen ısı mikdarı

$$q_{23} = c_v\,(T_c - T_h),$$

$3 \to 4$ sürecinde sistemden çekilen ısı mikdarı

$$q_{34} = w_{34}\,,$$

$4 \to 1$ sürecinde sisteme verilen ısı mikdarı da

$$q_{41} = c_v\,(T_h - T_c)$$

dir. Toplam ısı mikdarı

$$q = q_{12} + q_{23} + q_{34} + q_{41} = w > 0$$

olduğundan toplam süreç boyunca sisteme ısı verilmiş olduğu anlaşılır.

I.44. Sâbit hacımda özgül ısısı 3/2 R olarak bilinen bir ideal gazın, başlangıçtaki hacmı 4 m^3, sıcaklığı 400 °K ve basıncı da 8 atm. dir. Bu gaz, basıncı 1 atm. oluncaya kadar genişletiliyor. Gazın son hacmını, sıcaklığını, yapılan işi, alınan ısı miktarını ve iç enerjisindeki değişmeyi, genişlemenin: (a) tersinir-eşısılı, (b) tersinir-eşsıcaklıklı olmasına göre hesaplayınız.

CEVAP: (a) $v_2 = 2^{9/5} \times 4\ \mathrm{m}^3\,,\quad T_2 = \dfrac{200}{\sqrt[5]{2}}\ °\mathrm{K}\,,$

$$w = 48{,}624 \times (1 - 2^{-6/5})\ \mathrm{Joule},\quad q = 0,\quad u = -w\,.$$

(b) $v_2 = 32\ \mathrm{m}^3,\quad T_2 = 400\ °\mathrm{K}\,,$

$$w = 29264{,}4.10^5 \text{ Joule}, \quad q = \frac{29364{,}4.10^5}{4{,}18} \text{ cal}, \quad u = 0.$$

I.45. İdeal gazın eşısılı eğrilerinin eşsıcaklık eğrilerinden daha dik olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: İdeal gazın eşsıcaklık eğrilerinin denklemi olan

$$Pv = \text{sâbit}$$

in her iki tarafının diferansiyeli alınarak

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{P}{v}$$

bulunur. Eşsıcaklık eğrisinin v ekseni ile yaptığı açıya α denirse

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{P}{v}$$

olur.

Diğer taraftan ideal gazın eşısılı eğrilerinin denklemi ise

$$P\,v^{\gamma} = \textit{sâbit}$$

dir. Her iki tarafın diferansiyeli alınarak

$$\frac{dP}{dv} = -\gamma\frac{P}{v}$$

bulunur. Eşısılı eğrinin v ekseni ile yaptığı açı bu defa da β ile gösterilirse

$$\operatorname{tg}\beta = -\gamma\frac{P}{v}$$

olur. O hâlde

$$|\operatorname{tg}\beta| = \gamma\,|\operatorname{tg}\alpha|$$

dır.

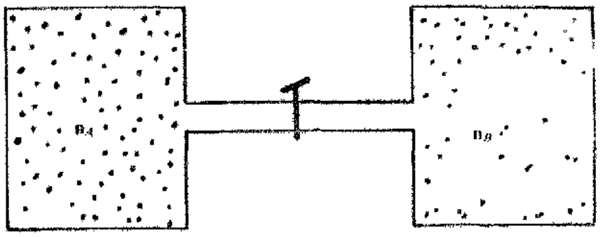
$\gamma = c_P/c_v$ ve $c_P - c_v = R > 0$ olduğundan $\gamma > 1$ dir. Buradan

$$|\operatorname{tg}\beta| > |\operatorname{tg}\alpha|$$

olduğu anlaşılmaktadır.

I.46. Joule aygıtının kaplarından biri n_A mol; diğeri de n_B mol *VAN DER WALLS* gazı ihtivâ etmektedir. Her iki kabın ortak hacmı V ve gazın sıcaklığı da T_1 dir. Aradaki musluk açılıyor, bir zaman sonra termodinamik denge teessüs ediyor. T_2 ile sistemin denge sıcaklığını göstererek ve olayda da ısı kaybı olmadığını kabul ederek, $T_1 - T_2$ sıcaklık farkını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Isı kaybı olmadığına göre $\delta Q = 0$ ve sistem dışarıya iş yapmadığına göre de $\delta W = 0$ dır. Buradan termodinamiğin birinci ilkesine göre



$$dU = 0$$

sonucu çıkar. O hâlde

$$\left(\sum U\right)_{\text{önce}} = \left(\sum U\right)_{\text{sonra}} \tag{I.46.1}$$

dır.

$$u_A = u_0 - c_v T_0 + \frac{a}{v_0} + c_v T_1 - \frac{a}{v_1}$$

$$= u_0 - c_v T_0 + \frac{a}{v_0} + c_v T_1 - n_A \frac{a}{V_1}$$

olduğu bilindiğine göre

$$U_A = n_A u_0 - n_A c_v T_0 + n_A \frac{a}{v_0} + n_A c_v T_1 - n_A^2 \frac{a}{V_1}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$U_B = n_B u_0 - n_B c_v T_0 + n_B \frac{a}{v_0} + n_B c_v T_1 - n_B^2 \frac{a}{V_1}$$

yazılır, yâni

$$\left(\sum U\right)_{\text{önce}} = (n_A + n_B) u_0 - (n_A + n_B) c_v T_0 + (n_A + n_B) \frac{a}{v_0} + (n_A + n_B) c_v T_1 -$$

$$- (n_A^2 + n_B^2) \frac{a}{V_1} \tag{I.46.2}$$

dir. Musluk açıldıktan sonra toplam mol sayısı $(n_A + n_B)$ ve kabın hacmı $2V_1$ olacağından, benzer şekilde

$$\left(\sum U\right)_{\text{sonra}} = (n_A + n_B)\, u_0 - (n_A + n_B)\, c_v\, T_0 + (n_A + n_B)\frac{a}{v_v} + (n_A + n_B)\, c_v\, T_2$$

$$- (n_A + n_B)^2 \frac{a}{2V_1} \qquad \text{(I.46.3)}$$

olur. (I.46.1) i göz önünde bulundurarak (I.46.2) ve (I.46.3) ifâdelerinden

$$\boxed{T_1 - T_2 = \frac{(n_A - n_B)^2\, a}{2V_1\, (n_A + n_B)\, c_v}}$$

sonucu elde edilir.

II. BÖLÜM

TERMODİNAMİĞİN İKİNCİ İLKESİ VE ENTROPİ KAVRAMI

II.1. **K ile bir sâbiti göstermek üzere: V_1 hacmını, U_1 iç enerjisini haiz, N_1 mol'lük saf bir cisimden oluşan bir (Σ_1) sisteminin entropisi**

$$S_1 = K\,(N_1 V_1 U_1)^{1/3} \qquad \text{(II.1.1)}$$

ve V_2 hacmını, U_2 iç enerjisini haiz, N_2 mol'lük aynı saf cisimden oluşan bir (Σ_2) sisteminin entropisi de

$$S_2 = K\,(N_2 V_2 U_2)^{1/3}$$

olsun. Bu takdirde

1) K sâbitinin boyutları nedir?

2) (Σ_1) ve (Σ_2) sistemleri aynı bir cidar aracılığıyla temas hâlinde olduklarında, bunların oluşturdukları tüm sistem de cıvardan yalıtılmış ise, termik denge teessüs ettiği takdirde U_1 ve U_2 iç enerjilerinin değerlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: 1) Entropinin boyutu : $[S] = \text{J}/°\text{K}$ dir. (II.1.1) den K sâbitinin boyutu olarak

$$[K] = [S]\,[N^{-1/3}]\,[V^{-1/3}]\,[U^{-1/3}] = (\text{J}/°\text{K})\,(\text{mol sayısı})^{-1/3}\,(m^{-1})\,(\text{J}^{-1/3})$$
$$= \text{J}^{2/3}\,m^{-1}\,(°\text{K})^{-1}\,(\text{mol sayısı})^{-1/3}$$

bulunur.

2) (Σ_1) ve (Σ_2) sistemlerinden oluşan sistemin toplam entropisi

$$S = S_1 + S_2 = K(N_1 V_1)^{1/3}\,U_1^{1/3} + K(N_2 V_2)^{1/3}\,U_2^{1/3} = A_1\,U_1^{1/3} + A_2\,U_2^{1/3}$$

dür. Termik dengede, $U = U_1 + U_2$ olmak üzere, S entropisi maksimal değeri haiz olur. Şu hâlde

$$U = U_1 + U_2 \qquad \text{(II.1.2)}$$

şartı altında S yi maksimum kılan U_1 ve U_2 değerlerini tesbit etmek gerekmektedir. λ ile bir *LAGRANGE* çarpanı gösterilerek

$$dS = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} A_1 U_1^{-2/3} dU_1 + \frac{1}{3} A_2 U_2^{-2/3} dU_2 = 0$$

$$dU = 0 \quad \rightarrow \quad dU_1 + dU_2 = 0$$

ve buradan da

$$A_1 U_1^{-2/3} - \lambda = 0$$

$$A_2 U_2^{-2/3} - \lambda = 0$$

bulunur. Şu hâlde

$$\begin{aligned} U_1 &= A_1^{3/2} \lambda^{-3/2} \\ U_2 &= A_2^{3/2} \lambda^{-3/2} \end{aligned} \qquad \text{(II.1.3)}$$

şeklindedir. *LAGRANGE* çarpanının değeri (II.1.3) ve (II.1.2) aracılığıyla kolayca belirlenir:

$$U_1 + U_2 = U = \lambda^{-3/2} (A_1^{3/2} + A_2^{3/2})$$

yâni

$$\lambda^{-3/2} = \frac{U}{A_1^{3/2} + A_2^{3/2}}$$

dir. Buna göre

$$U_2 = A_1^{3/2} \lambda^{-3/2} = U \frac{A_1^{3/2}}{A_1^{3/2} + A_2^{3/2}} = U \frac{(N_1 V_1)^{1/2}}{(N_1 V_1)^{1/2} + (N_2 V_2)^{1/2}}$$

$$U_2 = U \frac{(N_2 V_2)^{1/2}}{(N_1 V_1)^{1/2} + (N_2 V_2)^{1/2}}$$

bulunmuş olur.

II.2. Bir mol'lük bir ideal gazın

$$Pv = RT$$

hâl denkleminden başka özgül iç enerjisinin de

$$u = \frac{3}{2} RT$$

ile verildiği gazların kinetik teorisi bahsinde gösterilir. (Bk. VII. Bölüm). Bu veri-

lere dayanarak $1/T$ ve P/T yi u ve v nin fonksiyonu olarak hesaplayıp, bunlardan bir mol'ün s ve N mol'ün S entropisini çıkarınız.

ÇÖZÜM: Tanımı gereği

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_v = \frac{1}{T} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = \frac{P}{T}$$

dir. Bu ve $u = \frac{3}{2} RT$ olması göz önünde tutulacak olursa

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_v = \frac{3}{2}\frac{R}{u}, \quad \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = \frac{R}{v}$$

yazılabildiğinden ds entropi diferansiyeli de teşkil edilirse

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u dv = \frac{3}{2} R\frac{du}{u} + R\frac{dv}{v}$$

bulunur. Buradan integrasyonla

$$s = \frac{3}{2} R \ln u + R \ln v + C$$

ifâdesi elde edilir. C integrasyon sâbitini, keyfî bir başlangıç ya da referans hâlinin v_0 hacmı, u_0 iç enerjisi, ve s_0 entropisini de göz önünde tutarak,

$$C = -\frac{3}{2} R \ln u_0 - R \ln v_0 + s_0$$

şeklinde ifâde edersek entropinin ifâdesi

$$\boxed{s = \frac{3}{2} R \ln \frac{u}{u_0} + R \ln \frac{v}{v_0} + s_0} \qquad \text{(II.2.1)}$$

şekline bürünür.

N adet mol'den oluşan bir gaz söz konusu olduğunda $S = Ns$, $V = Nv$ ve $U = Nu$ olacağından

$$\boxed{S = \frac{3}{2} NR \ln \frac{U}{Nu_0} + NR \ln \frac{V}{Nv_0} + Ns_0}$$

olur.

II.3. Bir önceki alıştırmanın sonuçlarına dayanarak tek atomlu bir ideal gazın eşısı eğrilerinin genel denklemini P ve v nin fonksiyonu olarak tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Bilindiği gibi eşısı (adyabatik) eğrilerini karakterize eden husus bunlar boyunca sistemin ısı değişiminin, ya da $dS = \delta Q/T$ olması dolayısıyla sistemin entropi değişiminin, olmamasıdır. Buna göre ve (II.2.1) den

$$\frac{s - s_0}{R} = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{u}{u_0}\right) + \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = \text{sâbit} \;\rightarrow\; \left(\frac{u}{u_0}\right)^{3/2}\left(\frac{v}{v_0}\right) = e^{\frac{s-s_0}{R}} \tag{II.3.1}$$

bulunur. Diğer yandan ve ideal gazların hâl denklemini göz önünde tutarak

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\frac{3}{2}RT}{\frac{3}{2}RT_0} = \frac{RT}{RT_0} = \frac{Pv}{P_0 v_0}$$

yazılır. Şu hâlde (II.3.1) de

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{3/2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{5/2} = \exp\left(\frac{s - s_0}{R}\right)$$

veyâ

$$\boxed{P\,v^{5/3} = P_0\,v_0^{5/3}\exp\left(\frac{2}{3}\,\frac{s - s_0}{R}\right) = \textit{sâbit}}$$

bulunur.

II.4. Bir mol'lük tek atomlu ideal bir gaz göz önüne alındığında II.2 sayılı alıştırmadaki bağıntılara dayanarak ve entropi kavramına değinmeksizin eşısı eğrilerinin denklemini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Bir eşısı eğrisi boyunca $\delta q = 0$ olup, $du = -\delta w$ olur. Şu hâlde

$$du = \frac{3}{2}R\,dT = -\delta w = -P\,dv = -\frac{RT}{v}\,dv$$

olur. Buradan da

$$\frac{3}{2}\,\frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = 0 \;\rightarrow\; T\,v^{2/3} = \textit{sâbit}$$

ya da $T = Pv/R$ olduğu göz önünde tutulursa

$$\boxed{P\, v^{5/3} = \textit{sâbit}}$$

bulunur.

II.5. Bir mol'lük tek atomlu bir ideal gazın eşısı eğrilerini karakterize eden T ve v arasındaki bağıntıdan

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = \frac{P}{T}$$

bağıntısını tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Bir önceki alıştırmada eşısı eğrilerinin $Tv^{2/3} = \textit{sâbit}$ (ve dolayısıyla da $uv^{2/3} = \textit{sâbit}$) denkemini gerçekleyeceklerini gördük. Buna binaen s entropisi de $s = f(uv^{2/3})$ şeklinde keyfî bir f fonksiyonu aracılığıyla ifâde edilebilir.

Buna göre ve tanımı gereği $1/T = (\partial s/\partial u)_v$ olduğundan

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_v = v^{2/3} f'(uv^{2/3}) = \frac{1}{T}$$

olur. Öte yandan da

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = \frac{2}{3}\, u\, v^{-1/3} f'(uv^{2/3}) \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}\, uv^{-1}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_v = \frac{2}{3}\,\frac{u}{vT}$$

olur. $u = \dfrac{3}{2} RT$ ve $\dfrac{RT}{v} = P$ olduğu için de nihâyet

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = \frac{P}{T} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s = -P$$

olduğu anlaşılmış olur.

II.6. C_1 ve C_2 diye sâbit ısı sığalarını haiz iki cisim önce T_1 ve T_2 sıcaklıklarındayken aralarında termik denge teessüs edinceye kadar sâbit hacımda ısı alış-verişinde bulunurlarsa T_d nihaî termik denge sıcaklığı ne olur? Entropinin ΔS artışı ne kadardır? Buradan, x ve y ile pozitif kalan iki değişkeni, α ve β ile de toplamları bire eşit olan iki parametreyi göstermek üzere

$$\alpha x + \beta y \geqslant x^\alpha y^\beta$$

eşitsizliğini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: $T_2 > T_1$ olduğunu varsayalım. İkinci cismin kaybettiği ısı mikdarının, termik denge teessüs ettiği zaman, birinci cismin kazandığı ısı mikdarına eşit olacağını ifâde edelim:

$$C_2(T_2 - T_d) = C_1(T_d - T_1).$$

Buradan termik dengeyi karakterize eden nihaî sıcaklığın

$$T_d = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} \tag{II.6.1}$$

olduğu sonucu çıkar.

Entropinin toplam değişimi ise her iki cismin entropilerinin değişimlerinin toplamından ibârettir ve bu ya sıfırdır, ya da pozitiftir:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_d} \frac{\delta Q_1}{T} + \int_{T_2}^{T_d} \frac{\delta Q_2}{T} = \int_{T_1}^{T_d} \frac{C_1 dT}{T} + \int_{T_2}^{T_d} \frac{C_2 dT}{T}$$

$$= C_1 \ln \frac{T_d}{T_1} + C_2 \ln \frac{T_d}{T_2} \geqslant 0.$$

Buradan

$$(C_1 + C_2) \ln T_d \geqslant C_1 \ln T_1 + C_2 \ln T_2 \tag{II.6.2}$$

olur. Şimdi

$$\alpha = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \qquad \beta = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad (\alpha + \beta = 1)$$

vaz edelim. Buna göre (II.6.1) ve (II.6.2) den

$$\ln T_d = \ln(\alpha T_1 + \beta T_2) \geqslant \alpha \ln T_1 + \ln T_2$$

ya da

$$\boxed{\alpha T_1 + \beta T_2 \geqslant T_1^{\alpha} T_2^{\beta}}$$

olacağı tesbit edilmiş olur ki bu da $x = T_1$ ve $y = T_2$ için aranan ifâde demektir.

III.7. Bir akışkanın hâl denklemi, α bir sâbiti göstermek üzere $PV = \alpha\, U(T,V)$ şeklinde olsun. Akışkanın U iç enerjisi ile S entropisi de

$$U = V^{-\alpha} \Phi(T V^{\alpha}) \qquad \text{ve} \qquad S = \Psi(T V^{\alpha})$$

şeklinde olsunlar.

1) α nın boyutları nedir?

2) Φ ile Ψ fonksiyonları arasında ne gibi bir bağıntı vardır?

3) Kara cismin ışıması hâlinde

$$\frac{U}{V} = \sigma T^4$$

şeklinde olup σ burada bir sâbittir. Bu hâl için α yı belirleyiniz.

ÇÖZÜM: 1) PV çarpımının boyutu, kolayca tahkik olunduğu vechile bir enerjinin boyutudur. Bu itibarla da α nın boyutsuz bir sayıdan ibâret olacağı âşikârdır.

2) Öte yandan

$$dU = T\,dS - P\,dV = T\,dS - \alpha \frac{U}{V}\,dV \tag{II.7.1}$$

dir. Fakat $U = V^{-\alpha}\,\Phi(TV^{\alpha})$ fonksiyonunun diferansiyelini alarak ve kolaylık olmak üzere $X = TV^{\alpha}$ vaz ederek de

$$dU = -\alpha\,V^{-\alpha-1}\,\Phi\,dV + V^{-\alpha}\,\Phi'\,dX \tag{II.7.2}$$

yazılabilir. Kezâ $S = \Psi(TV^{\alpha}) = \Psi(X)$ den de

$$dS = \Psi'\,dX \tag{II.7.3}$$

olduğu bulunur. (II.7.1 ilâ 3) bağıntılarından

$$dU = T\,dS - \alpha\,\frac{U}{V}\,dV = T\,\Psi'\,dX - \alpha\frac{U}{V}\,dV$$

$$= -\alpha\,V^{-\alpha-1}\,\Phi\,dV + V^{-\alpha}\,\Phi'\,dX$$

yazılabilir; buradan da aynı diferansiyellerin katsayılarını eşitleyerek

$$\boxed{\Psi' = \frac{\Phi'}{T\,V^{\alpha}}}$$

olması gerektiği tesbit edilir.

3) Kara cismin ışıması kaanûnu

$$U = \sigma\,V\,T^4 \tag{II.7.4}$$

dür. Bunun

$$U = V^{-\alpha}\,\Phi(TV^{\alpha})$$

şeklinde olabilmesi için tek olanak U nun

$$U = V^{-\alpha}\,\{\sigma.\,(TV^{\alpha})^4\,\} \tag{II.7.5}$$

şeklinde olmasıdır. (II.7.4) ve (II.7.5) den

$$\sigma\,V\,T^4 = V^{-\alpha}\,\sigma\,T^4\,V^{4\alpha}$$

ya da

$$V^{\alpha+1} = V^{4\alpha}$$

yâni

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$$

olması gerektiği bulunur.

II.8. Aynı P basıncında aynı N sayısında molekül ihtivâ eden aynı iki ideal gaz farklı sıcaklıklarda ve sırasıyla V_1 ve V_2 hacımlarında bulunmaktadırlar. Bu iki hacım birbirleriyle irtibat hâline getirilip de gazların birbirlerine karışmalarından sonra denge hâli teessüs edince sistemin entropi değişiminin ne olmuş olacağını hesaplayınız.

ÇÖZÜM : Nihaî entropi izlenen yola bağlı olmadığından bunu, sanki denge sâbit basınçta teessüs etmiş gibi de hesaplamak kaabildir. Her hacım için ve T_d ile denge sıcaklığını göstererek,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \rightarrow \quad T\,dS = C_P\,dT$$

yazılabileceğinden

$$\Delta S_1 = C_P \ln\frac{T_d}{T_1}\,, \qquad \Delta S_2 = C_P \ln\frac{T_d}{T_2}\,,$$

ve toplam entropi değişimi için de

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_P \ln\frac{T_d^2}{T_1\,T_2}$$

olur. (II.6.1) den, bu hâl için, T_d denge sıcaklığının

$$T_d = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

olacağı kolaylıkla görülmektedir. Buna göre

$$\boxed{\Delta S = 2C_P \ln \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}}$$

olur. $T_1 = T_2$ için $\Delta S = 0$ olacağı husûsuna dikkat edilmelidir.

II.9. ***dm*** **kütlesini haiz bir akışkanın belirli bir (1) hâlinden başka bir (2) hâline geçişinde ortaya çıkan ısının**

$$\delta Q = C\,dT + L\,dm$$

şeklinde olduğu bilinmektedir.

1) v_1 **ve** v_2 **ile akışkanın (1) ve (2) hâllerindeki özgül hacımları gösterilirse** dm **yi** $\Delta v = v_2 - v_1$ **in ve (1) → (2) dönüşümü esnâsında sistemin hacmının** dV **değişiminin fonksiyonu olarak ifâde ediniz.**

2) İç enerjinin dU **değişimi ile entropinin** dS **değişimini yazınız.**

3) dU **ve** dS **nin tam diferansiyeller olduklarını ifâde etmek sûretiyle**

$$L = T\,\Delta v \frac{\partial P}{\partial T}$$

CLAPEYRON **(1799-1864) bağıntısını tesis ediniz.**

ÇÖZÜM: 1) Özgül hacmın tanımı

$$\Delta v = \frac{dV}{dm}$$

şeklindedir.

2) $dU = \delta Q - P\,dV = C\,dT + L\,dm - P\,dV$

$$= C\,dT + \left(\frac{L}{\Delta v} - P\right) dV$$

dir. Ayrıca entropi değişimi de

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \;\rightarrow\; dS = \frac{C}{T}\,dT + \frac{L}{T\,\Delta v}\,dV$$

şeklindedir.

3) Gerek dU nun gerekse dS in tam diferansiyel olma şartlarını yazalım:

$$-\frac{L}{(\Delta v)^2}\frac{\partial(\Delta v)}{\partial T}-\frac{\partial P}{\partial T}+\frac{1}{\Delta v}\frac{\partial L}{\partial T}=\frac{\partial C}{\partial V} \qquad \text{(II.9.1)}$$

$$-\frac{L}{(\Delta v)^2}\frac{\partial(\Delta v)}{\partial T}-\frac{L}{T\Delta v}+\frac{1}{\Delta v}\frac{\partial L}{\partial T}=\frac{\partial C}{\partial V} \qquad \text{(II.9.2)}$$

(II.9.2) yi taraf tarafa (II.9.1) den çıkarmak sûretiyle

$$\boxed{\frac{L}{T.\Delta v}=\frac{\partial P}{\partial T}}$$

CLAPEYRON bağıntısı elde edilmiş olur. Bunu

$$L = T\Delta v\frac{\partial P}{\partial T}$$

şeklinde de yazmak mümkün olup $[L]$ = Joule'dur.

II.10. Sâbit hacımlı, ve başlangıç sıcaklıkları sırasıyla T_1 ve T_2 olan iki K_1 ve K_2 cismi dış ortamdan yalıtılmış olarak birbirleriyle temas hâlinde bulunmaktadırlar. K_1 in ısı sığası bilinen bir C_{v1} değerini haiz olduğunda:

1) K_2 nin bir C_{v2} ısı sığasına sâhip olması hâlinde,

2) K_2 nin T_2 sıcaklığında bir ısı kaynağı olması hâlinde bu iki cismin arasında termik dengeye erişildiği vakit cisimlerin entropilerinin ne kadar değişmiş olacağını hesaplayınız. Her iki hâlde de her iki değişimin toplamının işâretini tahkik ediniz.

ÇÖZÜM: 1) Denge hâlinde iken K_1 cismi belirli bir T sıcaklığında bulunacağından

$$Q_1 = C_{v1}\,.\,(T - T_1)$$

kadar bir ısı kazanmış olacaktır. Ancak söz konusu termodinamik dönüşüm ne tersinir, ne de durgunumsu bir dönüşümdür. Aksine, deney bize, sıcaklıkların dengelenmesi sürecinin tersinir olmayan bir süreç olduğunu ve bu dönüşüm esnâsında da etkileşen cisimlerin dengede kalmadıklarını göstermektedir. Bu itibarla, aranan ΔS_1 entropi değişimini Q_1 ısı mikdarına bağlayan bir formülü hemen tesis etmek olanağımız yoktur. Buna karşılık K_1 cismini aynı T_1 başlangıç hâlinden aynı T sonuç hâline ileten ama hem tersinir, hem de durgunumsu olan başka dönüşümler tasarlayabiliriz. Termodinamiğin ikinci ilkesine göre bu takdirde entropi değişimi aynı olacaktır.

K_1 cisminin θ sıcaklığı, meselâ, sıcaklıkları T_1 ile T arasında bulunan sürekli bir ısı kaynakları dizisiyle temas hâline getirilmek sûretiyle T_1 den T ye yükseltilebilir. Bu takdirde K_1 cismi her an uygun ve θ sıcaklığındaki ısı kaynağıyla termik denge hâlinde olup bu kaynaktan, kendi sıcaklığını θ dan $\theta + d\theta$ ya yükselten sonsuz küçük bir δQ ısı mikdarı almış olacaktır; böylece söz konusu termodinamik dönüşüm denge hâllerinin sürekli bir dizisinden oluşmuş olacağından *durgunumsu* bir dönüşüm olacak ve K_1 cisminin ΔS_1 entropi değişimi de *CLAUSİUS* integraliyle hesaplanabilecektir :

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T} \frac{\delta Q}{\theta} = \int_{T_1}^{T} \frac{C_{v1}\, d\theta}{\theta} = C_{v1} \ln \frac{T}{T_1} \,.$$

K_2 cismin ısı sığasının C_{v2} olması hâlinde, benzer şekilde

$$\Delta S_2 = C_{v2} \ln \frac{T}{T_2}$$

yazılabilir. K_1 ve K_2 dışarıdan yalıtılmış bir sistem oluşturduklarından her iki cismin U_1 ve U_2 iç enerjileri de değişmez:

$$0 = \Delta (U_1 + U_2) = Q_1 + Q_2 = C_{v1} (T - T_1) + C_{v2} (T - T_2).$$

Buradan T denge sıcaklığı olarak

$$T = \frac{C_{v1} T_1 + C_{v2} T_2}{C_{v1} + C_{v2}} \,,$$

ve aranan entropi değişimleri olarak da

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta S_1 &= C_{v1} \ln \left\{ \frac{C_{v1} T_1 + C_{v2} T_2}{(C_{v1} + C_{v2})\, T_1} \right\} \\ \Delta S_2 &= C_{v2} \ln \left\{ \frac{C_{v1} T_1 + C_{v2} T_2}{(C_{v1} + C_{v2})\, T_2} \right\} \end{aligned}} \qquad \text{(II.10.1)}$$

bulunur.

Eğer bu iki cisim gene cıvarlarından yalıtılmış olarak sâbit değil de değişken hacımlı olsalar, fakat sâbit basınç altında bulunsalardı aynı muhakemeyi izleyerek fakat bu sefer C_{v1} , C_{v2} yerine sâbit basınçta ısı sığaları olan C_{P1} ve C_{P2} yi göz önüne alarak (II.10.1) denklemlerine benzer denklemler bulunurdu.

Şimdi bu iki cisimden oluşan sistemin ΔS entropi değişimi için, $x = T_2/T_1$ vaz ederek :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_{v1} \ln \left[\frac{C_{v1} + C_{v2} x}{C_{v1} + C_{v2}} \right] + C_{v2} \ln \left[\frac{C_{v1} + C_{v2} x}{(C_{v1} + C_{v2}) x} \right]$$

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial x} = \frac{C_{v2}(C_{v1} + C_{v2})}{C_{v1} + C_{v2} x} - \frac{C_{v2}}{x} = C_{v1} C_{v2} \frac{x-1}{x(C_{v1} + C_{v2} x)}$$

bulunur. x daima ya pozitif ya da sıfır olabileceğinden bu türev de x in 1 den küçük, 1 e eşit ve 1 den büyük olmasına göre negatif, sıfır veyâ pozitif olur. Bu durum T_1 ve T_2 değiştiklerinde ΔS nin $x = 1$ için yâni $T_2 = T_1$ için minimum olacağına işâret etmektedir. Bu takdirde $\Delta S = 0$ olur; şu hâlde:

$$T_2 = T_1 \quad \rightarrow \quad \Delta S = 0$$

$$T_2 \neq T_1 \quad \rightarrow \quad \Delta S > 0$$

olur ki bu da yalıtılmış bir sistemin entropisinin ancak artacağını ifâde eden ikinci temel ilkeye uygun bir sonuçtur.

2) Eğer K_2 cismi T_2 sıcaklığını haiz bir ısı kaynağı ise, denge sıcaklığı bu takdirde T_2 olacak ve K_1 in entropi değişimi de

$$\boxed{\Delta S_1' = C_{v1} \ln \frac{T_2}{T_1}} \qquad \text{(II.10.2)}$$

olacaktır. K_2 cismi K_1 cismine

$$Q_2 = -Q_1 = C_{v1}(T_1 - T_2)$$

ısı mikdarı intikaal ettirmiş olacaktır. Bu ısı mikdarı K_2 ye, tersinir bir biçimde, aynı sıcaklıktaki bir kaynaktan da verilebilir; şu hâlde

$$\boxed{\Delta S_2' = \frac{Q_2}{T_2} = C_{v1} \frac{T_1 - T_2}{T_2}}$$

olur. Buna göre, ve $x = T_2/T_1$ vaz ederek, her iki cismin toplam entropi değişimi

$$\Delta S = \Delta S_1' + \Delta S'_2 = C_{v1} \left(\ln x + \frac{1-x}{x} \right)$$

olur. Bu ifâde ise ya pozitiftir ya da ($x = 1$ olduğu vakit) sıfırdır.

Pratikte, bir cisim ya sıcaklığı fiziksel bir biçimde kontrol edildiği için gerçek anlamda, ya da ısı sığası çok yüksek olduğundan sıcaklığı hissedilir biçimde değişmediği için bir ısı kaynağı gibi davranır. Gerçekten de 1) paragrafının sonuçları $C_{v2} \rightarrow \infty$ için 2) paragrafınınkilere giderler; ΔS_1 için bu, kolaylıkla görülür:

$$\lim_{C_{v2}\to\infty} \Delta S_1 = \lim_{C_{v2}\to\infty} \left\{ C_{v1} \ln \left[\frac{C_{v1} T_1 + C_{v2} T_2}{(C_{v1} + C_{v2}) T_1} \right] \right\} = C_{v1} \ln \frac{T_2}{T_1} = \Delta S_1' .$$

Benzer sonucun ΔS_2 için de vârid olduğunu görebilmek üzere $\varepsilon = C_{v1}/C_{v2}$ ($\ll 1$) vaz edip dikkatimizi birinci mertebeden sonsuz küçüklere hasredelim:

$$\frac{C_{v1} T_1 + C_{v2} T_2}{(C_{v1} + C_{v2}) T_2} = \frac{1 + \varepsilon \dfrac{T_1}{T_2}}{1 + \varepsilon} = 1 + \varepsilon \frac{T_1 - T_2}{T_2} + O(\varepsilon^2).$$

Buna göre

$$\begin{aligned} \lim_{C_{v2}\to\infty} \Delta S_2 &= \lim_{C_{v2}\to\infty} \left\{ C_{v2} \ln \left[\frac{C_{v1} T_1 + C_{v2} T_2}{(C_{v1} + C_{v2}) T_2} \right] \right\} \\ &= \lim_{C_{v2}\to\infty} \left\{ \frac{C_{v1}}{\varepsilon} \ln \left[1 + \varepsilon \frac{T_1 - T_2}{T_2} + O(\varepsilon) \right] \right\} \\ &= C_{v1} \frac{T_1 - T_2}{T_2} = \Delta S_2' \end{aligned}$$

bulunur.

II.11. Bir mol'lük bir ideal gazın entropisinin diferansiyel ifâdesini *T* sıcaklığı, *v* hacmı ve gazın *u* iç enerjisinin kısmî türevleri cinsinden ifâde ediniz. Buradan, ideal bir gazın iç enerjisinin yalnızca sıcaklığa bağlı olacağını gösteriniz (*JOULE* kaanûnu).

ÇÖZÜM: Gazın $u(T, v)$ iç enerjisinin diferansiyeli

$$du = \delta q - \delta w = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

dir. Gazın entropisinin diferansiyeli ise

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{1}{T}(du + \delta w) = \frac{du}{T} + \frac{1}{T} P\, dv = \frac{du}{T} + R \frac{dv}{v}$$

dir. Buna göre

$$\boxed{ds = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + \frac{R}{v}\right] dv}$$

olur.

Termodinamiğin ikinci temel ilkesine dayanarak ds nin bir tam diferansiyel olduğu şartını ifâde edelim:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v\right]=\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T+\frac{R}{v}\right]$$

yâni

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial T\,\partial v}=-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T+\frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial T}.$$

Bu son eşitlikten ise

$$-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T=0 \quad\rightarrow\quad \boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T=0}$$

yâni ideal gazın u iç enerjisinin

$$\boxed{u=u(T)}$$

şeklinde olduğu sonucu çıkar.

II.12. Bir ideal gazın elemanter entropi değişimini bağımsız T ve v değişkenleri cinsinden ifâde ediniz. Bir mol'lük bir ideal gazın sıcaklığı ve hacmı aynı anda başlangıç değerlerinin üç misline yükseltildiğinde gazın entropi değişiminin ifâdesini iki ayrı yöntem aracılığıyla tesis ediniz. (Sayısal uygulama: özgül ısıların oranı: $\gamma=7/5$, gazlar sâbiti: $R=8\ 32$).

ÇÖZÜM: **Birinci yöntem:**

Sıcaklığın T den $T+dT$ ye, hacmın da v den $v+dv$ ye dönüştüğü tersinir bir elemanter termodinamik dönüşümde gazın kazandığı ısı mikdarı

$$\delta q=du+\delta w=c_v\,dT+P\,dv$$

ve entropi değişimi de

$$ds=\frac{\delta q}{T}=c_v\frac{dT}{T}c+P\frac{dv}{T}$$

dir. İdeal gazların hâl denklemi (1 mol için) $Pv=RT$ olduğundan,

$$c_v=R/(\gamma-1)=s\hat{a}bit$$

olmak üzere,

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$$

olur. Bunu iki hâl arasında integre ederek, bir mol'lük ideal bir gazın entropi değişimi olarak

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

bulunur. $T_2 = 3T_1$, ve $v_2 = 3v_1$ olduğuna göre

$$\Delta s = \frac{R}{\gamma - 1} \ln 3 + \ln 3$$

yâni

$$\boxed{\Delta s = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln 3}$$

bulunur.

İkinci yöntem :

v hacmıyla T sıcaklığı aynı anda üç misli artarlarsa $P = RT/v$ basıncı başlangıç hâlinde ne ise son hâlde de aynı kalır. Şu hâlde Δs entropi değişimini tesbit etmek için dönüşümün eşbasınçlı ve tersinir olduğu tasarlanabilir. Dışarıyla ısı mikdarı alış verişi, buna göre

$$\delta q = c_P \, dT$$

olup entropi değişimi de

$$ds = \frac{\delta q}{T} = c_P \frac{dT}{T}$$

olur. Hâlbuki $\gamma = c_P/c_v$ ve $R = c_P - c_v$ olduğundan

$$c_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

olacağından

$$ds = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

ve gene

$$\Delta s = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln 3$$

bulunur.

Sayısal uygulama:

$$\Delta s = \frac{7}{5} \times 8{,}32 \times \frac{1}{\frac{7}{5} - 1} \times 1{,}097 = 32 \ \mathrm{J/°K}$$

II.13. Kütlesi $m = 1$ kg, sâbit basınçtaki özgül ısısı $c_p = 880$ J/kg ve sıcaklığı da $T_0 = 27$ °C olan bir metal $T_1 = 100$ °C lık bir ısı kaynağıyla temasa geçirilmektedir. Belirli bir zaman sonra metal, ısı kaynağıyla termik dengede olur. Bu takdirde metalin entropi değişimini ve metal ile kaynağın oluşturdukları sistemin entropi değişimini belirleyiniz.

ÇÖZÜM: Bir metalin sâbit basınçta ısıtılması tersinmez bir süreçtir. Entropinin değişimi ise izlenen yoldan bağımsızdır. Dolayısıyla bu değişim aynı nihaî hâlde son bulan eşbasınçlı fakat tersinir bir dönüşümdekinin aynı olacaktır. Şu hâlde metalin elemanter entropi değişimi

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{mc_P \, dT}{T}$$

ve sıcaklık T_0 dan T_1 e yükseldiği zamanki entropi değişimi de

$$\boxed{\Delta S = mc_P \ln \frac{T_1}{T_0}}$$

olur. Buradan

$$S = 1 \times 880 \times \ln \frac{373}{300} = 800 \times 0{,}2176 = 191{,}5 \ \mathrm{J/°K}$$

bulunur.

Metal ile kaynağın oluşturdukları sistemin entropi değişimi

$$\Delta S = (\Delta S)_{\mathrm{metal}} + (\Delta S)_{\mathrm{kaynak}}$$

dır. Hâlbuki kaynağın metale aktardığı ısı mikdarı

$$Q = mc_P (T_1 - T_0)$$

olduğundan sıcaklığı T_1 ve sâbit olan kaynağın entropi değişimi

$$(\Delta S)_{\mathrm{kaynak}} = -\frac{Q}{T_1}$$

dir. Buna göre sistemdeki entropi değişimi

$$\Delta S = (\Delta S)_{metal} + (\Delta S)_{kaynak}$$

$$= mc_P \ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{Q}{T_1}$$

yâni

$$\boxed{\Delta S = mc_P \left(\ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{T_1 - T_0}{T_1} \right)}$$

olur. Buradan da sistemin entropi değişiminin, verilen verilerin ışığı altında,

$$\Delta S = (1 \times 880) \times (0{,}2176 - 0{,}1975) = 19{,}3 \text{ J/°K}$$

olduğu tesbit edilir.

II.14. Moleküler kütlesi M olan bir gazın sâbit basınçtaki özgül ısısı göz önüne alınan belirli bir sıcaklık aralığında T sıcaklığının: $c_P = a + bT$ şeklinde lineer bir fonksiyonu ise buradan, bu gazdan bir mol'lük bir mikdarı T_1 sıcaklığından T_2 sıcaklığına kadar sâbit basınç altında ve tersinir bir biçimde ısıtıldığı zaman entropinin Δs değişiminin ifâdesini çıkarınız. Uygulama: N_2 azot gazı göz önüne alınırsa denel ölçüler $a = 1{,}04$ ve b $= 1{,}1.10^{-5}$ vermektedir; azotun, sâbit basınçta sıcaklığı 300 °K den 600 °K e yükselirse Δs nin değeri ne olur? (N_2 nin molekül kütlesi 28 g dır.)

ÇÖZÜM: Sâbit basınçta entropinin elemanter değişimi, bir mol'lük bir gaz için,

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{Mc_P\,dT}{T} = M\left(a\,\frac{dT}{T} + b\,dT\right)$$

şeklindedir. Sıcaklık T_1 den T_2 ye yükseldiği zaman entropi değişimi de bu ifâdeyi bu iki limit arasında integre ederek bulunur:

$$\boxed{\Delta s = M\left[a \ln \frac{T_2}{T_1} + b\,(T_2 - T_1)\right].}$$

Uygulama:

$$\Delta s = 28\,(1{,}04 \ln 2 + 1{,}1.10^{-5}.300) = 20{,}19 \text{ J/°K}.$$

II.15. Tek atomlu ($\gamma = 5/3$), bir mol'lük ideal gaz $T_0 = 450$ °K sıcaklıkta $P_0 = 1$ atm basınçtan $P_1 = 10$ atm basınca kadar tersinir bir biçimde sıkıştırıl-

makta; sonra da eşısılı biçimde gene P_0 basıncına kadar genişletilmekte ve bu işlem N kere sürdürülmektedir.

1) Bir işlem boyunca entropinin Δs_1 ve peşpeşe N işlem sonra entropinin Δs_N değişimlerinin, ve

2) N işlem sonundaki T_N sıcaklığı ile iç enerjinin Δu_N değişimini hesaplayınız.

Sayısal uygulama: Her iki soruyu da $N = 5$ için çözünüz.

ÇÖZÜM: 1) Söz konusu bir işlem boyunca bir mol'lük gaz önce eşısılı bir sıkıştırılmaya mâruz kalmakta ve bu esnâda

$$q = -RT \ln \frac{P_1}{P_0}$$

kadar ısı almaktadır. Buna tekaabül eden entropi artışı da

$$\Delta s = \frac{q}{T} = -R \ln \frac{P_1}{P_0}$$

olur. Gaz bunu müteakip tersinir eşısılı, ve dolayısıyla da eşentropili ($\Delta s' = 0$) bir genişlemeye tâbî tutulmaktadır. Buna göre toplam entropi değişimi

$$\boxed{\Delta s_1 = \Delta s + \Delta s' = -R \ln \frac{P_1}{P_0}}$$

olur. Buna göre $\Delta s_1 = -8{,}32 \ln 10 = -19{,}14$ J/°K olduğu anlaşılmaktadır.

Entropi toplamsal bir fonksiyon olduğundan özdeş N işlem sonunda entropinin toplam değişimi $\Delta s_N = N\,\Delta s_1$ olacaktır. Şu hâlde

$$\boxed{\Delta s_N = -NR \ln \frac{P_1}{P_0}}$$

olur. Buna göre de $\Delta s_5 = -95{,}70$ J/°K bulunur.

2) 1. işlemin sonunda gaz

$$T_1 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

sıcaklığına ve 2. işlemin sonunda

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{2\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

sıcaklığına, ve nihâyet N işlemin sonunda da

$$\boxed{T_N = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{N\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

sıcaklığına erişmiş olacaktır. $N = 5$ için

$$T_5 = 450 \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 4{,}5\ {}^\circ\mathrm{K}$$

bulunur.

Özdeş N işlem sonunda gazın sıcaklığı da T_0 dan T_N ye erişmiş olacağından bir mol'lük gazın iç enerjisinin değişimi de

$$\Delta u_N = c_v (T_N - T_0)$$

olur. $c_v = R/(\gamma - 1)$ olduğunu da göz önünde bulundurarak T_N nin ifâdesini bu sonuncu bağıntıya yerleştirirsek

$$\boxed{\Delta u_N = \frac{RT_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{N(\gamma-1)}{\gamma}} - 1\right]}$$

bulunur. $N = 5$ için de $\Delta u_5 = -5560$ J olur.

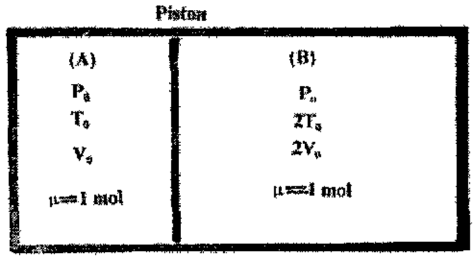
II.16. Tamâmen yalıtılmış bir silindir düşük ısı iletkenliğini haiz ve sürtünmesiz hareket eden bir pistonla ikiye ayrılmış bulunmaktadır. A ve B diye isimlendireceğimiz her iki bölüm de iki atomlu ($\gamma = 7/5$) bir mol'lük ideal bir gaz ihtivâ etmektedir.

1) Sistemin her an mekanik dengede bulunduğu var sayılmaktadır. Başlangıçta, B bölümündeki gazın sıcaklığı A bölümündeki gazın T_0 sıcaklığının iki mislidir. Sistem (hem mekanik ve hem de termik) denge hâline kadar evrimleşmektedir.

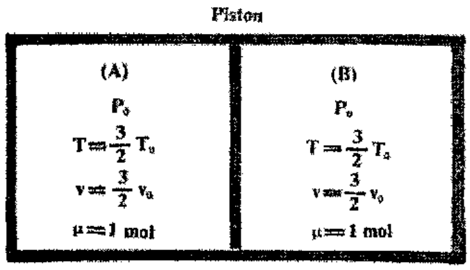
İki mol gazdan oluşan sistemin tümünün entropi değişimini belirleyiniz.

2) B bölümünden A bölümüne ısı iletiminin tersinir bir biçimde olduğunu varsayarak dengeye tekaabül eden nihaî sıcaklığı hesaplayınız; buradan iç enerjinin değişimini ve gazlı sistemin geliştirmiş olduğu işi çıkarınız. (T = 300 K° ve R = 8,32)

ÇÖZÜM:



(Başlangıç hâli)
(Mekanik denge hâli)



(Son hâl)
(Mekanik denge ve termik denge hâli)

1) Başlangıç hâlinde (A) kısmında bulunan gaz (P_0 , T_0 , v_0) ve (B) kısmında bulunan gaz da (P_0 , $2T_0$, $2v_0$) hâlinde bulunmaktadır. Mekanik denge hâli her iki kısımda da aynı bir P_0 basıncının hüküm sürmesini zorunlu kılmaktadır. Gerçekten de (A) da

$$P_0 = \frac{RT_0}{v_0}$$

basıncı varken (B) deki basınç da

$$P = R\frac{2T_0}{2v_0} = \frac{RT_0}{v_0} = P_0$$

olacaktır.

Son hâlde ise

— (A) da ve (B) deki basınç aynı olmalıdır (mekanik denge), ve

— (A) da ve (B) deki sıcaklık aynı olmalıdır (termik denge).

İdeal gazların hâl denklemini bu şartlar altında göz önüne alırsak son hâlde her iki kısmın hacmının aynı olacağı sonucuna varılır; buna göre

$$v = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{3}{2}\, v_0$$

olacaktır.

Sistem her an mekanik dengede oluğundan söz konusu dönüşüm eşbasınçlı bir dönüşümdür. Buna göre gazın (A) daki ya da (B) deki nihaî sıcaklığı da

$$T = T_0\frac{v}{v_0} = \frac{3}{2}\, T_0$$

olacaktır.

Sâbit basınçta bir mol'lük bir gazın elemanter entropi değişimi

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{c_P\, dT}{T} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\,\frac{dT}{T} = \frac{7}{2} R \frac{dT}{T}$$

dir. Bu ifâde mütekaabil limitler arasında integre edilirse entropi değişimi olarak

a) (A) için : $\Delta s_A = c_P \ln \frac{T}{T_0}$

b) (B) için : $\Delta s_B = c_P \ln \frac{T}{2T_0}$

bulunur. Sistemi teşkil eden 2 mol'lük ideal gazın toplam entropi değişimi de

$$\Delta s = \Delta s_A + \Delta s_B = c_P \left(\ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{T}{2T_0} \right) = c_P \ln \frac{T^2}{2T_0^2}$$

yâni

$$\boxed{\Delta s = \frac{7}{2} R \ln \frac{9}{8}}$$

bulunur. Entropi değişiminin T başlangıç sıcaklığından bağımsız olduğu görülmektedir. Verilere göre

$$\Delta s = \frac{7}{2} \times 8{,}32 \times 0{,}1177 = 3{,}21\ \text{J/°K}$$

olacağı anlaşılmaktadır.

2) Söz konusu dönüşümün tersinir ve eşısılı olduğu varsayıldığından bütün sistem için bu dönüşüm aynı zamanda eşentropilidir de : $\Delta s = 0$.

Hâlbuki her bir kısımdaki elemanter entropi değişimi

$$P = \frac{RT}{v} \quad \text{ve} \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{5}{2} R$$

olmak üzere

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{du - \delta w}{T} = \frac{c_v\, dT + P\, dv}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$$

dir. Buna göre (A) ve (B) den müteşekkil sistemdeki toplam entropi değişimi de, bu ifâdeyi mütekaabil limitler arasında integre ederek,

$$\Delta s = \underbrace{\left(\frac{5}{2} R \ln \frac{T_n}{T_0} + R \ln \frac{v_n}{v_0}\right)}_{\text{(A) daki entropi değişimi}} + \underbrace{\left(\frac{5}{2} R \ln \frac{T_n}{2T_0} + R \ln \frac{v_n}{2v_0}\right)}_{\text{(B) deki entropi değişimi}} = 0$$

ifâdesine bürünecektir. Bu ifâde yeniden düzenlenirse

$$\Delta s = R\left(\frac{5}{2} \ln \frac{T_n^2}{2T_0^2} + \ln \frac{v_n^2}{2v_0^2}\right) \qquad \text{(II.16.1)}$$

şeklinde de yazılır.

Oysa ki denge hâlinde daimâ

$$v_n = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{3}{2} v_0$$

dır. Buna binâen (II.16.1) ifâdesinden

$$\ln\left(\frac{T_n^2}{2T_0^2}\right)^{5/2} = \ln\left(\frac{2v_0^2}{v_n^2}\right) = \ln \frac{8}{9}$$

bâğıntısı bulunur. Buradan da

$$\left(\frac{T_n^2}{2T_0^2}\right)^{5/2} = \frac{8}{9} \quad \rightarrow \quad T_n^2 = 2\, T_0^2 \left(\frac{8}{9}\right)^{2/5}$$

yâni nihaî T_n sıcaklığı için

$$\boxed{T_n = T_0 \sqrt{2} \left(\frac{8}{9}\right)^{1/5}}$$

bulunur. Buna binâen de

$$T_n = 300 \times 1{,}414 \times 0{,}976 = 414 \text{ °K}$$

olduğu tesbit edilmiş olur (oysa ki eşbasınçlı dönüşüm için $T_n = \frac{3}{2} T_0 = 450$ °K idi)

Tüm sistemin iç enerjisindeki değişim de

$$\boxed{\Delta U = c_v (T_n - T_0) + c_v (T_n - 2T_0) = -\frac{5}{2} R (3T_0 - 2T_n)}$$

olur. Buna göre: $\Delta U = -1500$ J bulunur.

Glôbal dönüşüm eşısılı olduğundan sisteme aktarılmış olan iş, iç enerjinin değişimiyle ölçülür: $-w = +\Delta u$. Buna binâen gazlı sistemin yapmış olduğu iş $w = -\Delta u = 1500$ J dur.

II.17. Sâbit basınçta, $T_1 = 77°C$ sıcaklığında $m_1 = 0{,}5$ kg petrol ile $T_2 = 17°C$ sıcaklığında $m_2 = 2$ kg petrol birbirleriyle karıştırıldığında sistemin entropi değişimi ne olur? ($c_P = 2{,}1$ J/g/°C $=$ *sâbit* dir.)

ÇÖZÜM: Bilindiği gibi S entropisi bir hâl fonksiyonu olmak hasebiyle, bunun değişimleri sistemin başlangıç hâlinden son hâline geçmek için izlenen yoldan bağımsızdırlar. İki cismi sâbit basınç altında tersinmez bir biçimde birbirine karıştırarak denge hâline eşbasınçlı bir süreç boyunca erişilmiş olmakla beraber, sistemin entropi değişimi, sanki evrim *eşbasınçlı tersinir* bir süreç uyarınca gerçekleşmiş gibi hesaplanabilir. Buna göre

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = mc_P \ln \frac{dT}{T}$$

ve entropi değişimi de

$$\Delta S = \int_{T_b}^{T_s} mc_P \frac{dT}{T} = mc_P \ln \frac{T_{son}}{T_{baş}}$$

olur.

Karışımın denge hâline tekaabül eden mutlak sıcaklığı ise, sıcak sıvının terkettiği ısı mikdarının soğuk sıvının aldığı ısı mikdarına eşit olduğunu yazmakla tâyin edilir:

$$m_1 c_P (T_1 - T) = m_2 c_P (T - T_2) \quad \rightarrow \quad T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}. \qquad \text{(II.17.1)}$$

Başlangıçta daha sıcak olan sıvının entropi değişimi

$$\Delta S_1 = m_1 c_P \ln \frac{T}{T_1}$$

ve daha soğuk olan sıvının entropi değişimi de

$$\Delta S_2 = m_2 c_P \ln \frac{T}{T_2}$$

olur.

Şu hâlde sistemin toplam entropi değişimi:

$$\boxed{\Delta S = c_P \left[m_1 \ln \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{(m_1 + m_2)\, T_1} + m_2 \ln \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{(m_1 + m_2)\, T_2} \right]}$$

olur. Eldeki verilere göre de, $T_1 = 350$ °K, $T_2 = 290$ °K, $c_P = 2{,}1\ J/g/°K = 2100\ J/kg/°K$ olacağından,

$$\Delta S = 2100 \times \left(0{,}5 \ln \frac{755}{875} + 2 \ln \frac{755}{725} \right) = 15{,}4\ J/°K$$

bulunur.

II.18. Atmosferik basınç altında $T_1 = 27$ °C sıcaklığındaki $m_1 = 10$ kg su ile $T_2 = -10$ °C sıcaklığındaki $m_2 = 1$ kg buz karıştırılmaktadır. T denge sıcaklığını ve entropi artışını belirleyiniz.

(Suyun özgül ısısı : $c_1 = 4{,}2$ J/g/derece, buzun özgül ısısı : $c_2 = 2{,}15$ J/g/derece; buzun $T_0 = 273$ °K sıcaklığındaki gizli erime ısısı : $L = 336$ J/g dır.)

(*ÇÖZÜM*: Buzun erimesinden sonra termik denge teessüs eder. Bu durumla ilgili kalorimetrik denklem şu şekildedir:

$$\underbrace{m_1 c_1 (T_1 - T)}_{\text{Suyun terk ettiği ısı}} = \underbrace{m_2 c_2 (T_0 - T_2)}_{T_0 \text{ erime sıcaklığına erişmek için buza geçen ısı}} + \underbrace{m_2 L}_{\text{Buzun erimesi için aldığı ısı}} + \underbrace{m_2 c_1 (T - T_0)}_{\text{Erimiş buzun denge sıcaklığına erişmek için aldığı ısı}} .$$

Buradan T denge sıcaklığı için

$$T = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 \left[c_1 T_0 - c_2 (T_0 - T_2) - L \right]}{(m_1 + m_2)\, c_1} = 289{,}8\ °K = 16{,}8\ °C$$

bulunur.

Entropi değişimi de şöyledir:

— T ye kadar eşbasınçlı bir soğumaya mâruz kalan su için:

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln \frac{T}{T_1} .$$

— T_0 a kadar eşbasınçlı bir ısınmaya mâruz kalan buz için:

$$\Delta S_2 = m_2 c_2 \ln \frac{T_0}{T_2} .$$

— Sâbit T_0 sıcaklığında eriyen buz için:

$$\Delta S_3 = \frac{Q}{T_0} = \frac{m_2 L}{T_0}$$

— T_0 dan T ye kadar eşbasınçlı bir ısınmaya mâruz kalan erimiş su olmuş buz için:

$$\Delta S_4 = m_2 c_1 \ln \frac{T}{T_0} \, .$$

Buna göre sistemin toplam entropi değişimi

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{4} \Delta S_i$$

ya da

$$\boxed{\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T}{T_1} + m_2 \left(c_2 \ln \frac{T_0}{T_2} + \frac{L}{T_0} + c_1 \ln \frac{T}{T_0} \right)}$$

olur. Buradan da

$$\Delta S = 10 \times 4200 \times \ln \frac{289{,}8}{300} + \left[\left(2100 \times \ln \frac{273}{263} \right) + \frac{336000}{273} + \left(4200 \times \ln \frac{289{,}8}{273} \right) \right]$$

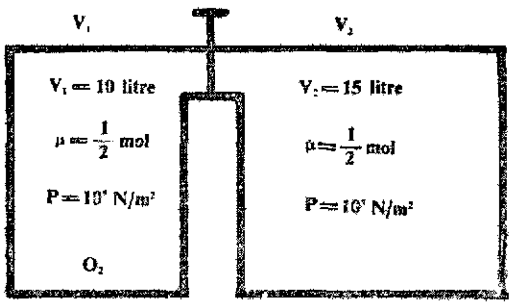
$$= -1451 + 78 + 1231 + 250 = 108 \text{ J /°K.}$$

bulunur.

II.19. Atmosferik basınç altında (1 atm = 10^5 N/m^2), $\mu = 1/2$ mol'lük oksijen ihtivâ eden $V_1 = 10$ litrelik bir kap gene atmosferik basınç altında $\mu = 1/2$ mol'lük oksijen ihtivâ eden $V_2 = 15$ litrelik bir kap ile birleştirilmektedir. Her iki kabın da iyice yalıtılmış oldukları ve ihtivâ ettikleri gazların da ideal gaz olarak davrandıkları varsayılmaktadır. Termik denge teessüs ettiğinde her iki gazdan oluşan sistemin entropi değişimini her bir kaptaki oksijenin T_1 ve T_2 başlangıç sıcaklıklarının fonksiyonu olarak belirleyiniz. [$c_P = (7/2)R$, R = 8,32].

ÇÖZÜM:

Her iki hacım da aynı mol sayısı ihtivâ ettiklerinden her iki taraftaki oksijen kütlesi de aynıdır: $m_1 = m_2$. Buna ve (II.17.1) formülüne göre nihaî denge sıcaklığı



$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

den ibârettir. Bundan başka, başlangıçta aynı basınçta bulunan iki gazın karışımı da eşbasınçlı bir biçimde gerçekleşmektedir. Şu hâlde entropinin değişimi de

— V_1 hacmındaki oksijen için

$$\Delta S_1 = \mu c_P \ln \frac{T}{T_1},$$

— V_2 hacmındaki oksijen için de

$$\Delta S_2 = \mu c_P \ln \frac{T}{T_2}$$

olacağından tüm sistemin entropi değişimi

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \mu c_P \left(\ln \frac{T}{T_1} + \ln \frac{T}{T_2} \right) = \mu c_P \ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = 2\, \mu c_P \ln \frac{T}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

ya da T nin yukarıda verilmiş olan değerini göz önünde tutarak

$$\boxed{\Delta S = 2 \mu c_P \ln \frac{T_1 + T_2}{2 \sqrt{T_1 T_2}}}$$

olur.

V_1 hacmında başlangıçtaki sıcaklık

$$T_1 = \frac{PV_1}{\mu R} = \frac{10^5 \,.\, 10^{-2}}{4{,}16} = 240{,}4 \ {}^\circ\mathrm{K}$$

ve V_2 hacmındaki başlangıç sıcaklığı da

$$T_2 = \frac{PV_2}{\mu R} = \frac{10^5 \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-2}}{4{,}16} = 360{,}6 \ {}^\circ\mathrm{K}$$

olduğundan entropi artışı için de

$$\Delta S = \frac{7}{2} \ln \frac{601}{589} \simeq 0{,}59 \ \mathrm{J/^\circ K}$$

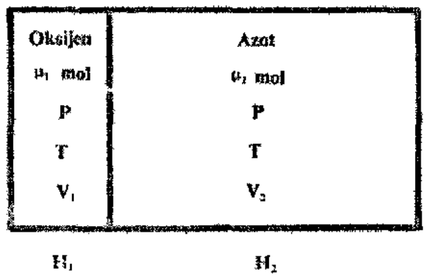
bulunur.

II.20. a) Sızdırmaz bir cidarla V_1 ve V_2 hacmını haiz H_1 ve H_2 diye iki kısma bölünmüş bir silindirik kap olsun. H_1 ve H_2 hacımları sırasıyla $\mu_1 = 1$ mol oksjien ile $\mu_2 = 4$ mol azot ihtivâ etsinler. Her iki hacımda da gerek P basıncı gerekse T sıcaklığı aynı olsun. Hacımların arasındaki cidarda bir delik delinecek olursa belirli bir zaman süresi sonunda gazlar birbirlerine karışarak T sıcaklığında ideal bir gaz (hava) karışımı oluştururlar. Bu difüzyon esnâsında sistemin entropi değişimini μ_1 ve μ_2 nin fonksiyonu olarak inceleyiniz.

b) Eğer difüzlenen gazlar aynı olsa, sonuç hakkında ne düşünürsünüz?

ÇÖZÜM:

a) H_1 ve H_2 nin arasındaki cidarda delinen delik aracılığı ile vukuu bulan genişleme tersinmez ve eşsıcaklıklı bir süreçtir. Her bir gazın entropi değişimi sanki tersinir ve eşsıcaklıklı bir genişleme yapıyormuş gibi hesaplanabilir.



Oksijenin entropi değişimi

$$\Delta S_1 = \mu_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1},$$

azotun entropi değişimi de

$$\Delta S_2 = \mu_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2},$$

ve sistemin entropi değişimi ise

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \mu_1 R \ln \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) + \mu_2 R \ln \left(1 + \frac{V_1}{V_2}\right)$$

olur. Fakat gazlar, başlangıçta aynı basınç ve sıcaklıkta bulunduklarından, ideal gazların hâl denkleminden

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

olduğu anlaşılır; ve nihâyet ΔS için de

$$\boxed{\Delta S = R\left[\mu_1 \ln \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \mu_2 \ln \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right]} \qquad \text{(II.20.1)}$$

ifâdesi bulunmuş olur. Buna göre de

$$\Delta S = 8{,}32\left(\ln 5 + 4\ln\frac{5}{4}\right) = 20{,}8\ \mathrm{J/^\circ K}$$

olacağı saptanmış olur.

b) Eğer gazlar özdeş iseler, (II.20.1) formülüne göre bunların entropi değişimi ile farklı gazların göz önüne alınmış olan şartlar altındaki entropi değişimi arasında bir fark olmayacaktır. Hâlbuki gazlar eğer özdeş iseler başlangıçta ve sondaki hâlleri farklı olmadığından (aynı basınç, aynı sıcaklık, aynı gaz) hiç bir entropi değişimi olamaz. Moleküller özdeş olduklarında entropi değişmez. Bu itibarla (II.20.1) formülü özdeş gazlara uygulanamaz. Difüzyon yoluyla karışımın entropisi bu hâl için anlamını kaybetmektedir: işte buna *GİBBS paradoksu* adı verilir.

II.21. İdeal bir gaz gibi telâkki olunan 1 kg hava bir ABCDA *CARNOT* çevrimine tâbî tutulmaktadır; burada AB ile CD eşsıcaklık eğrilerini ve BC ile DA da eşısı eğrilerini göstermekte olup termodinamik süreçlerin hepsinin de tersinir oldukları kabul edilmektedir.

A daki sıcaklık $T_1 = 300$ °K dir. A, B ve C deki basınçlar da sırasıyla $P_1 = 1$ atm, $P_2 = 3$ atm ve $P_3 = 9$ atm dir. $c_P = 10$ J/kg/derece ve $\gamma = c_P/c_v = 7/5$ olarak verilmektedir.

1) Çevrimin evrimini:

(a) Çevrimin ısı bilançosunu yaparak, ve

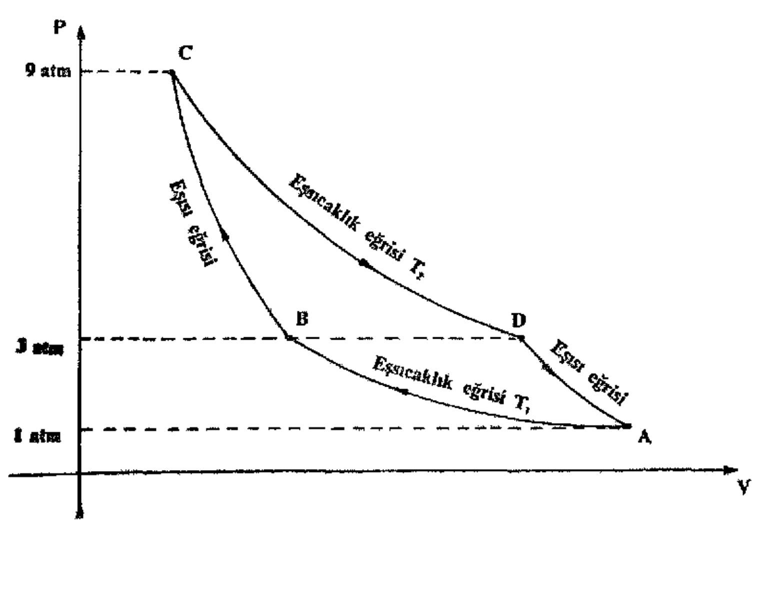
(b) Çevrimin uç sıcaklıklarından hareket ederek

iki ayrı şekilde hesaplayınız.

2) Çevrimdeki dört dönüşüm süresince havanın entropi değişimlerini hesaplayınız.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2/7} = 0{,}73$ alınacaktır.

ÇÖZÜM :



1) (a) Önce CD eşsıcaklık eğrisine tekaabül eden T_2 sıcaklığı ile D deki P_4 basıncını hesaplıyalım. Buna göre

BC eşısı eğrisi için:

$$T_1 \cdot (P_2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 \cdot (P_3)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}, \qquad \text{(II.21.1)}$$

DA eşısı eğrisi için de

$$T_1 \cdot (P_1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 \cdot (P_4)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \qquad \text{(II.21.2)}$$

olduğundan birinci bağıntıdan

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300 \times (3)^{2/7} = \frac{300}{0{,}73} = 411\ ^\circ\mathrm{K}$$

bulunur; ve (II.21.1) ile (II.21.2) yi taraf tarafa birbirleriyle bölerek de

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_4} = 3 \quad \rightarrow \quad P_4 = \frac{P_3}{3} = 3 \text{ atm}$$

bulunur.

Şimdi çevrimin ısı bilançosunu yapalım. μ mol'lük havanın değiş-tokuş ettiği ısı mikdarı :

— AB eşsıcaklık eğrisi boyunca:

$$Q_1 = \mu RT \ln \frac{P_1}{P_2} = c_P \frac{\gamma - 1}{\gamma} T_1 \ln \frac{P_1}{P_2} = 10^3 \times \frac{2}{7} \times 300 \times \ln \frac{1}{3} = -94\,170 \text{ J};$$

— CD eşsıcaklık eğrisi boyunca:

$$Q_2 = \mu RT_2 \ln \frac{P_3}{P_4} = c_P \frac{\gamma - 1}{\gamma} T_2 \ln \frac{P_3}{P_4} = 10^3 \times \frac{2}{7} \times 411 \times \ln 3 = +129\,000 \text{ J}$$

dur. BC ve DA eşısı eğrileri boyunca ise ısı değişimi yoktur. Buna göre gaz sıcak kaynaktan (T_2),

$$|Q_2| = 129\,000 \text{ J}$$

lük bir ısı almış ve soğuk kaynağa (T_1) da

$$|Q_1| = 94\,170 \text{ J}$$

lük bir ısı terketmiş olup bu ikisi arasındaki fark işe çevrilmiş bulunmaktadır: $|W| = |Q_2| - |Q_1|$.

Buna binâen çevrimin verimi

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_2}\right| = \frac{|Q_2| - |Q_1|}{|Q_2|} = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = 1 - \frac{94\,170}{129\,000} = \%27.$$

(b) Göz önüne alınan çevrim tersinir bir biçimde oluşmuş olduğu için *CARNOT* teoremine göre verim yalnızca uç sıcaklıklarına tâbîdir:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{411} = \%\, 27.$$

2) Havanın entropi değişimi

— *AB* eşsıcaklık eğrisi boyunca:

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = c_P \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \frac{P_1}{P_2} = - \frac{94\,170}{129\,000} \simeq -314 \text{ J/°K} ;$$

— tersinir *BC* eşsısı dönüşümünde : $\Delta S_2 = 0$;

— eşsıcaklıklı *CD* dönüşümünde:

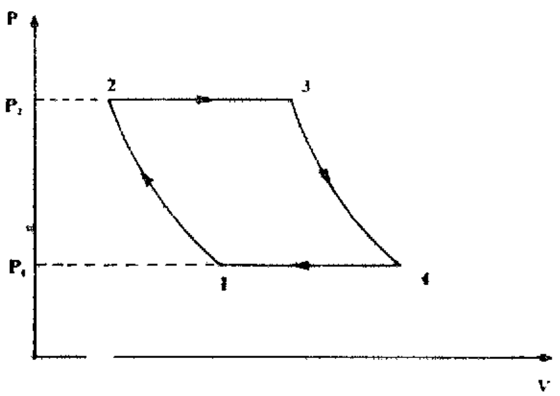
$$\Delta S_3 = \frac{Q_2}{T_2} = c_P \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \frac{P_3}{P_4} = + \frac{129\,000}{411} \simeq +314\, J/°K ;$$

tersinir *DA* eşısı dönüşümünde : $\Delta S_4 = 0$, olduğundan çevrimin toplam entropi değişiminin

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{4} \Delta S_i = 0$$

olduğu anlaşılmış olmaktadır.

✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶



II.22. 1 mol ideal gazla çalışan ve şekilde evrim şeması gösterilen makinanın veriminin, gazın özgül ısılarını sâbit varsayarak,

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

olduğunu gösteriniz. (*JOULE* çevrimi).

ÇÖZÜM: Makinanın verimi

$$\eta = \frac{w_{\text{toplam}}}{q_{\text{alınan}}}$$

ile verildiğine göre, w_{toplam} ve $q_{\text{alınan}}$ büyüklüklerinin hesaplanması gerekir.

$$w_{\text{toplam}} = w_{23} + w_{34} - w_{41} - w_{12}$$

$$= P_2 (v_3 - v_2) - P_1 (v_4 - v_1) - c_v (T_4 - T_3) + c_v (T_1 - T_2)$$

ve

$$q_{\text{alınan}} = c_P (T_3 - T_2)$$

dir. İdeal gaz denkleminden

$$RT_1 = P_1 v_1\,, \quad RT_2 = P_2 v_2\,, \quad RT_3 = P_2 v_3\,, \quad RT_4 = P_1 v_4$$

ve ideal gazın eşısılı eğrilerinin denkleminden de

$$P_1 v_1^{\gamma} = P_2 v_2^{\gamma}\,, \quad P_2 v_3^{\gamma} = P_1 v_4^{\gamma}$$

yazılır. Bunlara göre

$$w_{\text{toplam}} = P_2\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right](v_3 - v_2) + \frac{c_v}{R} P_2\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right](v_3 - v_2).$$

$$= \left(1 + \frac{c_v}{R}\right) P_2\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right](v_3 - v_2)$$

$$= \frac{c_P}{R} P_2\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right](v_3 - v_2)$$

ve

$$q_{\text{alınan}} = \frac{c_P}{R} P_2 (v_3 - v_2)$$

olur. O hâlde

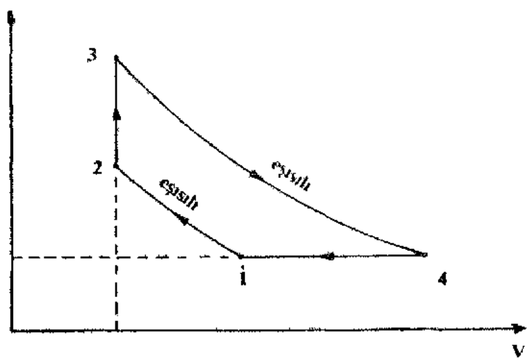
$$\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

dır.

II.23. 1 mol ideal gazla çalışan ve evrim şeması şekilde verilen makinanın veriminin, gazın özgül ısılarını sâbit varsayarak,

$$\eta = 1 - \gamma\,\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

olduğunu gösteriniz. (*SERGENT* **çevrimi)**



ÇÖZÜM: Gazın aldığı ısı mikdarı, $2 \rightarrow 3$ sürecinde gazın iç enerjisindeki artma mikdarı yâni $q = c_v (T_3 - T_2)$ dir.

Çevrim boyunca yapılan iş ise

$$w = 0 + c_v (T_3 - T_4) + c_v (T_1 - T_2) + P (v_1 - v_4)$$
$$= c_v (T_3 - T_4 + T_1 - T_2) + R (T_1 - T_4)$$

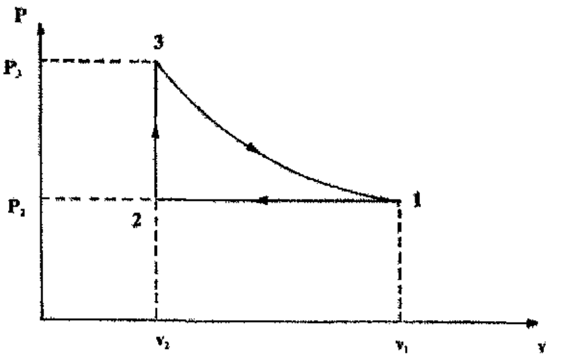
$$= (c_v + R)(T_1 - T_4) + c_v(T_3 - T_2)$$

dir. Buna göre

$$\eta = \frac{w}{q} = \frac{c_v(T_3 - T_2) + c_P(T_1 - T_4)}{c_v(T_3 - T_2)} = 1 + \gamma \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

$$= 1 - \gamma \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

olur.



II.24. 1 mol ideal gazla çalışan ve yandaki şekilde evrim şeması verilen makinanın veriminin, gazın özgül ısılarını sâbit varsayarak,

$$\eta = 1 - \gamma \frac{(v_1/v_2) - 1}{(P_3/P_2) - 1}$$

olduğunu gösteriniz.

II.25. Bir *CARNOT* makinası 400 °K ve 300 °K sıcaklıklarında bulunan iki ısı kaynağı ile çalıştırılıyor. (a) Makina 400 °K deki kaynaktan 1200 cal alırsa, 300 °K deki kaynağa kaç kalori bırakır? (b) Makinanın bir soğutucu olarak çalıştırılması hâlinde 300 °K deki kaynaktan 1200 cal alıyorsa 400 °K deki kaynağa kaç kalori bırakır? (c) Her iki hâlde de makinenin yaptığı toplam işi hesaplayınız.

CEVAP: (a) 900 cal, (b) 1600 cal, (c) 300 cal, 400 cal.

II.26. Bir *CARNOT* makinasının sâbit hacımdaki özgül ısısı $3R/2$ olan bir ideal gazla çalıştırıldığı varsayılıyor. Eşsıcaklıklı genleşmede gazın hacmı başlangıçtaki hacmının iki katına çıkıyor. Eşısılı genleşmede gazın son hacmının ilk hacmına oranı 5,7 ve makinanın tam bir çevrimde yaptığı iş de 9.10^5 Joule olduğunda, ısı kaynaklarının sıcaklıklarını hesaplayınız.

CEVAP: $T_1 = 230$ °K, $T_2 = 73$ °K.

II.27. $b =$ *sâbit* olmak üzere hâl denklemi $P(v - b) = RT$ olan bir gazla çalışan bir *CARNOT* makinasının veriminin, $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = 0$ şartının gerçeklenmesi hâlinde, ideal gazla çalışan bir *CARNOT* makinasının verimine eşit olduğunu gösteriniz.

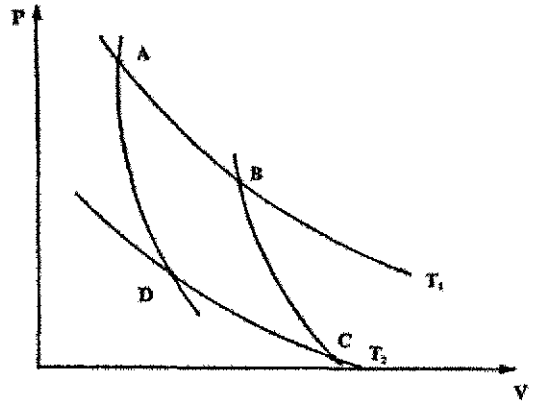
II.28. İdeal bir gaz olarak varsayılan, 1 kg metan gazı ile çalışan bir *CARNOT* çevrimi göz önüne alınıyor. $(v_{max}/v_{min}) = 4$ ve $\eta = \%\,25$ ise gazın eşsıcaklıklı genleşmesi esnâsındaki entropi artışını bulunuz. [$\gamma = 1,35$ alınacaktır].

ÇÖZÜM : $A \rightarrow B$ sürecinde sistemin entropisindeki artış mikdarı

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{P\,dV}{T_1}$$

$$= \frac{1}{T_1} nRT_1 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

$$= nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$



dır. Şimdi $\frac{V_B}{V_A}$ oranını hesaplıyalım :

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = 4,$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{4}$$

olduğu veriliyor. Diğer taraftan

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_A} \frac{V_B}{V_C}$$

şeklinde parçalanabilir. Şekilden hareketle elde edilen

$$P_B V_B = nRT_1, \quad P_C V_C = nRT_2$$

eşitlikleri taraf tarafa bölünerek

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{4}{3} \frac{P_C}{P_B} \qquad \text{(II.28.1)}$$

bulunur. Gene şekilden

$$P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma}$$

yâni

$$\frac{P_C}{P_B} = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma} \qquad \text{(II.28.2)}$$

olduğu görülür. (II.28.1 ve 2) eşitliklerinden

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{4}{3} \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma} \rightarrow \frac{V_B}{V_C} = 3^{\frac{1}{\gamma-1}} \times 4^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\frac{V_B}{V_A} = 4 \times 3^{\frac{1}{\gamma-1}} \times 4^{\frac{1}{\gamma-1}} = 3^{\frac{1}{\gamma-1}} \times 4^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}$$

ve

$$\Delta S = nR\left(\frac{1}{\gamma-1}\ln 3 + \frac{\gamma-2}{\gamma-1}\ln 4\right)$$

bulunur.

II.29. Hâl denklemi $(P + b)\, v = RT$ olan bir gazın özgül etropisinin

$$s_v = c_v \ln T + R \ln v + s\hat{a}bit$$

olduğunu gösteriniz.

II.30. İdeal gazın entropisini T ve P cinsinden yazınız.

CEVAP: $s = c_P \ln T - R \ln P + s\hat{a}bit.$

II.31. Sâbit basınçtaki özgül ısısı $c_P = s\hat{a}bit$ olan ve T_b sıcaklığında bulunan bir cisim T_s sıcaklığındaki ısı kaynağı ile temas ettiriliyor. Cisim, kaynak ile termodinamik denge hâline gelinceye kadar basınç sâbit kalıyor. Bütün sistemin entropi değişiminin, $x = -(T_s - T_b)/T_s$ olmak üzere,

$$\Delta S = c_P\,[x - \ln(1 + x)]$$

şeklinde olduğunu ve ΔS nin pozitif kaldığını gösteriniz.

ÇÖZÜM: Sistemin toplam entropi değişimi, cismin entropisinin değişimi ile kaynağın entropisinin değişiminin farkına eşittir:

$$\Delta S = (\Delta S)_1 - (\Delta S_2)\,.$$

Hâlbuki

$$(\Delta S)_1 = \int_{T_b}^{T_s} \frac{c_P\, dT}{T} = c_P \ln \frac{T_s}{T_b}\,,$$

ve

$$(\Delta S)_2 = \int_{T_b}^{T_s} \frac{c_P\, dT}{T_s} = c_P \frac{T_s - T_b}{T_s}$$

olduğundan

$$\Delta S = c_P \left[\ln \frac{T_s}{T_b} - \frac{T_s - T_b}{T_s} \right]$$

dir.

$$x = -\frac{T_s - T_b}{T_s}$$ şeklinde tanımlandığından

$$\Delta S = c_P \left[x + \ln \frac{1}{1+x} \right] = c_P \left[x - \ln (1+x) \right]$$

olur. Bilindiği gibi $x \neq 0$ için daima

$$e^x > 1 + x$$

dir. Her iki tarafın tabiî logaritması alınarak

$$x > \ln (1+x)$$

ve

$$x - \ln (1+x) > 0$$

yâni

$$\Delta S > 0$$

bulunur.

II.32. T_1, T_2 ($T_1 > T_2$) sıcaklıkları arasında çalışan bir *CARNOT* makinasının veriminin, aynı sıcaklık limitleri arasında çalışan *OTTO* makinasının veriminden daha büyük olduğunu gösteriniz. (Her iki makinanın de 1 mol'lük bir ideal gazla çalıştığı ve $\gamma = 1{,}4$ olduğu kabul edilecektir).

ÇÖZÜM: T_1 ve T_2 sıcaklıkları arasında çalışan *CARNOT* makinasının veriminin

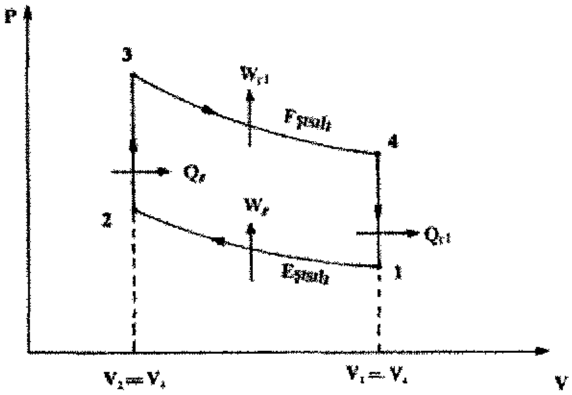
$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

olduğu bilinmektedir.

Çevrim şeması 94. sayfada verilen *OTTO* makinasının veriminin hesabına gelince, verim tanımından

$$\eta_O = \frac{W_{çı} - W_g}{Q_g}$$

dir.



$$Q_g = c_v\,(T_3 - T_2)\,,$$
$$W_{çı} = c_v\,(T_3 - T_4)\,,$$
$$W_g = c_v\,(T_2 - T_1)$$

olduğundan

$$\eta_O = \frac{c_v\,(T_3 - T_4) - c_v\,(T_2 - T_1)}{c_v\,(T_3 - T_2)}$$

bulunur. Öte yandan

$$P_1\,V_1 = R\,T_1\,;\quad P_2\,V_2 = R\,T_2,$$
$$P_3\,V_2 = R\,T_3\,;\quad P_4\,V_1 = R\,T_4$$

ve

$$P_1\,V_1^{\gamma} = P_2\,V_2^{\gamma}\,,\quad P_3\,V_2^{\gamma} = P_4\,V_1^{\gamma}$$

bağıntıları vardır. Buradan

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4\,V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma}}\;\frac{V_2^{\gamma}}{P_1\,V_1^{\gamma}} = \frac{P_4}{P_1} = \frac{T_4}{T_1}$$

eşitliği, yâni

$$T_4 = T_1\,\frac{T_3}{T_2}$$

elde edilir. Bu, η_O ifâdesinde yerleştirilerek

$$\eta_O = \frac{c_v\left(T_3 - \dfrac{T_3}{T_2}\,T_1\right) - c_v\,(T_2 - T_1)}{c_v\,(T_3 - T_2)} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

bulunur.

Fakat $T_2 < T_1$ varsayılmış olduğu göz önünde tutularak $T_2^2 < T_1^2$ yâni

$$\frac{T_1}{T_2} > \frac{T_2}{T_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{T_1}{T_2} < -\frac{T_2}{T_1}$$

bulunur. Her iki tarafa 1 eklenerek

$$1 - \frac{T_1}{T_2} < 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

yâni

$$\eta_O < \eta_C$$

olduğu görülür.

II.33. (a) Özgül ısıları sâbit varsayılan ideal bir gazın sıcaklığı, eşbasınçlı ve eşhacımlı süreçlerle T_1 den T_2 ye eriştirildiğinde $(\Delta S)_P > (\Delta S)_V$ olduğunu gösteriniz.

(b) İdeal bir gazın basıncı eşsıcaklıklı ve sâbit hacımlı süreçlerle P_1 den P_2 ye eriştirildiğinde her iki süreçteki ΔS entropi değişiminin birbirine göre zıt işârette olduğunu gösteriniz.

II.34. c_{PA}, c_{PB} özgül ısıları sâbit olan ve başlangıçta T_{AO} , T_{BO} sıcaklıklarında bulunan A ve B cisimleri sâbit basınçta birbirleriyle ısı alış-verişinde bulunuyorlar. Sistem yalıtılmış olduğuna göre, (a) sistemin toplam entropi değişimini A nın sıcaklığı olan T_A cinsinden hesaplayınız. (b) $\Delta S > 0$ olduğunu, yâni sürecin tersinmez olduğunu gösteriniz. (c) Sistemin denge sıcaklığı ne olur? (A ve B cisimlerinin kütleri eşit varsayılacaktır).

ÇÖZÜM : (a) Herhangi bir t ânında A ve B cisimlerinin sıcaklıkları sırasıyla T_A ve T_B olsun. T_A ve T_B arasındaki bağıntıyı bulmaya çalışalım. Sistem yalıtılmış olduğundan başlangıç ânından t ânına kadar A cismince verilen ısı mikdarı B cismince alınacaktır. Her iki cismin kütleleri aynı olduğundan

$$-c_{PA}(T_A - T_{AO}) = c_{PB}(T_B - T_{BO}) \qquad \text{(II.34.1)}$$

yâni

$$T_B = T_{BO} + \frac{c_{PA}}{c_{PB}}(T_{AO} - T_A)$$

bulunur. Buna göre

$$\Delta S = c_{PA}\int_{T_{AO}}^{T_A}\frac{dT}{T} + c_{PB}\int_{T_{BO}}^{T_B}\frac{dT}{T} = c_{PA}\ln\frac{T_A}{T_{AO}} + c_{PB}\ln\frac{T_{BO} + \frac{c_{PA}}{c_{PB}}(T_{AO} - T_A)}{T_{BO}}$$

bulunur.

(b) $T_{AO} < T_{BO}$ varsayıldığından $\dfrac{T_A}{T_{AO}} > 1$, ve

$$T_{BO} + \frac{c_{PA}}{c_{PB}}(T_{AO} - T_A) > T_{BO}$$

ve dolayısıyla da

$$\Delta S > 0$$

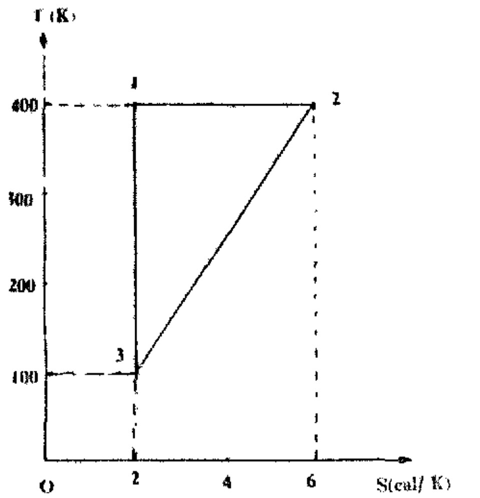
olur. O hâlde süreç tersinmezdir.

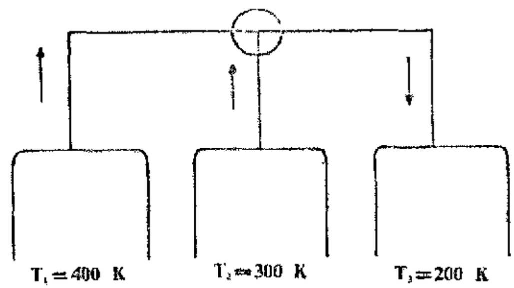
(c) Denge hâlinde $T_A = T_B$ olacağından (II.34.1) den

$$T_A = T_B = \frac{c_{PA}\, T_{AO} + c_{PB}\, T_{BO}}{c_{PA} + c_{PB}}$$

bulunur.

II.35. Kapalı bir PVT sisteminin sıcaklığı, entropisinin fonksiyonu olarak şekilde gösterilmiştir. Sırasıyla 1 → 2, 2 → 3, 3 → 1, 1 → 2 → 3 → 1 süreçlerinde sisteme verilen ısı mikdarlarını hesaplayınız.





II.36. Tersinir bir ısı makinasının şeması şekildeki gibi olsun. Makina 400°K sıcaklığında bulunan kaynaktan 1200 J almakta ve 200 J luk iş yapmaktadır. (a) Diğer kaynaklardan alınan-verilen ısı mikdarlarını hesaplayınız. (b) Her kaynak için entropi değişimini bulunuz. (c) Sistemin toplam entropi değişimi ne olur?

CEVAP: (a) $Q_2 = 1200$ J, $Q_3 = -200$ J ;

(b) $(\Delta S)_1 = -3$ J/°K, $(\Delta S)_2 = 4$ J/°K, $(\Delta S)_3 = -1$ J/°K ;

(c) $\Delta S = 0$.

II.37. $T_1 > T_2$ olmak üzere T_1 sıcaklığında bulunan sonlu kütleli bir cisim ile T_2 sıcaklığında bulunan ısı kaynağı arasında bir ısı makinası çalışmaktadır. Isı makinasının cisimden Q ısı miktarını çekmesi sonucu cismin sıcaklığı da T_2 ye düşmektedir. Makinanın yaptığı işin en büyük değerinin, $S_1 - S_2$ cismin entropisindeki değişme mikdarı olmak üzere,

$$W_{max} = Q + T_1 (S_1 - S_2)$$

şeklinde verilebileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Sistemdeki toplam entropi değişimi

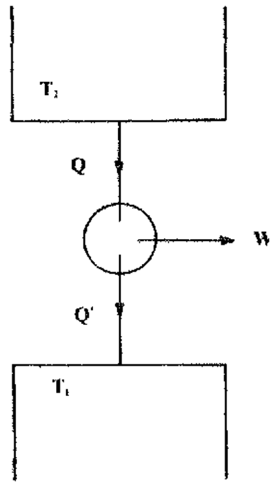
$$\Delta S = (\Delta S)_{cisim} + (\Delta S)_{ısı\ kaynağı}$$

$$= (S_1 - S_2) + \frac{Q'}{T_1}$$

$$= (S_1 - S_2) + \frac{Q - W}{T_1}$$

dir. Termodinamiğin ikinci ilkesine göre $S \geqslant 0$ olmalıdır. Buradan

$$(S_1 - S_2) + \frac{Q - W}{T_1} \geqslant 0$$



yâni

$$W \leqslant Q + T_1 (S_1 - S_2)$$

bulunur. O hâlde

$$W_{max} = Q + T_1 (S_1 - S_2)$$

dir.

II.38. (a) 0 °C da bulunan 1 kg su 100 °C da bulunan bir ısı kaynağıyla temasa getiriliyor ve sistem yalıtılıyor. Suyun sıcaklığı 100 °C ye çıktığı zaman suyun, kaynağın ve bütün sistemin entropi değişimi ne olur? (b) Eğer suyun sıcaklığı 100 °C a, önce 50 °C da bulunan bir kaynakla ve sonra da 100 °C da bulunan kaynakla temasa getirilerek çıkarılmış olsaydı suyun, kaynağın ve sistemin entropi değişimi ne olurdu?

CEVAP: (a) $(\Delta S)_{su} = 1300$ J/°K , $(\Delta S)_{kaynak} = -1120$ J/°K, $\Delta S = 180$ J/°K ;

(b) $(\Delta S)_{su} = 1300$ J/°K, $(\Delta S)_{kaynak} = -1210$ J/°K, $\Delta S = 90$ J/°K.

II.39. (a) Ortak özgül ısıları c_P olan birbirinin aynısı iki sistem T_1 ve T_2 ($T_2 > T_1$) sıcaklıklarında bulunmakta ve bir *CARNOT* makinasının ısı kaynakları olarak kullanılmaktadır. Makinanın her çevrimde yaptığı iş δW ise sistemlerin denge sıcaklığının $\sqrt{T_1 T_2}$ olacağını gösteriniz. (b) Sistemler rijid bir şekilde birleştirilir ve yalıtılırlarsa, bunların denge sıcaklığının $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ olacağını gösteriniz. (c) Hangi son sıcaklık daha büyük olur? (d) *CARNOT* makinasının yaptığı toplam işin de $c_P (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: (a) Sistemlerin denge sıcaklığını T ile gösterelim. T_2 sıcaklığındaki sistemin entropi kaybı, T_1 sıcaklığındaki sistemin entropi kazancına eşit olacağından

$$c_P \ln \frac{T_2}{T} = c_P \ln \frac{T}{T_1}$$

yâni

$$\frac{T_2}{T} = \frac{T}{T_1} \quad \rightarrow \quad T^2 = T_1 T_2 \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{T_1 T_2}$$

bulunur.

(b) Sistemlerin denge sıcaklığı T' ile gösterilirse, birinci sistemin ısı kaybı, ikinci sistemin ısı kazancına eşit olacağından,

$$m c_P (T_2 - T') = m c_P (T' - T_1)$$

ve

$$T' = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

bulunur.

(c) $(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2 > 0 \quad \rightarrow \quad T_2 + T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2} > 0$

yâni

$$\frac{T_2 + T_1}{2} > \sqrt{T_1 T_2} \quad \text{ve dolayısıyla da: } T' > T$$

dir.

(d) *CARNOT* makinasının bir çevrimde yaptığı δW işi, makinanın T_2 sıcaklığındaki kaynaktan aldığı δQ_2 ısı mikdarı ile T_1 sıcaklığındaki kaynağa verdiği δQ_1 ısı mikdarının arasındaki farka eşittir:

$$\delta W = \delta Q_2 - \delta Q_1 = c_P (dT)_2 - c_P (dT)_1 \ .$$

İntegrasyonla

$$\begin{aligned} W &= c_P (T_2 - T) - c_P (T - T_1) = c_P (T_2 - 2T + T_1) \\ &= c_P [(\sqrt{T_2})^2 - 2\sqrt{T_2}\sqrt{T_1} + (\sqrt{T_1})^2] \\ &= c_P (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

II.40. **Sonlu ve kapalı bir silindirin tabanlarından biri, silindir içinde sürtünmeden kayabilen aynı çaplı bir pistondur. Bu silindirin içindeki 1 mol ideal gaz eşsıcaklıklı olarak, basıncı 2 atm den 1 atm e düşene kadar genişliyor. Sistem atmosferle çevrilmiş olup, piston üzerine dıştan 1 atm lik bir basınç etkimektedir. Ayrıca sistem *T* derecede bir ısı kaynağı olarak kabul edilen atmosferle devamlı termik denge hâlindedir. Genişleme esnâsında piston, piston üzerine etkiyen toplam basınçla dengelenen, bir sürtünme kuvvetinin etkisi altındadır. Böylece piston çok yavaş kaymakta ve hareketin ivmesi ihmâl edilebilmektedir. Piston ve silindir iyi ısı iletici maddeden yapılmıştır. Gazın ve atmosferin entropi değişimlerini hesaplayınız. Toplam entropi değişimi ne olur?**

(Yol gösterme: İdeal gaz, silindir ve pistondan oluşan sistemi göz önüne alınız).

CEVAP: $(\Delta S)_{\text{atm}} = -\frac{1}{2} R, \quad (\Delta S)_{\text{i.g.}} = 0{,}6932\, R\,, \qquad \Delta S = 0{,}1932\, R.$

II.41 *VAN DER WAALS* **gazı için**

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\frac{\gamma}{v\, \varkappa_T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = -1$

bağıntısından

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = -\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T \frac{1}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P}$$

bulunur. $ds = \frac{\delta q}{T}$ olduğundan

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_T \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T}\, c_P$$

dir. Öte yandan

$$\delta q = c_v\, dT + \frac{RT}{v-b}\, dv = \left(c_v + \frac{RT}{v-b}\, v\, \alpha\right) dT - \frac{RT}{v-b}\, v\, \varkappa_T\, dP$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_T = -\frac{RT}{v-b}\, v\, \varkappa_T$$

elde edilir. O hâlde

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = \frac{1}{T}\,\frac{RT}{v-b}\, v\,\varkappa_T \frac{T}{c_P} = \frac{RT}{v-b}\, v\,\varkappa_T \frac{1}{c_P}$$

yâni

$$\frac{c_P}{v\,\varkappa_T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = \frac{RT}{v-b} \qquad \text{(II.41.1)}$$

dir.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = -1$$

den de

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \frac{1}{\left(\dfrac{\partial s}{\partial T}\right)_v}$$

bulunur. Hâlbuki

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{T}\, c_v\,, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_T = \frac{RT}{v-b}\,\frac{1}{T}$$

eşitlikleri vardır. Bunlara göre

$$c_v\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\frac{RT}{v-b} \qquad \text{(II.41.2)}$$

olur. (II.41.1) ve (II.41.2) eşitliklerinin birleştirilmesiyle de

$$c_v\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\frac{c_P}{v\,\varkappa_T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s$$

ve

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\frac{c_P}{c_v}\,\frac{1}{v\,\varkappa_T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = -\frac{\gamma}{v\,\varkappa_T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s$$

bulunur.

III. BÖLÜM

TERMODİNAMİĞİN ÜÇÜNCÜ İLKESİ

III.1. İdeal bir gaz için özgül serbest enerjinin ($f = F/m$)

$$f = \int_{T_0}^{T} c_v \, dT - \int_{T_0}^{T} c_v \frac{dT}{T} - RT \ln \frac{v}{v_0} - s\,T + u_0$$

ile verildiğini ve

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -P\,, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -s$$

olduğunu gösteriniz. [s_0 ve u_0 ile (P_0, v_0, T_0) referans hâline tekaabül eden entropi ve iç enerji gösterilecektir.]

ÇÖZÜM: Tanımı gereği serbest enerjinin ifâdesi : $F = U - TS$ dir. Buradan diferansiyel alarak

$$dF = dU - T\,dS - S\,dT = (\delta Q - \delta W) - T\,dS - S\,dT$$

$$= m\,c_v\,dT - P\,dV - \delta Q - m\,c_v \frac{dT}{T}$$

olur. Bu ifâdeyi referans hâli ile aktüel hâl arasında integre edersek:

$$\int_{F_0}^{F} dF = \int_{T_0}^{T} m\,c_v\,dT - \int_{V_0}^{V} P\,dV - \int_{Q_0}^{Q} \delta Q - \int_{T_0}^{T} m\,c_v \frac{dT}{T}$$

olur. Bir taraftan bu ifâdenin her iki yanını m ile bölüp özgül değişkenlere geçerek, diğer taraftan da integralleri hesaplayarak

$$\int_{f_0}^{f} df = f - f_0 = f - (u_0 - T_0 s_0) = \int_{T_0}^{T} c_v\, dT - \int_{T_0}^{T} c_v \frac{dT}{T} - RT \ln \frac{v}{v_0} - (q - q_0)$$

bulunur. Buradan da $q = sT$ ve $q_0 = s_0 T_0$ olduğunu göz önünde tutarak

$$\boxed{f = \int_{T_0}^{T} c_v\, dT - \int_{T_0}^{T} c_v \frac{dT}{T} - RT \ln \frac{v}{v_0} - sT + u_0}$$

olduğu tesbit edilmiş olur. Diğer bağıntılar da bu bağıntıdan kolaylıkla çıkarılır.

III.2. Tekatomlu bir ideal gazın serbest enerjisinin temel denklemini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Bir taraftan serbest enerjinin $F = U - TS$ şeklindeki tanımını, diğer taraftan da entropinin **II.2** de tesis edilmiş olan

$$S = \frac{3}{2} NR \ln\left(\frac{U}{N}\frac{N_0}{U_0}\right) + NR \ln\left(\frac{V}{N}\frac{N_0}{V_0}\right) + \frac{N}{N_0} S_0$$

ifâdesini göz önünde bulunduracağız. Serbest enerjinin temel denklemi demek: $F = F(N, V, T)$ şeklindeki ifâdesi demektir. Eğer $U = \frac{3}{2} NRT$ bağıntısını kullanırsak U yerine T ikaame edilmiş olur. Buna göre

$$F = U - TS = \frac{3}{2} NRT - \frac{3}{2} NRT \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + NRT \ln\left(\frac{V}{N}\frac{N_0}{V_0}\right) - \frac{NTS_0}{N_0}$$

$$= NRT\left\{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \ln\left(\frac{V}{N}\frac{N_0}{V_0}\right) - \frac{S_0}{N_0 R}\right\}$$

yâni

$$\boxed{F = NRT\left\{\frac{F_0}{N_0 RT_0} - \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\left(\frac{V}{V_0}\right)\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-1}\right]\right\}}$$

bulunur.

III.3. Saf bir cismin sâbit hacımdaki C_V ısı sığasını T sıcaklığı ve F serbest enerjisinin T ye göre ikinci mertebeden kısmî türevinin fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

ÇÖZÜM: Sâbit hacımdaki C_V ısı sığasının tanımı gereği

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{III.3.1}$$

ile verildiği mâlûmdur. Eğer U iç enerjisini F serbest enerjisinin T ye göre türevi cinsinden ifâde edebilirsek (III.3.1) formülünden problemin cevabını elde edebiliriz.

Bunun için

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\,dU + \frac{P}{T}\,dV$$

olduğunu göz önünde bulundurarak $F = U - TS$ tanım bağıntısından

$$S - \frac{U}{T} = -\frac{F}{T} \quad \rightarrow \quad d\left(S - \frac{U}{T}\right) = \frac{1}{T}\,dU + \frac{P}{V}\,dV - \frac{1}{T}\,dU + \frac{U}{T^2}\,dT$$
$$= d\left(-\frac{F}{T}\right)$$

elde edilir. Bu son bağıntıdan ise

$$U = -T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right)_V \tag{III.3.2}$$

olduğu gözükmektedir. (III.3.2) yi (III.3.1) e vaz ederek

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T}\left\{-T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right]\right\}_V$$
$$= -2T\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right)_V - T^2\left(\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{F}{T}\right)\right)_V$$
$$= \frac{2U}{T} - T^2\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V - \frac{2}{T^2}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V + \frac{2}{T^3}F\right]$$

yâni

$$C_V = \frac{2}{T}(U - F) + 2\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V - T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V \tag{III.3.3}$$

bulunur. Ancak, bu ifâdedeki ilk iki terim ile serbest enerjinin tanım bağıntısını göz önünde bulundurursak

$$\frac{2}{T}(U - F) + 2\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = 2S + 2\left\{\frac{\partial}{\partial T}(U - TS)\right\}_V = 0$$

dır. Buna binâen (III.3.3) de

$$\boxed{C_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V} \qquad \text{(III.3.4)}$$

şekline girmiş olur ki aranan da bu ifâdedir.

III.4. $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V$ **olduğunu gösterip ideal gazlar söz konusu olduğunda C_V nin hacımdan bağımsız olduğunu ispatlayınız.**

ÇÖZÜM: Bir önceki problemin (III.3.4) sonucunu V ye göre türeterek

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = -T\frac{\partial^3 F}{\partial V\,\partial T^2} = -T\frac{\partial^3 F}{\partial T^2\,\partial V} = -T\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

olur. Hâlbuki bilindiği gibi (*Bk.* III.1.)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$$

dir. Buna göre

$$\boxed{\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V}$$

olur. Öte yandan ideal gazlar için: $PV = \mu RT$ olduğundan

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \mu\frac{R}{V}, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V = 0$$

bulunur. Şu hâlde ideal gazlar söz konusu olduğunda

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0,$$

yâni sâbit hacımda ısı sığası hacımdan bağımsızdır.

III.5. Bir termodinamik sistemde mol başına f serbest enerjisinin, a pozitif bir sâbit ve φ de herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(T, v) = T\,\varphi(T\,.\,v^a)$$

ifâdesiyle verildiği varsayılmaktadır. Buna göre :

1) Basıncı, entropiyi ve iç enerjiyi T ve v nin fonksiyonu olarak hesaplayınız.

2) u/v oranının yalnızca T ye bağlı olduğu varsayılmaktadır. Bu takdirde φ fonksiyonunu ve u/v nin T ye nasıl bağlı olduğunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM: 1) $x = Tv^a$ vaz edelim. III.1 den de bilindiği gibi

$$P(v,T) = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T \quad \text{ve} \quad s(v,T) = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v$$

olduğundan

$$P(v,T) = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -a\,T^2\,v^{a-1}\,\varphi'(x)$$

$$s(v,T) = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -\varphi(x) - T\,v^a\,\varphi'(x)$$

$$u(v,T) = f + sT = T\varphi - T\varphi - T^2 v^a \varphi' = -T^2 v^a \varphi'(x) = -x\,T\,\varphi'(x)$$

sonuçları elde edilir.

2) Son ifâdeden

$$\frac{u}{v} = -T^2 v^{a-1} \varphi'(T v^a) = -(T v^a)^{\frac{a-1}{a}} \varphi'(T v^a)\, T^{2-\frac{a-1}{a}}$$

$$= -T^{\frac{a+1}{a}}\, x^{\frac{a-1}{a}}\, \varphi'(x)$$

bulunur. Bu ifâde ne v ye ve ne de x e bağlı olacağından, k ile bir sâbiti göstermek üzere

$$x^{\frac{a-1}{a}}\,\varphi'(x) = -k \quad \text{yâni} \quad \varphi'(x) = -k\,x^{\frac{1}{a}-1}$$

olmalıdır. Buradan da

$$\varphi(x) = -ka\,x^{\frac{1}{a}} + \textit{sâbit}$$

olması gerektiği bulunur. Buradaki integrasyon sâbitinin değerini saptamak için termodinamığin üçüncü ilkesine göre $T = 0$ (ve dolayısıyla $x = 0$ için) entropinin sıfır olması gerektiğini hatırlarsak bu sâbitin de sıfır olması gerekeceği kolaylıkla görülür. Buna göre

$$f(T,v) = T\,\varphi(T v^a) = -k\,a\,T\,(T v^a)^{\frac{1}{a}} = k\,a\,T^{\frac{a+1}{a}}\,v$$

ve u/v için de

$$\boxed{\frac{u}{v} = k\,T^{\frac{a+1}{a}}}$$

bulunur.

III.6. Moleküler yapıyı haiz bir katı cismin f özgül serbest enerjisi (η ile molekül başına atom sayısı, R ile gazlar sâbiti ve M ile de moleküler kütle gösterilmek süretiyle) özgül v hacmı ve T sıcaklığının

$$f(v, T) = f(v, 0) - \frac{3\,\eta RT}{M}\,\varphi(v, T) \tag{III.6.1}$$

şeklinde bir fonksiyonudur.

1) Düşük sıcaklıklarda $\varphi(v, T)$ fonksiyonu

$$\varphi(v, T) = \frac{\pi^4}{15}\left[\frac{T}{\theta_1(v)}\right]^3 \tag{III.6.2}$$

ve yüksek sıcaklıklarda da

$$\varphi(v, T) = \ln\left[\frac{T}{\theta_2(v)}\right] \tag{III.6.3}$$

asimtotik şekillerine bürünmekte olup bu ifâdelerdeki $\theta_1(v)$ ve $\theta_2(v)$ yalnızca v ye bağlı iki fonksiyonu göstermektedirler.

Katı cismin düşük ve yüksek sıcaklıklarda sâbit hacımdaki $c_v(v, T)$ özgül ısısının asimtotik şekilleri ne olur?

2) θ_1 ile yukarıdaki fıkrada söz konusu edilmiş olan fonksiyonu göstermek üzere, $\varphi(v,T)$ fonksiyonunun pek çok eleman ve bazı bileşik cisimler için, her sıcaklık için geçerli iyi bir yaklaşık ifâdesi

$$\varphi(v, T) \cong \left(\frac{T}{\theta_1}\right)^3 \int_0^{\theta_1/T} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} - \ln\left(1 - e^{-\theta_1/T}\right) \tag{III.6.4}$$

dir.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

olduğunu kaydederek, bu yaklaşım sayesinde 1) fıkrasındaki sonuçları yeniden elde ediniz.

ÇÖZÜM: **1)** $c_v(v, T)$ nin bir başka tanımı da, bilindiği gibi,

$$c_v(v, T) = T \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \tag{III.6.5}$$

olup burada s ile cismin f özgül serbest enerjisine

$$s(v, T) = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v \tag{III.6.6}$$

ile bağlı olan özgül entropi gösterilmektedir. (III.6.6) yı (III.6.5) e vaz ederek **III.3.** de de tesis edilmiş bulunan

$$c_v(v, T) = -T \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_v$$

ifâdesi bulunur. Bu ifâde (III.6.1) in ışığı altında

$$\boxed{c_v(v, T) = \frac{3\eta R}{M} T\left[T \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2}\right)_v + 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)_v\right]} \tag{III.6.7}$$

şekline girer. Düşük sıcaklıklar için geçerli olan (III.6.2) formülüne binâen (III.6.7) ifâdesi

$$\boxed{c_v(v, T) = \frac{12\pi^4 \eta R}{5M}\left[\frac{T}{\theta_1(\nu)}\right]^3} \qquad (\textit{DEBYE}\ \text{Kaanûnu})$$

ve yüksek sıcaklıklar için geçerli olan (III.6.3) formülüne binâen de (III.6.7) ifâdesi

$$\boxed{c_v(v, T) = \frac{3\eta R}{M}} \qquad (\textit{DULONG-PETİT}\ \text{Kaanûnu})$$

na indirgenir.

2) Şimdi

$$A(t) = \frac{1}{t^3} \int_0^t \frac{x^3\, dx}{e^x - 1}$$

vaz edelim. Buna göre

$$A'(t) = -\frac{3}{t^4}\int_0^t \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} + \frac{1}{e^t - 1} = -\frac{3}{t}A(t) + \frac{1}{e^t - 1}$$

olur. (III.6.4) ile verilen $\varphi(\nu, T)$ fonksiyonu ise, buna göre,

$$\varphi(\nu, T) = A\left(\frac{\theta_1}{T}\right) - \ln\left(1 - e^{-\theta_1/T}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)_\nu = -\frac{\theta_1}{T^2}\left[-3\frac{T}{\theta_1}A\left(\frac{\theta_1}{T}\right) + \frac{1}{e^{\theta_1/T} - 1}\right] + \frac{\theta_1}{T^2}\,\frac{e^{-\theta_1/T}}{1 - e^{-\theta_1/T}}$$

$$= \frac{3}{T}A\left(\frac{\theta_1}{T}\right)$$

bulunur. φ nin T ye göre ikinci türevi ise

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial T^2}\right)_\nu = -3\frac{1}{T^2}A\left(\frac{\theta_1}{T}\right) - 3\frac{\theta_1}{T^3}A'\left(\frac{\theta_1}{T}\right)$$

$$= \frac{6}{T^2}A\left(\frac{\theta_1}{T}\right) - 3\frac{\theta_1}{T^3}\,\frac{1}{\theta_1/T - 1}$$

olur. $(\partial^2\varphi/\partial T^2)_\nu$ nin bu ifâdesi (III.6.7) ye yerleştirilirse sonunda

$$\boxed{c_\nu(\nu, T) = \frac{9\eta R}{M}\left[4\left(\frac{T}{\theta_1}\right)^3\int_0^{\theta_1/T}\frac{x^3\,dx}{e^x - 1} - \frac{\theta_1/T}{e^{\theta_1/T} - 1}\right]} \qquad \text{(III.6.8)}$$

ifâdesi bulunur.

$T \to 0$ için (III.6.8) deki integralin değeri de $\pi^4/15$ e gider. Öte yandan gene $T \to 0$ için $(\theta_1/T)/(e^{\theta_1/T} - 1) \to 0$ dır. Buna binâen $c_\nu(\nu, T)$ nin düşük sıcaklıklardaki asimtotik ifâdesi

$$\lim_{T\to 0} c_\nu(\nu, T) \simeq \frac{12\pi^4\eta R}{5M}\left(\frac{T}{\theta_1}\right)^3 \qquad (\textit{DEBYE Kaanûnu})$$

şekline girer.

$$T \to \infty \text{ için ise } \varepsilon = \theta_1/T \to 0 \quad \text{ve} \quad (\theta_1/T)/(e^{\theta_1/T} - 1) \to 1$$

olur. Öte yandan integralin hesabında da, pekâlâ iyi bir yaklaşıklık olarak, $x^3/(e^x - 1)$ in seriye açınımının ilk terimi olan x ile iktifâ olunabilir. Böylelikle (III.6.8) ifâdesi de $T \to \infty$ için

$$\lim_{T\to\infty} c_v(v, T) = c_v(v, \infty) = \frac{3\eta R}{M} \qquad (DULONG\text{-}PETİT\ Kaanûnu)$$

şekline indirgenmiş olur.

Görüldüğü gibi bu sonuçlar 1. fıkradakilerle tutarlıdırlar.

III.7. Tekatomlu bir mol'lük bir ideal gaz T_0 sıcaklığını koruyarak eşsıcaklıklı bir süreç mûcibince $P_0 = 1$ atm lik bir basınçtan $P_1 = 100$ atm lik bir basınca erişinceye kadar sıkıştırıldıktan sonra eşentropili bir süreçle tekrar $P_0 = 1$ atm basıncına kadar genişletilmektdir. Bu takdirde gazın T sıcaklığı ne olur? Bu dönüşüm boyunca gazın Δs_1 entropi değişimi ne kadardır?

Ayni işlem bir önceki işlemin sonunda erişilen sıcaklıktan başlayarak n kere tekrarlanmaktadır. n işlem sonunda erişilen T_n sıcaklığı ve Δs_n entropi değişimi ne olur?

Elde edilen sonuç termodinamiğin üçüncü temel ilkesiyle çelişikmiş gibi görünmektedir. Bu takdirde düşük sıcaklıklarda ideal gaz varsayımının geçerli olup olmadığını tartışınız. ($\gamma = 5/3$).

ÇÖZÜM: İdeal gazlar için eşısılı dönüşümlerde, bilindiği gibi,

$$T^{\gamma} P^{1-\gamma} = s\hat{a}bit$$

dir. Eğer $P_0 = 1$ atm ye $P_1 = 100$ atm, eşısılı dönüşümün uç noktalarındaki basınçları gösteriyorsa

$$T^{\gamma} P_0^{1-\gamma} = C = s\hat{a}bit \quad \text{ve} \quad T_0^{\gamma} P_1^{1-\gamma} = C = s\hat{a}bit$$

bağıntılarından

$$T = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{1}{100}\right)^{2/5}$$

bulunur. Demek ki tam bir süreç sonunda erişilen sıcaklık başlangıçtakinden çok daha düşük olup peşpeşe uygulanmış ayni süreçler sonunda nihaî sıcaklıklar, terimleri

$$\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

oranını haiz olarak azalan geometrik bir dizi oluşturacaklardır. Bu işlemlerin sayısı sonsuza gittiği zaman nihaî sıcaklığın da asimototik bir biçimde sıfıra gideceği anlaşılmaktadır; bu durum, termodinamiğin üçüncü temel ilkesine tamamen uygun gözükmektedir.

Entropi değişimine gelince bu, eşsıcaklıklı sıkıştırmaya tekaabül eden entropi değişiminden ibâretitir. Bu ise n-ninci işlemde

$$\Delta s_n = \frac{\Delta q_n}{T_{n-1}} = \left(RT_{n-1} \ln \frac{P_0}{P_1} \right) \cdot (T_{n-1})^{-1}$$

dir ; zirâ buradaki Δq_n eşsıcaklıklı sıkıştırmada ortaya konan Δw_n işine eşittir. Bu ifâdede T_{n-1} sıcaklıkları birbirlerini götürürler ve Δs_n de n den bağımsız olur. Bu durumda $n \to \infty$ için entropinin sâbit ve de negatif bir değere sâhip olacağı görülmektedir. Bu ise termodinamiğin üçüncü temel ilkesine aykırıdır. Buradan da ideal gazların üçüncü temel ilkeye uymadıkları sonucu çıkmaktadır.

III.8. Bilindiği gibi termodinamiğin üçüncü ilkesi "bir sistemi sonlu sayıda işlem sonucu 0°K e eriştirmek imkânsızdır" diye de ifâde edilebilir. Buna eşdeğer bir ifâde de *NERNST* kaanûnu olup buna göre de "$T \to 0$ °K için termodinamik bir sistemin ΔS entropi değişimi sıfıra gider".

Şimdi $a \to b$ şeklinde, T' sıcaklığındaki bir sistemi eşısılı ve tersinir bir biçimde T'' sıcaklığındaki bir sisteme dönüştüren bir süreç göz önüne alalım. Her iki sisteme tekaabül eden $S_a(T')$ ve $S_b(T'')$ entropileri arasında ne gibi bir bağıntı vardır?

$T \to 0$°K için ısı sığasının da sıfıra gideceğini göz önünde tutarak hangi şartlar altında $T'' = 0$ °K olacaktır? a ve b sistemlerinin 0°K deki S_{oa} ve S_{ob} entropileri için, buna dayanarak, ne söylenebilir? Bu takdirde termodinamiğin üçüncü temel ilkesinin zorunlu kıldığı eşitsizliği tesis ediniz. Ters olayı düşünerek aynı muhakemeyi bir kere daha yürütüp sonuç olarak zorunlu bir şekilde $S_{oa} = S_{ob}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: C_a ve C_b ile a ve b sistemlerinin ısı sığalarını göstererek $a(T') \to b(T'')$ termodinamik dönüşümünde

$$S_a(T') = S_{oa} + \int_0^{T'} C_a \, d(\ln T),$$

$$S_b(T'') = S_{ob} + \int_0^{T''} C_b \, d(\ln T)$$

olduğu kolayca tesis edilir. $a \to b$ dönüşümü eşısılı olduğundan

$$S_a(T') = S_b(T'')$$

yâni

$$S_{oa} + \int_0^{T'} C_a\, d(\ln T) = S_{ob} + \int_0^{T''} C_b\, d(\ln T)$$

olmalıdır. Eğer $T'' = 0$ ise, $T \rightarrow 0$ için $C_b \rightarrow 0$ olacağından sağ yandaki integral sıfır olacak ve

$$S_{oa} + \int_0^{T'} C_a\, d(\ln T) = S_{ob} \qquad \text{(III.8.1)}$$

bağıntısı geçerli olacaktır. Fakat $C_a > 0$ olduğundan ancak eğer $S_{oa} < S_{ob}$ ise $T' = 0$ olabileceği anlaşılmaktadır. Hâlbuki termodinamiğin üçüncü ilkesine göre $0\,^\circ$K e erişilemez; dolayısıyla (III.8.1) bağıntısını gerçekleyen hiç bir T' sıcaklığı olamaz. Şu hâlde

$$S_{oa} \geqslant S_{ob}$$

olmalıdır.

Şimdi benzer bir muhakeme, $a \rightarrow b$ dönüşümü tersinir olduğundan, $b \rightarrow a$ dönüşümü için de yürütülebilir ve sonunda

$$S_{oa} \leqslant S_{ob}$$

olması gerektiği sonucuna varılır. Bu ise ister istemez $S_{oa} = S_{ob}$ ve dolayısıyla da : $\Delta S_0 = 0$ olmasını gerektirir.

III.9. İdeal bir gaz için

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_P$$

nin değerlerini belirleyiniz.

ÇÖZÜM: Serbest enerjinin tanım bağıntısı $F = U - TS$ olduğundan

$$\begin{aligned} dF &= d(U - TS) = T\,dS - P\,dV - T\,dS - S\,dT \\ &= -S\,dT - P\,dV \qquad \text{(III.9.1)} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \end{aligned}$$

dir. Buradan da, derhâl,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$$

olduğu görülmektedir. İdeal bir gaz için ise (III.9.1) den

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{-S\,dT - P\,dV)}{\partial T}\right)_P = -S - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -S - \mu R\,,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{-S\,dT - P\,dV}{\partial P}\right)_T = -P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = P\frac{V}{P} = V\,,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{-S\,dT - P\,dV}{\partial P}\right)_V = -S\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\frac{SV}{\mu R}\,,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{-S\,dT - P\,dV}{\partial V}\right)_P = -S\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P - P = -\frac{SP}{\mu R} - P$$

bulunur.

III.10. **(P, v, T) hâlinde bulunan bir mol'lük bir gaz göz önüne alınıyor. f ile de bu gazın özgül serbest enerjisi gösterilmiş olsun.**

1) Gazın basıncının

$$P = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T$$

olduğunu gösteriniz.

2) Buradan :

— gazın ideal bir gaz olması,

— veyâ $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$ *VAN DER WAALS* hâl denklemine uyan bir gaz olması

hâlleri için f hâl fonksiyonunun ifâdesini tesis ediniz.

3) Gazı v hacmından v' hacmına indirgeyen eşsıcaklıklı bir sıkıştırma gerçekleştiriliyor. Bu takdirde

a) İdeal bir gaz için ve bir *VAN DER WAALS* gazı için serbest enerjinin değişimini ifâde ediniz.

b) Bunu, tersinir eşsıcaklıklı bir sıkıştırma esnâsında gaz üzerine yapılan işle mukaayese ediniz.

ÇÖZÜM: 1) Özgül serbest enerji $f = u - sT$ şeklinde tanımlandığına göre, III.9 da olduğu gibi, kolaylıkla,

$$df = -s\,dT - P\,dv = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T dv$$

bulunur. Buradan da

$$\boxed{P = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T} \qquad \text{(III.10.1)}$$

olduğu görülmektedir.

2) (III.10.1) ifâdesi integre edilirse $\varphi(T)$ ile yalnızca T sıcaklığına bağlı bir fonksiyonu göstermek üzere

$$f = -\int P\,dv + \varphi(T) \qquad \text{(III.10.2)}$$

bulunur. Bir mol'lük ideal bir gaz için $P = RT/v$ olduğundan, (III.10.2) den, özgül serbest enerjinin

$$\boxed{f(T, v) = -RT \ln v + \varphi(T)} \qquad \text{(III.10.3)}$$

şeklinde olduğu bulunur.

Öte yandan bir mol'lük *VAN DER WAALS* gazı için de

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

olduğundan, gene (III.10.2) den

$$\boxed{f(T, v) = -RT \ln(v-b) - \frac{a}{v} + \varphi(T)} \qquad \text{(III.10.4)}$$

bulunur.

3a) (III.10.3) ifâdesinden, eşsıcaklıklı bir sıkıştırılmaya mâruz kalan bir-mol'lük ideal bir gazın özgül serbest enerjisindeki değişimin

$$\Delta f = f' - f = [-RT \ln v' + \varphi(T)] - [-RT \ln v + \varphi(T)]$$

yâni

$$\boxed{\Delta f = RT \ln \frac{v}{v'}}$$

ve bir mol'lük bir *VAN DER WAALS* gazının özgül serbest enerjisindeki değişimin de

$$\boxed{\Delta f = f' - f = RT \ln \frac{v-b}{v'-b} + a\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)}$$

olduğu kolayca tesbit edilir.

3b) Her iki hâl için de $\Delta f = w_{\text{eşsıc}}$ dır. Zirâ eşsıcaklıklı bir dönüşümde

$$df = -s\, dT - P\, dv = -P\, dv = \delta w$$

dir. Buradan da integral alarak:

$$\boxed{f = w_{\text{eşsıcaklık}}}$$

bulunur.

III.11. Boşlukta buharlaştırılan belirli bir mikdar gümüş, μ magnetik momentini haiz N adet gümüş atomundan oluşan bir fıskıye yayınlamaktadır. Bir B magnetik indüksiyonuna tâbi tutulan T sıcaklığındaki bu paramagnetik atomlar topluluğunun keşmekeşliği, $x = \mu B/kT$ olmak üzere

$$S = kN\left[\ln(e^{-x} + e^{x}) + x\,\frac{e^{-2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right]$$

entropisi aracılığıyla ölçülür (*k: BOLTZMANN* sâbiti). Atom fıskıyesinin mutlak sıcaklığı çok düşük bir sıcaklıktan sonsuz yüksek bir sıcaklığa geçtiği vakit, bir mol'lük bir atom topluluğunun entropisindeki değişimini tâyin ediniz.

ÇÖZÜM: Eğer sıcaklığı çok düşük farzedersek $x = \mu B/kT \to \infty$ olur ve bu durumda da

$$e^x \simeq 0, \quad e^{-2x} \simeq 0, \quad \ln(e^{-x} + e^x) \simeq \ln e^x = x$$

olacağından söz konusu atomlar topluluğunun entropisi için de

$$S = S_0 = k\,N(x - x) = 0$$

bulunur ki bu da $T \to 0$ için $S \to 0$ olacağını ifâde eden, termodinamiğin üçüncü temel ilkesiyle uyum hâlinde olan bir sonuçtur.

Göz önüne alınan ikinci ve nihaî halde ise $T \to \infty$ olduğundan $x = \mu B/kT \simeq 0$ olup e^x, e^{-x} ve e^{-2x} terimleri de bire giderler. Bu takdirde de entropinin

$$S = S_\infty = kN \ln 2$$

den ibâret olacağı anlaşılmaktadır. Şu hâlde her iki hâl arasındaki entropi değişimi: $\Delta S = S_\infty - S_0 = kN \ln 2$ olacaktır. Bir mol atom için $N = \mathcal{N} =$ *AVOGADRO* sayısı olacağından $k\mathcal{N} = R$ olması hasebiyle, entropi değişiminin de

$$\boxed{S = R \ln 2}$$

olacağı anlaşılır.

✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶

III.12. h bir gazın özgül entalpisi olmak üzere

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -c_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: $dh = du + P\,dv + v\,dP$ ve $\delta q = du + P\,dv$ bağıntılarından

$$\delta q = dh - v\,dP$$

bulunur. Diğer taraftan

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T dP$$

yazılır. Son iki bağıntı birleştirilerek

$$\delta q = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T - v\right] dP$$

elde edilir. Bu eşitlik eşbasınçlı bir sürece uygulanırsa

$$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$$

yâni

$$c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \qquad \text{(III.12.1)}$$

bulunur. Öte yandan

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h \left(\frac{\partial P}{\partial h}\right)_T = -1$$

bağıntısından

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h = -c_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h$$

olduğu görülür.

III.13. b **=** *sâbit* **olmak üzere hâl denklemi** $(P+b)v = RT$ **olan bir gaz göz önüne alınıyor. (a) Bu gazın özgül entalpisinin** $h = (a+R)\,T +$ *sâbit* **şeklinde olduğunu gösteriniz. (b)** $T(P+b)^{-R/c_P} =$ *sâbit* **ve** $\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_P = c_P\frac{T}{v}$ **eşitliklerini çıkarınız.**

ÇÖZÜM: (a) Entalpi tanımı ve gaz için **I.40** da verilen özgül iç enerji ifâdesi kullanılarak

$$dh = du + P\,dv + v\,dP,$$

$$du = a\,dT + b\,dv$$

yâni

$$dh = a\,dT + (b+P)\,dv + v\,dP$$

bulunur. Hâl denkleminden de

$$v\,dP + (P+b)\,dv = R\,dT$$

elde edilir. O hâlde

$$dh = (a+R)\,dT$$

ve

$$\boxed{h = (a+R)\,T + \text{sâbit}}$$

dir.

(b) (III.12.1) bağıntısından

$$h = c_P\, T + sâbit$$

olur, ve

$$c_P\, dT = \delta q + v\, dP$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik eşısılı bir sürece uygulanırsa

$$c_P\, dT = v\, dP = RT \frac{dP}{P+b},$$

ve integrasyonla da

$$\boxed{T = (P+b)^{-R/c_P} = sâbit}$$

olduğu görülür.

$h = c_P T + sâbit$ ifâdesinde T yerine hâl denkleminden çekilen değeri konursa

$$h = \frac{1}{R}\, c_P\,(P+b)\, v + sâbit$$

olur. Buradan da

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_P = \frac{1}{R}\, c_P (P+b) = c_P \frac{T}{v}}$$

elde edilir.

III.14. (a) $\left(\dfrac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -\mu c_P$, (b) $\left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_v = c_P\left[1 - \dfrac{\alpha\,\mu}{\varkappa_T}\right]$,

(c) $\left(\dfrac{\partial h}{\partial v}\right)_T = \dfrac{\mu\, c_P}{v\,\varkappa_T}$, (d) $\left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)_h = \dfrac{\mu}{(v\,\varkappa_T - \mu\, v\,\alpha)}$

eşitliklerinin gerçeklendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: (a) $\left(\dfrac{\partial h}{\partial P}\right)_T \left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_h \left(\dfrac{\partial T}{\partial h}\right)_P = -1$ bağıntısından

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h = -\mu c_P}$$

bulunur.

(b) $h = h(v, T)$ olduğu varsayılırsa

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v dT$$

ve $h = h(P, T)$ olduğu varsayılırsa da

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT$$

bulunur. O hâlde

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v dT = \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT$$

dir. Bu son eşitlik $v =$ *sâbit* sürecine uygulanırsa

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \qquad \text{(III.14.1)}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = -1$$

den

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T$$

olduğu görülür. (III.14.1) bağıntısı da kullanılarak

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \qquad \text{(III.14.2)}$$

eşitliği elde edilir. Fakat

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_P \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$$

yazılabileceğinden, (III.14.2) den

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_P \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_P\right] \qquad \text{(III.14.3)}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_P = \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_P \qquad \text{(III.14.4)}$$

şeklinde parçalanabilir.

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_h \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_P = -1$$

olması dolayısıyla

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_P \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h$$

bulunur. Bu kısaltma aracılığıyla (III.14.4) den

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)_P = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \frac{\alpha\mu}{\varkappa_T}$$

eşitliği elde edilir. Bunun (III.14.3) de kullanılmasıyla da

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \left[1 - \frac{\alpha\mu}{\varkappa_T}\right]$$

bulunur. Hâlbuki (III.12.1) den

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = c_P$$

dir. O hâlde

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v = c_P\left(1 - \frac{\alpha\mu}{\varkappa_T}\right)}$$

olur.

(c) $$\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = (-\mu c_P)\left(-\frac{1}{v\varkappa_T}\right) = \frac{\mu c_P}{v\varkappa_T}$$

dir.

(d) $\left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)_h \left(\dfrac{\partial v}{\partial h}\right)_T \left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_h = -1$

den

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_h = -\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T \frac{1}{\left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_v}$$

$$= \frac{\mu c_P}{v\varkappa_T} \frac{1}{c_P\left(1 - \dfrac{\alpha\mu}{\varkappa_T}\right)} = \frac{\mu}{v\varkappa_T - v\alpha\mu}$$

bulunur.

III.15. **(a)** *VAN DER WAALS* **gazı için** $\eta \equiv \left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)_u$ *JOULE* **katsayısını ve** $\mu \equiv \left(\dfrac{\partial T}{\partial P}\right)_h$ *JOULE-THOMPSON* **katsayısını bulunuz.**

(b) Bu gazın entalpisini v **ve** T **değişkenleri cinsinden hesaplayınız.**

ÇÖZÜM: (a) *VAN DER WAALS* gazının iç enerjisinin

$$u = c_v T - \frac{a}{v} + sâbit$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$du = c_v\, dT + \frac{a}{v^2}\, dv$$

ve $u = sâbit$ için

$$\boxed{\eta \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_u = -\frac{a}{c_v v^2}}$$

bulunur.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h \left(\frac{\partial P}{\partial h}\right)_T \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = -1$$

den

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h = -\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$h = u + Pv$$

ve

$$dh = du + P\,dv + v\,dP = c_v\,dT + \frac{RT}{v-b}\,dv + v\,dP \qquad \text{(III.15.1)}$$

dir.

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT = -\,v\varkappa_T\,dP + v\,\alpha\,dT$$

den

$$dh = c_v\,dT + \frac{RT}{v-b}(-\,v\,\varkappa_T\,dP + v\,\alpha\,dT) + v\,dP$$

$$= \left(c_v + \frac{RT}{v-b}\,v\,\alpha\right) dT + \left(-\frac{RT}{v-b}\,v\,\varkappa_T + v\right) dP$$

olur. Buna göre

$$c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = c_v + \frac{RT}{v-b}\,v\,\alpha\,, \qquad \text{(III.15.2)}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -\frac{RT}{v-b}\,v\,\varkappa_T + v$$

yâni

$$\mu = -\frac{v - \dfrac{RT}{v-b}\,v\,\varkappa_T}{c_v + \dfrac{RT}{v-b}\,v\,\alpha}$$

elde edilir. (III.15.2) den

$$c_v + \frac{RT}{v-b}\,v\,\alpha = c_P$$

olduğundan, $\varkappa_T$ için **I.13** de bulunan değeri kullanılarak

$$\boxed{\mu = \frac{2av\,(v-b)^2 - RT\,v^3\,b}{c_P\,[RTv^3 - 2a\,(v-b)^2\,]}}$$

olduğu görülür.

(b) *VAN DER WAALS* hâl denkleminden

$$dP = \left(\frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}\right) dv + \frac{R}{v-b}\, dT$$

bulunur. (III.15.1) kullanılarak

$$dh = c_v\, dT + \frac{RT}{v-b}\, dv + v\left(-\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}\right) dv + \frac{vR}{v-b}\, dT$$

$$= \left(c_v + \frac{vR}{v-b}\right) dT - \frac{bRT}{(v-b)^2}\, dv + \frac{2a}{v^3}\, dv$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T dv$$

bulunur. O hâlde

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v = c_v + \frac{vR}{v-b}\,, \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T = \frac{2a}{v^2} - \frac{bRT}{(v-b)^2}$$

dir. İntegrasyonla

$$h = c_v\, T + \frac{vRT}{v-b} + A(v)$$

bulunur. Öte yandan

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T = RT\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{v-b}\right) + A'(v) = -\frac{RTb}{(v-b)^2} + A'(v)$$

den

$$A'(v) = \frac{2a}{v^2} \quad \rightarrow \quad A(v) = -\frac{2a}{v} + sâbit$$

olduğu görülür. O hâlde

$$\boxed{h = c_v\, T - \frac{2a}{v} + \frac{vRT}{v-b} + sâbit}$$

dir.

III.16. $T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_h = \frac{c_P}{1-\alpha T}$ **olduğunu gösteriniz.**

(*İPUCU*: $ds = \frac{1}{T}dh - \frac{v}{T}dP$ **ve** $h = h(P, T)$ **olduğunu varsayarak** ds **ifâdesinin tam diferansiyel olma özelliğini kullanınız).**

III.17. $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h - \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = -\frac{v}{c_P}$ **eşitliğini tesis ediniz.**

(*İPUCU*: **Bir önceki problemdeki eşitliği ve**

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = -1$$

bağıntısını kullanınız).

III.18. Bir madde için $\left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T = 0,\quad \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = 0$ **eşitliklerinin gerçeklenmesi hâlinde, hâl denkleminin,** A **bir sâbit olmak üzere.** $T = A\,P\,v$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM: $h = u + Pv$ tanım bağıntısı $T = s\hat{a}bit$ için P ye göre türetilirse

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial u}{\partial P}\right)_T + v + P\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

ve verilere göre

$$v = -P\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

bulunur. İntegrasyonla

$$Pv = f(T) \qquad \text{(III.18.1)}$$

olduğu görülür. Öte yandan **III.15.** de

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P + v$$

olduğu gösterilmişti. Buna göre

$$Pv = T\,f'(T)$$

eşitliği elde edilir. Pv yerine $f(T)$ yazılıp integre edilirse, A ile bir integrasyon sâbiti gösterilmek üzere,

$$f(T) = \frac{T}{A}$$

bulunur. Buna ve (III.18,1) e göre de hâl denkleminin

$$\boxed{T = APv}$$

şeklinde olduğu anlaşılır.

III.19. Çok küçük olmayan sıcaklıklar için, bir çok maddenin moler özgül entalpisi a, b, c, d sâbitler olmak üzere,

$$h = a\,T + b\,T^2 + c\,T^{-1} + d$$

şeklinde ifâde edilebilir.

(i) Bu maddeler için sâbit basınçtaki moler özgül ısıyı bulunuz.

(ii) Bu maddelerden herhangi birinin m mol'ünün sıcaklığını sâbit basınçta T_1 °K dan T_2 °K e çıkarmak için gereken ısı mikdarını hesaplayınız.

(iii) c_P nin T_1 ve T_2 sıcaklıkları arasındaki ortalama değerini bulunuz.

CEVAP: (i) $c_P = a + 2bT - c\,T^{-2}$,

(ii) $Q_{12} = m\,[a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2) + c\,(T_2^{-1} - T_1^{-1})]$,

(iii) $c_P = a + b\,(T_2 + T_1) - \dfrac{c}{T_1\,T_2}$.

III.20. H entalpiyi göstermek üzere, *CARNOT* teoremini uygulayarak

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

$$\left(\frac{\partial c_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P$$

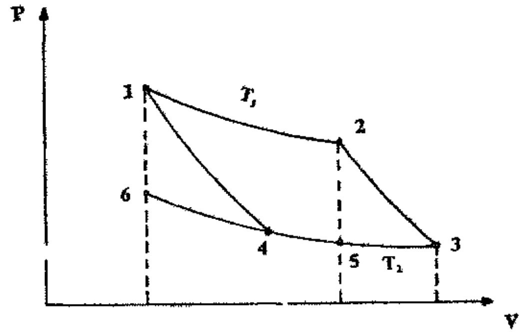
eşitliklerini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Entalpi tanımı ile Termodinamiğin birinci ilkesini birleştirirsek, $H = U + PV$ olduğundan

$$\delta Q = dH - V\,dP$$

buluruz. Bu eşitliği sonsuz küçük bir *CARNOT* çevrimine uygulayalım.

CARNOT teoremine göre, Q_1 verilen ısı mikdarını ve W de yapılan işi göstermek üzere,



$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{W}{Q_1}$$

dir. Buna göre

$$Q_1 = \int_1^2 \delta Q = \int_1^2 dH - \int_1^2 V\,dP = H_2 - H_1 - V(P_2 - P_1)$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T (P_2 - P_1) - V(P_2 - P_1)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T - V\right](P_2 - P_1)$$

ve

$$W = (1, 2, 3, 4) \text{ alanı} \simeq (1, 2, 5, 6) \text{ alanı} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V (T_1 - T_2)(V_2 - V_1)$$

olur. Öte yandan da

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -1$$

bağıntısı yardımıyla

$$W = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T (T_1 - T_2)(V_2 - V_1)$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1 - T_2)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T (V_2 - V_1)\right]$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1 - T_2)(P_2 - P_1)$$

bulunur. Buradan da *CARNOT* teoremine göre

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1 - T_2)(P_2 - P_1)}{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T - V\right](P_2 - P_1)}$$

yâni

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T - V = -T_1 \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

ve T_1 keyfî olduğu için de

$$\boxed{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}$$

yazılabilir. Şimdi de

$$c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

bağıntısının her iki tarafının $P =$ *sâbit* için T ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial P}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P\right]_T = \frac{\partial^2 H}{\partial P\,\partial T} = \frac{\partial^2 H}{\partial T\,\partial P} = \frac{\partial}{\partial T}\left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right]_T$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P$$

yâni

$$\boxed{\left(\frac{\partial c_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P}$$

bulunur.

IV. BÖLÜM

TERMODİNAMİK POTANSİYELLER

IV.1. ***MAXWELL*** **bağıntılarının birinden yararlanarak, ve sâbit hacımda öz-gül c_v ısısının da sıcaklığa bağlı olmadığını varsayarak**

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

VAN DER WAALS **denklemine uyan bir mol'lük bir gazın entropisinin**

$$s = c_v \ln T + R \ln (v - b) + s\hat{a}bit$$

şeklinde olduğunu gösterip bu ifâdeden ***VAN DER WAALS*** **gazı için eşısı eğrilerinin denklemini çıkarınız.**

ÇÖZÜM: Entropinin diferansiyeli, $s = s(T, v)$ addedildiğinde,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv \tag{IV.1.1}$$

dir. c_v nin tanımı gereği

$$c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$$

olup *MAXWELL* bağıntılarından da

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$$

olması hasebiyle artık (IV.1.1) in ifâdesi

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v dv \tag{IV.1.2}$$

şekline girmiş olur. Hâlbuki *VAN DER WAALS* hâl denkleminden

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} \qquad \text{(IV.1.3)}$$

olduğundan (IV.1.3) ü (IV.1.2) ye ikaame edip de elde edilen ifâde integre edilirse hemen

$$\boxed{s = c_v \ln T + R \ln (v-b) + sâbit} \qquad \text{(IV.1.4)}$$

bulunur.

Eşısı eğrileri için: $s = sâbit$ dir. Buna göre, ve A' ile bir sâbiti göstererek,

$$\ln T^{c_v} + \ln (v-b)^R = e^{A'}$$

ya da

$$T^{c_v}(v-b)^R = e e^{A'}$$

yâhut da $R(e e^{A'})^{1/c_v} = A$ vaz ederek

$$\boxed{\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b)^{\frac{R+c_v}{c_v}} = A}$$

bulunur.

IV.2. İdeal bir gaz için

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_V$$

ifâdelerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Serbest entalpinin ifâdesi : $G = U + PV - TS$ olduğuna göre buradan diferansiyel alıp bazı büyüklüklerin yerine eşdeğerlerini koyarak

$$\begin{aligned} dG &= dU + P\,dV + V\,dP - T\,dS - S\,dT \\ &= (\delta Q - \delta W) + P\,dV + V\,dP - T\,dS - S\,dT \\ &= (T\,dS - P\,dV) + P\,dV + V\,dP - T\,dS - S\,dT \end{aligned}$$

$$= -S\,dT + V\,dP = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T dP$$

yazılacağından

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V$$

bulunur. Öte yandan da, ve $PV = \mu\,RT$ olduğunu göz önünde tutarak,

$$\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{-S\,dT + V\,dP}{dV}\right)_P = -S\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -\frac{SP}{\mu R},$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{-S dT + V\,dP}{dP}\right)_V = -S\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V + V = -\frac{SV}{\mu R} + V,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{-S\,dT + V\,dP}{dV}\right)_T = V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -P,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{-S\,dT + V\,dP}{dT}\right)_V = -S + V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -S + \mu R.$$

bulunur.

IV.3. Bir sistem üzerinde eşsıcaklık ve eşbasınç şartları altında bir dönüşüm yapılmaktadır; W ile basınç kuvvetlerinin işini ve W' ile de basınç kuvvetlerinden başka olarak sisteme intikaal eden işi gösterelim.

Sistemin serbest entalpi değişiminin $\Delta G \leqslant W'$ olduğunu; eşit işâretinin tersinir, eşitsizliğin de tersinmez süreçler için geçerli olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Serbest entalpinin diferansiyeli

$$dG = d(U + PV - TS) = dU + P\,dV + V\,dP - T\,dS - S\,dT$$
$$= \delta Q - P\,dV + \delta W' + P\,dV - T\,dS - S\,dT$$

dir.

Eğer süreç tersinir ise

$$\delta Q = T\,dS$$

olacağından

$$dG = -S\,dT + V\,dP + \delta W'$$

olur. Fakat göz önüne alınan dönüşüm eşsıcaklıklı ve eşbasınçlı olduğundan

$$dG = \delta W'$$

olur. Bu ifâde serbest entalpinin değişimini elde etmek üzere integre edilirse

$$\boxed{\Delta G = W'}$$

olur. Eğer dönüşüm tersinmez ise bu takdirde $\delta Q < T\,dS$ olacağından

$$dG < -S\,dT + V\,dP + \delta W'$$

olacaktır. Eşsıcaklıklı ve eşbasınçlı bir dönüşüm için de

$$\boxed{\Delta G < W'}$$

olacağı buradan kolaylıkla görülür.

IV.4. Bir gaz, yavaşça, gözenekli bir cidarı katetmektedir; basıncı da P değerinden azalarak $P + dP$ değerine düşmektedir. Bu tersinmez genişleme (*JOULE-THOMSON* genişlemesi) esnâsında gazın entalpisi sâbit kalmaktadır.

1) *MAXWELL*'in $(\partial S/\partial P)_T = -(\partial V/\partial T)_P$ bağıntısından hareketle gazın C_P ısı sığasının, T sıcaklığının ve $(\partial V/\partial T)_P$ diferansiyel oranının fonksiyonu olarak

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$$

ile tanımlanan *JOULE-THOMSON* katsayısının ifâdesini tesis ediniz.

2) Bir gazın

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(v - b) = RT$$

***VAN DER WAALS* hal denklemine uyduğu varsayılmaktadır. Bu gazın μ *JOULE-THOMSON* katsayısının değerini alçak basınçlar için ifâde ediniz. (Bununla ilgili olarak gazın a/V^2 iç basıncının gazın P basıncına nisbetle çok küçük bir düzeltme terimi olduğu kabul edilecektir.)**

3) Bu gazı *JOULE-THOMSON* genişlemesiyle soğutmak için gazın T sıcaklığının tersinme sıcaklığı denilen belirli bir T_t değerinden daha düşük olması gerektiğini gösteriniz,

4) Başlangıç sıcaklığı 273°K olan bir gazın basıncı bir *JOULE-THOMSON* genişlemesinde 2 atmosfer düşürülürse acaba gazın sıcaklığı ne kadar düşer? ($\mu = 0{,}285$ olarak verilmektedir,)

ÇÖZÜM: 1) Gazın entropisinin diferansiyeli

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP$$

dir. Eğer

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

bağıntılarını göz önünde tutarsak dS

$$dS = \frac{C_P}{T}\, dT - \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \qquad \text{(IV.4.1)}$$

şekline girer.

Öte yandan entalpinin diferansiyeli de

$$dH = T\, dS + V\, dP$$

ya da (IV.4.1) den ötürü

$$dH = C_P\, dT + \left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dP \qquad \text{(IV.4.2)}$$

olur. *JOULE-THOMSON* genişlemesi eşentalpili bir süreç olduğundan $dH=0$ olacaktır. Buna göre (IV.4.2) den bu genişleme süresince gazın sıcaklık değişiminin

$$dT = \frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right] dP$$

olacağı tesbit edilir. Buna göre *JOULE-THOMSON* katsayısının

$$\boxed{\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right]} \qquad \text{(IV.4.3)}$$

şeklinde olduğu belirlenmiş olur.

2) $P \gg a/V^2$ olduğundan *VAN DER WAALS* denklemi

$$V = \frac{RT}{P\left(1 + \dfrac{a}{PV^2}\right)} + b \approx \frac{RT}{P}\left(1 - \frac{a}{PV^2}\right) + b$$

ya da

$$V = \frac{RT}{P} - \frac{aRT}{P^2V^2} + b$$

şekline girer.

Düzeltme terimi olan aRT/P^2V^2 de, $P \gg a/V^2$ olmasından ötürü PV yerine RT yazılabilir. Bu takdirde yaklaşık olarak

$$V = \frac{RT}{P} - \frac{a}{RT} + b \tag{IV.4.4}$$

olur. Buradan da

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P} + \frac{a}{RT^2} \tag{IV.4.5}$$

ifâdesi elde edilir. Şu hâlde, (IV.4.4) ve (IV.4.5) bağıntılarının ışığı altında (IV.4.3) ifâdesi için

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left[\left(\frac{RT}{P} + \frac{a}{RT}\right) - \left(\frac{RT}{P} - \frac{a}{RT} + b\right)\right]$$

yâni

$$\boxed{\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left(\frac{2a}{RT} + b\right)}$$

bulunur.

3) Gazın *JOULE-THOMSON* genişlemesi ($dP < 0$) esnâsında soğuması ($dT < 0$) için

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H > 0$$

yâni

$$\frac{2a}{RT} - b < 0 \quad \rightarrow \quad T < \frac{2a}{Rb}$$

olması gereklidir. Eğer

$$\boxed{T_i = \frac{2a}{Rb}}$$

vaz edilirse: 1) $T < T_t$ olduğu zaman gaz soğuyacak ($\mu < 0$), ve 2) $T > T_t$ olduğu zaman ise gaz ısınacaktır ($\mu > 0$). Şu hâlde T_t sıcaklığını ($\mu = 0$) aşarken termik olaylar da tersine dönüşmüş olacaktır. Bundan ötürü de T_t sıcaklığına tersinme sıcaklığı adı verilir.

4) Bu süreç esnâsında sıcaklık düşmesi küçük olacağından μ nün sâbit kaldığı kabul edilebilir. Şu hâlde sıcaklık değişimi yaklaşık olarak

$$\boxed{\Delta T = \mu \, \Delta P}$$

dir. Buna göre

$$T = 0{,}285 \times (-2) = -0{,}57\ {}^\circ\mathrm{K}$$

olur.

IV. 5. Kalorimetrik h, λ ve μ katsayılarını termodinamik değişkenlerle termodinamik katsayılar cinsinden ifâde ediniz.

ÇÖZÜM: Bilindiği gibi h, λ ve μ

$$\delta Q = C_P \, dT + h \, dP \,,$$

$$\delta Q = C_v \, dT + l \, dV \,,$$

$$\delta Q = \lambda \, dP + \mu \, dV$$

bağıntıları aracılığıyla tanımlanmaktadırlar. $dU = \delta Q - \delta W$ ifâdesinden hareketle, meselâ

$$dU = \delta Q - \delta W = h \, dP + C_P \, dT - P \, dV$$

$$= \left[h - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right] dP + \left[C_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dT$$

yazılabilir. dU nun bir tam diferansiyel olması hasebiyle bu son bağıntıdan

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - P\frac{\partial^2 V}{\partial P \, \partial T} = \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - P\frac{\partial^2 V}{\partial P \, \partial T}$$

yâni

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \qquad \text{(IV.5.1)}$$

bağıntısının gerekliliği ortaya çıkar. Öte yandan ise

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_P}{T} dT + \frac{h}{T} dP$$

nin de bir tam diferansiyel olması

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{C_P}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{h}{T}\right) \;\rightarrow\; \frac{1}{T}\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -\frac{h}{T^2} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$$

şartını gerektirir. Bu son ifâdenin (IV.5.1) ile mukaayesesi

$$\boxed{h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\alpha VT} \qquad \text{(IV.5.2)}$$

olduğunu ortaya koymaktadır.

Entalpiden hareket etmiş olsaydık

$$dH = d(U + PV) = \delta Q + V\,dP = (h+V)\,dP + C_P\,dT$$

yazabilecektik. Hâlbuki

$$\delta Q = \lambda\,dP + \mu\,dV = \lambda\,dP + \mu\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP\right]$$

olduğundan son iki denklemden ve (IV.5.2) den

$$\mu\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = C_P \qquad \text{ve} \qquad \boxed{\mu = C_P\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{C_P}{\alpha V}}$$

ve

$$\lambda + C_P\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

ve dolayısıyla

$$\lambda = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + C_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

yazılabilir. Kezâ

$$\delta Q = \lambda\,dP + \mu\,dV = \mu\,dV + \lambda\left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT\right]$$

$$= C_v\,dT + l\,dV$$

yazılabileceğinden buradan da

$$\boxed{\lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{C_V}{\beta P}}$$

ve

$$\boxed{\mu - C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}$$

bulunur.

İdeal bir gaz için bu sonuçların ışığı altında

$$\boxed{\begin{aligned} \delta Q &= C_P\, dT - \alpha V T\, dP \\ \delta Q &= C_V\, dT + \frac{RT}{V}\, dV \\ \delta Q &= \frac{C_V}{\beta P}\, dP + \frac{C_P}{\alpha V}\, dV \end{aligned}}$$

bulunur.

IV.6. $\varkappa_s = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s$ **olmak üzere** $\varkappa_s = \varkappa_T \frac{C_V}{C_P}$ **ile ifâde edilen** ***REECH*** **bağıntısını tesis ediniz.**

IV.7. $\gamma = 5/3$ **olmak üzere tek atomlu ideal gazlar için** $\varkappa_T$, $\varkappa_s$, α, β, C_P **ve** C_v **yi hesaplayınız.**

CEVAP: $\varkappa_T = \frac{1}{P}$, $\quad \varkappa_s = \frac{1}{\gamma P}$, $\quad \alpha = \frac{1}{T}$, $\quad \beta = \frac{1}{T}$

$C_P = \frac{5}{2} R$, $\quad C_v = \frac{3}{2} R$.

✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶

IV.8. İç enerjisi $U = B + C\, V^{-R/\delta}\, e^{S/\delta}$ (B, C, δ = **sâbitler) şeklinde verilen gazın ideal gaz olduğunu gösteriniz.**

IV.9. $F = F(V, T)$ **olduğu bilinirse**

$$H = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V - V\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T,$$

$$G = F - V\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T,$$

$$U = -T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right]_V$$

yazılabileceğini gösteriniz.

IV.10. $\Phi = S - \dfrac{U + PV}{T}$ **ile tanımlandığında**

$$V = -T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_T, \qquad S = \Phi + T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P,$$

$$U = T\left[T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_T\right]$$

yazılabileceğini gösteriniz.

IV.11. İdeal gazın özgül *HELMHOLTZ* **fonksiyonunu hesaplayınız.**

[Yol gösterme: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -s, \quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -P$ **eşitliklerinden hareket edip, Problem I.27. deki yolu izleyiniz].**

CEVAP: $f = -RT\ln\dfrac{v}{v_0} - c_v T\ln\dfrac{T}{T_0} + c_v(T - T_0) - s_0(T - T_0) + f_0$

IV.12. İdeal gazın özgül *GİBBS* **fonksiyonunu hesaplayınız. [Yol gösterme:** $g = f - v\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)_T$ **ve Problem IV.11. in sonucunu kullanınız].**

CEVAP: $g = c_P(T - T_0) - c_P T\ln\dfrac{T}{T_0} + RT\ln\dfrac{P}{P_0} - s_0(T - T_0) + g_0.$

IV.13. Hâl denklemi

$$v = v_0[1 + \alpha(T - T_0) - \varkappa_T(P - P_0)]$$

ve c_v, c_P **si** T **ye bağlı olmayan bir gaz için özgül iç enerji ve özgül entalpinin**

$$u = c_v (T - T_0) + \left[\left(2\,\alpha\, T_0 + \frac{v}{v_0} - 1\right)\frac{1}{2\varkappa_T} - P_0\right](v - v_0) + u_0\,,$$

$$h = c_P (T - T_0) + v_0 (P - P)\left[1 - \alpha\, T_0 - \frac{\varkappa_T}{2}(P - P_0)\right] + h_0$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Problem **III.20.** yardımıyla

$$dh = c_P\, dT - \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right] dP$$

ve integrasyonla

$$h = c_P (T - T_0) - \int_{P_0}^{P} \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right] dP + h_0$$

bulunur. Hâl denklemi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \alpha\, v_0$$

verir. O hâlde

$$h = c_P (T - T_0) - \int_{P_0}^{P} (T\,\alpha\, v_0 - v)\, dP + h_0$$

$$= c_P (T - T_0) - T\,\alpha\, v_0 (P - P_0) + v_0 \int_{P_0}^{P} [1 + \alpha (T - T_0) - \varkappa_T (P - P_0)]\, dP + h_0$$

$$= c_P (T - T_0) - \alpha\, v_0\, T (P - P_0) + v_0 (P - P_0) + v_0\, \alpha\, (T - T_0)(P - P_0) -$$

$$- \frac{1}{2} v_0\, \varkappa_T (P - P_0)^2 + h_0$$

$$= c_P (T - T_0) + v_0 (P - P_0)\left[1 - \alpha\, T_0 - \frac{1}{2}\varkappa_T (P - P_0)\right] + h_0$$

dır.

$u = h - Pv$ tanımı ve $c_v = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v - v\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$ bağıntısından

$$u = c_v (T - T_0) + \left[\left(2\,\alpha\, T_0 + \frac{v}{v_0} - 1 \right) \frac{1}{2\varkappa_T} - P_0 \right] (v - v_0) + u_0$$

bulunur.

IV.14. Bir gazın özgül *GİBBS* fonksiyonu

$$g = RT \ln \frac{P}{P_0} - AP \quad , \quad A = A(T)$$

ile verilmiştir.

(a) Gazın hâl denklemini ve özgül entropisini bulunuz.

(b) Diğer termodinamik potansiyellerin ifâdelerini çıkarınız.

(c) c_P ve c_v yi hesaplayınız.

(d) $\varkappa_T$ yı hesaplayınız.

ÇÖZÜM: **(a)** $v = \left(\frac{\partial g}{\partial P} \right)_T = \frac{RT}{P} - A(T)$ den hâl denkleminin

$$\boxed{P\,[v + A(T)] = RT}$$

olduğu görülür.

$$\boxed{s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_P = -R \ln \frac{P}{P_0} + A'(T)\, P}$$

dir.

(b) $g = h - sT$ den $h = g + sT$ olduğu görülür. O hâlde

$$h = RT \ln \frac{P}{P_0} - A(T)\, P + T \left(- R \ln \frac{P}{P_0} + A'(T)\, P \right)$$

$$\boxed{h = [A'(T)\, T - A(T)\,]\, P}$$

dir.

$$u = h - Pv = A'\,TP - AP - RT + AP$$

$$\boxed{u = -RT + A'(T)\,TP}$$

$$f = u - Ts = -RT + A'(T)\,TP + RT\ln\frac{P}{P_0} - A'(T)\,PT$$

$$\boxed{f = RT\ln\frac{P}{P_0} - RT}$$

olur.

(c) $c_P = \left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_P = (A''\,T + A' - A')\,P$, yâni

$$\boxed{c = A''(T)\,PT},$$

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = -R + A''(T)\,TP + A'(T)\,P + A'(T)\,T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$$

hâl denkleminden

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v + A} - \frac{RT}{(v + A)^2}A'$$

ve

$$\boxed{c_v = 2A'(T)\,P + A''(T)\,TP - R + \frac{R[A'(T)]^2\,T^2}{(v + A)^2}}$$

olur.

(d)

$$\boxed{\varkappa_T = \frac{RT}{P\,[RT - A(T)\,P]}}$$

dir.

IV.15. Eşsıcaklıklı ve eşısılı sıkıştırılabilirlik katsayıları arasındaki farkın

$$\varkappa_T - \varkappa_s = \frac{T\,\alpha^2\,v}{c_P}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\varkappa_T = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial P}\right)_T$ tanımına paralel olarak

$\varkappa_s = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial P}\right)_s$ eşısılı sıkıştırılabilirlik katsayısı tanımlanabilir. Bu tanımlara göre

$$\varkappa_T - \varkappa_s = -\frac{1}{v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s\right]$$

olur.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = -1$$

bağıntısından

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\alpha v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v$$

ve

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_v \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P = -1$$

bağıntısından da

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_s = -\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P$$

bulunur.

$$ds = \frac{c_P}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dP$$

eşitliğinden

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_v = c_P \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v - \alpha v,$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_P = \frac{1}{T} c_P \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = \frac{c_P}{T v \alpha}$$

olduğu görülür. O hâlde

$$\boxed{\varkappa_T - \varkappa_s = \alpha^2 v \frac{T}{c_P}}$$

dir.

V. BÖLÜM

FAZ DEĞİŞİMLERİ

V.1. Buharlaşma esnâsında mol başına iç enerji artışının

$$u = l\left[1 - \frac{d\,(\ln T)}{d\,(\ln P)}\right]$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\Delta u = \delta q - \delta w$ dir. Hâlbuki buharlaşmada $\delta q = l$ ve $\delta w = P_d\,\Delta v = P_d\,(v_b - v_s)$ dir; burada P_d ile doymuş buharın basıncı, v_b ve v_s ile de buhar ve sıvının özgül hacımları gösterilmektedir. *CLAPEYRON* bağıntısı

$$\frac{dP_d}{dT} = \frac{l}{T\,(v_b - v_s)}$$

ile

$$\Delta u = \delta q - \delta w = l - P_d\,(v_b - v_s)$$

bağıntısından $(v_b - v_s)$ yi eleyerek

$$\Delta u = l\left[1 - \frac{P_d}{T}\,\frac{dT}{dP_d}\right] = l\left[1 - \frac{\dfrac{dT}{T}}{\dfrac{dP_d}{P_d}}\right] = l\left[1 - \frac{d\,(\ln T)}{d\,(\ln P)}\right]$$

bulunur ki bu da aranan bağıntıdan başka bir şey değildir.

V.2. ***a*** **ve** ***b*** **iki sâbit ve** ***T*** **de °K cinsinden ifâde edilen sıcaklık olmak üzere molekül ağırlığı** ***M*** **olan saf bir cismin buharlaşma gizli ısısı** $L = a - bT$ **şeklindedir. Buna göre**

1) buharlaşma eğrisinin $\alpha = dP/dT$ **eğimini** a, b, M, T **ve** ***R*** **gazlar sâbiti cinsinden hesaplayınız.**

2) buharlaşma eğrisinin belirli bir A noktasından hareket ederek hafif bir eşısılı genleşme aracılığıyla eğrinin bir B noktasına gelindiğinde acaba sıvılaşma olur mu? Bu imkânı, göz önüne alınan akışkanın A noktasındaki T_0 başlangıç sıcaklığının fonksiyonu olarak belirtiniz.

ÇÖZÜM: 1) Faz değişimi ısısının *CLAPEYRON*'un

$$L = T(V_b - V_s)\frac{dP_d}{dT}$$

bağıntısı aracılığıyla tanımlanmakta olduğu bilinmektedir. Burada V_b buharın hacmini, V_s sıvının hacmini ve P_d de doymuş buharın basıncını göstermektedir. Çok kere sıvının, buhara nisbetle, V_s hacminin ihmâl edilebilir olması nedeniyle bu bağıntı yaklaşık bir biçimde, (artık $V_b = v$ vaz ederek),

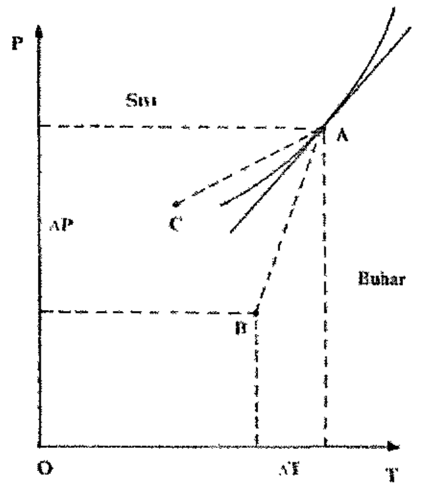
$$L = T v \frac{dP}{dT} \qquad \text{(V.2.1)}$$

yazılabilir. Gene bu yaklaşıklık çerçevesi içinde buharın da ideal gaz gibi davrandığını farzederek

$$Pv = \frac{R}{M} T$$

yazılabilir. Buna göre $L = a - bT$ olması şartı altında (V.2.1)

$$\boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{PM}{RT^2}(a - bT)} \qquad \text{(V.2.2)}$$



olur.

2) Buharlaşma eğrisinin bir A noktasından hareket edildiğinde, basıncı ΔP ve sıcaklığı da ΔT kadar düşüren eşısılı bir genişlemede ya B gibi bir noktaya gelinir (ki bu buharlaşma olması demektir) ya da C gibi bir noktaya gelinir (ki bu da sıvılaşma olması demektir). Başka bir deyimle, eğer

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} < \frac{dP}{dT} \quad \text{ise} \;\rightarrow\; \text{sıvılaşma} \qquad \text{(V.2.3)}$$

var demektir. $\Delta P/\Delta T$ diferansiyel oranını $Pv^\gamma =$ *sâbit* şeklinde olduğu bilinen eşısı eğrilerinin denkleminden hareketle hesaplamak mümkündür. Bunu diferansiyel şekliyle yazarsak

$$\frac{\Delta P}{P} + \gamma \frac{\Delta v}{v} = 0 \qquad \text{(V.2.4)}$$

olur; öte yandan ideal gazlar denklemi de diferansiyel şekliyle

$$\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta T}{T} = 0 \qquad \text{(V.2.5)}$$

yazılır. (V.2.3) ve (V.2.4) arasından hacım elenirse

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{P}{T} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \qquad \text{(V.2.6)}$$

bağıntısı elde edilmiş olur. (V.2.2), (V.2.3) ve (V.2.6) dan sıvılaşma olması için

$$\boxed{\frac{a}{T_0} > b + \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

olması gerektiği tesbit edilir.

V.3. Sıvı suyun 0° C daki entropisi entropi ölçeğinin orijini olarak alınmakta ve buna 0 değeri tekaabül ettirilmektedir.

1) $P = 2300$ N/M^2 lik basınç altında 50 °C daki 1 kg su buharının haiz olacağı entropiyi hesaplayınız.

2) Bu su buharının 50 °C dan 150 °C a taşındığında, ve 150 °C daki doymuş su buharının basıncının da $P_1 = 4{,}78.10^5$ N/m^2 olduğunu bilerek, entropisini hesaplayınız.

Sâbit basınçta su buharının özgül ısısı $c' = 1{,}97$ kJ/kg/°C olup suyun 50 °C daki buharlaşma gizli ısısı $l = 2395$ kJ/kg olarak verilmektedir.

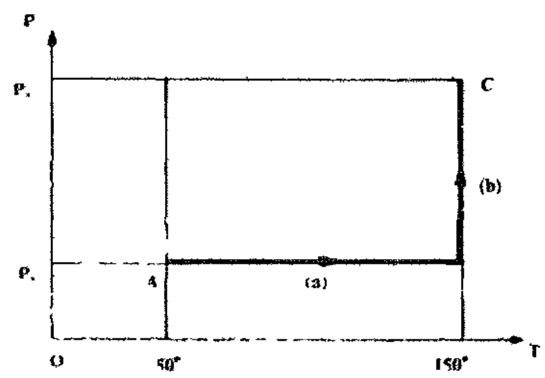
ÇÖZÜM: 1) Ortaya konan yegâne ısı miktarı faz değişimi için gerekli olandır; şu hâlde $Q = L$ ve

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{L}{T} = \frac{2395}{323} \simeq 7{,}41 \text{ kJ/°C}$$

bulunur. Bu aynı zamanda bu hâlin de entropisini göstermektedir; zirâ sıvı suyunki sıfır farzedilmiş bulunmaktadır.

2) Söz konusu dönüşümü peşpeşe iki dönüşüme ayrıştıralım.

a) Önce sâbit basınçta sıcaklık 50 °C dan 150 °C a yükseltilsin. Bu dönüşümün tersinir olduğunu farzedelim ve T ile de herhangi bir andaki sıcaklığı gösterelim.



Ortaya konan ısı mikdarı $Q = c' \, dT$ ve entropi değişimi de

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = c' \frac{dT}{T}$$

olur. Buna göre

$$\Delta S_a = \int_{323}^{423} dS = 1{,}97 \int_{323}^{423} \frac{dT}{T} = 1{,}97 \ln \frac{423}{323} \approx 0{,}532 \text{ kJ/°K}$$

$$= 0{,}532 \text{ kJ/°C}$$

bulunur.

b) Sonra da sıcaklığı sâbit tutarak $P_0 = 1{,}23.10^4$ N/m² basıncından $P_1 = 4{,}78.10^5$ N/m² basıncına kadar bir sıkıştırma yapılsın. Bu sıkıştırma esnâsında sıcaklığın sâbit kalmış olması dolayısıyla gazın iç enerjisindeki değişim de sıfırdır:

$$dU = \delta Q - \delta W = 0.$$

Buna binâen ortaya konan iş sistem üzerinde yapılan iştir. Bunun

$$\delta W = -\frac{R}{M} T \ln \frac{P_1}{P_0}$$

dan ibâret olacağı kolayca hesaplanır. Sitemin dışarıya verdiği ısı mikdarı ise

$$\delta Q = -\frac{R}{M} T \ln \frac{P_1}{P_0}$$

olur. Buna göre entropi değişimi

$$\Delta S_b = -\frac{R}{M} \ln \frac{P_1}{P_0} = -\frac{8{,}32}{18} \ln \frac{47{,}8}{1{,}23} = -1{,}692 \text{ kJ/°C}$$

olur. Şu hâlde $(a) + (b)$ dönüşümü boyunca suyun entropisi

$$1{,}692 - 0{,}532 = 1{,}16 \text{ kJ/°C}$$

kadar azalmış; buna karşılık 150 °C deki buharın entropisi de

V.4. Cidarları ısı geçirmeyen, bir muslukla mücehhez 10 cm^3 lük bir kap $P_0 = 80$ atm lik bir basınç altında (ideal bir gazmış gibi düşünülen) helyum gazı ihtivâ etmektedir. Musluk yavaşça açılarak kabın içinde $P_1 = 1$ atm lik bir basınç ve helyumun bu basınçtaki sıvı-buhar dengesine tekaabül eden $T_1 = 4{,}22$ °K sıcaklığı hüküm sürünceye kadar helyumun ağır ağır kabı terk etmesi sağlanmaktadır.

1) Deneyin sonunda kabın içinde yalnızca sıvı helyum kalabilmesi için acaba helyumun T_0 başlangıç sıcaklığı ne olmalıdır?

2) Buradan, kabın içindeki başlangıçtaki helyumun kütlesini bulunuz.

Helyumun atom ağırlığı 4 olup gaz hâlindeki helyumun özgül ısılarının, sâbit olduğu varsayılan oranı da $\gamma = 5/3$ dür; ayrıca 4,22 °K deki helyumun buharlaşma gizli ısısı da 20,8 J/g dır. ($R = 8{,}32$ J/mol/°K).

ÇÖZÜM: 1) Kabın cidarları ısı geçirmez olduğuna göre, genleşme de tersinir bir şekilde vukuu bulduğundan kabın içinde kalan x mol'lük gazın entropi değişimi sıfırdır: $\Delta S = 0$.

Helyumun gaz hâlinden sıvı hâline geçişinin iki safhada vukuu bulduğu düşünülebilir:

a) Gaz (P_0, T_0) hâlinden (P_1, T_1) hâline geçmektedir; buna tekaabül eden entropi değişimi

$$\Delta S_1 = \int_{(P_0,\,T_0)}^{(P_1,\,T_1)} \frac{\delta Q}{T} = \int_{(P_0,\,T_0)}^{(P_1,\,T_1)} \frac{x\, c_P\, dT + h\, dP}{T}$$

$$= x\, c_P \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} - xR \int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P}$$

den ibârettir; zirâ bilindiği gibi ideal bir gaz için

$$h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -V = -\frac{xRT}{P}$$

dir. Şu hâlde

$$\Delta S_1 = x\, c_P \ln \frac{T_1}{T_0} - x\, R \ln \frac{P_1}{P_0}$$

olur. Hâlbuki ideal bir gazın sâbit basınçtaki özgül ısısı

$$c_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{5}{2} R$$

dir. Buna göre

$$\Delta S_1 = xR\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_1}{T_0} - \ln\frac{P_1}{P_0}\right)$$

olur.

b) Basınç ve sıcaklık sâbit kalarak helyum (P_1, T_1) ile karakterize edilen gaz hâlinden sıvı hâline dönüşür; bu faz değişimi süresince entropi değişimi de

$$\Delta S_2 = -\frac{xl_b}{T_1}$$

olur. Buradaki l_b büyüklüğü kolayca anlaşılacağı vechile mol başına buharlaşma gizli ısısını göstermektedir.

Eğer kapta kalan gazın entropi değişiminin sıfır olduğunu bu verilere göre bir kere daha yazarsak

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = x\left(\frac{5}{2}R\ln\frac{T_1}{T_0} - R\ln\frac{P_1}{P_0} - \frac{l_b}{T_1}\right) = 0$$

dan

$$\ln\frac{T_1}{T_0} = \frac{2}{5R}\left(R\ln\frac{P_1}{P_0} + \frac{l_b}{T_1}\right)$$

olur. Şu hâlde helyumun başlangıçtaki sıcaklığı olarak

$$\boxed{T_0 = T_1 \exp\left\{\frac{2}{5}\left(\ln\frac{P_0}{P_1} - \frac{l_b}{RT_1}\right)\right\}}$$

yâni, $l_b = 20{,}8$ J/g $= 20{,}8 \times 4$ J/mol $= 83{,}2$ J/mol olduğunu da göz önünde tutarak,

$$T_0 = 4{,}22\ \exp\left[\frac{2}{5}\left(\ln 80 - \frac{83{,}2}{8{,}32 \times 4{,}2}\right)\right] = 9{,}40\ ^\circ\mathrm{K}$$

bulunur.

2) İdeal gazlar denkleminden, ithâl olunan helyumun mol sayısını bulmak mümkündür. Nitekim

$$\mu = \frac{P_0 V}{RT_0} = \frac{80.10^5 \times 10^{-5}}{8{,}32 \times 9{,}40} \simeq 1{,}023\ \mathrm{mol}$$

dür. Buna göre kalan helyumun kütlesi de

$$1{,}023 \times 4 = 4{,}09 \text{ g}$$

olmalıdır.

V.5. Suyun 0°C daki erime ve buharlaşma gizli ısıları sırasıyla : $L_e = 335$ kJ/kg, $L_b = 2375$ kJ/kg dır. Üçlü noktadaki sıcaklık ve basınç da : $\theta = 0{,}01$ °C $\approx$ 0°C ve $P_0 = 4{,}6$ mm Hg dir. Suyun özgül kütlesi $\rho_s = 1$ kg/l: buzun yoğunluğu : d = 0,915; su buharının yoğunluğu: $dx' = 0{,}625$; havanın özgül kütlesi de : $a_0 = 1{,}3$ g/l olarak verilmektedir.

1) Suyun erime, buharlaşma ve süblimleşme eğrilerinin üçlü noktadaki eğimlerini atm/°K cinsinden hesaplayınız.

2) Bir doğru olan erime eğrisi ile $P = a \exp(-b/T)$ şeklindeki buharlaşma eğrisinin açık ifâdelerini yazınız. 100°C da suyun doyma buharının basıncının 1 atm olduğu hatırlatılmaktadır. Suyun haiz olduğu denge durumlarını (P, T) diyagramında gösteriniz.

3) 100 mm Hg basınçta —0,5°C daki buza eşsıcaklıklı bir sıkıştırma uygulanmaktadır. Buzun erimeye başlayacağı basıncın değerini hesaplayınız.

4) 100 mm Hg basınçta ve — 0,5°C daki buz eşbasınçlı bir biçimde ısıtıldığında erime ve buharlaşmanın hangi sıcaklıklarda vukuu bulacaklarını tesbit ediniz. Eğer söz konusu eşbasınçlı ısıtma P_0 dan daha düşük bir basınçta vukuu bulsa ne olurdu?

ÇÖZÜM: **1)** Erimeye ait *CLAPERYON* formülüne göre erime eğrisinin eğimi

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_e = \frac{L_e}{T\,(v_s - v_k)} \qquad \text{(V.5.1)}$$

ile verilecektir. v_s ile suyun kütlesel hacmı, v_k ile de katı buzun kütlesel hacmı gösterilmektedir. Buzun özgül kütlesi ρ_k ile gösterilirse, erime esnâsında kütlesel hacım değişimi

$$v_s - v_k = \frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_k} = \frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_s d} = -\frac{1}{\rho_s}\,\frac{1-d}{d}$$

olacaktır. Buna göre (V.5.1) ile verilen eğim

$$\boxed{\left(\frac{dP}{dT}\right)_e = -\frac{L_e}{T}\,\rho_s\,\frac{d}{1-d}}$$

ile ifâde edilecektir. 1 Pascal = Pa = N/m² olmak üzere, buradan

$$\rho_s = 10^3 \text{ kg/m}^3 , \left(\frac{dP}{dT}\right)_e = -\frac{335.10^3}{273} \times 10^3 \times \frac{0{,}915}{0{,}085} = -1{,}32.10^7 \text{ Pa/°K}$$

yâni

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_e = -132 \text{ atm/°K}$$

bulunur.

Benzer şekilde buharlaşmaya ait *CLAPEYRON* formülü de

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_b = \frac{L_b}{T(v_b - v_s)}$$

şeklindedir. Ancak v_s genellikle v_b önünde ihmâl edilebildiğinden

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_b \simeq \frac{L_b}{T\,v_b}$$

yazılabilir. Öte yandan $v_b = \dfrac{1}{\rho_b} = \dfrac{1}{a_0\, d'}$ olduğundan

$$\boxed{\left(\frac{dP}{dT}\right)_b = \frac{L_b}{T} a_0\, d'} \qquad \text{(V.5.2)}$$

olur ve buradan da

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_b = \frac{2375.10^3}{273} \times 1{,}3 \times 0{,}625 = 7{,}1 \,.\, 10^3 \text{ Pa/°K} = 0{,}071 \text{ atm/°K}$$

bulunur. Ve nihâyet, katı fazın v_k hacmını buharınki önünde ihmâl ederek, süblimleşme (uçunum) eğrisinin eğimi için de, gene *CLAPEYRON* bağıntısına göre, yaklaşık olarak

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_u \simeq \frac{L_u}{T\,v_u} \qquad \text{(V.5.3)}$$

yazmak mümkündür. L_u ile gizli uçunum ısısı ve v_u ile de uçunum fazını oluşturan su buharının kütlesel hacmı gösterilmektedir. Ayrıca $v_u = 1/a_0\, d'$, ve $L_u = L_e + L_b$ olduğunu da göz önünde tutarak (V.5.3)

$$\boxed{\left(\frac{dP}{dT}\right)_u = \frac{(L_e + L_b)\, a_0\, d'}{T\,v_u}} \qquad \text{(V.5.4)}$$

şekline girer. (V.5.2) ve (V.5.4) ün karşılaştırılmasından

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_u > \left(\frac{dP}{dT}\right)_b$$

olduğu görülmektedir. Diğer taraftan da, verilere göre

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_u = \frac{2720 \times 10^3 \times 1{,}3 \times 0{,}625}{273} = 8{,}1.10^3\ \mathrm{Pa/°K} = 0{,}081\ \mathrm{atm/°K}$$

olduğu saptanır.

2) Erime eğrisi, eğimi

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_e = -132\ \mathrm{atm/°K}$$

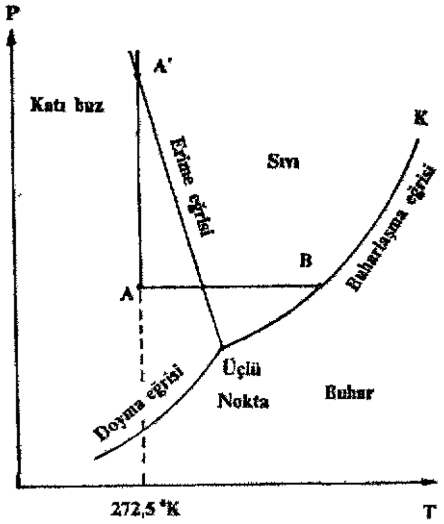
olan bir doğrudur. Bu, koordinatları

$$T_0 = 273\ \mathrm{°K}$$

$$P_0 = 4{,}6\ \mathrm{mm}\ Hg = \frac{4{,}6}{760}\ \mathrm{atm}$$

$$= 6{,}1.10^{-3}\ \mathrm{atm}$$

olan üçlü noktadan geçmektedir. Denklemi de



$$P - P_0 = \left(\frac{dP}{dT}\right)_e (T - T_0)$$

ya da sıcaklık °K ve basınç da atmosfer cinsinden ifâde edilmiş olmak şartıyla

$$\boxed{P = -132\,(T - 273)} \qquad \text{(V.5.5)}$$

dür.

K kritik noktasıyla sınırlanan buharlaşma eğrisinin ise denklemi

$$P = a\,e^{-b/T}$$

şeklindedir. Buradaki a ve b sâbitlerini belirlemek için bu denklemin hem üçlü noktada ve hem de $T_1 = 373$ °K, $P_1 = 1$ atm ile karakterize edilen kaynama noktasında gerçeklendiğini yazarsak

$$\left.\begin{aligned} 6{,}1.10^{-3} &= a\,e^{-b/273} \\ 1 &= a\,e^{-b/373} \end{aligned}\right\}$$

olur. Taraf tarafa bölerek $b = 5200$ olduğu tesbit edilir. Bu değerin ışığında da son denklemden

$$a = e^{5200/373} = 1{,}13.10^6$$

bulunur. Şu hâlde buharlaşma eğrisinin denklemi de

$$\boxed{P = 1{,}13 \, . \, 10^6 \, e^{-5200/T}} \qquad \text{(V.5.6)}$$

şeklindedir.

3) Buzun eşsıcaklıklı ($T = 272{,}5$ °K) sıkıştırılması süresince sistemin hâlini belirleyen nokta şekilde AA' doğru parçasını çizer. Buz erimeye başladığında da hâli A' noktasıyla temsil olunur. (V.5.5) bağıntısından A' deki basıncın

$$P_{A'} = -132\,(272{,}5 - 273) = 66 \text{ atm}$$

olacağı anlaşılmaktadır. Şu hâlde buz, sıcaklığı — 0,5°C iken basıncı 66 atmosfere eriştiğinde erimeye başlar.

4) Sâbit $P_A = 100$ mm Hg basıncında yâni

$$P_A = \frac{100}{760} = \frac{5}{38} \text{ atm}$$

basınçta, şekildeki (P, T) diyagramı üzerinde yatay AB doğru parçasının temsil etmekte olduğu buzun eşbasınçlı ısınması, erime eğrisiyle AB eşbasınç doğrusunun arakesit noktasına tekaabül eden T_e sıcaklığında buzun erimesine sebep olur. Şu hâlde (V.5.5) bağıntısına binâen

$$\frac{5}{38} = -132\,(T_e - 273)$$

olacaktır. Buradan da erimenin 273 °K den pek az düşük bir sıcaklıkta vukuu bulduğu anlaşılmaktadır. Eğer ayni basınçta kalarak ısıtmaya devâm olunursa su, eşbasınç eğrisiyle buharlaşma eğrisinin kesişme noktası olan B noktasına tekaabül eden sıcaklıkta buharlaşır. Şu hâlde (V.5.6) bağıntısına binâen

$$\frac{5}{38} = 1{,}13 \, . \, 10^6 \times e^{-5200/T_b}$$

olur. Buradan

$$\frac{5200}{T_b} = \ln\,(8{,}58.10^6) \;\rightarrow\; T_b = 326 \text{ °K} = 53 \text{ °C}$$

bulunur.

Eğer $P < P_0$ ise uçunum vukuu bulur ve buz doğrudan doğruya buhar hâline dönüşür. Bu durum şekilden de kolayca tahkik edilebilir.

V.6. Atmosferde bulunan su buharının 0 °C ile 130 °C arasındaki maksimal basıncı *T* mutlak sıcaklığının fonksiyonu olarak, %1 lik bir duyarlılıkla, empirik bir formül olan

$$\ln P = A - \frac{5120}{T}$$

***RANKİNE* (1820-1872) formülü aracılığıyla ifâde edilir. Burada *A* ile bir sâbit gösterilmektedir.**

Suyun buharlaşma gizli ısısı da kJ/kg cinsinden olmak üzere

$$L = 3335 - 2{,}91\, T$$

***REGNAULT* formülüyle verilir.**

1) Atmosfer basıncında 100 °C daki doymuş buharın özgül hacmını hesaplayınız. Sonucu, su buharını ideal bir gaz varsayarak elde edilenle karşılaştırınız.

2) Başlangıçta boş olan 1 litrelik bir kap içine 1 gram su ithâl edilmektedir. Acaba 50 °C da sıvı ile buharın oranları ne olur?

3) Sâbit hacımlı bu kap önce 50 °C da 1 atmosfer basınçlı havayla doldurulmuştur; bunun içine 50 °C da 1 gram su buharı ithâl edilmektedir. Karışımın basıncı böylece 1,116 atm olur. Su buharı kuru mudur yoksa doymuş mudur? Belirleyiniz. Karışım 90 °C a kadar ısıtıldığında karışımın nihaî basıncını saptayınız.

Suyun normal atmosferik basınçta 100 °C da kaynadığı ve:

— sıvı suyun hacımsal kütlesi: $v_s = 10^{-3}$ kg/m³

— 1 atm = 10^5 Pascal = 10^5 Newton/m²

— 1 kal = 4,2 J

olduğu hatırlatılmaktadır.

ÇÖZÜM: 1) Sıvı suyun hacmını su buharınınki önünde ihmâl ederek *CLAPEYRON* bağıntısından

$$v_b = \frac{L}{T\dfrac{dP}{dT}}$$

yazılabilir. *RANKİNE* formülünden ise logaritmik diferansiyel alarak, neticede,

$$\frac{dP}{dT} = \frac{5120 \,.\, P}{T^2}$$

olduğu tesbit edilir. Bu değer *CLAPEYRON* bağıntısına ikaame edildiğinde

$$\boxed{v_b = \frac{L}{5120}\,\frac{T}{P}}$$

bulunur. Öte yandan 1 atm basınç ve 100 °C da

$$L = 3335 - 2{,}91 \times 373 = 2250 \text{ kJ/kg}$$

olduğundan, verilere göre,

$$v_b = \frac{2{,}25\,.\,10^6 \times 373}{5120\,.\,10^5} = 1{,}64 \text{ m}^3/\text{kg}$$

bulunur. $v_s = 0{,}001$ m^3/kg olduğundan $v_s \ll v_b$ olduğu ve dolayısıyla da gerçekten de işin başında yapmış olduğumuz gibi v_s yi v_b yanında ihmâl etmekte haklı olduğumuz anlaşılmaktadır.

Eğer doymuş su buharı tıpkı bir ideal gaz gibi davranırsa gazın kütle birimine indirgenmiş hâl denklemi

$$P\,v_b = \frac{R}{M}\,T$$

şeklindedir. M de tabiî suyun moleküler kütlesidir. Şu hâlde

$$\boxed{v_b = \frac{R}{M}\,\frac{T}{P}}$$

olur. Buradan da

$$v_b = \frac{8{,}32}{18.10^{-3}} \times \frac{373}{10^5} = 1{,}72 \text{ m}^3 \text{ /kg}$$

bulunur ki ideal gazın davranışına nisbetle izafî uyumsuzluğun büyüklüğünün

$$\frac{\Delta v_b}{v_b} = \frac{1{,}72 - 1{,}64}{1{,}72} \simeq \%\,4{,}6$$

mertebesinde olduğu görülmektedir. Bu uyumsuzluk *RANKİNE* formülünün %1 lik duyarlılığından daha büyük olduğundan doymuş buharın ideal gazlar kaanûnuna tam tamına uymadığı saptanmış olur.

2) *RANKİNE* formülündeki A sâbitini tâyin etmek için 100 °C daki suyun doymuş buharının $P = 1$ atm olduğunu yazmak yeterlidir. Böylece

$$\ln 1 = A - \frac{5120}{373} \quad \rightarrow \quad A = \frac{5120}{373} = 13{,}7\ .$$

Şu hâlde *RANKİNE* formülünün açık şekli, P yi atmosfer cinsinden ifâde ederek,

$$\ln P = 13{,}7 - \frac{5120}{T}$$

dir. 50 °C (ya da 323 °K) deki doymuş buharın basıncının da, böylece,

$$P = \exp\left(13{,}7 - \frac{5120}{323}\right) = \exp(-2{,}1) = 0{,}121 \text{ atm}$$

ve buharlaşma gizli ısısının da

$$L = 3335 - 2{,}91 \times 323 = 2395 \text{ kJ/kg}$$

olduğu bulunur. *CLAPEYRON* formülü aracılığıyla da doymuş su buharının özgül hacmının

$$v_b = \frac{2{,}395.10^6}{5120} \cdot \frac{323}{0{,}121.10^5} = 12{,}45 \text{ m}^3\text{/kg}$$

olduğu tesbit edilir.

Şimdi m_s ve m_b ile suyun ve su buharının kütlelerini gösterelim. Toplam kütle ve toplam hacım

$$m = m_s + m_b = 10^{-3} \text{ kg}, \qquad V = m_s v_s + m_b v_b = 10^{-3} \text{ m}^3$$

olduğundan bu bağıntılardan

$$m_b = \frac{V - m v_s}{v_b - v_s}, \qquad m_s = \frac{m v_b - V}{v_b - v_s}$$

bulunur. Ancak, $v_s \ll v_b$ olduğundan ilk takribiyette

$$\boxed{m_b \simeq \frac{V}{v_b}} \qquad \boxed{m_s \simeq \frac{m v_b - V}{v_b}}$$

olduğu görülmektedir. Eldeki verilere göre m_b ve m_s hesaplanırsa $m_b \simeq 0{,}08$ g ve $m_s \simeq 0{,}92$ g bulunur ki bu da denge hâlinde %8 oranında doymuş su buharı ve %92 oranında da su bulunduğunu göstermektedir.

3) Karışımın 50 °C daki basıncı, hava ile su buharının kısmî basınçlarının toplamına eşittir. Şu hâlde su buharının kısmî basıncı

$$P_1 = 1{,}116 - 1 = 0{,}116 \text{ atm}$$

dir. Bu, doymuş buharın haiz olduğu, 0,121 atm lik basınçtan düşük bir basınç olduğundan su buharı başlangıçta kurudur.

90°C da ve su buharının hâlâ kuru olduğunu varsayarak sâbit hacımda ideal gazlar kaanûnundan yararlanarak, nihaî basınç için,

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1} \quad \rightarrow \quad P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} = 0{,}116 \cdot \frac{363}{323} = 0{,}130 \text{ atm}$$

bulunur.

Oysa ki 90 °C da doymuş buharın maksimal basıncı

$$\ln P_b = 13{,}7 - \frac{5120}{363} \quad \rightarrow \quad P_b = \exp(-0{,}5) = 0{,}69 \text{ atm}$$

dir, $P_2 < P_1$ olduğundan su buharı 90 °C da hâlâ kurudur. (Eğer $P_2 > P_1$ olsaydı, o zaman da su buharı P_b basıncında doymuş olurdu.) Öte yandan havanın 90 °C daki kısmî basıncı da

$$P_2' = P_1' \frac{T_2}{T_1} = 1 \cdot \frac{363}{323} = 1{,}122 \text{ atm}$$

dir. Buna binâen gaz hâlindeki karışımın nihaî basıncı da

$$P = P_2 + P_2' = 1{,}252 \text{ atm}$$

dir.

V.7. Cidarları ısı geçirmeyen bir kap başlangıçta, özgül ısısı $c = 4185$ J/kg/°K olan $T_0 = 345$ °K sıcaklığında $m_0 = 20$ gram sıvı su ihtivâ etmektedir. Buharlaşma esnâsında oluşan buhar bir pompa aracılığıyla yavaşça emilerek elenmektedir. Göz önüne alınan sıcaklık aralığında buharlaşma gizli ısısı sıcaklığın fonksiyonu olarak $L = A - BT$ şeklinde değişmekte olup °K başına $2{,}9 . 10^3$ J/kg kadar azalmaktadır.

dm kadar bir su kütlesinin buharlaşması kabın içinde dT kadar bir sıcaklık değişimi hâsıl etmektedir.

1) dm yi dT ye bağlayan diferansiyel denklemi tesis ediniz.

2) Buharlaşmış suyun oranı 1/10 olduğunda kap içindeki sıcaklık $T = 284$°K olmaktadır. Bu takdirde $L = L(T)$ bağıntısındaki A ve B sâbitlerini belirleyiniz.

3) Kap içinde 0°C da yalnızca sıvı fazı kaldığında buharlaşmış suyun oranı ne olur? Bütün sıvı kaybolduğu zaman buzun m' kütlesi ne olur? Buzun erime gizli ısısı $L_e = 335$ kJ/kg olup buzun süblimleşmesinin ihmâl edilebilir olduğu varsayılmaktadır.

4) Başka bir deneyde $T_0 = 345$ °K sıcaklıktaki $m_0 = 20$ gram kütleli su, su cinsinden değeri $\mu = 1$ kg olan bir kalorimetreye bir ampul içine yerleştirilmiş bulunmaktadır. Ampul, ayrıca, boş bir kapla da irtibat hâlindedir. Suyun buharlaşması bir soğuma hâsıl etmektedir. Kalorimetre içindeki nihaî T_1 sıcaklığını tâyin ediniz. Bunun için $L = A - BT$ bağıntısından yararlanınız.

ÇÖZÜM: 1) Buharlaşan dm sıvı kütlesi geriye kalan m kütleli sıvıdan $L\,dm$ kadar bir ısı almaktadır. Geriye kalan bu sıvı kütlesinin sıcaklığı da, bundan ötürü, T den $T - dT$ ye düşer. Buna göre ısı bilançosu

$$L\,dm = mc\,dT$$

den ibârettir. $L = A - BT$ şeklinde değiştiğinden, bu bilânçodan, kolaylıkla

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{dm}{m} = \frac{dT}{A - BT}}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

2) Bu denklemin integrasyonuyla

$$\frac{1}{c}\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{1}{B}\ln\frac{A - BT}{A - BT_0} \qquad \text{(V.7.1)}$$

bulunur. Eğer buharlaşmış suyun oranına x dersek kalan sıvının kütlesi için

$$m = m_0(1 - x) \quad \rightarrow \quad \frac{m}{m_0} = 1 - x$$

yazabiliriz. Bu takdirde (V.7.1) den

$$-\frac{B}{c}\ln(1 - x) = \ln\frac{A - BT}{A - BT_0}$$

ya da

$$\frac{A - BT}{A - BT_0} = (1 - x)^{-B/c} \qquad \text{(V.7.2)}$$

bulunur. B ise

$$B = -\frac{dL}{dT} = 2{,}9.10^3\ \mathrm{J/kg/°K}$$

dir. (V.7.2) bağıntısının $x = 1/10$ ve $T = 284$ °K değerleri için gerçeklendiği yazılacak olursa

$$\frac{A - 2{,}9 \,.\, 10^3 \,.\, 284}{A - 2.9 \,.\, 10^3 \,.\, 345} = \left(\frac{9}{10}\right)^{-\frac{2{,}9 \,.\, 10^3}{4{,}185 \,.\, 10^3}} = 1{,}073$$

olur. Buradan

$$A = 3{,}31.10^6 \text{ J/kg}$$

olduğu ve L nin açık ifâdesinin de

$$\boxed{L = (3310 - 2{,}9\, T) \text{ kJ/kg}}$$

şeklinde olduğu tesbit edilmiş olur.

3) 0 °C da buharlaşmış olan su oranı, (V.7.2) ye göre

$$x = 1 - \left(\frac{A - BT}{A - BT_0}\right)^{-c/B}$$

olduğundan

$$x = 1 - \left(\frac{3{,}31 \,.\, 10^6 - 2{,}9 \,.\, 10 \,.\, 273}{3{,}31 \,.\, 10^6 - 2{,}9 \,.\, 10 \,.\, 345}\right)^{-1{,}443} = 1 - (0{,}916)^{1{,}443} = 0{,}119$$

$$= \%\, 11{,}9$$

bulunur. Şu hâlde sıcaklık 0 °C a eriştiğinde kalan suyun kütlesi

$$m = m_0\,(1 - x) \qquad \text{(V.7.3)}$$

dir. Sıvı faz ortadan kaybolduğu zaman oluşan buzun m' kütlesi 0 °C daki suyun m kütlesinin $y = m'/m$ oranının katılaşması dolayısıyla ortaya çıkmaktadır; bu buzlaşma sonucu açığa çıkan $m'L_e$ ısı mikdarı ise geriye kalan $(m - m')$ kütleli suyun 0 °C da buharlaşmasına yarar. Bu verilerden ısı bilânçosunun

$$m'\,L_e = (m - m')\,L \qquad \text{(V.7.4)}$$

olması gerektiği sonucu çıkmaktadır. (V.7.3) ve (V.7.4) den de

$$\boxed{m' = \frac{m_0\,(1 - x)\,.\,L}{L_e + L}}$$

olduğu bulunur.

0 °C da buharlaşma gizli ısısı

$$L = A - BT = 3{,}31 \,.\, 10^6 - 2{,}9 \,.\, 10^3 \,.\, 273 = 2520 \text{ kJ/kg}$$

olduğundan üreyen buz mikdarı olarak da

$$m' = \frac{20 \times 0{,}881 \times 2520}{335 + 2520} = 15{,}5 \text{ g}$$

bulunur.

4) dm kütleli bir sıvının buharlaşması $L\,dm$ mikdarı kadar bir ısının soğutulmasını ve dolayısıyla da kalorimetrenin sıcaklığında bir düşüşü gerektirir. Buna göre; ısı bilânçosu: $L\,dm = \mu c\; dT$ şeklinde yazılır. Buradan da

$$dm = \mu c \frac{dT}{A - BT}$$

bulunur. Bu diferansiyel denklem integre edilirse:

$$\int_{m_0}^{0} dm = \mu c \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{A - BT} \quad \rightarrow \quad \boxed{m_0 = \frac{\mu c}{B} \ln \frac{A - BT_1}{A - BT_0}}$$

bulunur. Bu son bağıntı da m kütleli suyun tümünün buharlaşması sonunda erişilen T_1 sıcaklığını tesbit etmeye yarar. Şimdi ε, 1 in yanında küçük olmak şartıyla $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$ yazılabilmesi dolayısıyla

$$\ln \frac{A - BT_1}{A - BT_0} = \ln \left[1 + \frac{B(T_0 - T_1)}{A - BT_0} \right] \approx \frac{B(T_0 - T_1)}{A - BT_0}$$

ve dolayısıyla da

$$m_0 = \frac{\mu c (T_0 - T_1)}{A - BT_0}$$

olur. Buna göre kalorimetrenin soğuması

$$\boxed{T_0 - T_1 \approx \frac{m_0 (A - BT_0)}{\mu c},}$$

ile ölçülecektir. Verilere göre, göz önüne alınan hâl için,

$$T_0 - T_1 = \frac{20 \,.\, 10^{-3} \times 2{,}31 . 10^6}{4{,}185 \,.\, 10^3} = 11 \text{ °K}$$

ve dolayısıyla da $T_1 = 334$°K $= 61$ °C olduğu saptanmış olur.

V.8. Buhar oranını x ile göstereceğimiz T sıcaklığında bir sıvı-buhar karışımı göz önüne alınıyor. Doymuş sıvının özgül ısısı m ve T sıcaklığında buharlaşma gizli ısısı da L ile gösterilmektedir. Bu karışımın, doyma sıvısından hareketle ve x in fonksiyonu olarak ifâde edilecek olan bir ısı mikdarı ve bir işin soğurulmasıyla elde edilmiş olduğu varsayılmaktadır: buradan sıvı-buhar karışımının eşısı eğrilerinin denkleminin

$$m \ln T + \frac{Lx}{T} = sâbit$$

şeklinde olduğunu gösteriniz ve karışımın iç enerjisinin ifâdesini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Başlangıçta elde doymuş bir sıvı bulunmaktadır; yâni buhar oranı: $x = 0$ dır. Bu sıvının kütle birimine, doymuş sıvı hâlini muhafaza ederek, sıcaklığını dT kadar artırmak için verilmesi gerekli ısı mikdarı ve iş

$$\delta q = m\, dT \quad \text{ve} \quad \delta w = P\, dv_s$$

dır. Burada v_s ile doymuş sıvının kütlesel hacmı gösterilmektedir. Bu takdirde entropi ve iç enerjinin mütekaabil değişimleri

$$ds = \frac{\delta q}{T} = m\frac{dT}{T} \tag{V.8.1}$$

$$du = \delta q - \delta w = m\, dT - P\, dv_s \tag{V.8.2}$$

olur. Doymuş sıvı ($x = 0$) hâlinden ayni sıcaklıkta sıvı-buhar karışımı ($0<x<1$) hâline geçişte $Px(v_b - v_s)$ lik bir iş ve bir de Lx lik bir ısı soğurulması vukuu bulur. Buna göre, (V.8.1) i de göz önünde tutarak entropinin diferansiyeli

$$ds = m\frac{dT}{T} + d\left(\frac{Lx}{T}\right)$$

şeklini alır. Bunu integre ederek de

$$s = m \ln T + \frac{Lx}{T} + sâbit$$

bulunur. Sürecin tersinir olması hasebiyle eşısı eğrilerinin ($\delta q = 0 \;\rightarrow\; ds = 0$) ifâdeşi de

$$\boxed{m \ln T + \frac{Lx}{T} = sâbit}$$

şeklinde olacaktır.

İç enerjinin diferansiyelinin (V.8.2) ile verilmiş olan ifâdesi de söz konusu sıvı-buhar karışımı için

$$du = m\,dT - P\,dv_s + d\,[Lx - Px\,(v_b - v_s)] \qquad \text{(V.8.3)}$$

olacaktır. Genellikle, kritik sıcaklıktan uzak düşen sıcaklıklarda sıvının hacım değişimi ihmâl edilebilir düzeydedir: $dv_s = 0$. Bunu da göz önünde tutarak (V.8.3) ün integrasyonu sonucu sıvı-buhar karışımının iç enerjisinin, bir sâbit yaklaşıklığıyla,

$$\boxed{u = mT + x\,[L - P\,(v_b - v_s)]}$$

ifâdesiyle verildiği saptanır.

V.9. Saf bir cismin T sıcaklığında dengedeki sıvı-buhar karışımı göz önüne alınıyor. Karışımdaki buharın oranı x ile gösterilecektir. m_s ve m_b ile doymuş sıvının ve doymuş buharın özgül ısıları v_s ve v_b ile de özgül hacımları işâret edilmektedir. T sıcaklığındaki buharlaşma gizli ısısı L dir.

Termodinamiğin ikinci temel ilkesini kullanarak

$$m_b - m_s = \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}$$

olduğunu gösteriniz: ve buradan da sıvı-buhar karışımının eşısı eğrilerinin denklemini çıkarınız.

ÇÖZÜM: Sıcaklık T dan $T + dT$ ye geçtiğinde buhar oranı da x den $x + dx$ e geçer. Sistemin T den $T + dT$ ye kadar x = sâbit kalmak üzere ısınmış olduğu kabul edilebilir.

Sıvı-buhar sisteminin aldığı elemanter ısı mikdarı için, kütle birimi başına,

$$\delta q = x\,m_b\,dT + (1 - x)\,m_s\,dT + L\,dx$$

yazılabilir. Bu ifâdenin ilk terimi, sâbit x de, doymuş buharın ısınması dolayısıyla; ikinci terimi, sâbit x de, doymuş sıvının ısınması dolayısıyla ve üçüncü terimi de $T + dT$ de vukuu bulan buharlaşma dolayısıyla sisteme intikaal eden ısı mikdarıdır.

Buna göre sıvı-buhar sisteminin entropisinin diferansiyeli, $ds = \delta q/T$ olması dolayısıyla,

$$ds = \frac{(m_b - m_s)\,x + m_s}{T}\,dT + \frac{L}{T}\,dx \qquad \text{(V.9.1)}$$

olur. Termodinamiğin ikinci temel ilkesine göre ds bir tam diferansiyeldir; bu özellik ise

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(m_b - m_s)\,x + m_s}{T}\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{L}{T}\right)$$

ya da

$$\boxed{m_b - m_s = \frac{dT}{dL} - \frac{L}{T}} \qquad \text{(V.9.2)}$$

olmasını gerektirir ki bu da zâten tesis etmek istediğimiz bağıntıdan başka bir şey değildir.

(V.9.2) bağıntısını göz önünde tutarak (V.9.1) ifâdesi de

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}\right) x\,\frac{dT}{T} + m_s\frac{dT}{T} + \frac{L}{T}\,dx \\ &= \left(\frac{x}{T}\,dL + \frac{L}{T}\,dx - \frac{Lx}{T^2}\,dT\right) + m_s\frac{dT}{T} \\ &= d\left(\frac{xL}{T}\right) + m_s\frac{dT}{T} \end{aligned}$$

şekline girer. Şu hâlde söz konusu sıvı-buhar karışımının entropisi

$$s = \frac{Lx}{T} + m_s \ln T + \textit{sâbit}$$

ifâdesiyle verilecektir. Buna göre tersinir bir eşısı eğrisinin denklemi

$$\boxed{\frac{xL}{T} + m_s \ln T = \textit{sâbit}}$$

den ibâret olur.

* * * * * * * * * * * *

V.10. Bir gram su atmosfer basıncında 1671 cm³ buhara çevriliyor. Suyun bu sıcaklıktaki gizli ısısı 539 kal/gr olduğuna göre ΔU, ΔS, ΔH, ΔG yi hesaplayınız.

CEVAP: $U \simeq 497$ kal, $\Delta S \simeq 1{,}5$ kal/°K,

$\Delta H \simeq 539$ kal, $G = 20$ kal.

V.11. 20 °C de bulunan 10 kg su, sâbit basınçta, 250 °C de bulunan buhara çevriliyor.

$$(c_P)_{su} = 4180 \text{ J/kg °K},$$

$$(c_P)_{buhar} = (1670 + 0{,}494\, T + 1{,}86.10^6\, T^{-2}) \text{ J/kg °K},$$

$$l = 22{,}6.10^5 \text{ J/kg}$$

olduğuna göre, sistemin entropisinde meydana gelen değişmeyi bulunuz.

CEVAP: $\Delta S = 67922{,}84$ J/°K.

V.12. Belirli bir sıcaklıktan sonra, su buharının basıncı K, A, B, C, D sâbitler olmak üzere

$$P = K\, e^{\frac{A+BT}{C+DT}}$$

ile verilmektedir. Suyun hacmini ihmâl ederek ve su buharını da bir ideal gaz olarak kabul ederek, bu sıcaklık bölgesinde buharlaşma ısısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: *CLAUSİUS-CLAPEYRON* denklemine göre

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l}{T(v_b - v_s)}$$

dür. v_s, v_b yanında ihmâl edilebildiği için, formül

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l}{Tv_b}$$

şeklini alır. Diğer taraftan su buharı ideal gaz olarak kabul edildiğine göre

$$v_b P = RT$$

eşitliği vardır. Buradan

$$l = T^2 R \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} = K \frac{T^2 R}{P} \frac{d}{dT} \left(e^{\frac{A+BT}{C+DT}} \right)$$

$$= \frac{T^2 R (AC - DA)}{(C + DT)^2}$$

bulunur.

V.13. Belirli bir sıcaklıktan sonra suyun buharlaşma ısısı K, C ve D birer sâbit olmak üzere

$$l = \frac{RKT^2}{(C + DT)^2}$$

ile verilmektedir. Suyun özgül hacmının buharın özgül hacmı yanında ihmâl edilebilecek kadar küçük olduğunu ve buharın bir ideal gaz gibi düşünülebileceğini farzederek, termodinamik denge hâlinde buhar basıncını T nin fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

$$CEVAP: \quad P = P_0 \exp\left[-\frac{K}{D(C+DT)}\right], \qquad P_0 = sâbit$$

V.14. (a) Bir sıvının üzerindeki toplam basıncın eşsıcaklıklı olarak π_0 dan P ye çıkartılması hâlinde, buhar basıncının yaklaşık olarak

$$\Delta\pi = \frac{\pi_0 v_s}{RT}(P - \pi_0)$$

kadar değişeceğini gösteriniz.

(b) 20 °C de suyun buhar basıncı 17,5 mm Hg olsun. Suyun bulunduğu kabın üstü açıldığı zaman, buhar basıncında hasıl olan değişmeyi bulunuz.

(c) Buhar basıncını 1 mm Hg artırmak için toplam basınç ne kadar değiştirilmelidir?

ÇÖZÜM: (a) Sıvının üzerindeki toplam basınç dP kadar artırılınca, buhar basıncınının $d\pi$ kadar arttığını farzedelim. Su-gaz sistemi termodinamik denge hâlinde bulunduğundan, g_s suyun özgül *GİBBS* enerjisini, g_b de buharın özgül *GİBBS* enerjisini göstermek üzere

$$dg_s = dg_b$$

eşitliği vardır. Özgül *GİBBS* enerjisinin tersinir bir olaydaki değişimi

$$dg = -s\,dT + v\,dP$$

dir. Eşsıcaklıklı bir olay söz konusu olduğundan

$$dg = v\,dP$$

olur. Buradan da

$$v_s\,dP = v_b\,d\pi$$

elde edilir. Su buharı ideal gaz olarak kabul edildiğinden $v_b = RT/\pi$ olur. O hâlde

$$d\pi = \frac{v_s}{v_b}\,dP = \frac{v_s\pi}{RT}\,dP$$

yâni

$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{v_s}{RT}\,dP$$

dir. İntegrasyonla

$$\int_{\pi_0}^{\pi} \frac{d\pi}{\pi} = \frac{v_s}{RT}\int_{\pi_0}^{P} dP$$

$$\ln\frac{\pi}{\pi_0} = \frac{v_s}{RT}(P - \pi_0)$$

$$\pi = \pi_0\, e^{\frac{v_s}{RT}(P-\pi_0)}$$

bulunur.

$$\Delta\pi = \pi - \pi_0 = \pi_0\left[\exp\left(\frac{v_s}{RT}(P - \pi_0)\right) - 1\right]$$

ifadesindeki üstel fonksiyon seriye açılır ve sâdece birinci mertebeden olan terimler göz önüne alınırsa

$$\Delta\pi = \pi_0\left[\left(1 + \frac{v_s}{RT}(P - \pi_0) + \cdots\right) - 1\right] = \frac{v_s\,\pi_0}{RT}(P - \pi_0)$$

yâni

$$\Delta\pi = \frac{v_s\,\pi_0}{RT}(P - \pi_0)$$

olur.

(b) Suyun özgül hacmi 1 cm^3 dür. Yukarıda bulunan formülde sayısal değerler yerine yazılarak

$$\Delta\pi = 7{,}1.10^{-4}\ \text{mm Hg}$$

bulunur.

(c) $P - \pi_0 = 1{,}4.10^3$ atm dir.

V.15. Hacmı *V* olan bir kap iki kısma ayrılmıştır. Sol bölmede 2 kilomol helyum ve sağ bölmede de 1 kilomol neon gazı bulunmaktadır. Her iki gaz da 300 °K sıcaklıkta ve 1 atm basınç altındadır. Bölmeleri ayıran perde kaldırılıp da gazlar birbirlerine karıştığında sistemin *GİBBS* fonksiyonundaki ve entropisindeki değişmeyi hesaplayınız. (Helyum ve neon gazlarını ideal olarak farzediniz.).

ÇÖZÜM: Başlangıçta sistemin *GİBBS* fonksiyonu

$$G_b = n_1 g_{1b} + n_2 g_{2b} = 2 g_{1b} + g_{2b}$$

dir. Burada g_{1b}, g_{2b} moler *GİBBS* fonksiyonlarını göstermektedir. Bir ideal gazın özgül *GİBBS* fonksiyonunun

$$RT\Phi(T) = c_P (T - T_0) - c_P T \ln \frac{T}{T_0} - RT \ln P_0 - s_0 (T - T_0) + g_0$$

olmak üzere

$$g = RT [\ln P + \Phi(T)]$$

şeklinde yazılacağı Problem **IV.12.** den bilinmektedir.

Buna göre

$$G_b = 2RT [\ln P + \Phi_1(T)] + RT [\ln P + \Phi_2(T)]$$

olur.

İkinci olarak sistemin, gazların karışmasından sonraki *GİBBS* fonksiyonunu bulalım:

$$G_s = n_1 g_{1s} + n_2 g_{2s} = 2 g_{1s} + g_{2s} .$$

Gazlar ideal gaz olduğundan karışım sonucu sistemin sıcaklığı ve toplam basıncı değişmez. Helyumun karışım içindeki basıncına p_1, neonun karışım içindeki basıncına da p_2 denirse $p_1 + p_2 = P$ dir. Buna göre

$$g_{1s} = RT [\ln p_1 + \Phi_1(T)] \quad , \quad g_{2s} = RT [\ln p_2 + \Phi_2(T)]$$

ve

$$G_s = 2RT [\ln p_1 + \Phi_1(T)] + RT [\ln p_2 + \Phi_2(T)]$$

olur. Sistemin toplam mol sayısı âşikâr olarak $(2+1).10^3 = 3.10^3 = n$ dir.

$$x_1 = \frac{n_1}{n}, \qquad x_2 = \frac{n_3}{n}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$x_1 = \frac{2.10^3}{3.10^3} = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{1.10^3}{3.10^3} = \frac{1}{3}$$

olur. Her iki gaz da ideal gaz farzedildiğinden

$$n_1 = \frac{p_1 V}{RT}, \qquad n_2 = \frac{p_2 V}{RT} \qquad \left(\text{ve} \quad n = \frac{PV}{RT}\right)$$

yazılabilir. O hâlde

$$x_1 = \frac{p_1}{P}, \qquad x_2 = \frac{p_2}{P}$$

yâni

$$p_1 = P x_1, \quad p_2 = P x_2$$

dir. Buna göre

$$G_s = 2RT(\ln P + \ln x_1 + \Phi_1) + RT(\ln P + \ln x_2 + \Phi_2)$$

olur. O hâlde sistemin *GİBBS* fonksiyonunun değişme miktarı

$$\begin{aligned} G_s - G_b &= 2RT(\ln P + \ln x_1 + \Phi_1 - \ln P - \Phi_1) \\ &+ RT(\ln P + \ln x_2 + \Phi_2 - \ln P - \Phi_2) \\ &= 2RT \ln x_1 + RT \ln x_2 \\ &= 2RT \ln \frac{2}{3} + RT \ln \frac{1}{3} \\ &= \left(2 \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{1}{3}\right) \times R \times 300 \\ &= -5.10^6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \Delta S &= -\left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T}\right)_P = -R(2 \ln x_1 + \ln x_2) \\ &= 16{,}6\,.\,10^3\,\mathrm{J/^\circ K} \end{aligned}$$

olur.

V.16. —5 °C ye kadar soğutulmuş bir miktar saf suyun içine küçük bir buz parçası atılıyor. Sâbit basınç (atmosfer basıncı) altında bulunan bu sistem yalıtılmıştır. Suyun yüzde kaçı donar? Sistemin entropisindeki değişme miktarı ne olur?

ÇÖZÜM: Suyun 0° C daki donma gizli ısısının 333,4 J/gr, ve —5°C ile 0°C arasındaki özgül ısısının da 4,22 J/gr °C olduğu biliniyor. Buz-su sisteminin atmosfer basıncı altındaki son hâlinin denge hâli olduğunu farzedelim. Bu hâlde sistemin sıcaklığı âşikâr olarak 0 °C olacaktır. Bu kapalı sistemdeki hâl değişimi sâbit basınç altında olduğundan $\Delta Q = \Delta H$, ve hâl değişimi ayrıca bir de eşısılı olduğundan da $\Delta H = 0$ dır. dH tam diferansiyel olduğundan ΔH değişimi yola bağlı değildir.

—5°C ye kadar soğutulmuş olan suyun 0 °C ye kadar ısıtılması ile meydana gelen hâl değişiminde

$$\Delta H_1 = c_P\, \Delta T = 4{,}22\ \mathrm{J/gr\ ^\circ C} \times 5\ ^\circ\mathrm{C} = 21{,}1\ \mathrm{J/gr}$$

lık bir entalpi değişimi olur.

0 °C de bulunan sudan, biraz önce suyu ısıtmak için verilen ısı mikdarı alınırsa suyun bir kısmı donarak buz hâline gelir. Donan su mikdarını x ile gösterelim. Bu hâl değişiminde de sistemdeki entalpi değişimi

$$\Delta H_2 = -\, x \times (\text{gizli ısı}) = -\, 333{,}4\, x \quad \mathrm{J/gr.}$$

olur.

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$$

eşitliğinden

$$x = 0{,}0633$$

bulunur. O hâlde sistemin %6,33 ü donmuştur.

Bu hâl değişimi tersinmezdir. dS tam diferansiyel olduğundan ΔS yi de ΔH yı hesapladığımız süreçler boyunca hesaplayabiliriz:

$$\Delta S_1 = c_P \ln \frac{T_2}{T_1} = 4{,}22 \ln \frac{273}{168} = 0{,}07796\ \mathrm{J/gr\ ^\circ K}$$

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{21{,}1}{273} = -\,0{,}07725\ \mathrm{J/gr\ ^\circ K}$$

ve

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0{,}00071\ \mathrm{J/gr\ ^\circ K}$$

dir.

V.17. Saf bir cismin üçlü noktası civarında katı, sıvı ve gaz fazlarının bir arada bulunduğu mâlûmdur. M ile böyle bir sistemi karakterize eden termodinamik bir büyüklüğün moler özgül ifâdesi gösterilsin. x, y ve z ile buhar, sıvı ve katı fazların sistemdeki oranları ve M_g ile bir mol gaz, M_s ile bir mol sıvı, M_k ile de bir mol katı gösterilmek üzere;

$$M = M_k + (x + y)\, M_{sk} + x M_{kg}\,,$$

$$M = M_s + x M_{sg} - z M_{sk}\,,$$

$$M = M_g - (z + y)\, M_{sg} - z M_{sk}$$

bağıntılarını çıkarınız.

ÇÖZÜM : Sistemde n_x mol buhar, n_y mol sıvı ve n_z mol katı faz bulunuyorsa, ortalama değer tanımından,

$$M = \frac{n_x M_g + n_y M_s + n_z M_k}{n_x + n_y + n_z} = \frac{n_x}{n_x + n_y + n_z} M_g + \frac{n_y}{n_x + n_y + n_z} M_s$$

$$+ \frac{n_z}{n_x + n_y + n_z} M_k = x M_g + y M_s + z M_k$$

yazılır. Kolayca $x + y + z = 1$ olduğu görülebilir. Buradan $z = 1 - x - y$ çözülür ve yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} M &= x M_g + y M_s + (1 - x - y) M_k \\ &= M_k + x (M_g - M_k) + y (M_s - M_k) \\ &= M_k + x M_{kg} + y M_{sk} \end{aligned}$$

bulunur. M_{kg} ve M_{sk} nin söz konusu termodinamik büyüklüğün sırasıyla katılaşma ve buharlaşma faz değişimlerindeki değişimleri olduğu âşikârdır.

Benzer şekilde, önce $y = 1 - x - z$ ve sonra da $x = 1 - y - z$ çözülür ve M nin ifâdesinde kullanılırsa diğer iki bağıntı da bulunur.

V.18. 25°C da eşit mikdarlarda aseton ve diklorometan 1 atm basınç altında, ve eşısılı olarak karıştırılıyor. Karışımın sıcaklığı ne olur?

25°C sıcaklık ve 1 atm basınç altında asetonun ve diklorometanın özgül ısıları sırasıyla

$$c_{Pa} = 0{,}519 \text{ kal/gr °K}, \quad c_{Pd} = 0{,}285 \text{ kal/gr °K}$$

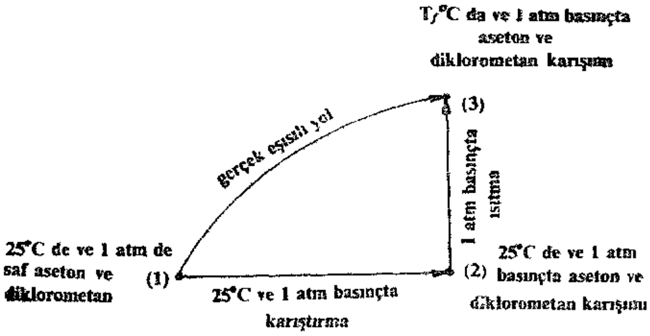
dir.

1 atm basınç altında

T(°K)	H (kal/gr)
20	—2,978
25	—2,957
30	—2,936

olarak verilmiştir.

ÇÖZÜM :



Karışımın şekilde gösterilen iki kısımdan oluştuğunu farzedelim. Bu takdirde

$$\Delta H_{13} = \Delta H_{12} + \Delta H_{23} = 0$$

dır. Hâlbuki, m_a asetonun ve m_d de diklorometanın kütleleri olmak üzere

$$\Delta H_{23} = (m_a + m_d) \int_{25}^{T_f} c_P \, dT = (m_a + m_d) \, c_P \, (T_f - 25)$$

olur. c_P ile karışımın sâbit basınçtaki, sıcaklığa bağlı olmadığı varsayılan, özgül ısısı gösterilmektedir.

Bir karışımın sâbit basınçtaki özgül ısısının, karışımı oluşturan saf maddelerin sâbit basınçtaki özgül ısılarına

$$c_P = x_a \, c_{P_a} + x_d \, c_{P_d} + \Delta c_P \qquad \Delta c_P = \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T} \right)_{P,x}$$

şeklinde bağlı olduğu gösterilebilir. Buna göre

$$c_P = 0{,}5 \times 0{,}519 + 0{,}5 \times 0{,}285 + \frac{-2{,}936 - (-2{,}978)}{30 - 20}$$

$$= 0{,}4052 \text{ kal/gr °K}$$

bulunur. O hâlde

$$\Delta H_{23} = (m_a + m_d) \times 0{,}0042 \times (T_f - 25)$$

dır. Kolayca görüleceği gibi

$$\Delta H_{12} = (m_a + m_b) \, \Delta H = (m_a + m_b) \times (-2{,}957)$$

dan ibârettir. Burada ΔH birim kütle için 25 °C da sâbit basınç altındaki karışım ısısıdır. Sonuç olarak

$$T_f = 25 - \frac{-2{,}957}{0{,}4052} = 32{,}3\,^{\circ}\mathrm{C}$$

bulunur, yâni iki saf maddenin eşısılı olarak sâbit basınç altında karışmasıyla, karışımın sıcaklığı 7,3 °C artmaktadır.

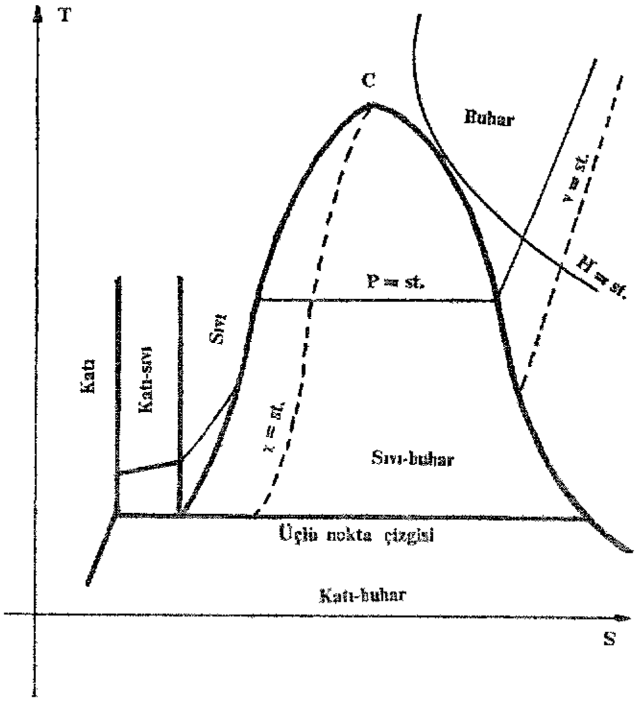
V.19. X ile tersinir ve tamamen belirli bir süreç gösterilmek üzere, X süreci yunca c_X özgül ısısı

$$c_X = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_X$$

şeklinde tanımlanır. Doymuş sıvı (ve doymuş buhar) için

$$c_{\text{doy}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\text{doy}} \quad \text{ile} \quad \left(\frac{dU}{dT}\right)_{\text{doy}} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{dH}{\partial T}\right)_{\text{doy}}$$

büyüklükleri arasındaki bağıntıları bulunuz.



ÇÖZÜM: Göz önüne alınan süreç tersinir olduğundan

$$c_{\text{doy}} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\text{doy}}$$

olur. $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\text{doy}}$ aslında S nin, doyma eğrisi boyunca T ye göre değişiminden yâni $T - S$ diyagramında, doymuş sıvı veyâ gaz eğrilerinin eğiminden ibârettir.

$S = S(T, V)$ olduğu varsayılırsa

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı dT ile bölünür ve elde edilen ifâde doyma sürecine uygulanırsa,

$$\left(\frac{dS}{dT}\right)_{\text{doy}} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{dV}{dT}\right)_{\text{doy}}$$

bulunur. Daha önce elde edilen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{c_v}{T}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha}{\varkappa_T}$$

ifâdeleri yardımıyla da

$$\boxed{c_{\text{doy}} = c_v + \frac{\alpha T}{\varkappa_T}\left(\frac{dV}{dT}\right)_{\text{doy}}} \qquad \text{(V.19.1)}$$

olduğu görülür.

İkinci hâl olarak serbest değişkenlerin P ve T oldukları hâl göz önüne alınırsa

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

ve keza

$$\left(\frac{dV}{dT}\right)_{\text{doy}} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}} = \alpha V - \varkappa_T V\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}} \qquad \text{(V.19.2)}$$

olur. (V.19.1) ve (V.19.2) den

$$c_{\text{doy}} = c_v + \frac{T\alpha^2 V}{\varkappa_T} - \alpha T V\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{do}}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$c_P - c_v = \frac{T\alpha^2 V}{\varkappa_T}$$

olduğu gösterilebilir. Buna göre

$$\boxed{c_{\text{doy}} = c_P - T\,\alpha\, V\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}}} \tag{V.19.3}$$

bağıntısı elde edilir. $\left(\dfrac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}}$ un buharlaşma eğrisinin eğimi olduğu âşikârdır.

Ayrıca

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

eşitliğinden de kolayca

$$\left(\frac{dH}{dT}\right)_{\text{doy}} = c_P - \alpha T\, V\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}} + V\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}}$$

olduğu görülür. Bunu (V.19.3) ile karşılaştırarak

$$\boxed{c_{\text{doy}} = \left(\frac{dH}{dT}\right)_{\text{doy}} - V\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}}} \tag{V.19.4}$$

bağıntısı elde edilir.

$H = U + PV$ bağıntısından da

$$\left(\frac{dU}{dT}\right)_{\text{doy}} = \left(\frac{dH}{dT}\right)_{\text{doy}} - V\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}} - P\left(\frac{dV}{dT}\right)_{\text{doy}}$$

ve (V.19.4) yardımıyla da

$$\boxed{c_{\text{doy}} = \left(\frac{dU}{dT}\right)_{\text{doy}} + P\left(\frac{dU}{dT}\right)_{\text{doy}}}$$

bulunur.

V.20. Bir sıvı için P_{doy} doymuş buhar basıncı, A ve B iki sâbit olmak üzere

$$\ln P_{\text{doy}} = A - \frac{B}{T}$$

ile verilmektedir.

S_{sg} ile maddenin sıvı hâlinden buhar hâline geçmesiyle ortaya çıkan entropi değişmesi ve $V_{sg} = V_g - V_s$ olmak üzere

$$S_{sg} = V_{sg} \frac{B\, P_{\text{doy}}}{T^2}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: *CLAPEYRON* denklemine göre

$$\frac{dP_{\text{doy}}}{dT} = \frac{S_{sg}}{V_{sg}}$$

dir. Buna göre

$$S_{sg} = V_{sg} \frac{dP_{\text{doy}}}{dT} = V_{sg} \frac{d}{dT} \left(e^{A - \frac{B}{T}}\right) = V_{sg}\, e^{A - \frac{B}{T}} \cdot \frac{B}{T^2}$$

$$\boxed{S_{sg} = V_{sg} \frac{B\, P_{\text{doy}}}{T^2}}$$

olur.

V.21. *CLAPEYRON* **denklemini kullanarak, doymuş sıvı ve doymuş buhar için**

$$c_g - c_s = \frac{dH_{sg}}{dT} - \frac{H_{sg}}{T}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Problem V.20 de bir maddenin doyma özgül ısısının

$$c_{\text{doy}} = \left(\frac{dH}{dT}\right)_{\text{doy}} - V \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{doy}}$$

ifâdesiyle verildiği gösterilmişti. Bu, doymuş sıvı ve doymuş buhara uygulanırsa, sırasıyla

$$c_s = \frac{dH_s}{dT} - V_s \frac{dP_s}{dT}$$

$$c_g = \frac{dH_g}{dT} - V_g \frac{dP_g}{dT} \qquad \text{(V.21.1)}$$

eşitlikleri elde edilir. Yazılışı basitleştirmek için burada *doy* alt indisinden sarfı nazar edilmiştir. Diğer taraftan

$$\frac{dP_{\text{doy}}}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

şeklinde olan *CLAPEYRON* denklemini entalpinin değişimi cinsinden yazabiliriz. Gerçekten de faz değişimi sâbit basınçta vukuu bulduğundan

$$dH = \delta Q + V\,dP = \delta Q$$

yâni

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T} = \frac{H_{sg}}{T}$$

dir. Buna göre de

$$\frac{dP_{\text{doy}}}{dT} = \frac{H_{sg}}{T\,(V_g - V_s)}$$

olur. $H_{sg} = H_g - H_s$ olup bu, buharlaşma sonucu ortaya çıkan entalpi değişimidir.

(V.21.1) bağıntılarında *CLAPEYRON* denkleminin bu yeni şeklinin kullanılmasıyla da

$$c_g - c_s = \frac{dH_g}{dT} = \frac{dH_s}{dT} - (V_g - V_s)\,\frac{H_{sg}}{T\,(V_g - V_s)}$$

$$= \frac{dH_{sg}}{dT} - \frac{H_{sg}}{T}$$

elde edilir.

VI. BÖLÜM

ÖZEL TERMODİNAMİK SİSTEMLER

VI.1. Çeşitli oranlarda N adet saf cisimden homogen karışımlar oluşturuluyor. P basıncı ile T sıcaklığının fonksiyonları olan ve çeşitli mümkün karışımlara tekaabül eden hâl fonksiyonları P ve T ile ($i = 1, 2, \ldots, N$ olmak üzere) n_i mol sayılarının fonksiyonları cinsinden yeniden gruplaştırılabilmektedirler: meselâ entropi ve hacım için

$$S_{[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}(P\,,T) = S(P\,,T,\,[n_i\,;\,i=1,2\,,\ldots,N])$$

$$V_{[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}(P\,,T) = V(P\,,T,\,[n_i\,;\,i=1,2\,,\ldots,N])$$

olacaktır. Böylelikle ithâl olunan S ve V fonksiyonlarının n_i değişkenlerine göre sürekli ve türetilebilir oldukları varsayılmaktadır.

1) Her karışımın $U_{[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}$ iç enerjisi toplamsal bir U_0 sâbiti yaklaşıklığıyla tanımlanmaktadır. Karışıma giren N saf cisim eğer birbirlerine kimyasal yönden nötr kalırlarsa toplamsal U_0 sâbitini,

$$U_{[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}(P\,,T) = U(P,\,T,\,[n_i\,;\,i=1,2\,,\ldots,N])$$

ifâdesi n_i değişkenlerinin birinci dereceden homogen ve sürekli bir fonksiyonu olacak şekilde seçmenin mümkün olduğunu gösteriniz. Problemin bundan sonraki bölümlerinde bu seçim muhafaza edilecektir.

2) H entalpisi, F serbest enerjisi ve G serbest entalpisi P, T ve n_i lerin fonksiyonları olup, U ve S aracılığıyla bilinen şekilde tanımlanırlar. Bu takdirde

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{S,\,V,\,[n_j\,,\,j\neq i]} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{S,\,P,\,[n_j\,,\,j\neq i]} = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_{T,\,V,\,[n_j\,,\,j\neq i]}$$

$$= \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,\,P,\,[n_j\,,\,j\neq i]}$$

olduğunu gösteriniz.

3) Karışımdaki her bir saf cismin kimyasal potansiyeli diye yukarıdaki bu kısmî türevlerin ortak μ_i değerine denir. Bu takdirde:

$$U = TS - PV + \sum_{i=1}^{N} \mu_i n_i$$

olduğunu gösteriniz.

4) Kimyasal potansiyellerin

$$\sum_{i=1}^{N} n_i \, d\mu_i = -S \, dT + V \, dP$$

diferansiyel bağıntısını (*GİBBS - DUHEM* eşitliğini) gerçeklediklerini gösteriniz.

ÇÖZÜM: 1) Denge hâlindeki N adet saf cismin yanyana bulunmasıyla oluşan topluluğu göz önüne alalım. Her bir saf cismin mol başına iç enerjisi olan u_i ancak bir u_{i0} yaklaşıklığıyla belirlenmiştir. Bu N adet u_{i0} sâbiti bir kere seçildi miydi artık her saf cismin iç enerjisi

$$U_i(P, T) = n_i \, u_i(P_i, T_i)$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin toplam U iç enerjisi dışadönük bir termodinamik büyüklük olup N adet alt sistemin her birinin iç enerjisinin toplamı olarak ifâde edilir :

$$U = \sum_{i=1}^{N} u_i(P, T) = \sum_{i=1}^{N} n_i \, u_i(P_i, T_i).$$

Şimdi sisteme dışarıdan herhangi bir ısı verilmeksizin bu N adet saf cismin toplam hacımları sâbit kalarak birbirlerine karışmalarıyla elde edilen homogen fazı göz önüne alalım. Bu karışımın $U_{[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}$ iç enerjisi, termodinamik denge hâlinde, P basıncı ile T sıcaklığının fonksiyonu olup belirli bir U_0 toplamsal sâbiti yaklaşıklığıyla tanımlanacaktır. Ancak bu karışım işlemi sırasında N adet saf cisimden oluşan sistemin hem mekanik, hem de ısı yönünden dışarıdan hiç bir etkiye mâruz kalmadığını ve dışarıya da hiç bir iş ya da ısı intikaal ettirmediğini varsaydığımızdan bu U_0 sâbiti öyle seçilmiş olmalıdır ki sistemin toplam iç enerjisi hiç değişmesin, yâni

$$U = \sum_{i=1}^{N} n_i \, u_i(P_i, T_i) = U_{[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}(P, T)$$

olsun. Birbirlerine karşı kimyasal olarak nötr kaldıkları varsayılan bu N adet saf cisim eğer aynı P basıncı ve T sıcaklığında dengede iseler bu basınç ve bu sıcaklık aynı zamanda dengedeki karışımın da haiz olacağı basınç ve sıcaklık olur :

$$U_{[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}(P,T)=\sum_{i=1}^{N} n_i\,u_i(P,T)$$

Bu ise mümkün çeşitli karışımların, denge hâlinde, P ve T nin fonksiyonları olan iç enerjilerini P ve T nin ve de n_i mol sayılarının

$$U(P\,,T,[n_i\,;i=1,2\,,\ldots,N])=\sum_{i=1}^{N} n_i\,u_i(P,T)$$

şeklinde tek ve aynı fonksiyonu olarak yazmayı mümkün kılar. Bu son ifâde ise âşikâr olarak n_i değişkenleri cinsinden birinci dereceden homogen ve sürekli bir fonksiyondur.

2) Tek fazlı saf bir cismin denge hâlini tasvir etmek için iki değişken yeteceğinden P, T, S ve V değişkenlerinden herhangi ikisi bağımsız değişken olarak alınabilir. Mümkün çeşitli karışımların denge hâli için de bu böyle olacaktır. Bu itibarla daha önce tanımlanmış olan U yu S entropisinin, V hacmının ve bir de n_i mol sayısının fonksiyonu olarak alabiliriz; buna göre dU diferansiyeli de

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,\,[n_i\,:\,i=1,2,\ldots,N]}dS+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,\,[n_i\,;\,i=1,2,\ldots,N]}dV$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{S,\,V,\,[n_j\,,\,j\neq i]}dn_i$$

şeklinde olacaktır. Bu ifâdenin ilk iki terimi daha önce göz önüne almış olduğumuz $U_{[n_i\,;\,i=1,\ldots,N]}(P\,,T)$ fonksiyonunun n_i lerin sâbit oldukları hâle indirgenmiş diferansiyelinden başka bir şey değildir; bu itibarla da bu ifâdedeki kısmî türevler sırasıyla T ile $-P$ den başka bir şey olamazlar. Diğer kısmî türevlere de μ_i dersek dU nun ifâdesi

$$\boxed{dU=T\,dS-P\,dV+\sum_{i=1}^{N}\mu_i\,dn_i}\qquad\text{(VI.1.1)}$$

şekline sokulmuş olur.

Buna göre ve H, F ve G nin de

$$H=U+PV$$
$$F=U-TS$$
$$G=F+PV$$

şeklinde tanımlanması dolayısıyla

$$\boxed{\begin{aligned} dH &= T\,dS + V\,dP + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, dn_i\,, \\ dF &= -S\,dT - P\,dV + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, dn_i\,, \\ dG &= -S\,dT + V\,dP + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, dn_i \end{aligned}}$$

olur. Buradan da kolaylıkla

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{S,P,[n_j,\,j\neq i]} = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_{T,V,[n_j,\,j\neq i]} = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,P,[n_j,\,j\neq i]} = \mu_i$$

olduğu tesbit edilir.

3) Yüzey etkileri olmadığı hâllerde, içedönük değişkenleri özdeş olan sistemlerin hâlini tasvir eden dışadönük değişkenleri de özdeş olup toplam kütleleriyle orantılıdırlar. Başka bir deyişle, özdeş basınç, sıcaklık ve kimyasal bileşim söz konusu olduğunda bir karışıma nisbetle k misli kütleli başka bir karışımın iç enerjisi de, entropisi de, hacmı da, n_i mol sayıları da beriki karışıma nisbetle k misli daha yüksek olur. Bu itibarla S, V ve n_i lerin bir fonksiyonu olarak ifâde edilen U iç enerjisi S nin, V nin ve n_i lerin birinci dereceden homogen bir fonksiyonu olup dolayısıyla da

$$\begin{aligned} U = S\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,[n_i;\,i=1,\ldots,N]} &+ V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,[n_i;\,i=1,\ldots,N]} \\ &+ \sum_{i=1}^{N} n_i\left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{S,V,[n_i;\,i=1,\ldots,N]} \end{aligned}$$

şeklindeki *EULER* bağıntısını gerçekler. Bu ise, 2) fıkrasında U nun kısmî türevleri hakkında söylenmiş olanların da ışığı altında

$$\boxed{U = TS - PV + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, n_i} \qquad \text{(VI.1.2)}$$

demektir.

4) (VI.1.1) ifâdesinden diferansiyel alarak

$$dU = T\,dS + S\,dT - P\,dV - V\,dP + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,dn_i + \sum_{i=1}^{N} n_i\,d\mu_i$$

bulunur. Bununla (VI.1.1) ifâdesi mukaayese edilirse

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} n_i\,d\mu_i = -S\,dT + V\,dP}$$

olması gerektiği tesbit edilmiş olur.

VI.2. Burulmalı bir sarkaç düşey mâdenî bir tele ortasından asılmış yatay bir çubuktan ibârettir. Burulma teli, sâbit varsayılan a ısı sığasıyla ve, C_0 ile k iki sâbit olmak üzere, $C = C_0 - k\,T$ şeklindeki burulma sâbitiyle karakterize edilmektedir. Âlet T sıcaklığında dengede iken yatay çubuğa çok yavaş ve tersinir biçimde, ve çevreyle hiç bir ısı alış verişi olmaksızın bir α burulması verilsin. Sistemi karakterize eden büyüklükler bağımsız T ve α değişkenlerinin fonksiyonları olacaklardır. Elemanter ve tersinir bir dönüşüm süresince sisteme dışarıdan temin edilen δQ ısı mikdarı $\delta Q = a\,dT + b\,d\alpha$ şeklindedir.

1) b katsayısını T, α ve k nın fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

2) dT nin T önünde küçük olduğu varsayımına dayanarak burulma sırasında telin sıcaklığının değişimini hesaplayınız.

3) Sistemin iç enerjisinin değişimi ne olur

Sayısal uygulama: $a = 1{,}8.10^{-4}$ J/°K; $\alpha = 3\pi/2$ rad; $T = 300$°K ve $C = 10^{-4} - 3.10^{-8}\,T$ (N . m/rad) olarak verilmektedir.

ÇÖZÜM: **1)** Telin burulmasının α dan $\alpha + d\alpha$ ya arttığı tersinir sonsuz küçük bir dönüşümde sisteme intikaal ettirilen iş, $C\alpha$ ile burulma çifti momentini göstermek üzere,

$$\delta W = -C\alpha\,d\alpha$$

dır. Sistemin iç enerjisindeki değişim $dU = \delta Q - \delta W$ olduğuna ve sisteme ithâl edilmiş olan δQ ısı mikdarı da $\delta Q = a\,dT + b\,d\alpha$ şeklinde olduğuna göre

$$dU = a\,dT + (b + C\alpha)\,d\alpha \qquad \text{(VI.2.1)}$$

olur. Buna binâen sistemin entropi değişimi de

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \rightarrow dS = \frac{a}{T}\,dT + \frac{b}{T}\,d\alpha$$

şeklindedir. Gerek dU nun gerekse dS nin tam diferansiyel olma şartlarını yazalım:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)_T = \left(\frac{\partial(b + C\alpha)}{\partial T}\right)_\alpha \rightarrow \left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)_T = \frac{\partial b}{\partial T} + \alpha \frac{\partial C}{\partial T} \tag{VI.2.2}$$

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{a}{T}\right)}{\partial \alpha}\right)_T = \left(\frac{\partial\left(\frac{b}{T}\right)}{\partial T}\right)_\alpha \rightarrow \frac{1}{T}\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)_T = \frac{1}{T}\frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T^2}. \tag{VI.2.3}$$

(VI.2.2) ile (VI.2.3) ün mukaayesesinden

$$\alpha \frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{b}{T} \rightarrow b = -T\alpha \frac{\partial C}{\partial T}$$

olduğu sonucu çıkar. Öte yandan verilmiş olduğu şekliyle C yalnız T nin fonksiyonu olduğundan $\partial C/\partial T = dC/dT$ olur. Şu hâlde : $b = -(T\alpha).\,dC/dT$ dir. Fakat $C = C_0 - kT$ olduğundan $dC/dT = -k$ olur. Böylelikle

$$\boxed{b = kT\alpha} \tag{VI.2.4}$$

olduğu saptanmış olur.

Sayısal uygulama : $b = 3.10^{-8} \times 300 \times \frac{3\pi}{2} = 4{,}24.10^{-5}$ J/rad

2) Sistemin dış ortamla ısı alış-verişi olmadığından

$$\delta Q = a\,dT + b\,d\alpha = 0$$

dır. Buna göre teldeki elemanter sıcaklık artışı, (VI.2.4) de göz önünde tutularak

$$dT = -\frac{b}{a}d\alpha = -\frac{kT}{a}\alpha\,d\alpha \tag{VI.2.5}$$

olur. Sıcaklık artışının çok az olduğu varsayılmakta olduğu cihetle kT/a yı sâbit olarak kabul etmek mümkündür. (VI.2.5) denklemi α nın 0 dan α ya kadar değerleri arasında integre edilirse α radyanlık bir burulma için teldeki sıcaklığın ΔT artışı için

$$\boxed{\Delta T = -\frac{kT}{a}\frac{\alpha^2}{2}}$$

bulunur.

Sayısal uygulama : $\Delta T = -\frac{3.10^{-8} \times 300}{1{,}8.10^{-4}}\frac{9\pi^2}{8} \approx -0{,}6\ °\mathrm{K}$, .

Bu zayıf soğuma, $\Delta T \ll T$ varsayımını teyid etmektedir.

3) Göz önüne alınan termodinamik dönüşüm hem tersinir ve hem de adyabatik (eşısılı) olduğundan eşentropilidir de. Buna göre

$$dU = -\delta W = C\alpha\, d\alpha\,.$$

$\Delta T \ll T$ olduğundan C bir sâbit gibi kabul edilebilir. Bu itibarla sistemin burulması 0 dan α radyana erişinceye kadar iç enerjide vukuu bulan ΔU değişimi de

$$\boxed{\Delta U = \frac{C\alpha^2}{2}}$$

olacaktır. Bu ifâde, dikkat edilecek olursa, sarkacı denge durumundan α radyan kadar uzaklaştırmak için yapılması gereken işin ifâdesinden başka bir şey değildir.

Sayısal uygulama : $C = 10^{-4} - (3.10^{-8} \times 300) = 9{,}1.10^{-5}\ \mathrm{N\,.\,m/rad}$,

$$\Delta U = 9{,}1.10^{-5} \cdot \frac{9\pi^2}{8} \simeq 10^{-3}\ \mathrm{J}.$$

VI.3. Belirli bir dielektriğin yalıtkanlık sâbitinin $\varepsilon = \varepsilon(T)$ şeklinde yalnızca sıcaklığın fonksiyonu olduğu saptanmış olsun.

1) $\delta Q = C_E\, dT + \alpha\, dE$ vaz edildiğinde α yı $d\varepsilon/dT$ cinsinden hesaplayınız.

2) $U(T, E) - U(T, 0)$ farkını değerlendiriniz.

3) Bir dış elektrik alanın sıfır değerinden bir E değerine geçişine tekaabül eden eşsıcaklıklı bir dönüşümde dielektriğe intikaal eden W işi ile Q ısısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: 1) Birim hacım başına yapılan iş

$$\delta W = -E\, d(\varepsilon E) = -\varepsilon E\, dE - E^2\, d\varepsilon$$

dur. δQ için verilen ifâdeyi göz önünde tutarak

$$dU = \delta Q - \delta W = C_E\, dT + \alpha\, dE + \varepsilon E\, dE + E^2 \frac{d\varepsilon}{dT} dT$$

$$= \left(C_E + E^2 \frac{d\varepsilon}{dT}\right) dT + (\alpha + \varepsilon E)\, dE$$

yazılabilir. dU bir tam diferansiyel olduğundan

$$\left(\frac{\partial}{\partial E}\left[C_E + E^2\frac{d\varepsilon}{dT}\right]\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T}[\alpha + \varepsilon E]\right)_E$$

ya da

$$\frac{\partial C_E}{\partial E} + 2E\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \frac{\partial \alpha}{\partial T} + E\frac{d\varepsilon}{dT}$$

veyâhut da

$$\frac{\partial C_E}{\partial E} + E\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0 \qquad \text{(VI.3.1)}$$

dır. Entropi değişiminin ifâdesi de hemen hesaplanabilir:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_E}{T}dT + \frac{\alpha}{T}dE.$$

Bu da bir tam diferansiyel olduğundan

$$\left[\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{C_E}{T}\right)\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\alpha}{T}\right)\right]_E$$

ya da

$$\frac{1}{T}\frac{\partial C_E}{\partial E} = \frac{1}{T}\frac{\partial \alpha}{\partial T} - \frac{\alpha}{T^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial C_E}{\partial E} - \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \frac{\alpha}{T} = 0 \qquad \text{(VI.3.2)}$$

bulunur. (VI.3.1) ile (VI.3.2) nin mukaayesesinden

$$\boxed{\alpha = TE\frac{d\varepsilon}{dT}} \qquad \text{(VI.3.3)}$$

olduğu sonucu çıkar.

2) (VI.3.3) ü göz önünde tutarak dU yeniden yazılırsa

$$dU = \left(C_E + E^2\frac{d\varepsilon}{dT}\right)dT + \left(TE\frac{d\varepsilon}{dT} + \varepsilon E\right)dE$$

bulunur. Eşsıcaklıklı bir dönüşüm için $dT = 0$ ve ε ile $d\varepsilon/dT$ de sâbit olacaklarından dU yu integre ederek

$$\boxed{\Delta U = U(T, E) - U(T, 0) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + T\frac{d\varepsilon}{dT}\right)E^2}$$

bulunur.

3) İşin ifâdesi hemen bulunur:

$$\boxed{W = \int \delta W = -\int E\, d(\varepsilon E) = -\frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

Buradan da Q için

$$\boxed{Q = U + W = \frac{1}{2} T \frac{d\varepsilon}{dT} E^2}$$

olur.

VI.4. Tersinir bir sulu pil göz önüne alınıyor. Pilde vukuu bulan kimyasal reaksiyonun da yalnızca, V hacımları ve P basınçları bütün pilin çalışması süresince sâbit kaldıkları varsayılan katı ya da sıvı cisimleri etkilemekte olduğu kabul edilmektedir.

Bu pilin hâli üç parametre aracılığıyla tasvir olunabilir: E elektromotor kuvveti, T sıcaklığı ve q depolanmış elektrik mikdarı. E elektromotor kuvvetinin

$$E = E_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

kaanûnu uyarınca değişmekte olduğu ve E_0 ın da T_0 sıcaklığındaki elektromotor kuvveti gösterdiği kabul edilmektedir.

C_q ile pilin ısı sığası ve $a = (dQ/dq)_T$ ile de eşsıcaklıktaki gizli ısısı gösterilsin. Pil eğer boşalmakta ise $dq < 0$ ve doldurulmakta ise de $dq > 0$ olmak üzere elemanter iş $\delta W = -E\, dq$ dur.

1) Pilin iç enerjisi ve entropisinin elemanter değişimlerine tekaabül eden dU ve dS diferansiyellerini C_q, E_0, α, T_0, T ve q nun fonksiyonları olarak ifâde ediniz.

2) T ve q değişkenleri aracılığıyla serbest entalpinin diferansiyelini yazıp buradan

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_{T,P} = -E_0\, \alpha$$

bağıntısını tesis ediniz.

3) 50 saniye zarfında 2A lik bir akım geçirmek sûretiyle pil eşsıcaklıklı bir şekilde doldurulmaktadır. Pilin yükü Δq kadar değişirse ΔU_T iç enerji değişimini, ΔS_T entropi değişimini, ΔH_T entalpi değişimini, ortaya çıkan Q_T ısısını ve pile intikaal eden W_T işini hesaplayınız.

$E_0 = 1{,}2$ V; $\alpha = 0{,}004$ °K^{-1}; $T_0 = 300$ °K **olması hâlinde** Δq, ΔU_T, ΔS_T, ΔH_T, Q_T **ve** W_T **yi hesaplayınız.**

4) Pil eşısılı bir biçimde 50 saniye süreyle 2A lik bir akım temin etmektedir. Pilin ΔT **sıcaklık değişimini hesaplayınız.**

($C_q = 418$ J/°K ve $T_0 = 300$ °K **olarak verilmektedir.**)

ÇÖZÜM : 1) Göz önüne alınan pilin dışarısı ile alış-verişi şunlardan ibârettir :

i) $\delta W = -E\,dq$ ya eşit bir elektrik enerjisi ($V =$ sâbit olduğundan basınç kuvvetlerinin yaptıkları iş sıfırdır);

ii) Pil işlemediği zaman sâbit yükte $C_q\,dT$ ye eşit bir ısı mikdarıyla, çalıştığı zaman ortaya çıkan $a\,dq$ ye eşit olan bir ısı mikdarının toplamı olan: $\delta Q = C_q dT + a\,dq$ ısı enerjisi.

Buna göre pilin iç enerjisinin diferansiyeli

$$dU = \delta Q - \delta W = C_q\,dT + (E + a)\,dq$$

ve entropisinin diferansiyeli de

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_q}{T}\,dT + \frac{a}{T}\,dq$$

şeklindedir. dU ve dS nin tam diferansiyeller olduklarını ifâde edersek bunun sonucu olarak

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial C_q}{\partial q} &= \frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial a}{\partial T}\\ \frac{\partial C_q}{\partial q} &= \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{a}{T}\end{aligned}\right\}$$

bağıntıları ortaya çıkar. Bu iki bağıntının mukaayesesi sonucu olarak da

$$a = -T\frac{\partial E}{\partial T}$$

olduğu bulunur. Hâlbuki $E = E_0\,[1 + \alpha\,(T - T_0)]$ olduğundan

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \alpha E_0$$

dır. Şu hâlde

$$a = -\alpha E_0\,T \quad \text{ve} \quad E + a = E_0\,(1 - \alpha T_0)$$

yazılabilir. Bu verilerin ışığı altında dU ve dS nin açık ifâdeleri

$$\boxed{dU = C_q\, dT + E_0\,(1 - \alpha\, T_0)\, dq} \qquad \text{(VI.4.1)}$$

ve

$$\boxed{dS = \frac{C_q}{T}\, dT - \alpha E_0\, dq} \qquad \text{(VI.4.2)}$$

şekline girer.

2) Serbest entalpinin diferansiyeli

$$dG = d(H - TS) = dU + d(PV) - d(TS)$$

dir. Ancak göz önüne alınan hâl için hem P, hem de V sâbit olduklarından $d(VP) = 0$ dır; diğer taraftan da $dU = \delta Q - \delta W$ olduğundan

$$dG = -\delta W + \delta Q - T\, dS - S\, dT$$

yazılır. Fakat pilin tersinir bir biçimde çalışması dolayısıyla $\delta Q - T\, dS = 0$ dır. Bu itibarla, neticede,

$$\boxed{dG = E\, dq - S\, dT}$$

olduğu anlaşılır. dG nin bir tam diferansiyel olduğu ifâde edilirse

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_T = -\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_q$$

olur. $(\partial E/\partial T)_q = \alpha E_0$ olduğu göz önünde tutulursa

$$\boxed{\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_T = -\alpha E_0}$$

olur.

3) Pil, doldurulduğu zaman, sanki E karşıt elektromotor kuvvetini haiz bir alıcı imiş gibi davranır. Buna göre

$$\Delta q = I\, \Delta t = 2 \times 50 = 100 \text{ Coulomb}$$

luk pozitif bir yük alır. Dönüşüm eşsıcaklıklı ($T = T_0$) olduğundan (VI.4.1) e göre

$$dU_T = E_0 (1 - \alpha T_0)\, dq$$

olur. Öte yandan, P ve V de sâbit olduklarından

$$dH_T = d(U + PV)_T = dU_T$$

ve (VI.4.2) ye göre de

$$dS_T = -\alpha E_0\, dq$$

bulunur. Öte yandan da

$$\delta Q_T = T_0\, dS_T = -\alpha E_0 T_0\, dq$$

$$\delta W = -E\, dq = -E_0\, dq$$

olur. Buradan integral almak sûretiyle U_T, H_T, S_T, Q_T ve W_T nin değişim mikdarları elde edilir:

$$\Delta U_T = \Delta H_T = E_0 (1 - \alpha T_0)\, \Delta q = -24 \text{ J}$$

$$\Delta S_T = -\alpha E_0\, \Delta q = -0{,}48 \text{ J/derece}$$

$$Q_T = -\alpha E_0 T_0\, \Delta q = -144 \text{ J}$$

$$W_T = -E_0\, \Delta q = -120 \text{ J}$$

4) Pil çalışıp da akım vermeye başladı mıydı, tıpkı E elektromotor kuvvetini haiz bir üreteçmiş gibi davranır ve $I\Delta t = 100$ Coulomb'luk bir yük temin eder ; bu da $\Delta q = -100$ C luk negatif bir yük almak demektir.

Pil eşısılı ve tersinir bir biçimde çalıştığı için $dS = 0$ olup (VI.4.2) ye göre

$$\frac{dT}{T} = \frac{\alpha E_0}{C_q}\, dq$$

dur. ΔT yi küçük farzederek buradan

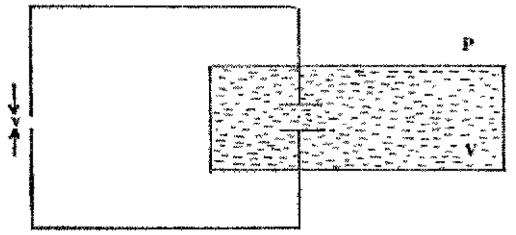
$$\boxed{\Delta T = \frac{\alpha E_0 T_0}{C_q}\, \Delta q}$$

bulunur. $\Delta q < 0$ olduğundan $\Delta T < 0$ dır ; yâni pilin eşısılı boşalması süresince bir soğuma vukuu bulur. Buradan, sonuç olarak,

$$\Delta T = -\frac{144}{418} = -0{,}34\ {}^\circ\text{K}$$

bulunur.

VI.5. Sâbit armatürlü bir kondansatör yalıtkan bir sıvı içine daldırılmış bulunmaktadır. V ile sıvının hacmını P ile de yüzeyindeki basıncı gösterelim. Sıvının ağırlığı dolayısıyla kendi içindeki basınç değişimi ihmâl edilmektedir.



Kondansatör ile sıvıdan oluşan sistemin tersinir bir biçimde evrim göstermesini sağlamak üzere kondansatörün armatürleri arasına tedrîcen bir v potansiyel farkı uygulanmaktadır. Sistemin sıcaklığı T ve entropisi de S dir.

1) (a) Tanımlanan büyüklükleri kullanarak sistemin iç enerjisinin diferansiyelini ifâde ediniz.

(b) $G = U + PV - vq - TS$ vaz edilmektedir. G nin diferansiyelini yazınız. V nin, S nin ve q nun kısmî türevleri arasında ne gibi bağıntılar vardır?

2) (a) Sıvı var iken kondansatörün sığası $C = \varepsilon_r C_0$ olup burada C_0 ile kondansatörün boşluktaki sığası gösterilmektedir: ε_r ise P ve T ye bağlı bir büyüklüktür. Sâbit basınç ve sıcaklıkta sıvının ΔV hacım değişiminin ne olacağını ve sisteme intikaal eden Q ısı mikdarını hesaplayınız. W_e ile kondansatörün elektrostatik enerjisi gösterilmek üzere ΔV ve Q yu T, ε_r, $(\partial \varepsilon_r/\partial T)_P$, $(\partial \varepsilon_r/\partial P)_T$ ve W_e nin fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

(b) $\varepsilon_r - 1$, yaklaşık olarak, sıvının ρ özgül kütlesi ile orantılıdır. ΔV yi ε_r, W_e ve sıvının $\chi = (1/\rho)\,(\partial \rho/\partial P)_T$ şeklinde tanımlanan eşsıcaklıktaki sıkıştırılma katsayısının fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

3) Sıvının işgaal ettiği hacım, biri armatürlerin dışında ve E elektrik alanının sıfır olduğu, diğeri ise armatürlerin arasında kalan V_0 hacımlı ve E elektrik alanının birbiçim sayılacağı iki kısım olarak telâkki edilmektedir. $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ şeklinde bir dielektrik sâbitinin karakterize ettiği boş olmayan bir ortamdaki hacım birimi başına elektrik alanı enerjisinin $W = \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$ olduğu bilindiğine göre sıvının $\Delta V/V_0$ izâfî hacım değişimini χ, ε_r, ε_0, ve E nin fonksiyonu olarak hesaplayınız ve ε_r nin P basıncının artan bir fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: 1) (a) İç enerjinin diferansiyeli $dU = \delta Q - \delta W$ şeklindedir. Pilin dışarıyla mübâdele ettiği iş ise basınç kuvvetlerinin yaptığı iş ile elektrostatik kuvvetlerin işinin toplamından ibârettir. Sistemdeki basınç kuvvetlerinin yaptıkları elemanter iş $\delta W_B = P\,dV$ dir; elektrostatik kuvvetlerin sistem üzerinde yaptıkları iş de: $\delta W_E = -v\,dq$ dur. Şu hâlde toplam elemanter iş

$$\delta W = P\,dV - v\,dq$$

dan ibârettir. Dışarıyla mübâdele edilen elemanter ısı mikdarı ise

$$\delta Q = T\,dS$$

olduğundan

$$\boxed{dU = -P\,dV + v\,dq + T\,dS} \tag{VI.5.1}$$

olur.

(b) $G = U + PV - vq - TS$ hâl fonksiyonunun diferansiyeli

$$dG = dU + P\,dV + V\,dP - v\,dq - q\,dv - T\,dS - S\,dT$$

dir. (VI.5.1) in ışığında bu ifâde

$$\boxed{dG = V\,dP - q\,dv - S\,dT}$$

ye indirgenir. G de, U da hâl fonksiyonları olduklarından bunların diferansiyelleri tam diferansiyellerdir. Bu özellik bize şu üç bağıntıyı temin eder:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{P,T} = -\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_{v,T}, \tag{VI.5.2}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{v,T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{v,T}, \tag{VI.5.3}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v,T} = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_{P,T}, \tag{VI.5.4}$$

2) (a) Sıvının V hacmı (v, P, T) bağımsız değişkenlerinin fonksiyonudur. Buna binâen sıvının elemanter hacım değişimi

$$dV = \frac{\partial V}{\partial v}\,dv + \frac{\partial V}{\partial P}\,dP + \frac{\partial V}{\partial T}\,dT$$

şeklindedir. Sâbit basınç ve sıcaklıkta (VI.5.2) yi de göz önünde tutarak

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_{P,T} dv = -\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_{v,T} dv$$

olur. Kondansatörün yükü de $q = Cv = \varepsilon_c C_0\, v$ olduğundan

$$dV = -\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial P}\right)_T C_0\, v\, dv$$

bulunur. Buradan integral almak sûretiyle sıvının hacım değişimi için

$$\Delta V = -\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial P}\right)_T \frac{\varepsilon_0 v^2}{2}$$

bulunur. Hâlbuki kondansatörün elektrik enerjisi $W_e = \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{1}{2} C_0 v^2 \varepsilon_r$ dir ; buna göre

$$\boxed{\Delta V = -\frac{W_e}{\varepsilon_r}\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial P}\right)_T} \qquad \text{(VI.5.5)}$$

olur.

Öte yandan sâbit basınç ve sıcaklıkta sistemin elemanter entropi değişimi

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_{P,T} dv$$

ya da (VI.5.4) dolayısıyla

$$dS = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v\,T} dv = \left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_P C_0 v \, dv$$

dir. Dönüşümün tersinir olması hasebiyle dışarısıyla mübâdele edilen elemanter ısı mikdarı

$$\delta Q = T dS = T\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_P C_0 v \, dv$$

olur. Bu ifâdeyi, $T =$ *sâbit* olması dolayısıyla, v üzerinden integre edelim; böylece intikaal eden ısı miktarı olarak

$$Q = T\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_P \frac{1}{2} C_0 v^2$$

ya da

$$\boxed{Q = T \frac{W_e}{\varepsilon_r}\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_P}$$

bulunur.

(b) k ile sâbit bir katsayı gösterilmek üzere $\varepsilon_r - 1 = k\rho$ kaanûnu

$$\frac{\partial(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r - 1} = \frac{\partial\rho}{\rho}$$

yazmayı mümkün kılar; buradan da

$$\frac{\partial(\varepsilon_r - 1)}{\partial P} = \frac{\partial\varepsilon_r}{\partial P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P} = (\varepsilon_r - 1)\chi$$

yazılabileceğinden (VI.5.5) i de

$$\boxed{\Delta V = -\chi W_e \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}} \qquad \text{(VI.5.6)}$$

şeklinde ifâde etmek imkânı doğmuş olur.

3) Bütün elektrik enerjisi V_0 hacmı içine depolanmış olup

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 V_0$$

dır. Şu hâlde ve (VI.5.6) dolayısıyla sıvının hacım değişimi

$$\Delta V = -\frac{1}{2}\chi\varepsilon_0 E^2 V_0(\varepsilon_r - 1)$$

ve dolayısıyla izafî hacım değişimi de

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{2}\chi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}$$

şeklinde olur.

Sıvının özgül ($\rho = m/V$) kütlesinin izâfî değişimi

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\varepsilon_0\chi(\varepsilon_r - 1)}{2}E^2$$

ve basıncın değişimi de

$$\Delta P = \frac{1}{\chi}\frac{\Delta\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta P = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}$$

şeklinde olacaktır.

Böylelikle armatürler arasındaki sıvının bir basınç artışına ($\Delta P > 0$) ve bir hacım azalmasına ($\Delta V/V_0 < 0$) mâruz kaldığı görülmektedir. v gerilimi arttığı zaman dielektrik hacmının azalması olayına *elektrostriksiyon olayı* adı verilir.

$\Delta V < 0$ olduğundan (VI.5.5) bağıntısı $\dfrac{\partial \varepsilon_r}{\partial P} > 0$ olduğuna; yâni izafî ε_r dielektrik sâbitinin basınçla birlikte arttığına işâret etmektedir.

VI.6. Karşılıklı iki yüzü düz, s yüzeyini haiz ve mâdenî olan l kalınlığında bir piezoelektrik levha göz önüne alınıyor. l kalınlığı ile levhanın q yükü (P ile bir yüzün üzerine uygulanan basınç, T ile levhanın sıcaklığı ve V ile de levhanın uçlarına uygulanan potansiyel farkını göstererek) $l = l(P, T, V)$ ve $q = q(P, T, V)$ şeklinde bağımsız üç değişkenin fonksiyonudurlar. P basıncı bir germe kuvveti için negatif, bir sıkıştırma kuvveti için de pozitif olarak hesaplanacaktır. Ayrıca, sistemin yalnızca eşısılı süreçlere tâbi tutulduğu varsayılacaktır. Eşısılı bir dönüşüm için piezoelektrik levhanın karakteristik katsayılarından

*** sâbit gerilimdeki esnelik modülü:** $E = l\left(\dfrac{\partial P}{\partial l}\right)_V$;

*** sâbit basınçtaki piezoelektrik katsayısı:** $K = \dfrac{1}{l}\left(\dfrac{\partial l}{\partial V}\right)_P$;

*** piroelektrik katsayısı:** $\Pi = \left(\dfrac{\partial q}{\partial T}\right)_{P,V}$;

*** lineer genleşme katsayısı:** $\lambda = \dfrac{1}{l}\left(\dfrac{\partial l}{\partial T}\right)_{P,V}$; **ve**

*** sâbit gerilimde yük artışı katsayısı:** $a = \left(\dfrac{\partial q}{\partial l}\right)_V$

şeklinde tanımlanır.

1) Termodinamiğin temel ilkelerini diferansiyel şekilleriyle uygulayarak, gerilim, eşısılı ve tersinir bir biçimde ΔV kadar değiştiğinde levhanın l kalınlığını sâbit tutmak için basıncı (a nın, s nin ve ΔV nin fonksiyonu olarak ifâde edilecek olan) bir ΔP mikdarı kadar değiştirmek gerektiğini gösteriniz. $a = 0{,}21$ ile tanımlanan bir piezoelektrik levha üzerine, gerilim 200 V arttığında fazladan uygulanması gereken kuvvetin şiddeti ve yönü ne olacaktır?

2) Piezoelektrik levhanın katsayıları arasında $a = KEs$ şeklinde bir bağıntı olduğunu gösteriniz.

3) Kalınlığın dl/l izafî artışını değişkenlerin dP, dT ve dV elemanter değişimlerinin ve E, λ, K karakteristik katsayılarının fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

4) $G = U - qV - Psl - TS$ termodinamik potansiyelinin diferansiyelini yazıp buradan levhanın karakteristik katsayılarının ve C_P ısı sığasının fonksiyonu olarak $S(P, T, V)$ entropisinin diferansiyelini çıkarınız.

5) dl/l yi 3) ve 4) fıkralarında elde edilen ifâdelerin ışığında $A\, dT + B\, dP$ şeklinde ifâde ediniz.

ÇÖZÜM: 1) Basınç kuvvetleri $-Ps\, dl$ ve elektrik kuvvetleri de $-V\, dq$ ya eşit bir iş yapmaktadırlar. Levhanın iç enerjisinin eşısılı bir dönüşüm için haiz olduğu diferansiyel de, şu hâlde

$$dU = -\delta W = Ps\, dl + V\, dq \qquad \text{(VI.6.1)}$$

den ibâret olur. l ve q değişkenleri yerine l ve V değişkenleriyle iş görebilmek için $F = U - qV$ şeklinde bir hâl fonksiyonu ithâl edelim. Bunun diferansiyeli

$$dF = dU - V\, dq - q\, dV$$

yâhut da

$$\boxed{dF = Ps\, dl - q\, dV}$$

olur. dF nin tam bir diferansiyel olması şartı

$$\left(\frac{\partial (Ps)}{\partial V}\right)_l = -\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)_V \quad \rightarrow \quad s\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_l = -a$$

olduğunu ortaya koymaktadır. Şu hâlde levhanın l kalınlığı sâbit tutulursa basıncın ve gerilimin değişimleri birbirlerine

$$dP = -\frac{a}{s}\, dV$$

diferansiyel bağıntısıyla bağlı olurlar. Buradan

$$\boxed{\Delta P = -\frac{a}{s}\, \Delta V}$$

bulunur. Şu hâlde gerilimin ΔV kadar artması hâlinde levhaya fazladan uygulanması gereken kuvvet:

$$s\, \Delta P = -a\, \Delta V$$

olur. Problemin verilerine göre bu kuvvet

$$-a\,\Delta V = -0{,}21 \times 200 = -42 \text{ Newton}$$

olmalıdır. Buradaki — işâreti piezoelekrik levhanın sıkıştırılmasına delâlet etmektedir. Şu hâlde demek ki V potansiyeli arttığı zaman levhanın kalınlığı da azalmak eğilimindedir.

2) l nin P, T ve S nin fonksiyonu olduğu yâni bu dört değişken arasında $f(l, P, T, S) = 0$ şeklinde fonksiyonel bir bağıntı bulunduğu düşünülebilir. Bu takdirde değişkenlerin kısmî türevleri arasında

$$\left(\frac{\partial l}{\partial P}\right)_{V,S}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{l,S}\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{P,S} = -1$$

şeklinde bir bağıntı olacağı mâlûmdur.

Hâlbuki tanımlanmış olan bütün katsayılar da, tersinir ve eşısılı yâni sâbit entropili dönüşümler için tanımlanmış bulunmaktadırlar; bu itibârla bu son bağıntıda her bir çarpanın yerine eşdeğeri vaz edilirse:

$$\frac{l}{E}\left(-\frac{a}{s}\right)\frac{1}{Kl} = -1 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = KEs}$$

bulunur.

3) Şimdi dl diferansiyelini P, T ve V bağımsız değişkenleri cinsinden ifâde edelim:

$$dl = \left(\frac{\partial l}{\partial P}\right)_{T,V} dP + \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_{P,V} dT + \left(\frac{\partial l}{\partial V}\right)_{P,T} dV$$

ya da

$$dl = \frac{l}{E}\,dP + \lambda l\,dT + Kl\,dV$$

olur. Şu hâlde piezoelektrik levhanın kalınlığının izafî değişimi

$$\boxed{\frac{dl}{l} = \frac{1}{E}\,dP + \lambda\,dT + K\,dV} \qquad \text{(VI.6.2)}$$

dir.

4) $dG = dU - q\,dV - V\,dq - Ps\,dl - sl\,dP - T\,dS - S\,dT$

dir. Göz önüne alınan dönüşümler tersinir ve eşısılı dönüşümler olduklarından $dS = 0$ dır. Buna göre dG nin ifâdesi (VI.6.1) i de göz önünde tutarak

$$\boxed{dG = -sl\,dP - S\,dT - q\,dV}$$

olur. dG nin bir tam diferansiyel olduğunu ifâde edersek

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,V} = s\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_{P,V} = \lambda l s \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{P,T} = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{P,V} = \Pi$$

olur. Entropinin diferansiyeli ise

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,V} dP + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,V} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{P,T} dV$$

olduğundan, buradan dS nin

$$\boxed{dS = \lambda l\,s\,dP + \frac{C_P}{T}\,dT + \Pi\,dV} \qquad \text{(VI.6.3)}$$

şeklinde ifâde edilebileceği sonucu çıkar.

5) Tersinir ve eşısılı bir termodinamik dönüşüm için $dS = 0$ dır. (VI.6.3) bağıntısından, bu takdirde

$$dV = -\frac{C_P}{\Pi T}\,dT - \frac{\lambda l s}{\Pi}\,dP$$

bulunur. Bu bağıntı ise (VI.6.2) bağıntısına vaz edilirse dl/l için

$$\boxed{\frac{dl}{l} = \left(\lambda - \frac{KC_P}{\Pi T}\right)dT + \left(\frac{1}{E} - \frac{K\lambda ls}{\Pi}\right)dP}$$

gibi $\dfrac{dl}{l} = A\,dT + B\,dP$ şeklinde bir ifâde elde edilmiş olur.

✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶

VI.7. n_a mol a gazı ve n_b mol de b gazının birbirine karışmasıyla oluşmuş bir gaz için, $x = n_a/(n_a + n_b)$ olmak ve μ ile kimyasal potansiyeller gösterilmek üzere, Problem VI.1 de söz konusu edilmiş olan *GİBBS-DUHEM* denkleminden faydalanarak,

$$x\left(\frac{\partial \mu_a}{\partial x}\right)_{T,P} + (1 - x)\left(\frac{\partial \mu_b}{\partial x}\right)_{T,P} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: *GİBBS-DUHEM* denklemi bu özel sisteme uygulanırsa

$$- S\, dT + V dP - n_a\, d\mu_a - n_b\, d\mu_b = 0$$

yâni

$$n_a\, d\mu_a + n_b\, d\mu_b = - S\, dT + V\, dP \qquad \text{(VI.7.1)}$$

bulunur.

Diğer taraftan $\mu_i = \mu_i(P, T, n_i)$ olduğundan

$$d\mu_i = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{P,(n_j)_{j=1,2}} dT + \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{T,(n_j)_{j=1,2}} dP + \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_i}\right)_{T,P} dn$$

dir.

Problem **VI.1** den

$$dG = - S\, dT + V\, dP + \sum_i \mu_i\, dn_i$$

olduğu bilinmektedir. dG bir tam diferansiyel olduğundan

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{P,n_j} = - \left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T,P,(n_j)_{j \neq i}},$$

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{P,n_j} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T,P,(n_j)_{j \neq i}}$$

eşitlikleri bulunur. O hâlde

$$d\mu_i = - \left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T,P,(n_j)_{j \neq i}} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T,P,(n_j)_{j \neq i}} dP + \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_i}\right)_{T,P} dn_i$$

dir. $i = a, b$ için

$$d\mu_a = - \left(\frac{\partial S}{\partial n_a}\right)_{T,P,n_b} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial n_a}\right)_{T,P,n_b} dP + \left(\frac{\partial \mu_a}{\partial n_a}\right)_{T,P} dn_a$$

$$d\mu_b = - \left(\frac{\partial S}{\partial n_b}\right)_{T,P,n_a} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial n_b}\right)_{T,P,n_b} dP + \left(\frac{\partial \mu_b}{\partial n_b}\right)_{T,P} dn_b$$

olur. Bu iki ifâde (VI.7.1) de yerine konarak

$$- \left[n_a \left(\frac{\partial S}{\partial n_a}\right)_{T,P,n_b} + n_b \left(\frac{\partial S}{\partial n_b}\right)_{T,P,n_a} \right] dT + \left[n_a \left(\frac{\partial V}{\partial n_a}\right)_{T,P,n_b} + n_b \left(\frac{\partial V}{\partial n_b}\right)_{T,P,n_a} \right] dV +$$

$$+ n_a \left(\frac{\partial \mu_a}{\partial n_a}\right)_{P,T} dn_a + n_b \left(\frac{\partial \mu_b}{\partial n_b}\right)_{T,P} dn_b = - S\, dT + V\, dP$$

bulunur. S ve V nin n_a ve n_b ye göre birinci mertebeden homogen fonksiyonlar oldukları âşikârdır. Buna göre

$$n_a\left(\frac{\partial S}{\partial n_a}\right)_{T,P,n_b} + n_b\left(\frac{\partial S}{\partial n_b}\right)_{T,P,n_a} = S,$$

$$n_a\left(\frac{\partial V}{\partial n_a}\right)_{T,P,n_b} + n_b\left(\frac{\partial V}{\partial n_b}\right)_{T,P,n_a} = V$$

olur ve yukarıdaki denklem de

$$n_a\left(\frac{\partial \mu_a}{\partial n_a}\right)_{T,P} dn_a + n_b\left(\frac{\partial \mu_b}{\partial n_b}\right)_{T,P} dn_b = 0$$

şeklini alır. Bu ifâde $n_a + n_b$ ile bölünür ve $x = n_a/(n_a + n_b)$ için $n_b = 1 - x$ olacağı da göz önünde tutulursa

$$x\left(\frac{\partial \mu_a}{\partial x}\right)_{T,P} dx + (1-x)\left(\frac{\partial \mu_b}{\partial x}\right)_{T,P} dx = 0\,,$$

ve dx de keyfî olduğundan

$$\boxed{x\left(\frac{\partial \mu_a}{\partial x}\right)_{T,P} + (1-x)\left(\frac{\partial \mu_b}{\partial x}\right)_{T,P} = 0}$$

bulunur.

VII. BÖLÜM

GAZLARIN KİNETİK TEORİSİ

VII.1. $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ **varsayarak** *ENSKOG* **denklemini yeniden tesis ediniz.**

ÇÖZÜM: Molekül üzerine etkiyen kuvvet $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ şeklinde olmak ve $\psi = \psi(\mathbf{v})$ de mümkün çarpışma sâbitlerinden birini göstermek üzere *BOLTZMANN* denkleminden

$$\int \psi(\mathbf{v}) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{3} K_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial v_k} \right\} . f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d^3\mathbf{v} = 0$$

yazılabileceği mâlûmdur. [bk. *AHMED YÜKSEL ÖZEMRE*: **ISI TEORİSİ**, (VII.2) sayılı alt bölüm].

$|\mathbf{v}| \to \infty$ için $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \to 0$ olduğunu ve gazların kinetik teorisi çerçevesi içinde A gibi bir büyüklüğün ortalama değerinin de

$$\langle A \rangle \equiv \frac{\int A f\, d^3\mathbf{v}}{\int f\, d^3\mathbf{v}} = \frac{1}{n} \int A f\, d^3\mathbf{v}$$

bağıntısı aracılığıyla tanımlandığını kabul edeceğiz. Buna göre yukarıdaki denklemin ilk teriminin

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f\, d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(n \langle \psi \rangle\Big) = \langle \psi \rangle \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t},$$

ikinci teriminin

$$\sum_{k=1}^{3} \int \psi v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} d^3\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \int (\psi v_k) f\, d^3\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(n \langle v_k \psi \rangle\Big)$$

ve üçüncü teriminin de, kısmî integrasyonla

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{3}\int \psi(\mathbf{v})\, K_k(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial v_k}\, d^3\mathbf{v} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{3}\Big\{[\psi K_k f]_{|\mathbf{v}|\to\infty} -$$

$$-\int f\left[\frac{\partial\psi}{\partial v_k}K_k + \psi\frac{\partial K_k}{\partial v_k}\right] d^3\mathbf{v}\Big\} = 0 - \sum_{k=1}^{3}\frac{n}{m}\left\langle K_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right\rangle - \sum_{k=1}^{3}\frac{n}{m}\left\langle\frac{\partial K_k}{\partial v_k}\psi\right\rangle$$

şeklinde yazılabileceği görülmektedir. Buna göre genel *ENSKOG* denklemi

$$\boxed{\begin{aligned}&\langle\psi\rangle\frac{\partial n}{\partial t} + n\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(n\langle v_k\psi\rangle\Big) - \sum_{k=1}^{3}\frac{n}{m}\left\langle K_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right\rangle - \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{3}\frac{n}{m}\left\langle\frac{\partial K_k}{\partial v_k}\psi\right\rangle = 0\end{aligned}}$$

şekline girer.

VII.2. Birbiçim bir E elektrik alanı içindeki elektronlardan oluşan bir termodinamik sistem göz önüne alınıyor.

1) Çarpışma olmadığı takdirde bu sistemin *BOLTZMANN* denklemi nasıl olur? Bu denklemin genel çözümünü tesis ediniz.

2) Rölâksasyon zamanlı yaklaşım çerçevesi içinde sağ yanlı *BOLZMANN* denklemini yazıp f_0 ın, denge durumuna tekaabül eden *MAXWELL-BOLTZMANN* dağılımı olması hâlinde denklemin genel çözümünü bularak fiziksel yorumunu veriniz.

ÇÖZÜM: **1)** Bir elektronun üstüne etkiyen kuvvetin $-e\mathbf{E}$ olduğunu da göz önünde tutarak, çarpışma terimsiz *BOLTZMANN* denklemi bu hâl için

$$\mathscr{D}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m}\mathbf{p}\,.\,\mathbf{grad}_{\mathbf{r}} f - e\mathbf{E}\,.\,\mathbf{grad}_{\mathbf{p}} f = 0 \qquad \text{(VII.2.1)}$$

şekline bürünür.

(VII.2.1) birinci mertebeden, kısmî türevli lineer ve sağ yansız bir diferansiyel denklemdir. Bunun verilen şartlar altındaki çözümünü elde etmek için önce bu cins diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin nasıl elde edildiklerini kısaca hatırlatalım.

Birinci mertebeden, kısmî türevli, lineer ve sağ yansız bir diferansiyel denklem, X_i ler $X_i = X_i(x_i)$ şeklinde n adet x_i değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(VII.2.2)}$$

şeklindedir.

Şimdi de

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_i}{X_i} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad \text{(VII.2.3)}$$

şeklindeki diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. (VII.2.3) sisteminin

$$F_j(x_i) = C_j = \text{sâbit}\,, \qquad j = 1,2,\ldots,n-1 \qquad \text{(VII.2.4)}$$

şeklinde $n-1$ adet lineer bağımsız çözümü haiz olacağı kolayca tahkik edilir.

F_j ilkel integrallerinin birbirlerinden bağımsız olmaları bu fonksiyonların $n-1$ değişkene göre *JACOBİ* determinantlarının sıfırdan farklı olması demektir:

$$J = \left| \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \right| \neq 0.$$

(VII.2.3) sisteminin çözümü olan (VII.2.4) fonksiyonları aynı zamanda (VII. 2.2) denklemini de tahkik ederler. Gerçekten de, dx_i lerin (VII.2.3) dolayısıyla X_i lerle orantılı olmalarından ötürü

$$0 = dC_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

yazılabilir. Eğer F, (VII.2.3) sisteminin ve dolayısıyla da (VII.2.2) denkleminin özel bir çözümü ise F_j lerden bağımsız olamaz ve

$$\left| \frac{\partial\,(F, F_1, \ldots, F_{n-1})}{\partial\,(x_1, \ldots, x_n)} \right| = 0$$

olur, yâni F fonksiyonu $n-1$ adet F_j ilkel integralinin

$$F = \Phi(F_1, \ldots, F_{n-1})$$

şeklinde bir fonksiyoneli olur. Bu da (VII.2.2) nin genel çözümüdür.

Bu bilgilerin ışığı altında (VII.2.1) denkleminin çözümünün

$$dt = m\frac{dx}{p_x} = m\frac{dy}{p_y} = m\frac{dz}{p_z} = -\frac{dp_x}{eE_x} = -\frac{dp_y}{eE_y} = -\frac{dp_z}{eE_z}$$

diferansiyel denklem sistemine indirgeneceği anlaşılmaktadır. Bu sistemin ise bir elektrik alanındaki bir elektronun hareket denkleminden başka bir şey olmadığı derhâl görülmektedir. $\mathbf{p}_0$ ve $\mathbf{r}_0$ ile, elektronun $t = 0$ ânındaki impuls vektörü ile yervektörü gösterilirse bu sistemin çözümü

$$\boxed{\mathbf{p} = -e\mathbf{E}\,t + \mathbf{p}_0\,, \quad \mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{2m}t^2 + \frac{\mathbf{p}_0}{m}t + \mathbf{r}_0}$$

şeklindedir. Buradan derhâl iki vektörel ilkel integral ifâdesi elde edilir:

$$\mathbf{p} + e\mathbf{E}\,t = \mathbf{p}_0 = s\hat{a}bit$$

$$\mathbf{r} + \frac{e\mathbf{E}}{2m}t^2 - \frac{\mathbf{p}_0}{m}t = \mathbf{r}_0 = s\hat{a}bit$$

Şu hâlde (VII.2.1) in genel çözümü, Φ ile 6 değişkenin keyfî bir fonksiyonunu göstermek üzere

$$\boxed{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \Phi(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \Phi\left(\mathbf{r} + \frac{e\mathbf{E}}{2m}t^2 - \frac{\mathbf{p}_0}{m}t\,,\, \mathbf{p} + e\mathbf{E}\,t\right)}$$

şeklindedir.

Φ nin (VII.2.1) in çözümü olduğu kolaylıkla tahkik edilebilir. Gerçekten de

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= (\mathbf{grad}_{\mathbf{r}_0}\Phi).\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + (\mathbf{grad}_{\mathbf{p}_0}\Phi).\frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial t} \\ &= \left(\frac{e\mathbf{E}}{m}t - \frac{\mathbf{p}_0}{m}\right).\,\mathbf{grad}_{\mathbf{r}_0}\Phi + (e\mathbf{E})\,.\,\mathbf{grad}_{\mathbf{p}_0}\Phi\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_0}\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} f = \mathbf{grad}_{\mathbf{r}_0}\Phi$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial p_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{0x}}\frac{\partial p_{0x}}{\partial p_x} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{0x}}\,.\,1$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial p_y} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{0y}}\frac{\partial p_{0y}}{\partial p_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{0y}}\,.\,1$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial p_z} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{0z}}\frac{\partial p_{0z}}{\partial p_z} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{0z}} \cdot 1$$

yâni

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{p}} f = \mathbf{grad}_{\mathbf{p}_0} \Phi$$

olduğundan

$$\mathscr{D} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} f - e\mathbf{E} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{p}} f = \left(\frac{e\mathbf{E}}{m} t - \frac{\mathbf{p}_0}{m}\right) \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{r}_0} \Phi +$$

$$+ (e\mathbf{E}) \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{p}_0} \Phi + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{r}_0} \Phi - (e\mathbf{E}) \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{p}_0} \Phi =$$

$$= \left(\frac{e\mathbf{E}}{m} t - \frac{\mathbf{p}_0}{m} + \frac{\mathbf{p}_0}{m} - \frac{e\mathbf{E}}{m} t\right) \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{r}_0} \Phi + (e\mathbf{E} - e\mathbf{E}) \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{p}_0} \Phi$$

$$= 0$$

bulunur. Bu da Φ nin (VII.2.1) denkleminin genel çözümü olduğunun kanıtıdır.

2) Rölâksasyon zamanlı yaklaşım çerçevesi içinde, göz önüne alınan hâle tekaabül eden sağ yanlı *BOLTZMANN* denklemi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} f - e\mathbf{E} . \mathbf{grad}_{\mathbf{p}} f = \frac{f - f_0}{\tau} \qquad \text{(VII.2.5)}$$

olup f_0 ın ifâdesi de, n ile birim hacım başına tânecik sayısını göstererek,

$$f_0 = n \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} \exp(-\beta p^2/2m), \qquad (\beta = 1/kT)$$

ile verilmiştir.

(VII.2.5) birinci mertebeden, kısmî türevli, lineer ve sağ yanlı diferansiyel denklemini (VII.2.2) gibi sağ yansız bir denkleme indirgemek mümkündür. Bu cins sağ yanlı denklemlerin en genel hâli, X_i ve Z fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve z nin fonksiyonları olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = Z \qquad \text{(VII.2.6)}$$

şeklindedir. Buradan hareketle, ve genel çözümün de

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \qquad \text{(VII.2.7)}$$

kapalı şekliyle $n+1$ değişkenin fonksiyonu hâlinde verilmesi şartıyla, (VII.2.2) ye benzer bir denkleme erişmek mümkündür. Nitekim (VII.2.7) yi meselâ x_i ye göre türetirsek

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

yazılabilir. Bu (VII.2.6) daki yerine vaz edilirse

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial G}{\partial x_i} + Z\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \qquad \text{(VII.2.8)}$$

bulunur. Şu hâlde (VII.2.6) sağ yanlı denklemin genel çözümü (VII.2.8) sağ yansız denklemin $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ değişkenlerine bağlı çözümünü sıfıra eşitlemekle elde edilmiş olacaktır.

Buna binâen sağ yanlı (VII.2.5) denkleminin çözümü de

$$dt = m\frac{dx}{p_x} = m\frac{dy}{p_y} = m\frac{dz}{p_z} = -\frac{dp_x}{eE_x} = -\frac{dp_y}{eE_y} = -\frac{dp_z}{eE_z} = -\frac{df}{(f-f_0)\tau}$$

diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenir.

Bu denklemlerden ilk altısı hareket denklemlerinden ibârettir. Sonuncusu ise

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = \frac{f_0}{\tau} \qquad \text{(VII.2.9)}$$

şeklinde olup buradaki f_0 ın ifâdesinde, $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{p}$ değişkenlerinin, hareket denklemlerinin integrasyonuyla elde edilecek ifâdeleriyle gösterilmiş olmaları gereklidir. Eğer sıcaklık ile tâneciklerin sayısının her yerde aynı oldukları kabul edilirse f nin t ye bağlılığı ancak $\mathbf{p}$ aracılığıyla olur. (VII.2.9) un, sâbitlerin değişimi yöntemiyle elde edilen çözümü de

$$f = C(t)\,e^{-t/\tau}$$

şeklinde olup $C(t)$ de

$$\frac{dC}{dt} = \frac{f_0}{\tau}e^{t/\tau}$$

denklemini tahkik eder. Eğer $f_0[t_0]$ ile $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{p}$ değişkenleri yerine bunların $t = t_0$ ânındaki değerlerinin vaz olunmuş olduğu f_0 fonksiyonu gösterilirse son diferansiyel denklemin çözümü

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} f_0[t_0]\,e^{t_0/\tau}\frac{dt_0}{\tau} + C_0$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre de

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} f_0[t_0]\, e^{(t_0 - t)/\tau} \frac{dt_0}{\tau} + C_0\, e^{-t/\tau}$$

yâhut da $t_0 - t = t'$ vaz ederek

$$f(t) = \int_{0}^{\infty} f_0[t']\, e^{-t'/\tau} \frac{dt'}{\tau} + C\, e^{-t/\tau} \qquad \text{(VII.2.10)}$$

bulunur.

Eğer hem n hem de β, $\mathbf{r}_{t_0}$ ile t' den bağımsız iseler $f_0[t']$ yü açıkça belirlemek mümkündür. $\mathbf{p}_{t_0}$ ile $t = t_0$ daki impulsu göstererek

$$\mathbf{p}_{t_0} = \mathbf{p} - e\mathbf{E}\,(t_0 - t) = \mathbf{p} + e\mathbf{E}\,t'$$

dür. Buna göre

$$f_0[t'] = n\,(m\beta/2\pi)^{3/2} \exp\left[-\frac{\beta}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{E}\,t')^2\right]$$

olur. Bu hâl için f nin t ye bağlılığının yalnızca $\mathbf{p}$ aracılığıyla olduğuna da işâret edelim.

BOLTZMANN denkleminin genel çözümü

$$\Phi(C_0\,, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = 0$$

şeklinde olacaktır. Φ ile yedi değişkenin tekil olmayan türetilebilir keyfî bir fonksiyonu gösterilmektedir. Şu hâlde

$$C_0 = \psi(\mathbf{r}_0\,, \mathbf{p}_0)$$

ve dolayısıyla da (VII.2.10) dan

$$\boxed{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int_{0}^{\infty} f_0[t']\, e^{-t'/\tau} \frac{dt'}{\tau} + e^{-t/\tau}\, \psi\!\left(\mathbf{r} + \frac{e\mathbf{E}}{2m} t^2 - \frac{\mathbf{p}_0}{m} t,\, \mathbf{p} + e\mathbf{E}\, t\right)}$$

bulunur. Bu ifâdenin ikinci terimi, eğer ψ fonksiyonu t ile birlikte çabuk artan bir fonksiyon değilse, üstel olarak sıfıra gider; τ da n ve β nın t den bağımsız olmaları hâlinde stasyoner bir rejime dönüş zamanını karakterize eder. $t > \tau$ olduğu zaman aralıkları göz önünde tutulursa sâdece birinci terimin bir katkısı olur. Elektrik alanı yoksa

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0 + e^{-t/\tau}\, \psi\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_0}{m} t,\ \mathbf{p}\right)$$

olur ki bu çözüm de denge dışı bırakılan bir sistemin τ mertebesinde bir zaman sonra gene f_0 denge dağılımına döneceğini açıkça göstermektedir.

VII.3. Aynı anda uygulanmış bir E elektrik alanı ile bir de B magnetik alanının etkisi altında bir elektron gazı göz önüne alınıyor.

1) Rölâksasyon zamanlı yaklaşım çerçevesi içinde sistemin *BOLTZMANN* denklemini, birbiçim bir yük yoğunluğunun varlığını varsayıp elektron gazının stasyoner hâli için yazınız.

2) Bu denklem peşpeşe yaklaşımlarla çözülmek istendiği takdirde f dağılım fonksiyonunun B magnetik indüksiyonundan bağımsız olacağını gösteriniz.

3) C ile $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{E},\mathbf{B})$ şeklinde bilinmeyen bir vektör gösterilmek üzere *BOLTZMANN* denkleminin

$$f = f_0 + e\,\tau\, \mathbf{C} \,.\, \mathrm{grad}_p f_0$$

şeklinde bir çözümü haiz olması için C vektörünün gerçeklemesi gereken bağıntıyı yalnızca E nin lineer terimlerini göz önünde tutarak tesis ediniz.

4) C yi E ve B nin fonksiyonu olarak belirleyip buradan f dağılımının ifâdesini çıkarınız.

ÇÖZÜM: 1) $-e$ yüklü bir tânecik üzerine

$$\mathbf{K} = -e\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

şeklindeki *LORENTZ* (1853-1928) kuvvetinin etkidiği bilinmektedir. f dağılım fonksiyonu $\mathbf{r}$ den bağımsızsa ve stasyoner bir rejim için

$$\nabla_r f = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

olur. Bu takdirde de rölâksasyon zamanlı yaklaşım çerçevesi içinde *BOLTZMANN* denklemi

$$\boxed{-e\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \,.\, \nabla_p f = -\frac{f - f_0}{\tau}} \qquad \text{(VII.3.1)}$$

şekline indirgenmiş olur.

2) Peşpeşe yaklaşımlar yöntemi, n-ninci mertebeden yaklaşımda bir önceki denklemde birinci terimdeki f ye ($n-1$)-inci mertebeden yaklaşımda elde edilmiş olan ifâdesini ikaame etmekten ibârettir.

Problem **VII.2** den $f_0 = n\,(m\beta/2\pi)^{3/2}\exp(-\beta p^2/2m)$ olduğunu bilmekteyiz; buna göre $\nabla_{\mathbf{p}} f_0$ ın $\mathbf{v}$ ile orantılı olması dolayısıyla $[\mathbf{v}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{v})]$ kutu çarpımı sıfır olacağından 1. mertebeden yaklaşımda ve $\varepsilon = p^2/2m$ vaz ederek,

$$f = f_0 + \tau e\,\mathbf{E}\,.\,\nabla_{\mathbf{p}} f_0 = f_0 + \tau e\,\mathbf{E}\,.\,\mathbf{v}\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

olur. Daha yüksek mertebe yaklaşımlarda da bu hep böyle olacağından f dağılım fonksiyonunu bu yöntem çerçevesi içinde **B** nin fonksiyonu olarak ifâde edebilme olanağı yoktur. Bu sebepten ötürü de peşpeşe yaklaşımlar yöntemi bu problem için uygun değildir.

3) Elektrik alanı olmadığı takdirde magnetik alan, $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ olacağı için ve kezâ *LORENTZ* kuvvetinin de ortalama olarak hiç bir etkisi olmayacağından, elektronların dağılımı üzerinde bir etkiyi haiz değildir.

Buna binâen **C** vektörü eğer $\mathbf{B} = 0$ ise **E** ile çakışmalı ve eğer $\mathbf{E} = 0$ ise, sıfır olmalıdır. Şu hâlde **C** vektörü **E** vektörüyle orantılıdır. Buna göre

$$f = f_0 + e\tau\,\mathbf{C}\,.\,\nabla_{\mathbf{p}} f_0 = f_0 + \frac{e\tau}{m}\,(\mathbf{C}\,.\,\mathbf{p})\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \qquad \text{(VII.3.2)}$$

ve buradan da

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,\frac{\mathbf{p}}{m} + \frac{e\tau}{m}\left[\mathbf{C}\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + (\mathbf{C}\,.\,\mathbf{p})\,\frac{\mathbf{p}}{m}\,\frac{\partial^2 f_0}{\partial \varepsilon^2}\right]$$

bulunur. Bu ifâde (VII.3.1) e ikaame edilir ve ayrıca (VII.3.2) den de

$$-\frac{f - f_0}{\tau} = -\frac{e}{m}\,(\mathbf{C}\,.\,\mathbf{p})\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -e\,(\mathbf{C}\,.\,\mathbf{v})\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

olduğu göz önüne alınır ve kezâ $\mathbf{C}\,.\,\mathbf{E} \sim \mathbf{E}\,.\,\mathbf{E}$ şeklindeki terimler de ihmâl edilirse, sonunda

$$\mathbf{C}\,.\,\mathbf{v} = \mathbf{E}\,.\,\mathbf{v} + \frac{e\,\tau}{m}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,.\,\mathbf{C}$$

ya da

$$\mathbf{C}\,.\,\mathbf{v} = \mathbf{E}\,.\,\mathbf{v} + \frac{e\,\tau}{m}\,(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\,.\,\mathbf{v}$$

ifâdesi elde edilir. Bu ifâde **v** ne olursa olsun doğru olduğundan

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{E} + \frac{e\tau}{m}(\mathbf{B}\times\mathbf{C})} \tag{VII.3.3}$$

olduğu anlaşılmış olur.

4) **C** vektörü **E** ve **B** vektörlerinin bir fonksiyonu olduğundan **C** yi birbirlerinden lineer olarak bağımsız olan **E**, **B** ve **B** × **E** vektörlerinden oluşan bir referans üçyüzlüsünde bileşenlerine ayırabiliriz. Buna göre

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{B} + \gamma(\mathbf{B}\times\mathbf{E}) \tag{VII.3.4}$$

yazılabilir. (VII.3.4) ü (VII.3.2) ye ikaame ederek

$$\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{B} + \gamma(\mathbf{B}\times\mathbf{E}) = \mathbf{E} + \frac{e\tau}{m}\,\mathbf{B}\times[\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{B} + \gamma(\mathbf{B}\times\mathbf{E})] =$$

$$= \mathbf{E} + \alpha\frac{e\tau}{m}(\mathbf{B}\times\mathbf{E}) + \gamma\frac{e\tau}{m}[(\mathbf{E}\,.\,\mathbf{B})\,\mathbf{B} - B^2\,\mathbf{E}]$$

olur. Buradan, terimlerin özdeşliklerinden

$$\alpha = 1 - \frac{\gamma e\tau}{m}B^2\,, \qquad \beta = \frac{\gamma e\tau}{m}\mathbf{B}\,.\,\mathbf{E}\,, \qquad \gamma = \frac{\alpha e\tau}{m}$$

yâni

$$\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{e\tau}{m}\right)^2 B^2}\,, \quad \beta = \frac{\left(\frac{e\tau}{m}\right)^2 \mathbf{B}\,.\,\mathbf{E}}{1 + \left(\frac{e\tau}{m}\right)^2 B^2}\,, \quad \gamma = \frac{\frac{e\tau}{m}}{1 + \left(\frac{e\tau}{m}\right)^2 B^2}$$

bulunur. Buna göre f nin (VII.3.2) ile verilen ifâdesinin açık şekli de,

$$a = \frac{1}{1 + \left(\frac{e\tau B}{m}\right)^2}$$

vaz ederek,

$$\boxed{f = f_0 + \frac{e\tau}{a}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\mathbf{v}\,.\left[\mathbf{E} + \left(\frac{e\tau}{m}\right)^2(\mathbf{B}\,.\,\mathbf{E})\,\mathbf{B} + \frac{e\tau}{m}(\mathbf{B}\times\mathbf{E})\right]}$$

olur.

VII.4. İdeal bir gaz göz önüne alındığında bunu oluşturan moleküllerin en muhtemel hızlarının : $v_p = \sqrt{2kT/m}$; ortalama hızlarının: $\langle v \rangle = \bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$ ve ortalama kare hızlarının kare kökünün de: $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT/m}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Kendisi bütünüyle bir hareket yapmayan ($\mathbf{v}_0 = 0$) ideal bir gazdaki moleküllere tekaabül eden *MAXWELL-BOLTZMANN* dağılım fonksiyonu

$$f_0(\mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m|\mathbf{v}^2|/2kT}$$

şeklindedir. Şimdi $F(v)\,dv$ ile hızların v ile $v+dv$ aralığına düşen moleküllerin birim hacım başına sayısını gösterelim. Bu büyüklüğün, hızlarının doğrultuları göz önünde bulundurulmaksızın, hızları söz konusu aralığa düşen bütün moleküllerin toplamı olacağı âşikârdır; şu hâlde

$$F(v)\,dv = \int f_0(\mathbf{v})\,d^3\mathbf{v}$$

olacaktır. Buradaki üç katlı integral ise $v < |\mathbf{v}| < v + dv$ şartına uyan bütün hızlar, üzerinden alınacaktır. $f_0(\mathbf{v})$ yalnızca $|\mathbf{v}|$ ye tâbî olduğundan söz konusu integral, hızlar uzayındaki v ile $v + dv$ arasında kalan küresel kabuğun $4\pi v^2\,dv$ hacmı ile $f_0(v)$ nin çarpımından ibâret olacaktır:

$$F(v)\,dv = 4\pi f_0(v)\,v^2\,dv\,. \qquad \text{(VII.4.1)}$$

Buna göre

$$\boxed{F(v) = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\,e^{-mv^2/2kT}}$$

olur. Buna *MAXWELL hız dağılımı* adı verilmektedir. Bu dağılımda en muhtemel hızın dağılımın maksimumuna tekaabül eden hız olduğu âşikârdır. Buradan kolayca

$$v_p = \text{Max}\,F(v) = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

olduğu hesaplanır.

Ortalama hız ise tanımı gereği

$$\bar{v} = \langle v \rangle = \frac{\int_0^\infty v\,F(v)\,dv}{\int_0^\infty F(v)\,dv} = \frac{1}{n}\int_0^\infty v\,F(v)\,dv$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^\infty f_0(v)\,v\,4\pi\,v^2\,dv = \frac{4\pi}{n}\int_0^\infty f_0(v)\,v^3\,dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3\,e^{-mv^2/2kT}\,dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{3/2}\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{-2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

olarak saptanmış olur.

Şimdi ortalama kare hızı hesaplayalım:

$$\overline{v^2} = \langle v^2 \rangle = \frac{1}{n}\int_0^\infty v^2 f_0(v)\,4\pi\,v^2\,dv = \frac{4\pi}{n}\int_0^\infty f_0(v)\,v^4\,dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4\,e^{-mv^2/2kT}\,dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{3/2}\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}\left(\frac{kT}{m}\right)^{5/2} = \frac{3kT}{m}$$

ve buradan da

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

bulunur.

VII.5. Enerjileri ε ile $\varepsilon + d\varepsilon$ arasında bulunan moleküllerin *MAXWELL-BOLZMANN* dağılımının

$$F(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2\pi\,n}{(\pi\,kT)^{3/2}}\sqrt{\varepsilon}\;e^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Enerjileri ε ile $\varepsilon + d\varepsilon$ arasında bulunan moleküllerin $F(\varepsilon)\,d\varepsilon$ sayısı, $\varepsilon = (1/2)\,mv^2$ ve $dv = d\varepsilon\,/\sqrt{2m\varepsilon}$ olması dolayısıyla (VII.4.1) den, derhâl,

$$F(\varepsilon)\,d\varepsilon = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \varepsilon \frac{2}{m} e^{-\varepsilon/kT} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

$$= \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon/kT}\, d\varepsilon$$

olarak hesaplanır.

VII.6. Bir molekülün yarıçapı d olduğundan iki molekülün çarpışması için σ etkin tesir kesitinin $\sigma = 4\pi d^2$ olacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM: Bir gazı oluşturan moleküllerden biri hariç diğer hepsinin yerlerinde çakılı kaldığını, söz konusu tek molekülün de bunlar arasında ortalama $\langle v \rangle$ hızıyla hareket etmeye devam ettiğini farzedelim. Moleküllerin d yarıçaplı tamamen esnek küreler olduklarını da kabul edelim. Şu hâlde bir çarpışma esnâsında çarpışan iki molekülün merkezleri arasındaki uzaklık $2d$ den ibâret olacaktır. Eğer hareket eden molekülün yarıçapı $2d$ olsaydı da duran molekül bir noktaya indirgenmiş olsaydı iki molekülün merkezleri arasındaki uzaklık gene $2d$ den ibâret olacaktı. Bu itibarla hareket eden molekülün etkin dik kesiti ya da σ çarpışma tesir kesiti

$$\sigma = \pi\,(2d)^2 = 4\pi d^2$$

den ibâret olacaktır.

VII.7. Bir molekülün, birim hacmında n molekül bulunan bir gaz içinde t zamanı zarfında yapacağı çarpışmaların z sayısının, peşpeşe iki çarpışma arasında katedeceği λ ortalama serbest yolunun ve peşpeşe iki çarpışma arasında geçen τ ortalama süresinin ifâdelerini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: $\bar{v} = \langle v \rangle$ ortalama hızıyla hareket eden bir molekül t kadar bir zaman içinde σ dik kesitli $\bar{v}\,t$ uzunluğunda zikzaklı silindirik bir hacım süpürmüş olacaktır. Molekülün izlediği yolun zikzaklı olması da her çarpışmada hareket yönünün değişmiş olmasından ötürüdür. Şu hâlde eğer gazın birim hacmında n molekül bulunuyorsa merkezleri bu söz konusu silindirik hacmın içinde bulunan moleküllerin ortalama sayısı da: $\sigma\, n\, \bar{v}\, t$ den ibâret olacaktır. Bu büyüklük t zamanı zarfında vukuu bulacak olan çarpışmaların sayısından başka bir şey değildir. Buna göre birim zaman aralığı içinde vukuu bulan çarpışmaların sayısı, ya da başka bir deyimle çarpışma frekansı

$$\boxed{\sigma z = n \bar{v}}$$

olacaktır.

Çarpışmalar arasında molekülün katettiği ortalama serbest yol ise, âşikârdır ki, t zamanı zarfında molekülün katetmiş olduğu $\bar{v}\, t$ yolunu, aynı zaman zarfında mâruz kalmış olduğu $\sigma n \bar{v} t$ çarpışma sayısına bölmekle elde edilecektir ; böylelikle

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sigma n}} \qquad \text{(VII.7.1)}$$

bulunur.

Eğer iki çarpışma arasında ortalama olarak τ kadar bir zaman geçiyorsa

$$\lambda = \bar{v}\, \tau$$

olmalıdır. (VII.7.1) göz önünde tutulursa

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\sigma n \bar{v}}}$$

olduğu anlaşılır.

VII.8. a) Bir gaz içindeki moleküllerden birinin t zamanı kadar bir süre içinde başka bir molekülle çarpışmaya mâruz kalmaması ihtimâli $P(t)$ ise ve aynı molekülün t ve $t + dt$ zaman aralığında bir çarpışma yapması ihtimâli de $W\, dt$ ile gösterilirse $P(t) = \exp(-Wt)$ olduğunu gösteriniz.

b) $\mathscr{P}(t)\, dt$ eğer, bir molekülün t zamanı kadar bir süre içinde hiç bir çarpışmaya mâruz kalmaksızın t ile $t + dt$ anları arasında bir çarpışmaya mâruz kalması ihtimâli ise $\mathscr{P}(t)\, dt = W \exp(-Wt) dt$ olduğunu ve $W = 1/\tau$ olması gerektiğini gösteriniz. $W = W(v)$ ise sonuçlar ne şekil alır?

ÇÖZÜM: a) Bir molekülün $t + dt$ zamanı zarfında bir çarpışmaya mâruz kalmaması ihtimâli bu molekülün t zamanı zarfında bir çarpışmaya mâruz kalmaması ihtimâli ile aynı molekülün bundan hemen sonra gelen t ile $t + dt$ arasındaki zaman aralığında çarpışmaya mâruz kalmaması ihtimâlinin çarpımından ibârettir; ya da matematik olarak:

$$P(t + dt) = P(t)\,(1 - W\,dt)$$

veyâ

$$P(t) + \frac{dP}{dt}\,dt = P(t) - P(t)\,W\,dt$$

yâhut

$$\frac{1}{P}\,\frac{dP}{dt} = -W \quad \rightarrow \quad P(t) = C\,\mathrm{e}^{-Wt} \qquad \text{(VII.8.1)}$$

olur. C integrasyon sâbitinin değerini saptamak için $t = 0$ için $P(0) = 1$ olması gerektiğine işâret edelim. Bu $C = 1$ verir. Şu hâlde

$$P(t) = \mathrm{e}^{-Wt}$$

dir.

b) Bir molekülün t zamanı kadar bir süre içinde hiç bir çarpışmaya mâruz kalmaksızın t ile $t + dt$ anları arasında bir çarpışmaya mâruz kalmasının $\mathscr{P}(t)\,dt$ ihtimâli molekülün t zamanı kadar bir süre çarpışmaya mâruz kalmaması ihtimâliyle t yi izleyen dt aralığı içinde bir çarpışmaya mâruz kalması ihtimâlinin çarpımına eşit olacaktır :

$$\mathscr{P}(t)\,dt = P(t)W\,dt = \mathrm{e}^{-Wt}\,W\,dt$$

İki çarpışma arasında geçen ortalama zaman süresini hesaplamak istersek, tanım gereği

$$\langle t \rangle = \tau = \frac{\int_0^\infty t\,\mathscr{P}(t)\,dt}{\int_0^\infty \mathscr{P}(t)\,dt} = \frac{\int_0^\infty W\mathrm{e}^{-Wt}\,t\,dt}{\int_0^\infty W\mathrm{e}^{-Wt}\,dt} = \frac{1}{W}$$

bulunur. Şu hâlde artık

$$\boxed{P(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\;, \quad \mathscr{P}(t)\,dt = \mathrm{e}^{-t/\tau}\,\frac{dt}{\tau}}$$

olur.

Eğer $W = W(v)$ şeklinde olsaydı, hız $v = v(t)$ şeklinde zamanın fonksiyonu olacağından W de $W = W(t)$ şeklinde zamanın bir fonksiyonu olacaktı. Bunun sonucu olarak da (VII.8.1)

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = W(t)$$

şeklinde olacaktı. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise

$$\boxed{P(t) = \exp\left[-\int_0^t W(t')\,dt'\right]}$$

olup ve $\mathscr{P}(t)\,dt$ nin ifâdesi de

$$\boxed{\mathscr{P}(t)\,dt = \left\{\exp\left[-\int_0^t W(t')\,dt'\right]\right\} W(t)\,dt}$$

şeklindedir.

VII.9. a) Bir gazın içindeki moleküllerden birinin x uzunluğu kadar bir yol boyunca başka bir molekülle çarpışmaya mâruz kalmaması ihtimâli $P(x)$ ise aynı molekülün $x + dx$ yol aralığında bir çarpışma yapması ihtimâli de $W\,dx$ ile gösterilirse $P(x) = \exp(-Wx)$ olduğunu gösteriniz.

b) $\mathscr{P}(x)\,dx$ eğer, bir molekülün x uzunluğu kadar bir yol boyunca hiç bir çarpışmaya mâruz kalmaksızın x ile $x + dx$ konumları arasında bir çarpışmaya mâruz kalması ihtimâli ise $\mathscr{P}(x)\,dx = x\exp(-Wx)\,dx$ olduğunu ve $W \equiv 1/\lambda$ olması gerektiğini gösteriniz. $\lambda = \lambda(v)$ ise sonuçlar ne olur?

ÇÖZÜM: Bu problem, **VII.8.** sayılı problemdeki muhakeme tarzını aynen uygulayarak kolayca çözülebileceğinden burada ayrıntılı çözümü verilmemiştir.

Sonuç olarak

$$\boxed{P(x) = e^{-x/\lambda}\ , \quad \mathscr{P}(x)\,dx = e^{-x/\lambda}\,\frac{dx}{\lambda}}$$

ve $W = W(v)$ olması hâlinde de

$$\boxed{\mathscr{P}(x)\,dx = \left\{\exp\left[-\int_0^x \frac{dx'}{\lambda(x')}\right]\right\}\frac{dx}{\lambda(x)}}$$

bulunur.

✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶

VII.10. ***MAXWELL-BOLTZMANN*** **dağılım fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM: *MAXWELL-BOLTZMANN* dağılım fonksiyonunun

$$\frac{dN}{dv} = \frac{4\pi N}{(\sqrt{\pi}\,v_{max})^3}\,v\,e^{-\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\,v_{max}}\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2} \qquad \text{(VII.10.1)}$$

olduğu bilinmektedir. İfâdeleri basitleştirmek için

$$\frac{\sqrt{\pi}\,v_{max}}{4N}\,\frac{dN}{dv} = y\,, \qquad \frac{v}{v_{max}} = x$$

dönüşümü yapılırsa (VII.10.1) ifâdesi

$$y = x^2\,e^{-x^2}$$

gibi basit bir şekil alır. Bu fonksiyonun grafiğinin çizilmesi kolaydır. Şöyle ki:

(i) *Kritik noktaların hesabı*:

$$0 = y' = 2x\,(1 + x^2)\,e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad x = 0, \quad x = 1$$

($x \geqslant 0$ olduğundan —1 i göz önüne almıyoruz.)

(ii) *Kritik noktaların cinsi*:

$$y'' = 2\,(1 - 5x^2 + 2x^4)\,e^{-x^2}$$

$x = 0$ için $y'' > 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ bir minimum noktasıdır.

$x = 1$ için $y'' < 0$ $\rightarrow$ $x = 1$ bir maksimum noktasıdır.

(iii) *Eğrilik*:

$2\,e^{-x^2}$ daima pozitif olduğundan y'' nün işâreti $1 - 5x^2 + 2x^4$ ün işâretinin aynısıdır. Buna göre

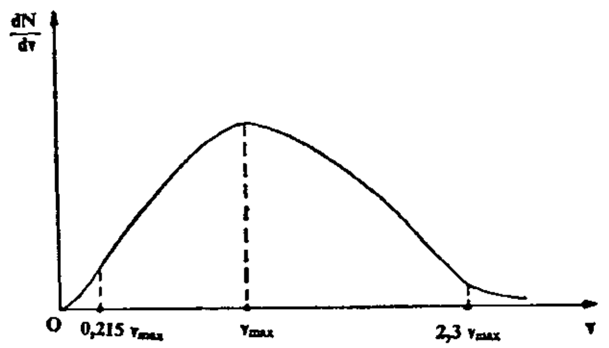
$$0 < x \lesssim 0{,}125 \quad \text{için} \quad y' > 0$$

$$0{,}215 \lesssim x < 1 \quad \text{için} \quad y' < 0$$

$$1 < x \lesssim 2{,}3 \quad \text{için} \quad y' < 0$$

$$2{,}3 \lesssim x \quad \text{için} \quad y' > 0$$

olur. O hâlde fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



VII.11. ***MAXWELL-BOLTZMANN*** **dağılım fonksiyonunun eğrisinin ortalama yarı genişliğini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM: Δv ortalama yarı genişliği, bilindiği gibi,

$$(\Delta v^2) = \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$$

formülünden bulunur. Buna göre $\langle v \rangle$ ve $\langle v^2 \rangle$ nin ayrı ayrı hesaplanması gerekir. Problem **VII.4** de

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}\,, \qquad \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

olduğu gösterilmişti. Buna göre

$$(\Delta v)^2 = \frac{3kT}{m} - \frac{8kT}{m\pi} = \frac{kT}{m}\left(3 - \frac{8}{\pi}\right)$$

yâni

$$\boxed{\Delta v = \sqrt{\left(3 - \frac{8}{\pi}\right)\frac{kT}{m}}}$$

olur.

VII.12. Bir gazın moleküllerinin hızlarının büyüklüğü

(i) 0 ile v_{max} , (ii) v_{max} ile ∞

arasında iken moleküllerin ortalama hızını bulunuz.

ÇÖZÜM : Ortalama hız tanımından

$$\text{(i)} \qquad \langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{v_{max}} v\, dN_v = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v^3_{max}} \int_0^{v_{max}} v^3\, e^{-\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2} dv$$

ve

$$\frac{v}{v_{max}} = V$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$\langle v \rangle = \frac{2 v_{max}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 V e^{-V} dV$$

ifâdesi elde edilir. Kısmî integrasyonla

$$\int_0^1 V e^{-V} dV = \Big[- V e^{-V} \Big]_0^1 - \Big[e^{-V} \Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

bulunur. O hâlde

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{2}{e} \right) v_{max}}$$

dır.

$$\text{(ii)} \qquad \langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v^3_{max}} \int_{v_{max}}^{\infty} v\, e^{-\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2} dv$$

yâni

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, e}}$$

olduğu görülür.

VII.13. 300 °K de bulunan oksijen molekülleri için (i) en muhtemel hız, ve (ii) ortalama hız ne olur?

ÇÖZÜM — (i) Problem **VII.5** de en muhtemel hızın

$$v_p = v_{max} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

olduğu gösterilmişti. Bu formülde $k = 1{,}38.10^{-23}$ J/°K, $m = 5{,}3.10^{-26}$ kg, $T = 300$ °K konursa

$$\boxed{v_{max} = 386 \text{ m/s}}$$

olarak bulunur.

(ii) Gene Problem **VII.4** den hareketle doğruluğu kolayca gösterilebilen

$$\langle v \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_{max}$$

formülü kullanılarak

$$\boxed{v = 345 \text{ m/s}}$$

bulunur.

VII.14. Hızları v_{max} ile 1,2 v_{max} arasında bulunan tâneciklerin sayısının, tâneciklerin toplam sayısına oranını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Hızları v ile $v + dv$ arasında bulunan tâneciklerin sayısının

$$dN_v = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v^3_{max}} v^2 e^{-\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2} dv$$

olduğunu biliyoruz. Bunu sonlu küçük bir hız aralığı için yazarsak

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v^3_{max}} v^2_{max} e^{-1} \, 0{,}2 \, v_{max}$$

yâni

$$\boxed{\frac{\Delta N}{N} = \frac{0,8}{\sqrt{\pi}} e^{-1}}$$

bulunur.

VII.15. 1 mol oksijen göz önüne alınıyor. Hızı 100 °K deki hızı 10^3 m/s den daha büyük olan moleküllerin sayısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: 1 mol oksijende *AVOGADRO* sayısı kadar, yâni $N_0 \simeq 6.10^{23}$ adet molekül vardır. Buna göre

$$\Delta N = \int_{10^3}^{\infty} dN = \frac{4 N_0}{\sqrt{\pi}\, v^3_{max}} \int_{10^3}^{\infty} v^2 e^{-\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2} dv$$

olup

$$\frac{v}{v_{max}} = V$$

dönüşümü de yapılırsa

$$\Delta N = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{10^3}{v_{max}}}^{\infty} V^2 e^{-V^2} dV$$

olur. Hâlbuki

$$\int_{\frac{10^3}{v_{max}}}^{\infty} V^2 e^{-V^2} dV = \int_0^{\infty} V^2 e^{-V^2} dV - \int_0^{\frac{10^3}{v_{max}}} V^2 e^{-V^2} dV$$

dir. İntegral cetvellerinden

$$\int_0^{\infty} V^2 e^{-V^2} dV = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$$

bulunur. İkinci integral ise kısmî integrasyon metoduyla hesaplanır.

$$\int_0^{\frac{10^3}{v_{max}}} V^2 e^{-V^2} dV = \left[-\frac{V}{2} e^{-V^2} \right]_0^{10^3/v_{max}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{10^3}{v_{max}}} e^{-V^2} dV$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{10^3}{v_{max}}\,e^{-\frac{10^6}{v_{max}}} - \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,\frac{10^3}{v_{max}}\,.$$

Sonuç olarak

$$\Delta N = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{4}\sqrt{\pi} + \frac{1}{2}\,\frac{10^3}{v_{max}}\,e^{-\frac{10^6}{v^2_{max}}} + \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,\frac{10^3}{v_{max}}\right]$$

bulunur.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 230 \text{ m/s}$$

olarak hesaplanır, ve yukarıdaki ifâdede kullanılırsa

$$\boxed{\Delta N = 6{,}5.10^{18}}$$

olur.

VII.16. ***N*** **tânecikten oluşan bir sistem için dağılım fonksiyonu,** dN_v **ile hızları** v **ile** $v + dv$ **aralığında bulunan tâneciklerin sayısı ve** v_0 **ile de bir sâbit gösterilmek üzere**

$$\frac{dN_v}{dv} = \begin{cases} kv & \text{eğer} \quad 0 < v < v_0 \quad \text{ise,} \\ 0 & \text{eğer} \quad v_0 < v \quad \text{ise} \end{cases}$$

ile verilmiştir. (i) Dağılım fonksiyonunun grafiğini çiziniz. (ii) $k = \frac{2N}{v_0^2}$ **olduğunu gösteriniz. (iii)** $\langle v \rangle$ **ve** $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ **yi hesaplayınız.**

CEVAP: (iii) $\langle v \rangle = \frac{2}{3}\, v_0$, $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, v_0$.

VII.17. d^3x **hacım elemanı içinde bulunan ve hız vektörleri de v ile v +** d**v arasında olan tâneciklerin sayısının**

$$d^6N_{\mathbf{x},\mathbf{v}} = N\,F(\mathbf{v})\,\frac{d^3\mathbf{x}\,d^3\mathbf{v}}{V} = N\,G(v^2)\,\frac{d^3\mathbf{x}\,d^3\mathbf{v}}{V} \qquad \text{(VII.17.1)}$$

ile verilebileceğini görmüştük. Burada ***N*** **toplam tânecik sayısıdır. Tâneciklerin kendi aralarında yaptıkları çarpışmaların, ihmâl edilebildiğini farzedip, hız vektörleri v ile v +** d**v arasında bulunan tâneciklerin** dt **zamanı zarfında, içinde bulundukları kabın birim yüzeyiyle yaptığı çarpışmaların sayısını bulunuz.**

ÇÖZÜM : Önce $d^3\mathbf{x}$ hacım elemanı içinde bulunan ve hız vektörleri de $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ arasında olan tâneciklerin sayısını, hız vektörünün büyüklüğü v ile $v+dv$ arasında bulunan tâneciklerin sayısı cinsinden yazalım.

Yukarıda verilen bağıntı $d^3\mathbf{x}$ e göre bütün $\mathbf{x}$ uzayı üzerinden integre edilerek, yerleri ne olursa olsun hız vektörlerinin büyüklüğü v ile $v + dv$ arasında bulunan tâneciklerin sayısının

$$d^3N_{\mathbf{v}} = N\,G(v^2)\,d^3\mathbf{v}$$

olduğu görülür. $d^3\mathbf{v}$ küresel koordinatlar cinsinden yazılırsa

$$d^3N_{\mathbf{v}} = N\,G(v^2)\,v^2\,dv\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

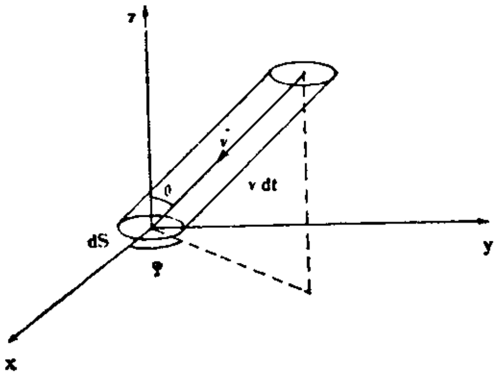
olur. θ ve φ üzerinden integrasyonla, hızlarının büyüklüğü v ile $v + dv$ arasında bulunan tâneciklerin sayısı olarak da

$$dN_v = 4\pi\,N\,G(v^2)\,v^2\,dv$$

bulunur. (VII.17.1) ile bu son bağıntı arasında $G(v^2)$ yok edilerek

$$d^6N_{\mathbf{x},\mathbf{v}} = \frac{dN_v}{V}\,\frac{1}{4\pi}\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d^3\mathbf{x}$$

elde edilir. dN_v/V birim hacımde bulunan ve hızlarının büyüklüğü v ile $v + dv$ arasında olan tâneciklerin sayısıdır, bunu dn_v ile gösterelim. Böylece



$$d^6N_{\mathbf{x},\mathbf{v}} = \frac{dn_v}{4\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d^3\mathbf{x}$$

olur.

dt zaman aralığında *dS* yüzeyine çarpan tânecikler tabanı *dS* ve eksen uzunluğu da $v\,dt$ olan silindirin içinde bulunurlar, yâni şekilden kolayca görüleceği gibi

$$d^3\mathbf{x} = dS\,v\,dt\cos\theta$$

olur.

$$d^6N_{\mathbf{x},\mathbf{v}} = \frac{1}{4\pi}\,dn_v\,dS\,v\,dt\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

ve birim zamanda birim yüzeye çarpan tâneciklerin sayısı da

$$\boxed{\frac{1}{4\pi}\,v\cos\theta\sin\theta\,dn_v} \qquad \text{(VII.17.2)}$$

olur.

VII.18. Problem VII.17 den faydalanarak, birim zamanda birim yüzeye çarpan tâneciklerin N' sayısını, tâneciklerin ortalama hızları cinsinden ifâde ediniz.

CEVAP : $N' = \frac{n}{4} \langle v \rangle .$

VII.19. V hacımlı ve cidarları T sıcaklığında olan bir kap, denge hâlinde bulunan bir gaz ihtivâ etmektedir. Kabın yüzeyinde s kesitli çok küçük bir delik açılmıştır.

(i) Kabın deliği devamlı olarak boş bırakılan başka bir kapla birleştirilirse, molekül sayısının zamanla değişiminin kuralını bulunuz.

(ii) İlk kabın içindeki basıncı zamanın fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

ÇÖZÜM : (i) $n = N/V$ birim hacımdaki molekül sayısı, moleküllerin delikten kabı terk etmeleri sonucu değişir. t ânında birim hacımda $n(t)$ molekül bulunsun. $t+dt$ ânında birim hacımda $n(t+dt)$ molekül olur. Böylece t ile $t+dt$ ânları arasında hacım içindeki moleküllerin değişimi

$$[n(t + dt) - n(t)]\ V = V \frac{dn}{dt} dt$$

olur. dt zamanı zarfında kabı terk eden moleküllerin sayısı s alanına çarpan moleküllerin sayısına eşittir. Bir önceki probleme göre bu sayı

$$-N' s\, dt = -\frac{n}{4} \langle v \rangle s\, dt$$

olur. Eksi işâreti moleküllerin sayısının azaldığını gösterir. O hâlde

$$V \frac{dn}{dt} dt = -\frac{n}{4} \langle v \rangle s\, dt$$

yâni

$$\frac{dn}{n} = -\frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle}{V} s\, dt$$

olur. İntegrasyonla

$$n(t) = n(0) \exp \left[-\frac{\langle v \rangle}{4V} st \right].$$

ve

$$\tau = \frac{4V}{\langle v \rangle s}$$

kısaltması yapılırsa

$$\boxed{n(t) = n(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

olur. $n(0)$, $t = 0$ ânında kapta birim hacımda bulunan moleküllerin sayısını göstermektedir.

(ii) Kaptaki gazı ideal gaz olarak kabul edelim.

$$P(t) = \frac{n(t)\, kT}{V} = n(0)\frac{kT}{V}\, e^{-t/\tau}$$

ve

$$n(0)\frac{kT}{V} = P(0)$$

denirse

$$\boxed{P(t) = P(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

olur.

VII.20. 10 cm yarıçaplı bir küre yüzeyinin 1 cm^2 si çok düşük sıcaklıkta, geriye kalan kısmı da 27°C da tutulmaktadır. Bu küresel kap içinde 10 mm Hg basıncı altında su buharı bulunmaktadır. Soğuk yüzeye çarpan buhar moleküllerinin yoğunlaşıp yüzey üzerinde kaldığı farzediliyor. Kabın içindeki basıncın 10^{-4} mm Hg basıncına düşmesi için gereken zamanı bulunuz.

ÇÖZÜM: 1 sâniyede birim yüzeye çarpan moleküllerin sayısının $n \langle v \rangle /4$ olduğu Problem **VII.18** de gösterilmişti. Böylece dt zamanı içinde s yüzeyine çarpan moleküllerin sayısı $(n \langle v \rangle s/4)dt$ olur. Bu sayı dt zamanı zarfında V hacmında bulunan moleküllerin sayısının değişimine, yâni $-\frac{4}{3}\pi r^3\, dn$ ye eşittir. İki büyüklük eşitlenirse

$$-\frac{4}{3}\pi r^3\, dn = n\frac{\langle v \rangle s}{4}\, dt$$

ve

$$dt = -\frac{16}{3}\frac{\pi r^3}{\langle v \rangle} s \frac{dn}{n}$$

olur. İntegrasyonla da

$$\boxed{t = \frac{16}{3}\frac{\pi r^3}{s\langle v \rangle}\ln\frac{n_0}{n}}$$

bulunur.

$$v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \left(\frac{8\times 8{,}32\times 300}{3{,}14\times 10.10^{-3}}\right)^{1/2} = 594 \text{ m/s}$$

ve

$$\frac{n_0}{n} = \frac{P_0}{P} = 10^5$$

olduğundan

$$t = \frac{16\times 3{,}14\times 10^3\times 5\times 2{,}3}{3\times 594\times 10^2} = 3{,}25 \text{ s}$$

dır.

VII.21. V hacımlı bir kap N adet molekül ihtivâ etmekte ve bu moleküller, yüzeyinde açılan küçük bir delikten dışarı sızmaktadır. Delikten kabın içine hiç bir molekül girmemektedir. Kaptaki moleküllerin sayısının $N/2$ olması için geçmesi gereken zamanı deliğin A alanının, V nin ve $\langle v \rangle$ nin cinsinden bulunuz.

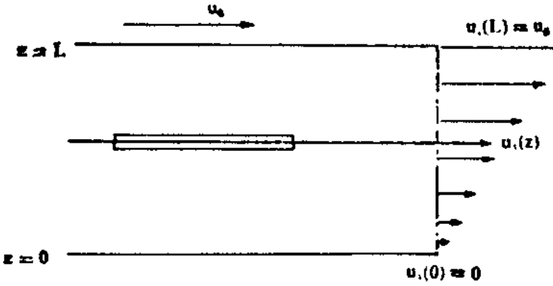
CEVAP: $t = \dfrac{4V}{\langle v \rangle s}\ln 2$.

VII.22. Kapalı bir kap 100 °C da 1 atm basınç altında termodinamik denge hâlinde bulunan sıvı su ve su buharı ihtivâ etmektedir. Bu şartlar altında 1 gr su buharının hacmı 1670 cm^3 ve suyun buharlaşma gizli ısısı da 2250 J/gr dır. (a) Su buharının 1 cm^3 ünde kaç molekül vardır? (b) 1 s de suyun yüzeyinin 1 cm^2 sine kaç buhar molekülü çarpar? (c) Sıvı yüzeyine çarpan her su buharı molekülünün yoğunlaşması hâlinde, 1 s de 1 cm^2 den kaç su molekülü buharlaşır? (d) Bir sıvı molekülünü buhar hâline getirmek için lâzım olan enerjiyle buhar molekülünün ortalama kinetik enerjisini karşılaştırınız.

CEVAP: (a) $\simeq 2{,}7.10^{19}$ molekül/cm^3, (b) $3{,}3.10^{23}$, (c) aynı,
(d) $\langle E_k \rangle \simeq 0{,}1 = 225$ J/gr.

VII.23. Bir akışının viskozluk katsayısını hesaplayınız.

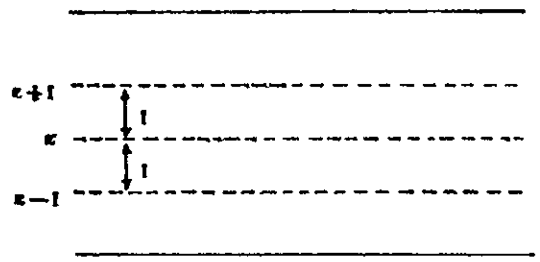
ÇÖZÜM: Zamana bağlı olmayan ve ortalama hızı her noktasında aynı kalmayan bir akışkan göz önüne alalım. Örnek: Birbirinden uzaklıkları L olan iki yatay levha arasında bir akışkan bulunsun. Levhalardan bir tânesi (meselâ alttaki) yerinde tutulur ve öteki de sâbit bir hızla kaydırılırsa, akışkanın ortalama hızı aşağıdan yukarıya doğru artar. Akışkanın içinde hâyalî yatay bir düzlem düşünelim. Düzlemin alt ve üst tarafında bulunan moleküllerin ortalama hızları farklı farklı olacağından, düzlemin birim yüzeyine ortalama bir P_{zx} kuvveti etkileyecektir. P_{zx} kuvveti hızın değişme mikdarıyla orantılı olacaktır:



$$P_{zx} = -\eta \frac{\partial u_x(z)}{\partial z}.$$

$u_x(z)$ aşağıdan yukarıya doğru artarsa düzlemin altında kalan akışkan, düzlemin üst tarafında kalan akışkanı yavaşlatmaya çalışır, yâni P_{zx}, $-x$ yönünde olur. Bu nedenle yukarıdaki eşitlikte "—" işâreti konmuştur. η orantı katsayısına akışkanın viskozluk katsayısı denir.

Viskozluk katsayısının hesabı: İşlemleri basitleştirmek için bütün moleküllerin, $\langle v \rangle$ ortalama hızı ile hareket ettiğini farzediyoruz. Birim hacımda n molekül bulunsun. Bunların 1/3 ü z doğrultusunda hareket eder. z doğrultusunda hareket edenlerin yarısı da $-z$ ve geriye kalan diğer yarısı da $+z$ doğrultusunda hareket eder. Akışkanın içinde z ile belirlenen düzlemi düşünelim. $\frac{1}{6} n\langle v \rangle$ adet molekül z düzleminin birim yüzeyini 1 sâniyede yukarıdan aşağıya ve aynı sayıda molekül de aşağıdan yukarıya doğru geçer. Moleküllerin ortalama serbest yolunu l ile gösterirsek, $z + l$ ve $z - l$ de bulunan moleküller z düzlemini geçene kadar başka çarpışma yapmazlar. Böylece bu moleküllerden birinin düzlemi geçerken düzleme vereceği impuls, sırasıyla



$$m\, u_x(z - l) \quad \text{ve} \quad m\, u_x(z + l)$$

dır. Buna göre

$$P_{zx} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle [m\, u_x(z - l) - m\, u_x(z + l)]$$

olur. $u_x(z - l)$ ve $u_x(z + l)$ seriye açılır ve sâdece ilk iki terimle yetinilirse, sırasıyla

$$u_x(z - l) = u_x(z) - \frac{\partial u_x}{\partial z} l,$$

$$u_x(z + l) = u_x(z) + \frac{\partial u_x}{\partial z} l$$

bulunur. Sonuç olarak

$$P_{zx} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \left(-2m \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) l = -\frac{1}{3} m\, n \langle v \rangle l \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

olur. η viskozluk katsayısının tanımı hatırlanarak

$$\eta = \frac{1}{3} n \langle v \rangle m\, l$$

bulunur.

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\, \sigma}$$

olduğu hatırlanır ve enerjinin eşdağılımı ilkesinden kolayca elde edilen

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\boxed{\eta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{mkT}{6}}}$$

formülü bulunur.

VII.24. Azot gazının 20°C daki viskozluk katsayısını hesaplayınız. $\sigma = 1{,}2.10^{-15}$ cm^2 , A = 14 gr dır. Azot molekülünün yarıçapı ne olur?

CEVAP : $\eta = 4{,}66.10^{-4}$ gr cm^{-1} s^{-1} , $r \simeq 10^{-7}$ cm.

VII.25. Normal şartlarda bir litre gaz göz önüne alınıyor. Gazın moleküllerinin ortalama serbest yolu 10 cm ise çarpışma tesir kesiti ne olur?

CEVAP : $\sigma \simeq \frac{1}{387} 10^{-21}$ cm^2.

VIII. BÖLÜM

ISI İLETİMİ

VIII.1. Kalınlığı ihmâl edilebilen sonsuz uzun bir tel içinde $t = 0$ ânında belirli bir $f(x)$ sıcaklık dağılımı bulunmaktadır. Bu tel üzerinde pozitif x ler yönünde sâbit bir v_0 hızıyla kaymakta olan noktasal bir ısı kaynağı tele her an Q kadar bir ısı mikdarı intikaal ettirmektedir. Telden civarına doğru bir ısı kaybı olmadığını varsayarak telin içindeki sıcaklık dağılımını veren diferansiyel denklem ile başlangıç ve sınır şartlarını tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Tel boyunca kaymakta olan ısı kaynağı eğer $t = 0$ da meselâ $x = 0$ da bulunuyorsa problemin sınır ve başlangıç şartları şu şekılde yazılabilecektir:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < v_0 t\,; \qquad \alpha = \frac{\varkappa}{\rho c}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \qquad v_0 t < x < +\infty$$

$$T_1(v_0 t, t) = T_2(v_0 t, t), \quad \varkappa S\,[T_1(v_0 t, t) - T_2(v_0 t, t)] = Q, \quad 0 < t < +\infty$$

$$T_1(x, 0) = f(x), \qquad -\infty < x < 0,$$

$$T_2(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < +\infty\,.$$

Burada S ile telin dik kesiti gösterilmiş bulunmaktadır. Aynı problemi $k(x, t)$ kaynak fonksiyonunun

$$k(x\,, t) = Q\,\delta(x - v_0 t)$$

ile verildiğini göz önünde tutarak

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}\,, t) + \frac{1}{\varkappa} k(\mathbf{r}\,, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

şeklindeki daha genel ısı iletim denkleminden hareket ederek de ifâde etmek mümkündür. Buna göre:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Q}{\rho c} \delta(x - v_0 t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

olacaktır.

VIII.2. ***FOURİER*** **integral dönüşümünü uygulayarak**

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

sınır değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Isı iletim denklemini

$$\frac{\partial T(\xi, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(\xi, t)}{\partial \xi^2}$$

şeklinde yazıp bunun her iki yanını da $1/(\sqrt{2\pi})\, e^{-i\lambda\xi}$ ile çarptıktan sonra ξ üzerinden $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar integre edelim. Bu arada T fonksiyonu ile T nin türevlerinin de $\xi \to \pm\infty$ için gerektiği kadar çabuk bir biçimde sıfıra gittikleri kabul edilecektir. Kısmî integrasyonla

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial t} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi, t)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi \right\} = \frac{d\overline{T}(\lambda, t)}{dt} =$$

$$= \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T(\xi, t)}{\partial \xi^2} e^{-i\lambda\xi} d\xi =$$

$$= \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\partial T}{\partial \xi} e^{-i\lambda\xi} \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} + \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda \left[T\, e^{-i\lambda\xi} \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} -$$

$$- \alpha\lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi, t)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi = -\alpha\lambda^2\, \overline{T}(\lambda, t)$$

yâni

$$\frac{d\overline{T}(\lambda,t)}{dt} + \alpha\lambda^2\,\overline{T}(\lambda\,,t) = 0 \qquad \text{(VIII.2.1)}$$

bulunur. $T(\xi\,,t)$ nin *FOURİER* dönüşümüşünün tanım bağıntısı olan

$$\overline{T}(\lambda\,,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi,t)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi$$

bağıntısından $t=0$ için

$$\overline{T}(\lambda,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} T(\xi,0)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi = \overline{f}(\lambda) \qquad \text{(VIII.2.2)}$$

bulunur. Buna göre (VIII.2.2) başlangıç şartı altında (VIII.2.1) denkleminin çözümü de

$$\overline{T}(\lambda,t) = \overline{f}(\lambda)\,e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

olur. Buna ters *FOURİER* dönüşümünü uygulayarak çözümün

$$T(x\,,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{T}(\lambda,t)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2 t}\,e^{i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,d\xi\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2 t}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\,\pi\,t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}}\,d\xi$$

şeklinde olduğu saptanmış olur. Burada, her iki yanını da bir parametreye göre türeterek kolayca tahkik edilebileceği gibi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2 t}\cos\beta\lambda\,d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

bağıntısından yararlanılmıştır.

VIII.3. Farklı ısıl özellikleri haiz iki paralel tabakadan oluşan sonsuz dilim şeklindeki bir ortam belirli bir T_0 sıcaklığında iken $t=0$ ânından itibâren her iki yüzü de sıfır sıcaklığında tutularak soğutulmaktadır. Bu takdirde ortamdaki sıcaklık dağılımının ifâdesini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Ortamların karakteristik büyüklüklerini ρ_1, c_1, $\varkappa_1$ ve ρ_2, c_2, $\varkappa_2$ ile ve kalınlıklarını da a_1 ve a_2 ile gösterelim. Kezâ

$$\alpha_1 = \frac{\varkappa_1}{\rho_1 c_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{\varkappa_2}{\rho_2 c_2} \tag{VIII.3.1}$$

olacaktır. Bu takdirde problemimiz

$$T(x\,,0) = T_0 \tag{VIII.3.2}$$

başlangıç şartı ve

$$T_1(0, t) = T_2(a_1 + a_2, t) = 0, \qquad T_1(a_1, t) = T_2(a_1, t) \tag{VIII.3.3}$$

$$\varkappa_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \varkappa_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=a_1} \tag{VIII.3.4}$$

sınır şartları altında

$$0 < x < a_1 \qquad \text{için} \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{c_1 \rho_1}{\varkappa_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \tag{VIII.3.5}$$

$$a_1 < x < a_1 + a_2 \quad \text{için} \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{c_2 \rho_2}{\varkappa_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \tag{VIII.3.6}$$

denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olacaktır.

Şimdi değişken ayrışımı için

$$T_1(x\,, t) = X^{(1)}(x)\, \tau^{(1)}(t)$$
$$T_2(x\,, t) = X^{(2)}(x)\, \tau^{(2)}(t)$$

vaz ederek (VIII.3.5) ve (VIII.3.6) dan

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{X^{(1)}} \frac{d^2 X^{(1)}}{dx^2} &= \frac{1}{\alpha_1 \tau^{(1)}} \frac{d\tau^{(1)}}{dt} = -\gamma^2{}_1 \\ \frac{1}{X^{(2)}} \frac{d^2 X^{(2)}}{dx^2} &= \frac{1}{\alpha_2 \tau^{(2)}} \frac{d\tau^{(2)}}{dt} = -\gamma^2{}_2 \end{aligned}\right\} \tag{VIII.3.7}$$

bulunur. $-\gamma^2{}_1$ ve $-\gamma^2{}_2$ ayrışım parametreleridir. Bunların negatif olması zorunluluğu sıcaklığın zamanla sonsuza gitmesini önlemek içindir. (VIII.3.7) den

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 X^{(2)}}{dx^2} + \gamma^2{}_1 X^{(1)} = 0 \quad \rightarrow \quad X^{(1)} = A^{(1)} \cos \gamma_1 x + B^{(1)} \sin \gamma_1 x \\ &\frac{d^2 X^{(2)}}{dx^2} + \gamma^2{}_2 X^{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad X^{(2)} = A^{(2)} \cos \gamma_2 x + B^{(2)} \sin \gamma_2 x \end{aligned}\right.$$

$$\tau^{(1)} = C^{(1)}\, e^{-\gamma^2{}_1 \alpha_1 t}$$

$$\tau^{(2)} = C^{(2)} e^{-\gamma^2_2 \alpha_2 t}$$

bulunur. (VIII.3.3) sınır şartından

$$(T_1)_{x=0} = 0 \rightarrow C^{(1)} e^{-\gamma^2_1 \alpha_1 t} [A^{(1)} \cos \gamma_1 x + B^{(1)} \sin \gamma_1 x]_{x=0} = 0 \rightarrow A^{(1)} \equiv 0$$

bulunur. Buna göre

$$X^{(1)} = B^{(1)} \sin \gamma_1 x \tag{VIII.3.8}$$

olur. Gene (VIII.3.3) den

$$(T_2)_{x=a_1+a_2} = 0 \rightarrow C^{(2)} e^{-\gamma^2_2 \alpha_2 t} [A^{(2)} \cos \gamma_2 \alpha_2 (a_2 + a_2) +$$
$$+ B^{(2)} \sin \gamma_2 (a_1 + a_2)]_{x=0} = 0$$

yâni

$$B^{(2)} \operatorname{tg} \gamma_2 (a_1 + a_2) = - A^{(2)}$$

bulunur. Bu son bağıntının ışığında da, $\bar{B}^{(2)}$ ile yeni bir sâbit tanımlayarak,

$$X^{(2)} = \bar{B}^{(2)} \sin \gamma_2 (a_1 + a_2 - x) \tag{VIII.3.9}$$

olduğu saptanır. Bu verilerin ışığı altında ise (VIII.3.4) şartı

$$\varkappa_1 C^{(1)} B^{(1)} \gamma_1 e^{-\gamma^2_1 \alpha_1 t} \cos \gamma_1 a_1 = \varkappa_2 C^{(1)} \bar{B}^{(2)} (-\gamma_2) e^{-\gamma^2_2 \alpha_2 t} \cos \gamma_2 a_2$$

şeklinde yazılır; buradan ise

$$e^{-(\gamma^2_1 \varkappa_1 - \gamma^2_2 \alpha_2) t} = - \frac{C^{(2)} \bar{B}^{(2)} \varkappa_2 \gamma_2}{C^{(1)} B^{(1)} \varkappa_1 \gamma_1} \frac{\cos \gamma_2 a_2}{\cos \gamma_1 a_1} \tag{VIII.3.10}$$

bulunur. Bu ifâdenin sol tarafı t ile değişen bir fonksiyon sağ tarafı ise bir sâbittir; t değiştikçe sol tarafın değeri de değişecektir. Oysa ki sağ taraf bir sâbit olduğundan bu çelişkinin ortadan kalkması için üstel fonksiyonun argümentinin özdeş olarak sıfır olması gerekir:

$$-(\gamma^2_1 \alpha_1 - \gamma^2_2 \alpha_2) t \equiv 0.$$

Buradan, $t \neq 0$ olduğundan,

$$\gamma_2 = \gamma_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \gamma \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \tag{VIII.3.11}$$

olması gerektiği çıkar. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} X^{(1)} &= B^{(1)} \sin \gamma x \\ X^{(2)} &= \overline{B}^{(2)} \sin \frac{\sqrt{\alpha_1}\,\gamma\,(a_1 + a_2 - x)}{\sqrt{\alpha_2}} \\ \tau^{(1)} &= C^{(1)}\, e^{-\gamma^2 \alpha_1 t} \\ \tau^{(2)} &= C^{(2)}\, e^{-\gamma^2 \alpha_1 t} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.3.12)}$$

olur. $t = 0$ da ortamın her noktasında $T = T_0$ olacağından, buradan, $C^{(1)} \equiv C^{(2)}$ olması gerekeceği âşikârdır. Bu katsayı ise genelliği bozmadan 1 e eşit alınabilir; ve

$$\tau^{(1)} \equiv \tau^{(2)} \equiv e^{-\gamma^2 \alpha_1 t} \qquad \text{(VIII.3.13)}$$

olur. Şimdi bu verilerin ışığı altında

$$(T_1)_{x=a_1} = (T_2)_{x=a_1}, \quad \varkappa_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=a_1} = \varkappa_2 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=a_1}$$

sınır şartlarının ifâdelerini açıkça yazalım:

$$e^{-\gamma^2 \alpha_1 t} \left\{ B^{(1)} \sin \gamma a_1 \right\} = e^{-\gamma^2 \alpha_1 t} \left\{ \overline{B}^{(2)} \sin \frac{\sqrt{\alpha_1}\,\gamma\, a_2}{\sqrt{\alpha_2}} \right\}$$

$$\varkappa_1\, e^{-\gamma^2 \alpha_1 t} \left\{ B^{(1)} \gamma \cos \gamma a_1 \right\} = \varkappa_2\, e^{-\gamma^2 \alpha_2 t} \left\{ -\overline{B}^{(2)} \frac{\sqrt{\alpha_1}\,\gamma}{\sqrt{\alpha_2}} \cos \frac{\sqrt{\alpha_1}\,\gamma\,\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2}} \right\}.$$

Bunları taraf tarafa bölmek sûretiyle

$$\boxed{\varkappa_2 \sqrt{\alpha_1}\, \mathrm{tg}\, a_1 \gamma + \varkappa_1 \sqrt{\alpha_2}\, \mathrm{tg} \frac{a_2 \sqrt{\alpha_1}\gamma}{\sqrt{\alpha_2}} = 0} \qquad \text{(VIII.3.14)}$$

şeklinde transandant bir denklem elde edilir. Bu denklem γ nın alacağı değerleri kök olarak kabul eden bir denklemdir. (VIII.3.14) ün sonsuz adet kökü olduğu gösterilir. Bunları $n = 1,2,\ldots$ olmak üzere γ_n ile göstereceğiz. Şu hâlde her bir γ_n değeri için bir $X_n^{(1)}$, bir $X_n^{(2)}$, bir $\tau_n^{(1)} \equiv \tau_n^{(2)}$ olacaktır. Buna binâen

$$T_{1,n}(x, t) = X_n^{(1)} \tau_n^{(1)} = e^{-\gamma^2_n \alpha_1 t} X_n^{(1)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ifâdesi (VIII.3.4) ün ve

$$T_{2,n}(x, t) = X_n^{(2)} \tau_n^{(2)} = e^{-\gamma^2_n \alpha_1 t} X_n^{(2)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ifâdesi de (VIII.3.5) in özel birer çözümleri olacaktır. Bu denklemler lineer diferansiyel denklemler olduklarından, genel çözümleri bütün farklı özel çözümlerinin lineer kombinezonu olacaktır. Şu hâlde C_n ile bir takım katsayıları göstererek

$$T_1(x\,,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\gamma_n^2 \alpha_1 t}\, X_n^{(1)}(x)$$

$$T_2(x\,,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\gamma_n^2 \alpha_1}\, X_n^{(2)}(x)$$

olacaktır.

Diğer taraftan (VIII.3.11) bağıntısından ve $C^{(1)} = C^{(2)} = 1$ olmasından (VIII.3.10) bağıntısı

$$-\overline{B}^{(2)} \varkappa_2 \gamma \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}} \cos \frac{a_2 \sqrt{\alpha_1}\,\gamma}{\sqrt{\alpha_2}} = B^{(1)} \varkappa_1 \gamma \cos a_1 \gamma$$

şekline girer ve buradan da

$$\overline{B}^{(2)} = -B^{(1)} \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \frac{\cos a_1 \gamma}{\cos \dfrac{a_2 \gamma \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}}} = b \cos a_1 \gamma \qquad \text{(VIII.3.15)}$$

yazılabilir. (VIII.3.15) ın ışığında artık

$$\begin{cases} X_n^{(1)} = \left(-b_n \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_2} \dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \cos \dfrac{a_2 \gamma_n \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \gamma_n x\,, & 0 \leqslant x \leqslant a_1 \\[2ex] X_n^{(2)} = b_n \cos a_1 \gamma_n \sin \dfrac{\sqrt{\alpha_1}\, \gamma_n (a_1 + a_2 - x)}{\sqrt{\alpha_2}}\,, & a_1 \leqslant x \leqslant a_1 + a_2 \end{cases}$$

yazılır. Şu hâlde

$$X_n(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{a_2 \gamma_n \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \gamma_n x\,, & 0 \leqslant x \leqslant a_1 \\[2ex] \cos a_1 \gamma_n \sin \dfrac{\sqrt{\alpha_1}\, \gamma_n (a_1 + a_2 - x)}{\sqrt{\alpha_2}}\,, & a_1 \leqslant x \leqslant a_1 + a_2 \end{cases}$$

olmak üzere göz önüne alınan ortamdaki sıcaklık dağılımının şekli

$$\boxed{T(x\,,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\gamma_n^2 \alpha_1 t} X_n(x)} \qquad \text{(VIII.3.16)}$$

olur. Buradan

$$T(x, 0) = T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

bulunur. Öte yandan $X_n(x)$ fonksiyonları için diklik bağıntıları kolaylıkla tesbit edilir. Buna binâen de C_n ler

$$C_n = \frac{\int_0^{a_1} T_0 X_n^{(1)}(\xi)\, d\xi + \int_{a_1}^{a_1+a_2} T_0 X_n^{(2)}(\xi)\, d\xi}{\int_0^{a_1} [X_n^{(1)}(\xi)]^2\, d\xi + \int_{a_1}^{a_1+a_2} [X_n^{(2)}(\xi)]^2\, d\xi}$$

formülü uyarınca kolayca tesbit edilerek (VIII.3.16) da yerine kondu muydu ortamdaki sıcaklık dağılımının ifâdesi tamâmen saptanmış olur.

VIII.4. ***a*** **yarıçaplı ve dış yüzeyi iyice yalıtılmış homogen sonsuz bir silindirde $T(\rho, 0) = f(\rho)$ şeklinde eksenel simetriyi haiz bir başlangıç sıcaklık dağılımı varsa herhangi bir $t > 0$ ânındaki sıcaklık dağılımı ne olur ?**

ÇÖZÜM: Problem

$$(T)_{t=0} = T(\rho, 0) = f(\rho) \tag{VIII.4.1}$$

başlangıç ve

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_{\rho=a} = 0 \tag{VIII.4.2}$$

sınır şartı altında

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

denklemini çözmekten ibârettir.

Değişkenlere ayrışım yöntemini uygulayıp

$$T(\rho, t) = R(\rho)\, \tau(t)$$

vaz edilirse, λ ayrışım sâbiti olmak üzere,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \lambda R = 0 \qquad (\textit{BESSEL} \text{ denklemi})$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda \tau = 0$$

bulunur. Buradan *BESSEL* denkleminin çözümü olarak, göz önüne alınan silindirin ekseni üzerinde singülârite arzetmeyen

$$R(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda}\,\rho)$$

ifâdesi bulunur. (VIII.4.2) sınır şartından ise

$$\left(\frac{dR}{d\rho}\right)_{\rho=a} = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{a^2}$$

özdeğerler bulunur. Burada $n = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere $\gamma_0 = 0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ilh... $J_1(\gamma) = 0$ denkleminin negatif olmayan köklerini göstermektedir. Buna göre özfonksiyonlar da

$$R_n(\rho) = J_0(\gamma_n\rho/a)$$

şeklindedirler. Diğer taraftan zaman çarpanına tekaabül eden denklemin çözümü de

$$\tau_n = C_n\, e^{-\gamma_n^2 t/a^2}$$

şeklindedir. Buna göre genel çözüm

$$T(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\gamma_n^2 t/a^2} J_0(\gamma_n\rho/a)$$

olur. Buradan sınır şartını uygulayarak

$$T(\rho, 0) = f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\gamma_n\rho/a)$$

bulunur. *BESSEL* fonksiyonlarının diklik özelliklerinden yararlanarak

$$C_n = \frac{\int_0^a f(\rho)\, J_0(\gamma_n\rho/a)\,\rho\, d\rho}{\int_0^a J_0^2(\gamma_n\rho/a)\,\rho\, d\rho} = \frac{2}{a^2 J_0^2(\gamma_n)} \int_0^a f(\rho)\, J_0(\gamma_n\rho/a)\,\rho\, d\rho$$

olduğu saptanır. Buna göre de problemin çözümü

$$T(\rho, t) = \frac{2}{a^2}\left[\int_0^a f(\rho')\,\rho'\,d\rho' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n \rho/a)}{J_0^2(\gamma_n)} e^{-\gamma_n^2 t/a^2} \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^a f(\rho')\,\rho'\,J_0(\gamma_n \rho'/a)\,d\rho' \right]$$

olur.

VIII.5. ***a*** **yarıçaplı ve dış yüzeyindeki sıcaklığın sürekli olarak sıfırda tutulduğu homogen bir kürede** $t = 0$ **ânındaki sıcaklık dağılımı** $T(r, 0) = f(r)$ **ise** $t > 0$ **için sıcaklık dağılımının ifâdesini tesis ediniz.**

ÇÖZÜM: Bu problem de

$$(T)_{t=0} = T(r, 0) = f(r)$$

başlangıç ve

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=a} = 0$$

sınır şartı altında

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

denklemini çözmekten ibârettir. Gene $T(r, t) = R(r)\,\tau(t)$ şeklinde bir değişken ayrışımı yapar ve λ ile ayrışım sâbitini gösterirsek

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR}{dr}\right) + \lambda R = 0 \\[2ex] \dfrac{d\tau}{dt} + \lambda\tau = 0 \end{cases}$$

bulunur. Bunların genel çözümleri ise

$$R(r) = A\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{r} + B\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}$$

$$\tau(t) = C\,e^{-\lambda t}$$

şeklindedir. R nin kürenin merkezinde sonlu kalması gerekir; bu şart bize $B=0$ olması icâbettiğini gösterir. Öte yandan da $R(a) = 0$ sınır şartı $n=1,2,\ldots$ olmak üzere

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

özdeğerlerini verir; buna göre özfonksiyonlar ise

$$R_n(r) = \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{a}$$

şeklindedir. Kısmî çözümlerin lineer kombinezonu ise

$$T(r, t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi r}{a}$$

dır. C_n katsayıları ise başlangıç şartından hareketle saptanırlar. Gerçekten de

$$T(r, 0) = f(r) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi r}{a}$$

ifâdesi $f(r)$ nin seriye açılımını vermektedir. Buradan ise

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(r') \sin \frac{n\pi r'}{a} \, r' \, dr'$$

olduğu saptanır. Şu hâlde

$$\boxed{T(r, t) = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi r}{a} \int_0^a f(r') \sin \frac{n\pi r'}{a} \, r' \, dr'}$$

olur.

VIII.6. a yarıçaplı bir küre üzerinde, küre merkezinde 2α açısını haiz bir koninin belirlediği S_1 küre takkesi sâbit bir T_0 sıcaklığında; küre yüzeyinin geri kalan S_2 kısmı da sıfır sıcaklığında muhafaza edilmektedir. Bu takdirde kürenin içindeki stasyoner sıcaklık dağılımının ifâdesi tesis ediniz.

ÇÖZÜM: Stasyoner sıcaklık dağılımı ($\partial T/\partial t = 0$) arandığından ve kürenin içindeki sıcaklık dağılımını da yalnızca r radyal uzaklığı ve θ zenit açısı aracılığıyla belirlemek mümkün olacağından problem,

$$(T)_{r=a} = f(\theta) = \begin{cases} T_0, & 0 \leqslant \theta < \alpha \text{ için} \\ 0, & \alpha < \theta \leqslant \pi \text{ için} \end{cases} \qquad \text{(VIII.6.1)}$$

sınır şartları altında

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = 0 \qquad \text{(VIII.6.2)}$$

şeklindeki *LAPLACE* denklemini çözmeye indirgenmektedir. $P_n(x)$ ile *LEGENDRE* polinomlarını göstererek, (VIII.6.2) yi gerçekleyen harmonik fonksiyonun

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \qquad \text{(VIII.6.3)}$$

serisiyle verildiği gene değişkenlere ayrışım yöntemiyle kolaylıkla ortaya konabilir. Buradan hareketle (VIII.6.1) sınır şartı için

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{için}: \quad T(r,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)$$

bulunur. *LEGENDRE* polinomlarının diklik bağıntılarından yararlanarak

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{2n+1}{2}\,T_0\int_{\cos\alpha}^{1} P_n(x)\,dx$$

bulunur. Buradan da $n = 0$ için derhâl

$$\int_{\cos\alpha}^{1} P_0(x)\,dx = 1 - \cos\alpha$$

bulunur. Keyfî n değerleri için ise *LEGENDRE* polinomlarının

$$(2n+1)\,P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$$

rekürans bağıntısından yararlanarak

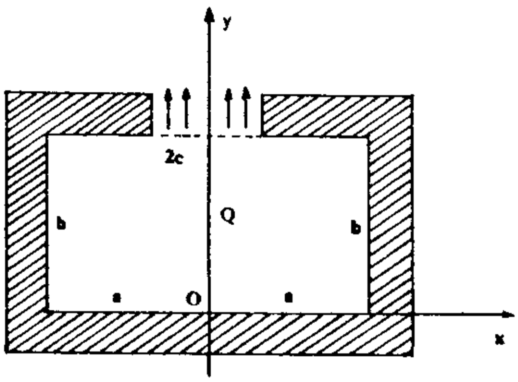
$$\int_{\cos\alpha}^{1} P_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\Big[\,P_{n-1}(\cos\alpha) - P_{n+1}(\cos\alpha)\,\Big], \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bulunur. Böylece elde edilecek olan C_n değerleri (VIII.6.3) e yerleştirilirse, nihâyet, aranan stasyoner sıcaklık dağılımının

$$\boxed{T(r,0)=\frac{1}{2}\,T_0\left\{1-\cos\alpha-\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_{n+1}(\cos\alpha)-P_{n-1}(\cos\alpha)\right]\times\right.\\ \left.\times\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\alpha)\right\}}$$

şeklinde olduğu saptanmış olur.

VIII.7. Dik kesiti şekilde gösterilen sonsuz uzunluktaki dikdörtgen bir çubuk içinde sâbit Q yoğunluklu bir ısı birbiçim bir şekilde üremektedir. Sâbit q yoğunluğunu haiz bir ısı akımı çubuğun üst yüzünde $2c < 2a$ kadar bir kısmından çubuğu terk etmekte olup çubuğun diğer yüzleri iyice yalıtılmıştır. Buna göre çubuktaki stasyoner sıcaklık dağılımının ifâdesini tesis ediniz.



ÇÖZÜM; Göz önüne alınan bölgede çözülmesi gerekli ısı iletim denklemi, bu bölgedeki ısı kaynağı yoğunluğunun Q ve sıcaklık dağılımının da stasyoner olması nedeniyle

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{Q}{\varkappa}=0 \qquad \text{(VIII.7.1)}$$

şeklindedir. Bu denklemin çözümünün gerçekleyeceği sınır şartları ise

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\pm a}=\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=b}=f(x)=\begin{cases}-\dfrac{Qab}{\varkappa c}, & |x|<\text{ için}\\ 0\ , & |x|>\text{ için}\end{cases} \qquad \text{(VIII.7.2)}$$

şeklindedir.

$|x|<c\,,\,y=b$ kesitini kateden ısı akımının q yoğunluğunun çubuğun içindeki üreyen ısının Q yoğunluğu cinsinden ifâdesi: $qc=Qab$ eşitliğinden hesaplanır.

(VIII.7.1) in çözümü, meselâ, x değişkeni cinsinden homogen sınır şartlarını gerçekleyen $X_n(x)$ özfonksiyonlarının bir serisi şeklinde elde edilebilir. Bu takdirde

$$T(x, y) = \frac{1}{a}\overline{T}_0 + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n \cos\frac{n\pi x}{a} \tag{VIII.7.3}$$

yazılır. Buradaki $\overline{T}_n$ katsayıları özfonksiyonların dikliğinden kolaylıkla hesaplanabilir:

$$\overline{T}_n = \int_0^a T(x, y)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx\,. \tag{VIII.7.4}$$

$\overline{T}_n$ yi hesaplamak üzere (VIII.7.1) i $\cos(n\pi x/a)$ ile çarpıp x üzerinden 0 dan a ya kadar integre edelim. Buradan

$$\int_0^a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx + \int_0^a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx = -\frac{Q}{\varkappa}\int_0^a \cos\frac{n\pi x}{a} \tag{VIII.7.5}$$

bulunur. (VIII.7.4) den $\overline{T}_n$ nin yalnız y nin fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bunu göz önünde tutarak (VIII.7.3) den

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{2}{a}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{T}_n\cos\frac{n\pi x}{a}$$

olacağı saptanır. Bu, (VIII.7.5) e vaz edilirse, neticede,

$$\frac{d^2\overline{T}_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi^2}{a}\right)^2\overline{T}_n = \begin{cases} -\dfrac{Qa}{\varkappa}\,, & n = 0 \text{ için} \\ 0\,, & n \geqslant 1 \text{ için} \end{cases}$$

bulunur. Buradan ise derhâl

$$\begin{aligned} \overline{T}_0 &= -\frac{Qa}{2\varkappa}y^2 + A_0 + B_0 y \\ \overline{T}_n &= A_n\cosh\frac{n\pi y}{a} + B\sinh\frac{n\pi y}{a}\,, \qquad n \geqslant 1 \end{aligned} \tag{VIII.7.6}$$

bulunur.

y cinsinden sınır şartları göz önünde tutulursa

$$\left(\frac{d\overline{T}_n}{dy}\right)_{y=0} = 0 \;\rightarrow\; B_n = 0\,, \qquad (n \geqslant 0) \tag{VIII.7.7}$$

$$\left(\frac{d\overline{T}_n}{\cdot}\right)_{y=b} = \int_0^c f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx = -\frac{Qa^2 b}{n\pi\varkappa\, c}\sin\frac{n\pi c}{a}$$

$$= A_n \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}, \qquad (n \geqslant 1)$$

ve dolayısıyla da

$$A_n = -\frac{Qa^3 b}{n^2 \pi^2 c\varkappa} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{\sinh \frac{\pi n b}{a}} \qquad \text{(VIII.7.8)}$$

bulunur.

(VIII.7.7) ve (VIII.7.8) ifâdeleri (VIII.7.6) ya vaz edilirse bu takdirde, (VIII.7.3) çözümünde, A_0 ın belirsiz bir sâbit olarak kaldığı da göz önünde tutularak,

$$\boxed{T(x,y) = -\frac{Q}{\varkappa}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{2a^2 b}{\pi^2 c}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n^2} \frac{\cosh \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}\right] + \text{sâbit}}$$

şekline girer.

✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱

VIII.8. Kenarları *a*, *b* olan dikdörtgen şeklindeki bir levha içindeki sıcaklık dağılımını

$$T(x\,,0) = T_0\,, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=b} = 0, \quad T(0, y) = 0, \quad T(a,\, y) = 0$$

sınır şartlarına göre belirleyiniz.

ÇÖZÜM: Levhanın içindeki sıcaklık dağılımı zamandan bağımsızdır. Bu nedenle ısı iletimi denklemi

$$\nabla^2 T(x\,, y) = 0 \qquad \text{(VIII.8.1)}$$

şeklini alır. Ayrıca $T(x,y)$ eğer

$$T(x\,, y) = X(x)\; Y(y)$$

şeklinde değişken ayrışımı yapılırsa (VIII.8.1) denklemi

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$$

veyâ

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}$$

olur. Birinci taraf x in ikinci taraf da y nin fonksiyonudur. Öyleyse her iki tarafın da bir sâbite eşit olması gerekir. Sınır şartları X in periyodik bir fonksiyon olması lâzım geldiğini gösterir. Buna göre sâbiti $-\beta^2$ alıyoruz. Kolayca X ve Y özel çözümlerinin

$$X = A\cos\beta x + B\sin\beta x\ ,$$

$$Y = C\,e^{\beta y}\,y + D\,e^{-\beta y}$$

olduğu görülür. Sınır şartlarını kullanarak A, B, C, D ve β sâbitlerini belirleyelim.

$$x=0 \rightarrow X=0 \rightarrow A=0,$$

$$x=a \rightarrow X=0 \rightarrow \beta=\frac{n\pi}{a}$$

$$y=b \rightarrow Y'=0 \rightarrow C=D\,e^{-2\beta b}$$

Buna göre (VIII.8.1) denkleminin çözümü

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n\left[e^{n\pi(y-2b)/a}+e^{-n\pi y/a}\right]\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad \text{(VIII.8.2)}$$

dir. $\mathscr{A}_n$ katsayısı son sınır şartından bulunacaktır.

$$y=0 \quad \text{için} \quad T(x\,,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n\left(e^{-2nb\pi/a}+1\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

eşitliği elde edilir. O hâlde

$$\mathscr{A}_n=\frac{2}{a\left(1+e^{-2nb\pi/a}\right)}\int_0^a T(x,0)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx=\frac{2\,T_0[1-(-1)^n]}{n\left(1+e^{-2nb\pi/a}\right)}$$

dır. $\mathscr{A}_n$ katsayısı (VIII.8.2) de yerine konularak, levhanın içindeki sıcaklık dağılımı için

$$T(x\,,y) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]}{n\,(1+e^{-2nb\pi/a})} [e^{n\pi(y-2b)/a} + e^{-n\pi y/a}] \sin\frac{n\pi x}{a}$$

bulunur.

VIII.9. Kenarları a,b olan dikdörtgen şeklindeki bir levha içindeki sıcaklık dağılımını

$$T(0,y)=0, \quad T(a,y)=0, \quad T(x\,,0)=T_0, \quad T(x,b)=T_0$$

sınır şartlarına göre belirleyiniz.

CEVAP:

$$T(x,y) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \frac{1}{e^{n\pi/a\,b} - e^{-n\pi/a\,b}} \Big[(1-e^{-n\pi b/a})\, e^{n\pi y/a} + (e^{n\pi b/a} - 1)\, e^{-n\pi y/a} \Big] \sin\frac{n\pi x}{a}\,.$$

VIII.10. Kenar uzunlukları a, b, c olan bir dikdörtgenler prizmasının tabanı T_0 derecede diğer yüzeyleri ise 0 derecede tutulmaktadır. Prizmanın içindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Isı iletimi denklemi $\nabla^2 T(x,y,z)=0$ şeklindedir. Eğer $T(x,y,z) = X(x)Y(y)\,Z(z)$ yazılırsa, denklem

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

ve

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z}$$

olur. Birinci taraf x in ikinci taraf da y ve z nin fonksiyonudur. Sınır şartlarına göre X fonksiyonunun periyodik olması gereklidir.

$$\frac{X''}{Y} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\beta^2$$

$$X = A\cos\beta\, x + B\sin\beta\, x\,,$$

$$\frac{Y''}{Y} = \beta^2 - \frac{Z''}{Z}$$

ve yine sınır şartlarına göre Y fonksiyonunun da periyodik olması gerektiğinden

$$\frac{Y''}{Y} = \beta^2 - \frac{Z''}{Z} = -\gamma^2$$

yazılır. O hâlde

$$Y = C\cos\gamma y + D\sin\gamma y,$$

$$Z = E\,e^{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,z} + F\,e^{-\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,z}$$

dir. $A, B, C, D, E, F, \beta, \gamma$ sâbitleri sınır şartlarından belirlenir:

$$x = 0 \text{ için } X = 0 \rightarrow A = 0,$$

$$x = a \text{ için } X = 0 \rightarrow \beta = \frac{n\pi}{a},$$

$$y = 0 \text{ için } Y = 0 \rightarrow C = 0,$$

$$y = b \text{ için } Y = 0 \rightarrow \gamma = \frac{m\pi}{b},$$

$$z = c \text{ için } Z = 0 \rightarrow E = -e^{-\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,2c}.$$

Böylece ısı iletimi denkleminin genel çözümü

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_{mn}\left[e^{-\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,z} - e^{\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,(z-2c)}\right]\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

olur. $\mathscr{A}_{mn}$ sâbitleri de şimdiye kadar kullanılmamış olan

$$z = 0 \rightarrow T(x, y, z) = T_0 = s\hat{a}bit$$

sınır şartından belirlenecektir.

$$T_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_{nm}(1 - e^{-2c})\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

olup buradan da

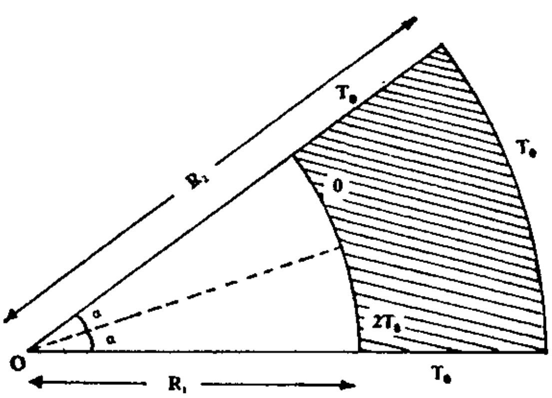
$$(1-e^{-2c})\,\mathscr{A}_{mn} = \frac{2}{a}\,\frac{2}{b}\int_0^a dx\int_0^b dy\,T_0\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

$$= \frac{4T_0}{mn\pi^2}\,[1-(-1)^n]\,[1-(-1)^m]$$

bulunur. Buna göre prizma içindeki sıcaklık dağılımı

$$\boxed{T(x,y,z)=\frac{4T_0}{\pi^2(1-e^{-2c})}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(e^{\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,z}-e^{\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,(z-2c)}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}}$$

olur.



VIII.11. Şekilde verilen sınır şartları altında taranmış kısımdaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Levhanın her tarafından T_0 sıcaklığını çıkaralım. Böylece levhadaki sıcaklık dağılımı problemi aşağıda gösterilen yeni sınır şartlarına göre çözülmesi gereken probleme dönüştürülmüş olur.

Yeni sınır değer problemi için olan çözümü $\overline{T}(r,\varphi)$ ile ve eski sınır değer problemi için olan çözümü de $T(r,\varphi)$ ile gösterirsek (ısı iletimi denklemi lineer olduğundan),

$$T(r,\varphi)=T_0+\overline{T}(r,\varphi)$$

yazılabilir.

Diğer taraftan sıcaklık dağılımı zamana bağlı olmadığından ısı iletimi denklemi

$$\nabla^2\,T(r,\varphi)=0$$

şeklindedir. ∇^2 operatörünü kutupsal koordinatlar cinsinden yazar ve $\overline{T}(r,\varphi)=R(r)\,\Phi(\varphi)$ şeklinde bir değişken ayrışımı yaparsak

$$\frac{1}{R}\,(r^2R''+r\,R')=-\,\frac{\Phi''}{\Phi}$$

buluruz. Φ fonksiyonunun periyodik olması gerektiğinden her iki tarafı β^2 ye eşitlememiz lâzımdır. Özel çözümler

$$R=A\,r^{\beta}+B\,r^{-\beta}$$

$$\Phi=C\cos\beta\varphi+D\sin\beta\varphi$$

olur. A, B, C, D integrasyon sâbitlerinin değerleri sınır şartlarından bulunacaktır:

$$\varphi = 0 \text{ için } \Phi = 0 \rightarrow C = 0\,,$$

$$\varphi = 2\alpha \text{ için } \Phi = 0 \rightarrow \beta = \frac{n\pi}{2\alpha}\,.$$

O hâlde

$$\overline{T}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{A}_n\, r^{n\pi/2\alpha} + \mathscr{B}_n\, r^{-n\pi/2\alpha}) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha} \qquad \text{(VIII.11.1)}$$

dir.

$$r = R_1 \text{ için} \quad \overline{T}(R_1, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{A}_n\, R_1^{n\pi/2\alpha} + \mathscr{B}_n\, R_1^{n\pi/2\alpha}) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}$$

yâni

$$\mathscr{A}_n\, R_1^{n\pi/2\alpha} + \mathscr{B}_n\, R_1^{n\pi/2\alpha} = \frac{2}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} \overline{T}(R_1, \varphi) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\int_0^{\alpha} T_0 \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}\, d\varphi + \int_{\alpha}^{2\alpha} (-T_0) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}\, d\varphi\right]$$

$$= \frac{T_0}{n\pi}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right], \qquad \text{(VIII.11.2)}$$

$$r = R_2 \text{ için} \quad \overline{T}(R_2, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{A}_n\, R_2^{n\pi/2\alpha} + \mathscr{B}_n\, R_2^{-n\pi/2\alpha}) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha} = 0$$

yâni

$$\mathscr{A}_n\, R_2^{n\pi/2\alpha} + \mathscr{B}_n\, R_2^{-n\pi/2\alpha} = 0 \qquad \text{(VIII.11.3)}$$

olur. (VIII.11.2) ve (VIII.11.3) den

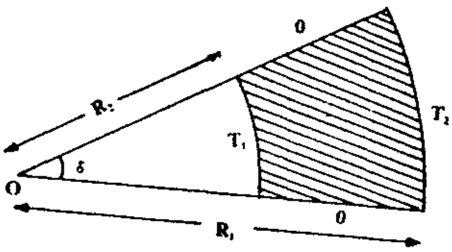
$$\mathscr{B}_n = \frac{T_0\left[1 + (-1)^n - 2\cos\dfrac{n\pi}{2}\right]}{n\pi\left[R_1^{-n\pi/2\alpha} - \left(\dfrac{R_1}{R_2^2}\right)^{n\pi/2\alpha}\right]}\,,$$

$$\mathscr{A}_n = \frac{T_0\left[1 + (-1)^n - 2\cos\dfrac{n\pi}{2\alpha}\right]}{n\pi\left[R_1^{n\pi/2\alpha} - \left(\dfrac{R_2^2}{R_1}\right)^{n\pi/2\alpha}\right]}\,.$$

bulunur. Bu değerler (VIII.11.1) de kullanılarak da $\overline{T}(r, \varphi)$ sıcaklık dağılımı elde edilir. Asıl sıcaklık dağılımı ise

$$T(r, \varphi) = T_0 + \overline{T}(r, \varphi)$$

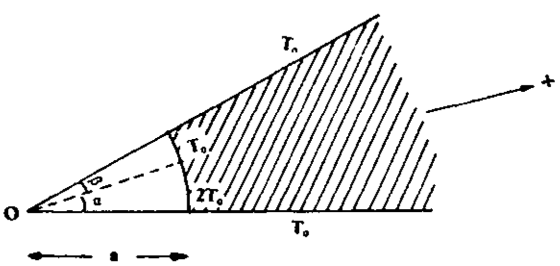
dir.



VIII.12. Şekilde verilen şartlar altında taranmış kısımdaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

$$CEVAP: \quad T(r,\varphi) = \frac{2T_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{n-1}]\left[\left(\frac{r}{R_2}\right)^{n\pi/\delta} + \left(\frac{R_2}{r}\right)^{n\pi/\delta}\right]}{n\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n\pi/\delta} - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n\pi/\delta}\right]} \sin\frac{n\pi\varphi}{\delta} +$$

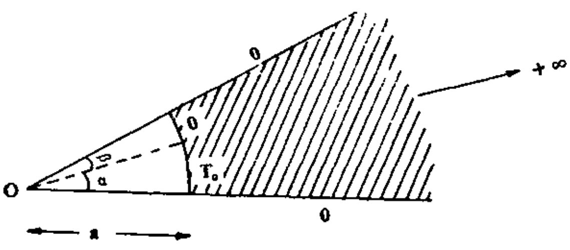
$$+ \frac{2T_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (1-)^{n-1}]\left[\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n\pi/\delta} + \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n\pi/\delta}\right]}{n\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n\pi/\delta} - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n\pi/\delta}\right]} \sin\frac{n\pi\varphi}{\delta}$$



VIII.13. Şekilde gösterilen şartlar altında taranmış kısımdaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Her taraftan T_0 sıcaklığı çıkarılarak, aşağıdaki şekilde gösterilen sınır şartlarına uyan sıcaklık dağılımı problemi elde edilir. Bu problemin çözümü olan sıcaklık dağılımı $\overline{T}(r, \varphi)$ ile gösterilirse, kolayca gerçekleneceği gibi

$$T(r, \varphi) = \overline{T}(r, \varphi) + T_0$$



olur. $\overline{T}(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ yazılır ve bu yeni fonksiyonlar için elde edilen diferansiyel denklemler çözülürse,

$$R = A\,r^{\gamma} + B\,r^{-\gamma},$$

$$\Phi = C\cos\gamma\varphi + D\sin\gamma\varphi$$

bulunur. r nin çok büyük değerleri için sıcaklığın çok büyük olması fizikî bakımdan imkânsızdır. Bu nedenle

$$\lim_{r\to\infty} R = \text{sonlu}$$

yâni

$$A = 0$$

olmalıdır.

$$\varphi = 0 \quad \text{için} \quad \Phi = 0 \quad \to \quad C = 0\,,$$

$$\Phi = \alpha + \beta \quad \text{için} \quad \Phi = 0 \quad \to \quad \gamma = \frac{n\pi}{\alpha + \beta}\,.$$

O hâlde

$$\overline{T}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n \, r^{-n\pi/(\alpha+\beta)} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha + \beta}$$

dır. $\mathscr{A}_n$ katsayıları şimdiye kadar kullanılmamış olan sınır şartından bulunacaktır.

$$\mathscr{A}_n \, a^{-n\pi/(\alpha+\beta)} = \frac{2}{\alpha + \beta} \int_0^{\alpha+\beta} T(a, \varphi) \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha + \beta} \, d\varphi$$

$$= \frac{2T_0}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi\alpha}{\alpha + \beta} \right).$$

Levhadaki sıcaklık dağılımı böylece

$$T(r, \varphi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi\alpha}{\alpha + \beta} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{n\pi/(\alpha+\beta)} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha + \beta}$$

olur.

VIII.14. Yarıçapları R_1 ve R_2 olan eşeksenli sonsuz uzun iki silindirin arasında kalan bölgedeki sıcaklık dağılımını

$$T(R_1, \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad 0 \leqslant \varphi < \dfrac{3\pi}{2} \\ T_0 & \text{eğer} \quad \dfrac{3\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}, \qquad T(R_2, \varphi) = \begin{cases} T_0 & \text{eğer} \quad 0 \leqslant 0 < \dfrac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{eğer} \quad \dfrac{3\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

sınır şartlarına göre belirleyiniz.

ÇÖZÜM: Silindirler sonsuz uzun olduklarına göre, verilen bölgedeki sıcaklık dağılımı z ye bağlı değil, sâdece r ve φ ye bağlıdır (Problemde silindirik koordinatların kullanılacağı âşikârdır). Böylece ısı iletimi denklemi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$$

şeklini alır. $T(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ ayrışımı yapılırsa

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n}\,,$$

$$\Phi(\varphi) = C\cos n\varphi + D\sin n\varphi$$

olur. k ile bir tam sayıyı göstermek üzere $\Phi(\varphi)$ fonksiyonunun, argümanının $2k\pi$ kadar artmasıyla hiç değişmemesi gerekir. Bu nedenle γ yerine doğrudan doğruya n alınmıştır. Bölgedeki ısı dağılımı

$$T(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(\mathscr{A}_n r^n + \mathscr{B}_n r^{-n})\cos n\varphi +$$

$$+ (\mathscr{C}_n r^n + \mathscr{D}_n r^{-n})\sin n\varphi] \qquad \text{(VIII.14.1)}$$

ile verilir. Sâbitler sınır şartlarından bulunacaktır.

$$r = R_1 \quad \text{için} \quad T(R_1, \varphi) = A_0 + B_0 \ln R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\mathscr{A}_n R_1^n + \mathscr{B}_n R_1^{-n})\cos n\varphi +$$

$$+ (\mathscr{C}_n R^{1n} + \mathscr{D}_n R_1^{-n} \sin n\varphi]$$

yâni

$$A_0 + B_0 \ln R_1 = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{3\pi/2} 0\, d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} T_0\, d\varphi\right] = \frac{1}{2} T_0\,,$$

$$\mathscr{A}_n R_1^n + \mathscr{B}_n R_n^{-n} = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{3\pi/2} 0 \cos n\varphi\, d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} T_0 \cos n\varphi\, d\varphi\right]$$

$$= -\frac{T_0}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\,,$$

$$\mathscr{C}_n R_1^n + \mathscr{D}_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{3\pi/2} 0 \times \sin n\varphi\, d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} T_0 \sin n\varphi\, d\varphi\right]$$

$$= \frac{T_0}{n\pi}\left(\cos\frac{3n\pi}{2} - 1\right)$$

ve

$$r = R_2 \quad \text{için} \quad T(R_2, \varphi) = A_0 + B_0 + \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\mathscr{A}_n R_2^n + \mathscr{B}_n R_2^{-n}) \times$$

$$\times \cos n\varphi + (\mathscr{C}_n R_2^n + \mathscr{D}_n R_2^{-n}) \sin n\varphi]$$

yâni

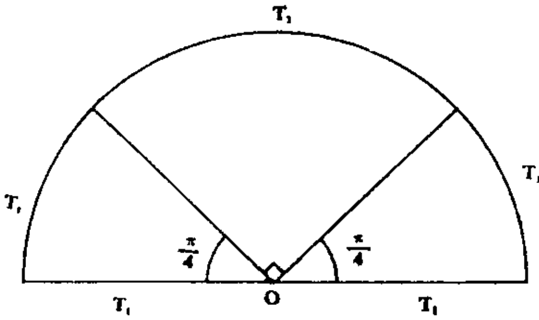
$$A_0 + B_0 \ln R_2 = \frac{3}{2} T_0 ,$$

$$\mathscr{A}_n R_2^n + \mathscr{B}_n R_2^{-n} = \frac{T_0}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} ,$$

$$\mathscr{C}_n R_2^n + \mathscr{D}_n R_2^{-n} = \frac{T_0}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{3n\pi}{2} \right)$$

dir. Bu ifâdelerden sâbitler bulunup (VIII.14.1) deki yerlerine vaz edilerek sıcaklık dağılımının ifâdesi elde edilir.

VIII.15. Şekilde verilen sınır şartlarına göre levhadaki sıcaklık dağılımını bulunuz.



ÇÖZÜM: Kolayca gerçekleneceği gibi

$$T(r, \varphi) = T_1 + \overline{T}(r, \varphi)$$

ve

$$\overline{T}(r, \varphi) = R(r)\, \Phi(\varphi)$$

için

$$R_n = C_n r^n , \qquad \Phi_n = B_n \sin n\varphi$$

dir [$\lim_{r \to 0} T(r, \varphi) =$ sonlu olması için R nin ifâdesindeki r^{-n} li terimin katsayısı 0 alınmıştır]. O hâlde

$$\overline{T}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n r^n \sin n\varphi$$

ve

$$\mathscr{A}_n = \frac{2(T_2 - T_1)}{n\pi a^n} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right)$$

olur. Sonuç olarak da

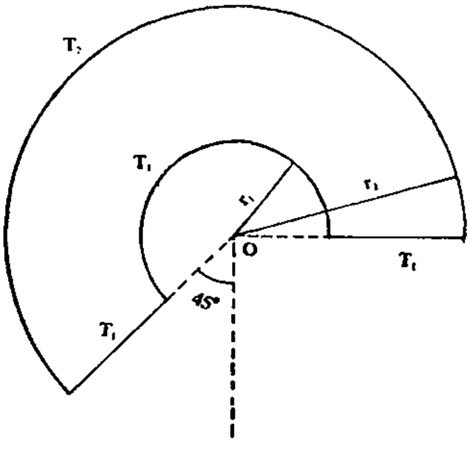
$$T(r,\varphi) = T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin n\varphi .$$

bulunur.

VIII.16. r **yarıçaplı bir dairenin dörtte biri alınıyor. Daire parçasını belirleyen yarıçaplar devamlı olarak** T_0 **derecede ve yay da** $\sin\varphi$ **derecede tutulduğuna göre, yüzeydeki sıcaklık dağılımını bulunuz.**

CEVAP:
$$T(r,\varphi) = T_0 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{2n-1}{2}\pi}{2(2n-1)} - \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\pi}{2(2n+1)} + \frac{T_0}{2n} (\cos n\pi - 1) \right] \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} \sin 2n\varphi .$$

VIII.17. Şekildeki cismin içindeki sıcaklık dağılımını verilen sınır şartlarına göre inceleyiniz.



CEVAP:

$$T(r,\varphi) = \frac{5}{4} (T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n^2}{n} \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{4n/5} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^{4n/5}}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{4n/5} - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{4n/5}} \sin \frac{4n\varphi}{5}$$

VIII.18. $2a$ **kalınlığında sonsuz bir levhanın her iki yüzü devamlı olarak 0 derecede tutuluyor. Başlangıç ânındaki sıcaklık dağılımı**

$$T(x,0) = \begin{cases} T_1 \text{ eğer } 0 \leqslant x \leqslant a \text{ ise,} \\ T_2 \text{ eğer } a < x \leqslant 2a \text{ ise,} \end{cases} \qquad (T_1 \neq T_2)$$

ile verildiğine göre, herhangi bir anda birim yüzeyden geçen ısı mikdarını bulunuz.

ÇÖZÜM: Levhanın içindeki sıcaklık dağılımı zamana bağlıdır. Isı iletimi denkleminde $T(x, t) = X(x)\,\tau(t)$ yazılırsa

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\tau'}{\tau}$$

olur. Bu eşitlik β bir reel sayı olmak üzere $-\beta^2$ ye eşitlenmelidir. $+\beta^2$ ye eşitlenecek olursa, kolayca görüleceği gibi, $\tau = \exp(\alpha\beta^2 t)$ olacak, yâni sıcaklık dağılımı zamanla üstel olarak artacaktır. Bu ise fizikî bakımdan imkânsızdır. Buna göre

$$\tau = e^{-\alpha\beta^2 t}, \qquad X = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

ve sınır şartlarından da

$$A = 0, \quad \beta = \frac{n\pi}{2a}$$

bulunur. O hâlde

$$T(x\,,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha t}{4a^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2a}$$

dir. Başlangıç şartından

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2a}$$

yâni

$$B_n = \frac{2}{2a}\int_0^{2a} T(x,0)\sin\frac{n\pi x}{2a}\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[\,T_1 + T_2(-1)^{n-1} + (T_2 - T_1)\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

bulunur. Levhadaki sıcaklık dağılımı da

$$T(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\,T_1 + (-1)^{n-1}T_2 + (T_2 - T_1)\cos\frac{n\pi}{2}\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2}{4a^2}\,t\right)\sin\frac{n\pi x}{2a}$$

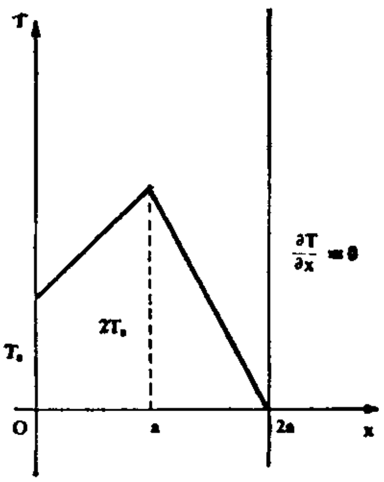
olur.

Herhangi bir anda birim yüzeyden geçen ısı mikdarı ise, $\mathbf{e}_x$ ile x doğrultusundaki birim vektörü göstermek üzere,

$$\mathbf{j} = -\mathbf{e}_x L \frac{\partial T}{\partial x} = -\mathbf{e}_x \frac{L}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_1 + (-1)^{n-1} T_2 + (T_2 - T_1) \cos \frac{n\pi}{2} \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{4a^2} t \right) \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

dir.



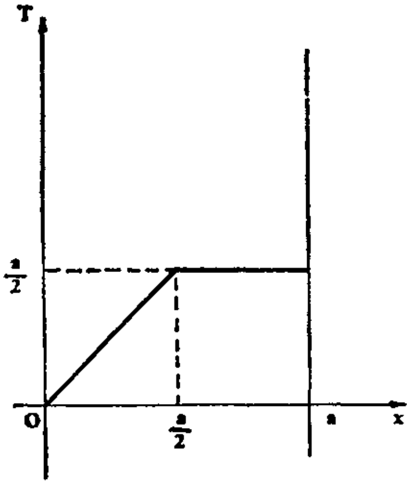
VIII.19. **$2a$ kalınlığında sonsuz bir levhanın bir yüzü devamlı olarak T_0 derecede tutulmaktadır; diğer yüzü ise yalıtılmıştır. Başlangıçtaki sıcaklık dağılımı şekildeki gibi olduğuna göre herhangi bir andaki sıcaklık dağılımını bulunuz.**

CEVAP: $$T(x, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4T_0}{(2n+1)\pi} \times$$

$$\times \left[-\cos \frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{4}{(2n+1)\pi} \times \right.$$

$$\times \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} - 2 \cos \frac{(2n+1)\pi}{4} - \frac{8}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} +$$

$$\left. + \frac{8}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4} \right] \exp\left(-\frac{\alpha(2n+1)^2 \pi^2}{16a^2} t \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{4a} x .$$



VIII.20. **a kalınlığında sonsuz bir levha eşısılı olarak yalıtılmış olup $t = 0$ ânındaki sıcaklık dağılımı şekilde gösterildiği gibidir. Herhangi bir andaki sıcaklık dağılımını bulunuz.**

ÇÖZÜM: $T(x, t) = X(x)\, \tau(t)$ yazılırsa, $X(x)$ ve $\tau(t)$ için özel çözümlerin

$$\tau(t) = e^{-\alpha\beta^2 t},$$

$$X(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

olduğu bir önceki problemde gösterilmişti. Levhanın her iki yüzü yalıtılmış olduğundan, yüzeylerdeki ısı akım vektörlerinin değerleri 0 dır. Buradan

$$x=0 \text{ için } X'=0 \rightarrow B=0,$$

$$x=a \text{ için } X'=0 \rightarrow \beta=\frac{n\pi}{a}$$

olur. Buna göre

$$T(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha}{a^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{a}.$$

Kolayca görüleceği üzere

$$T(x,0)=\begin{cases} x & \text{eğer } 0 \leqslant x < a/2 \text{ ise,} \\ a/2 & \text{eğer } a/2 \leqslant x \leqslant a \text{ ise,}\end{cases}$$

dir. Buradan

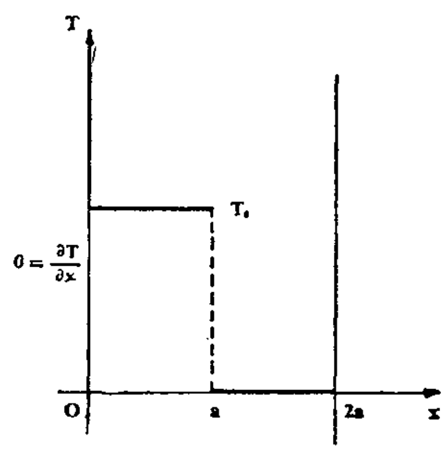
$$A_n=\frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2} x\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx+\int_{a/2}^{a}\frac{a}{2}\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx\right]=\frac{a}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\boxed{T(x,t)=\frac{a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha}{a^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{a}}$$

olur.

VIII.21. **$2a$ kalınlığında sonsuz bir levhanın bir yüzü 0 derecededir. Diğer yüzü de yalıtılmıştır. Başlangıçtaki sıcaklık dağılımı şekildeki gibi olduğuna göre, herhangi bir andaki sıcaklık dağılımını hesaplayınız.**



ÇÖZÜM: Problem VIII.20 dekine benzer şekilde sınır şartlarından

$$x=0 \text{ için } X'=0 \rightarrow B=0,$$

$$x=2a \text{ için } X=0 \rightarrow \beta=\frac{(2n+1)\pi}{4a}$$

bulunur.

$$T(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\alpha(2n+1)^2\pi^2}{16a^2}t\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{4a}x.$$

Başlangıç şartından da

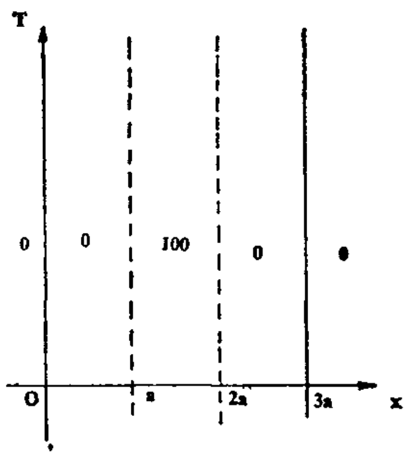
$$A_n = \frac{2}{2a}\left[\int_0^a T_0 \cos\frac{(2n+1)\pi x}{4a}\,dx + \int_a^{2a} 0 \cos\frac{(2n+1)\pi x}{4a}\,dx\right]$$

$$= \frac{4\,T_0}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}$$

ve dolayısıyla

$$T(x\,,\,t) = 4T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{4}}{(2n+1)\pi}\exp\left[-\frac{\alpha(2n+1)^2\pi^2}{16\,a^2}\,t\right]\cos\frac{(2n+1)\pi}{4a}x$$

olur.

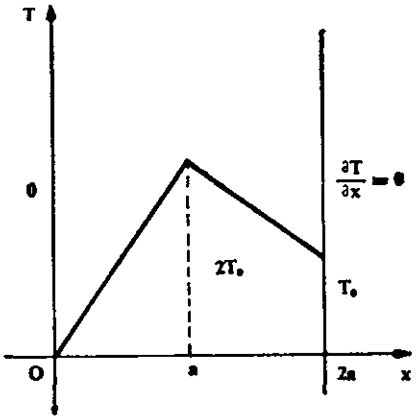


VIII.22. **$3a$ kalınlığında sonsuz bir levhanın iki yüzü 0 derecede tutulmaktadır. Levhadaki sıcaklık dağılımını şekilde gösterilen başlangıç şartına göre belirleyiniz.**

CEVAP:

$$T(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\alpha n^2\pi^2}{9a^2}\,t\right]\sin\frac{n\pi x}{3a}\,.$$



VIII.23. **$2a$ kalınlığında sonsuz bir levhanın bir yüzü 0 derecede diğer yüzü de yalıtılmış bulunmaktadır. Levhanın içindeki sıcaklık dağılımını şekilde gösterilen sınır şartına göre belirleyiniz.**

CEVAP:

$$T(x\,,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{48\,T_0}{(2n+1)^2\,\pi^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4} -\right.$$

$$\left.-\frac{16T_0}{(2n+1)^2\,\pi^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]\exp\left[-\frac{\alpha(2n+1)^2\pi^2}{16a^2}\,t\right]\sin\frac{(2n+1)\pi}{4a}x\,.$$

VIII.24. **Kesiti, a ve b kenarlı bir dörtgen olan sonsuz uzun bir prizma T_0 sıcaklığında bulunuyor. Yüzeyleri âniden 0 dereceye getirildiği zaman prizmanın içindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.**

ÇÖZÜM: Prizma sonsuz uzun olduğundan, prizmanın içindeki sıcaklık dağılımını bulmak için, bir kesitindeki sıcaklık dağılımını bulmak yeterlidir. Kesitteki sıcaklık dağılımı x, y ve t nin fonksiyonudur.

$$T(x, y, t) = X(x)\, Y(y)\, \tau(t)$$

yazılırsa, ısı iletimi denklemi

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{\alpha}\, \frac{\tau'}{\tau} = -\beta^2$$

ye indirgenir. O hâlde

$$\tau(t) = e^{-\alpha\beta^2 t},$$

$$X(x) = A \cos\gamma x + B \sin\gamma x,$$

$$Y(y) = C \cos\delta y + D \sin\delta y$$

dir. Sınır şartlarından

$$x = 0 \quad \text{için} \quad X = 0 \quad \to \quad A = 0,$$

$$x = a \quad \text{için} \quad X = 0 \quad \to \quad \gamma = \frac{n\pi}{a},$$

$$y = 0 \quad \text{için} \quad Y = 0 \quad \to \quad C = 0,$$

$$y = b \quad \text{için} \quad Y = 0 \quad \to \quad \delta = \frac{m\pi}{b}$$

bulunur. O hâlde

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_{n,m} \exp\left[-\alpha\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) t\right] \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

olur. Başlangıç şartından $\mathscr{A}_{n,m}$ katsayıları bulunur:

$$T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

ve

$$\mathscr{A}_{m,n} = \frac{2}{a}\,\frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b T_0 \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$= \frac{4T_0}{mn\pi^2} (1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi)$$

dir. Buradan da

$$T(x, y, t) = \frac{4T_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \times$$

$$\times \exp\left[-\alpha\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)t\right] \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} .$$

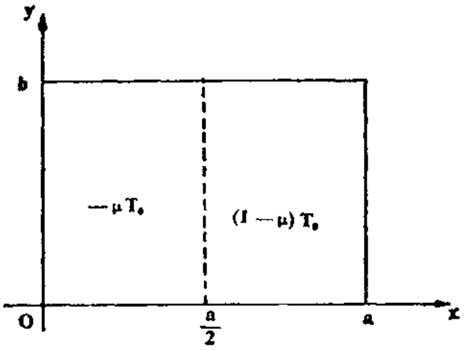
olur.

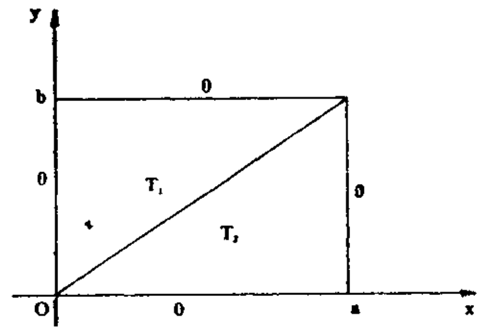
VIII.25. Kesiti, a ve b kenarlı bir dikdörtgen olan sonsuz uzun bir prizmanın yüzeyleri devamlı olarak 0 derecede tutuluyor. Başlangıçtaki sıcaklık dağılımı aşağıda soldaki şekilde gösterildiği gibidir. Herhangi bir andaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

CEVAP: $$T(x, y, t) = \frac{4T_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}\left[-\mu\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)[-1 + (-1)^m]\right.$$

$$\left. + (1 - \mu)\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right)[(-1)^m - 1]\right] \exp\left[-\alpha\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)t\right] \times$$

$$\times \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} .$$





VIII.26. Kesiti a, b kenarlı bir dikdörtgen olan sonsuz uzun bir prizmanın yüzeyleri devamlı olarak 0 derecede tutuluyor. Başlangıçtaki sıcaklık dağılımı yukarıda sağdaki şekilde gösterildiği gibidir. Herhangi bir andaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Sıcaklık dağılımı $T(x, y, t) = X(x)\, Y(y)\, \tau(t)$ şeklinde çarpanlara ayrılır ve çarpanların gerçeklediği diferansiyel denklemlerin çözümleri verilen başlangıç şartlarına uydurulursa

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_{m,n} \exp\left[-\alpha\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)t\right] \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

olur. $\mathscr{A}_{m,n}$ sâbitlerini başlangıç şartından bulacağız. Şekilden kolayca görüleceği gibi, başlangıç şartı

$$T(x, y, 0) = \begin{cases} T_2 \text{ eğer } 0 \leqslant x \leqslant a, & 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{b}{a} x \text{ ise,} \\ T_1 \text{ eğer } 0 \leqslant x \leqslant a, & \dfrac{b}{a} x \leqslant y \leqslant b \text{ ise,} \end{cases}$$

dır. Buna göre

$$\mathscr{A}_{mn} = \frac{2}{a}\,\frac{2}{b}\left[\int_0^a T_2 \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\left(\int_0^{bx/a} \sin\frac{m\pi y}{b}\,dy\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^a T_1 \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\left(\int_{bx/a}^{b} \sin\frac{m\pi y}{b}\,dy\right)\right]$$

$$= \frac{4T_2}{am\pi}\left[\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\left(1 - \cos\frac{m\pi x}{a}\right)dx + \right.$$

$$\left. + \frac{4T_1}{am\pi}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\left((-1)^m - \cos\frac{\pi m x}{a}\right)dx\right]$$

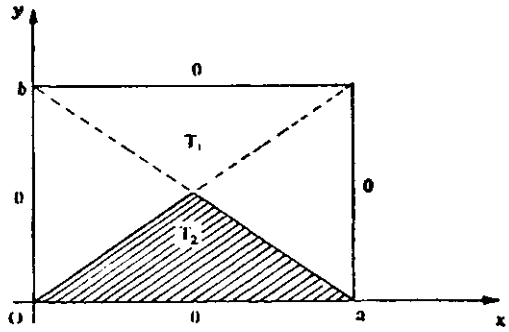
$$= \frac{4T_2}{mn\pi^2}[1-(-1)^n] - \frac{2T_2}{m(n-m)\pi^2}[1-(-1)^{n-m}] - \frac{2T_2}{m(n+m)\pi^2}[1-(-1)^{n+m}] +$$

$$+ \frac{4T_1}{mn\pi^2}(-1)^m[1-(-1)^n] - \frac{2T_1}{m(n-m)\pi^2}[1-(-1)^{n-m}] -$$

$$- \frac{2T_1}{m(m+n)\pi^2}[1-(-1)^{n+m}]$$

dir.

VIII.27. Bütün yüzeyleri 0 derecede tutulan sonsuz uzun bir prizmanın kesiti $t = 0$ânında şekildeki gibi ısıtılmıştır. Herhangi bir t ânındaki sıcaklık dağılımını bulunuz.



ÇÖZÜM: Sınır şartlarına uydurulmuş olan çözüm

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_{mn} \exp\left[-\alpha\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)t\right] \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y$$

dir. Bunu başlangıç şartlarına uyduralım:

$$T(x,y,0)=\begin{cases} T_2 & \text{eğer} \quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{a}{2}, \quad 0\leqslant y\leqslant \dfrac{a}{b}x \quad \text{ise} \\ T_2 & \text{eğer} \quad \dfrac{a}{2}\leqslant x\leqslant a, \quad 0\leqslant y\leqslant -\dfrac{a}{b}x+a \quad \text{ise} \\ T_1 & \text{eğer} \quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{a}{2}, \quad \dfrac{a}{b}x\leqslant y\leqslant \dfrac{b}{2} \quad \text{ise} \\ T_1 & \text{eğer} \quad \dfrac{a}{2}\leqslant x\leqslant a, \quad -\dfrac{a}{b}x+a\leqslant y\leqslant \dfrac{b}{2} \quad \text{ise} \\ T_1 & \text{eğer} \quad 0\leqslant x\leqslant a, \quad \dfrac{b}{2}y\leqslant\ \leqslant b. \quad \text{ise} \end{cases}$$

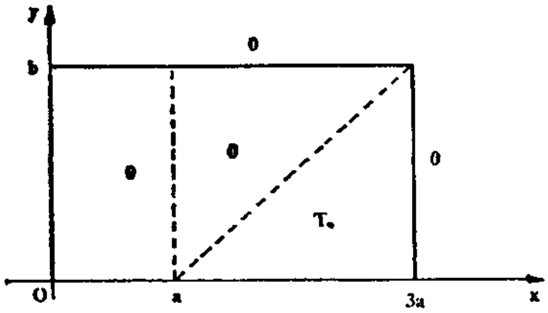
Buna göre

$$\mathscr{A}_{m,n}=\frac{2}{a}\,\frac{2}{b}\Bigg[\int_0^{a/2}dx\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^{ax/b}T_2\sin\frac{m\pi y}{b}dy+$$

$$+\int_{a/2}^{a}dx\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^{-ax/b+a}T_2\sin\frac{m\pi y}{b}dy+\int_0^{a/2}dx\sin\frac{n\pi x}{a}\int_{ax/b}^{b/2}T_1\sin\frac{m\pi y}{b}dy+$$

$$+\int_{a/2}^{a}dx\sin\frac{n\pi x}{a}\int_{-ax/b+a}^{b/2}T_1\sin\frac{m\pi y}{b}dy+T_1\int_0^{a}dx\sin\frac{n\pi x}{a}\int_{b/2}^{b}dy\sin\frac{m\pi y}{b}\Bigg]$$

olur. Bu integraller hesaplanarak sonuç elde edilir.



VIII.28. Kesiti, $3a$ ve b kenar uzunluklu bir dikdörtgen olan sonsuz uzun bir prizmanın yüzeyleri devamlı olarak 0 derecede tutuluyor. Prizmanın içinde herhangi bir t ânındaki sıcaklık dağılımını, şekilde verilen başlangıç şartına göre belirleyiniz.

CEVAP: $$\mathscr{A}_{m,n}=\frac{4T_0}{mn\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{3}\right)[1-(-1)^n]+\frac{4T_0}{3m\pi}\left\{\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)-\right.$$

$$-(-1^n)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi\left(\frac{n}{3}+\frac{m}{2}\right)}\left[\cos\frac{n\pi}{3}-\cos\left(\frac{n}{3}+m\right)\pi\right]+\frac{1}{\pi\left(\frac{n}{3}-\frac{m}{2}\right)}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\cos\frac{n\pi}{3}-\cos\left(\frac{n}{3}-m\right)\pi\right]\right]\right\}$$

VIII.29. Çok uzun ve ince bir çubuk üzerindeki sıcaklık dağılımı $t=0$ ânında

$$T(x,0)=\begin{cases} T_0 \sin ax & \text{eğer } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{a} \text{ ise,} \\ 0 & \text{eğer } \dfrac{\pi}{a} \leqslant x \text{ ise,} \end{cases}$$

ile verilmiştir. Herhangi bir t ânındaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Çubuğun içindeki sıcaklık dağılımı, çubuk çok ince ve uzun farzedildiğinden x in ve t nin fonksiyonudur. Isı iletimi denkleminde $T(x,t) = X(x)\ \tau(t)$ vaz edilirse

$$\tau(t) = e^{-\alpha\beta^2 t},$$

$$X(x) = A\, e^{i\beta x} + B\, e^{-i\beta x}$$

bulunur. $X(x)$ için özel çözümlerin birini almak yeterlidir.

$$X(x) = B\, e^{-i\beta x}$$

alalım. β için daha önceki problemlerde olduğu gibi diskret değerler bulunamadığından, bu özel çözümlerin lineer kombinezonu olan genel çözüm artık toplam şeklinde değil fakat bir integral şeklinde ifâde edilir:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_\beta\, e^{-i\beta x}\, e^{-\alpha\beta^2 t}\, d\beta.$$

B_β katsayıları başlangıç şartından bulunacaktır. $t=0$ için

$$T(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_\beta\, e^{-i\beta x}\, d\beta$$

olur. Bu, bize $\sqrt{2\pi}\ B_\beta$ nın $T(x,0)$ fonksiyonunun ters *FOURİER* dönüşmüşü olduğunu göstermektedir. O hâlde

$$B_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} T(x,0)\, e^{i\beta x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\, T_0 \int_0^{\pi/a} (\sin ax)\, e^{i\beta x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} T_0 \left[\int_0^{\pi/a} \sin ax \cos \beta x \, dx + i \int_0^{\pi/a} \sin ax \sin \beta x \, dx \right] =$$

$$= -\frac{T_0}{4\pi} \left[\frac{1}{a+\beta} e^{i(a+\beta)\pi/a} + \frac{1}{a-\beta} e^{-i(a-\beta)\pi/a} - \frac{2a}{a^2-\beta^2} \right]$$

dir. Buna göre çubuk üzerinde herhangi bir t ânındaki sıcaklık dağılımı

$$T(x, t) = -\frac{T_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{a+\beta} e^{i(a+\beta)\pi/a} + \frac{1}{a-\beta} e^{-i(a-\beta)\pi/a} - \right.$$

$$\left. - \frac{2a}{a^2-\beta^2} \right] e^{-i\beta x} e^{-\alpha\beta^2 t} \, d\beta$$

olur.

VIII.30. **Çok uzun ve ince bir çubuk üzerinde $t = 0$ ânındaki sıcaklık dağılımı**

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0 e^{-ax} & \text{eğer} \quad 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{a} \quad \text{ise,} \\ 0 & \text{eğer} \quad \dfrac{\pi}{a} \leqslant x \quad \text{ise,} \end{cases}$$

ile verilmiştir. Herhangi bir t ânındaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

CEVAP:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a+i\beta}{a^2+\beta^2} (1 - e^{-\pi} e^{i\beta\pi/a}) e^{-\alpha\beta^2 t} e^{-i\beta x} \, d\beta. \right.$$

VIII.31. **Çok uzun ve ince bir çubuk üzerinde $t = 0$ ânında sıcaklık dağılımı**

$$T(x, 0) = \begin{cases} \cos Lx & \text{eğer} \quad 0 \leqslant x \leqslant L \quad \text{ise,} \\ 0 & \text{eğer} \quad L \leqslant x \quad \text{ise,} \end{cases}$$

ile verilmiştir. Çubuğun üzerinde herhangi bir andaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: $\quad T(x, t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} B_\beta \, e^{-i\beta x} e^{-\alpha\beta^2 t} \, d\beta$

ve

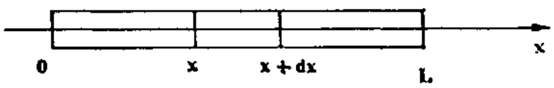
$$B_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{+0}^{\infty} T(x\,,0)\,e^{i\beta x}\,dx = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\sin(L+\beta)\,L}{\beta + L} + \frac{\sin(\beta - L)\,L}{\beta - L} + \right.$$

$$\left. + i \left[\frac{1}{\beta + L} - \frac{\cos(\beta + L)\,L}{\beta + L} + \frac{1}{\beta - L} - \frac{\cos(\beta - L)\,L}{\beta - L} \right] \right\}$$

dir.

VIII.32. ***NEWTON*** **soğuma kaanûnuna uyan sonlu uzunluğu haiz bir çubuğun içindeki sıcaklık dağılımının gerçeklediği diferansiyel denklemi tesis ediniz.**

ÇÖZÜM: Çubuğun boyu L, kesiti s, yapıldığı maddenin özgül ısısı c ve yoğunluğu da ρ olsun. Çubuğun s kesitinin uçlardan ısı alış verişi olmayacak kadar küçük olduğunu farzedelim. x ekseni boyunca uzanan çubuğun dx uzunluğunda bir parçasını göz önüne alalım.



Bu parçaya soldan giren ısı mikdarı $s\,j(x)$, ve sağdan giren ısı mikdarı da $s\,[-j(x + dx)]$ dir. Böylece göz önüne alınan parçanın içine giren toplam ısı mikdarı

$$dQ = s\,[j(x) - j(x + dx)]$$

olur. Eğer $j\,(x + dx)$

$$j(x + dx) = j(x) + \frac{\partial j}{\partial x}\,dx + \ldots$$

şeklinde seriye açılır ve ilk iki terim göz önüne alınırsa

$$dQ = -s\,\frac{\partial j}{\partial x}\,dx = s\,\chi\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx$$

olur.

Diğer taraftan *NEWTON* soğuma kaanûnuna göre birim zamanda çubuğun dx uzunluğunun yan yüzeyinden kaçan ısı mikdarı ise T_d ile dış ortamın sıcaklığını, p ile çubuğun birim uzunluğa tekaabül eden yan yüzey alanını ve h ile de bir orantı katsayısı gösterilerek

$$hp\,(T - T_d)\,dx$$

dir. Böylece çubuğun dx uzunluğunun içindeki ısı mikdarı

$$dQ = \varkappa s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx - hp(T - T_d)\, dx$$

kadar değişir. Bu, sıcaklığın bir mikdar değişmesine sebep olur. Bu değişme, âşikâr olarak

$$dQ = \rho c s \frac{\partial T}{\partial t} dx$$

ile belirlenir. O hâlde

$$\rho c s \frac{\partial T}{\partial t} dx = \varkappa s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx - hp(T - T_d)\, dx$$

olur ve her iki taraf da $\rho c s\, dx$ ile bölünerek

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{hp}{\rho c}(T - T_d)$$

bulunur. Eğer

$$h' = \frac{hp}{\rho c} \quad \text{ve} \quad \frac{\varkappa}{\rho c} = \alpha$$

vaz edilirse aranan denklem olarak da

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h'(T - T_d)}$$

bulunur.

VIII.33. Çok ince, a uzunluğunda ve T_1 sıcaklığında bulunan bir çubukla, aynı metalden yapılmış kesidi aynı olan, b uzunluğunda $T_2 (\neq T_1)$ sıcaklığında bulunan ikinci bir çubuk $t = 0$ ânında birleştiriliyor. Herhangi bir $t > 0$ ânındaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Dış ortamın sıcaklığını T_d ile gösterelim.

$$T(x, t) = T_1(x, t) + T_d$$

şeklinde yeni bir sıcaklık dağılımı fonksiyonu tanımlanırsa

$$\bar{T}(x, t) = e^{h't}\, T_1(x, t)$$

için, ısı iletimi denklemi

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}$$

şekline girer. Bu denklemin nasıl çözüleceğini biliyoruz. Eğer $\overline{T}(x, t)$

$$\overline{T}(x, t) = X(x)\,\tau(t)$$

şeklinde çarpanlara ayrılırsa

$$\tau(t) = e^{-\alpha\beta^2 t},$$

$$X(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

olur. Sınır şartlarından

$$x = 0\,; \qquad X' = 0 \;\rightarrow\; B = 0\,,$$

$$x = a + b\,; \qquad X' = 0 \;\rightarrow\; \beta = \frac{n\pi}{a+b}$$

yâni

$$\overline{T}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{(a+b)^2}\,t\right]\cos\frac{n\pi x}{a+b}$$

bulunur.

Problemin başlangıç şartı ise

$$\overline{T}(x, 0) = \begin{cases} T_1 - T_d & \text{eğer } \; 0 \leqslant x \leqslant a \; \text{ ise,} \\ T_2 - T_d & \text{eğer } \; a \leqslant x \leqslant a+b \; \text{ ise,} \end{cases}$$

dir. Buradan

$$A_n = \frac{2}{a+b}\left[(T_1 - T_d)\int_0^a \cos\frac{n\pi x}{a+b}\,dx + (T_2 - T_d)\int_a^{a+b}\cos\frac{n\pi x}{a+b}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(T_1 - T_2)\sin\frac{n\pi a}{a+b}$$

olduğu görülür. O hâlde

$$T(x, t) = T_d + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(T_1 - T_2)\sin\frac{na\pi}{a+b}\cos\frac{n\pi x}{a+b}\times$$

$$\times\exp\left[-\left(\frac{\alpha n^2\pi^2}{(a+b)^2} + h'\right)t\right].$$

olur.

VIII.34. Uçları $x = 0$ ve $x = L$ de bulunan, yoğunluğu ρ, özgül ısısı c, ısı iletkenlik katsayısı $\varkappa$, kesiti s olan çok ince homogen bir çubuk yalıtılmıştır. $t=0$ ânında çubuğun üzerindeki sıcaklık dağılımı

$$T(x\,,0) = \begin{cases} x & \text{eğer} \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha_0 L \\ \dfrac{\alpha_0 x}{\alpha_0 - 1} - \dfrac{\alpha_0\, L}{\alpha_0 - 1} & \text{eğer} \quad \alpha_0 L \leqslant x \leqslant L \end{cases} \qquad (\alpha_0 \in \mathbf{R}\,,\alpha_0 \neq 1)$$

fonksiyonu ile verilmiştir. Herhangi bir t ânındaki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Çubuk yalıtılmış olduğundan ısı alış verişi katsayısı $h' = 0$ dır. Böylece çubuk üzerindeki sıcaklık dağılımının uyduğu diferansiyel denklem kendiliğinden

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ye dönüşmüş olur. Bu denklem çarpanlara ayırma yöntemi ile verilen başlangıç ve sınır şartları altında çözülür.

VIII.35. L uzunluğundaki çok ince bir çubuk içinde sıcaklık dağılımı $t = 0$ ânında

$$T(x, 0) = \begin{cases} x & \text{eğer} \quad 0 \leqslant x \leqslant L/3 \ \textbf{ise,} \\ 0 & \text{eğer} \quad L/3 \leqslant x \leqslant 2L/3 \ \textbf{ise,} \\ e^{-x} & \text{eğer} \quad 2L/3 \leqslant x \leqslant L \quad \textbf{ise,} \end{cases}$$

ile verildiği takdirde, sâbit olan dış sıcaklığın T_d olduğunu farzedip, herhangi bir t ânındaki sıcaklık dağılımını belirleyiniz.

ÇÖZÜM: $\overline{T}(x\,,t) = e^{h't}\,[T(x\,,t) - T_d]$ dönüşümüyle VIII.33 de olduğu gibi

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}$$

denklemine geçilir.

Bu denkleme tekaabül eden sınır şartları

$$x = 0 \quad \text{için} \quad X' = 0\,; \qquad x = L \quad \text{için} \quad X' = 0$$

ve başlangıç şartları da

$$\overline{T}(x\,,0)=\begin{cases} x-T_d & \text{eğer} \quad 0\leqslant x\leqslant L/3 \quad \text{ise,}\\ -T_d & \text{eğer} \quad L/3\leqslant x\leqslant 2L/3 \quad \text{ise,}\\ e^{-x}-T_d & \text{eğer} \quad 2L/3\leqslant x\leqslant L \quad \text{ise,}\end{cases}$$

şekillerine girerler. Buradan **VIII.33** dekine benzer şekilde, açılım katsayıları için,

$$A_n=\frac{2}{L}\Bigg[\frac{L^2}{3n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)-\frac{L}{n\pi}e^{-2L/3}\sin\frac{n\pi}{3}-$$

$$-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[e^{-L}(-1)^n-e^{-2L/3}\cos\frac{n\pi}{3}\right]+$$

$$+\frac{1}{1-\dfrac{L^2}{n^2\pi^2}}\Bigg[\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 e^{-2L/3}\cos\frac{n\pi}{3}-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 e^{-L}(-1)^n-$$

$$-\frac{L}{n\pi}e^{-2L/3}\sin\frac{n\pi}{3}\Bigg]$$

bulunur.

VIII.36. Küresel koordinatlarda zamana bağlı olmayan ısı iletimi denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Küresel koordinatlarda

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right]$$

şeklindeki *LAPLACE* operatörünün ifâdesini kullanarak ve

$$T(r\,,\theta,\varphi)=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

yazarak, ısı iletimi denklemi

$$\frac{\sin\theta}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0 \qquad \text{(VIII.36.1)}$$

şekline sokulur. Buradan

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

bulunur. Her iki taraf $n(n+1)$ şeklindeki bir ayrışım katsayısına eşitlenerek $R(r)$ için

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)\,R = 0, \qquad (n:\ \text{tam sayı})$$

denklemi elde edilir. Bunun çözümünün

$$R_n(r) = A_n\, r^n + B_n\, r^{-n-1}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

(VIII.36.1) denkleminin ikinci yanından

$$\frac{1}{\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\,n\,(n+1)\sin^2\theta - \frac{\sin\theta}{\Theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)$$

ve her iki taraf $-m^2$ gibi bir tam sayıya eşitlenerek

$$\frac{1}{\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\,m^2$$

yâni

$$\Phi_m = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi$$

bulunur. Geri kalan kısım ise sâdece θ nın fonksiyonudur.

$$\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + [n(n+1)\sin^2\theta - m^2]\,\Theta = 0.$$

Burada $u = \cos\theta$ dönüşümü yapılarak

$$\frac{d}{du}\left[(1-u)^2\,\frac{d\Theta}{du}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta = 0$$

denklemi elde edilir. Bu ise $P_n^{\,m}(u)$ asosiye *LEGENDRE* fonksiyonlarını belirler; $P_n(u)$ *LEGENDRE* fonksiyonları olmak üzere asosye *LEGENDRE* fonksiyonlarının tanım bağıntısı

$$P_n^{\,m}(u) = (1-u^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{du^m}\,P_n(u)$$

dur. Orijinde sıcaklık sonlu olacağından

$$B_n = 0$$

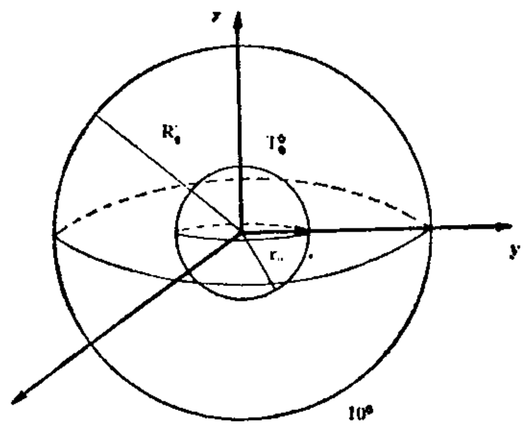
alınmalıdır. Buna göre

$$T(r,\theta,\varphi) = \sum_m \sum_n (\mathscr{A}_{m,n}\cos m\varphi + \mathscr{B}_{m,n}\sin m\varphi)\,r^n\,P_n^{\,m}(u)$$

olur. $\mathscr{A}_{m,n}$ ve $\mathscr{B}_{m,n}$ katsayıları ise problem için verilen sınır şartlarından hesaplanır.

VIII.37. Arzın yarıçapı R_0, arzın ortasında bulunan ateşten kürenin yarıçapı r_0 ve yüzeyinin ortalama sıcaklığı da T_0 olsun. Arz yüzeyindeki ortalama sıcaklığın da 10 °C olduğunu varsayarak, arzın içindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Simetri dolayısıyla sıcaklık dağılımı θ ve φ ye bağlı olmayıp sâdece r ye bağlıdır. Bu nedenle ısı iletimi denkleminin küresel hâl için çözümünde $m = 0$ ve $n = 0$ olmalıdır.



Sıcaklık dağılımının hesaplanacağı bölge orijini ihtivâ etmediğinden

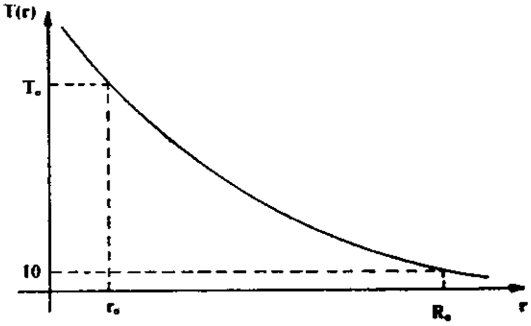
$$T_0(r) = R_0(r) = A_0 r^0 + B_0 r^{-0-1} = A_0 + \frac{B_0}{r}$$

dir. A_0 ve B_0 katsayıları verilen sınır şartlarından hesaplanır:

$$A_0 = \frac{10R_0 - T_0 r_0}{R_0 - r_0}, \qquad B_0 = \frac{R_0 r_0 (T_0 - 10)}{R_0 - r_0}$$

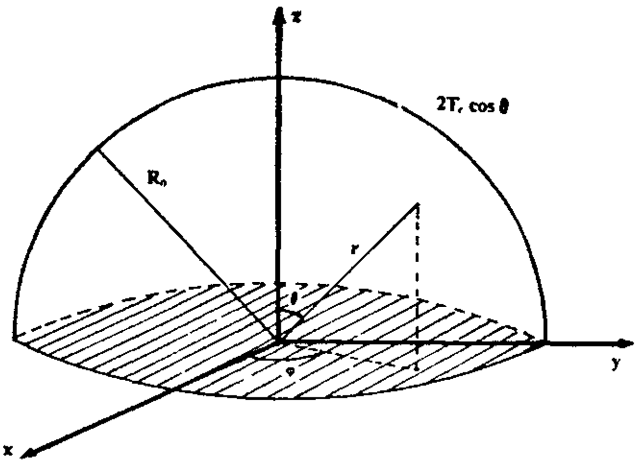
$$T(r) = \frac{1}{R_0 - r_0}\left[(10R_0 - T_0 r_0) + \frac{R_0 r_0 (T_0 - 10)}{r}\right]$$

dir. $T(r)$ nin değişimi aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



VIII.38. Yarıçapı R_0 olan bir yarım kürenin yüzeyi, θ ile kutup açısı gösterilmek üzere, devamlı olarak $2T_0 \cos\theta$ ve tabanı da 0 derece sıcaklıkta tutulmaktadır. Yarım küre içindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Yarım küre içindeki sıcaklık dağılımı φ ye bağlı değil sâdece r ve θ ya bağlıdır. Böylece, **VIII. 36** daki değişkenlere ayrışım sâbitlerinden $m = 0$ alınmalıdır. İçinde sıcaklık dağılımının hesaplanacağı bölge orijini ihtivâ ettiğinden $B_n = 0$ dır.



Sıcaklık dağılımının ifâdesi ise

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

olur. A_n katsayılarını sınır şartlarından belirleyeceğiz.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{için} \quad T\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(0)$$

yâni

$$P_n(0) = 0 \tag{VIII.38.1}$$

dır. $r = R_0$ için ise

$$T(R_0, \theta) = 2T_0 \cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_0^n P_n(\cos\theta) \tag{VIII.38.2}$$

dır. Ayrıca *LEGENDRE* fonksiyonları dik bir sistem oluştururlar:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta)\, d(\cos\theta) = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{nm}\,.$$

Buna göre (VIII.38.2) eşitliğinin her iki yanı $P_m(\cos\theta) \sin\theta$ ile çarpılır ve θ üzerinden 0 dan π ye kadar integre edilirse

$$\int_0^{\pi} 2T_0 \cos\theta\, P_m(\cos\theta)\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_0^n \int_{-1}^{+1} P_n(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta)\, d(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_0^n \frac{2}{2n+1}\, \delta_{nm} = A_m R_0^m \frac{2}{2m+1}$$

bulunur. Buna göre

$$A_m = \frac{(2m+1)\, T_0}{R_0^m} \int_{-1}^{+1} P_m(u)\, u\, du$$

olur. O hâlde

$$T(r,\theta) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\int_{-1}^{+1} P_n(u)\, u\, du \right) \left(\frac{r}{R_0} \right)^n P_n(\cos\theta)$$

dır. Öte yandan

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ için}$$

$$T\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\int_{-1}^{+1} P_n(u)\, u\, du \right) \left(\frac{r}{R_0} \right)^n P_n(0)$$

ve (VIII.38.1) e de göre $T\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0$ olur, yâni öteki sınır şartı da gerçeklenir.

VIII.39. Yarıçapı a ve uzunluğu l olan bir silindirin alt ve üst tabanları 0 derecede ve yanal yüzeyi de T_0 derecede tutulmaktadır. Silindirin içindeki sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Silindirik koordinatlarda *LAPLACE* operatörü ifâdesinden

$$\nabla^2 T(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

yazılır. Öte yandan silindirik simetri dolayısıyla T de φ ye bağlı değildir. Böylece ısı iletimi denklemi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

olur. Şimdi

$$T(r, z) = R(r)\, Z(z)$$

vaz ederek değişken ayrışımı yapılırsa

$$\frac{1}{r}\,\frac{1}{R}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{Z}\,\frac{d^2Z}{dz^2}\,.$$

olur. Her iki taraf aynı bir β^2 sâbitine eşitlenerek

$$\frac{1}{R}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR}{dr}\right) = \beta^2$$

yâni

$$r^2 R'' + r\,R' - \beta^2 r^2 R = 0 \tag{VIII.39.1}$$

ve

$$\frac{1}{Z}\,\frac{d^2Z}{dz^2} = -\beta^2 \tag{VIII.39.2}$$

bulunur. (VIII.39.1) de $\gamma = i\beta$ yazılırsa ve ayrıca $\rho = \gamma r$ vaz edilirse

$$\rho^2 R'' + \rho\,R' + \rho^2 R = 0 \tag{VIII.39.3}$$

denklemi elde edilir. Bu bir *BESSEL* diferansiyel denklemidir. Fakat artık *BESSEL* fonksiyonlarının değişkeni reel değil sanaldır. (VIII.39.2) ve (VIII.39.3) denklemlerinin birer çözümü sırasıyla

$$Z = A\cos\beta z + B\sin\beta z\,,$$

$$R = C\,I_0(\beta r) + D\,K_0(\beta r)$$

olur. (I_0, K_0 sanal değişkenli *BESSEL* fonksiyonlarıdır).

Orijinde sıcaklığın sonlu olması için $D = 0$ alınmalıdır. Sınır şartlarından

$$A = 0 \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{(2n+1)\,\pi}{l}$$

bulunur. Buna göre

$$T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_0\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{l}\,r\right)\sin\frac{(2n+1)\,\pi}{l}\,z\,.$$

olur. $r = a$ için

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_0\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{l}\,a\right)\sin\frac{(2n+1)\,\pi}{l}\,z\,,$$

$$B_n = \frac{4T_0}{(2n+1)\pi} \frac{1}{I_0\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} a\right)},$$

$$T(r, z) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} r\right)}{I_0\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} a\right)} \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} z$$

olur.

VIII.40. Yarıçapı a ve uzunluğu l olan bir silindirin alt ve üst tabanları *NEWTON* soğuma kaanûnuna göre ısı kaybediyor, yanal yüzeyi de T_0 derecede tutuluyor. Silindirin içindeki sıcaklık dağılımını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Özel çözümler gene

$$Z(z) = A \cos \beta z + B \sin \beta z,$$

$$R(r) = I_0(\beta r)$$

şeklindedir.

Sınır şartları ise

$$T(a, z) = T_0, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \pm h' T\right)_{z=\pm\frac{l}{2}} = 0$$

dır. Koordinat sisteminin orijininin silindirin ortasında bulunduğunu farzediyoruz.

$$(Z' \pm h' Z)_{z=\pm\frac{l}{2}} = 0$$

dan $B = 0$ ve γ_n de $\operatorname{tg} \gamma = \frac{h'l}{2\gamma}$ denkleminin kökleri olmak üzere $\beta_n = \frac{2\gamma_n}{l}$ bulunur. O hâlde

$$T(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, I_0\left(\frac{2\gamma_n}{l} r\right) \cos \frac{2\gamma_n z}{l}$$

dir.

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, I_0\left(\frac{2\gamma_n}{l} a\right) \cos \frac{2\gamma_n z}{l}$$

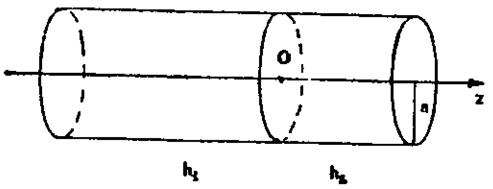
den bilinen yollarla

$$A_n = \frac{2T_0 \sin \gamma_n}{\gamma_n + \sin \gamma_n \cos \gamma_n} \cdot \frac{1}{I_0(2\gamma_n a/l)}$$

bulunur. Böylece çubuk üzerindeki sıcaklık dağılımı

$$T(r, z) = 2T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n + \sin \gamma_n \cos \gamma_n} \frac{I_0\left(\frac{2\gamma_n}{l} z\right)}{I_0\left(\frac{2\gamma_n}{l} a\right)} \cos \frac{2\gamma_n z}{l}$$

olur.



VIII.41. Farklı maddelerden yapılmış h_1 ve h_2 uzunluğunda, aynı a yarıçaplı iki silindir uç uca konmuştur. Böylece elde edilen sistem, yan yüzeyi devamlı olarak T_0 derecede kalacak şekilde ısıtılmakta ve alt ve üst tabanları da 0 derecede kalacak şekilde soğutulmaktadır. Sistemin içindeki $T(r, z)$ sıcaklık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM: Birinci silindirin içindeki sıcaklık dağılımını $T_1(r, z)$ ve ikinci silindirin içindeki sıcaklık dağılımını da $T_2(r, z)$ ile gösterirsek,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0 \qquad -h_1 \leqslant z \leqslant 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0 \qquad 0 \leqslant z \leqslant h_2$$

diferansiyel denklem sistemini elde ederiz. Bizden istenen, bu sistemin

$$T(a, z) = T_0\,, \quad T_1(r, -h_1) = T_2(r, h_2) = 0,$$

$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0)\,, \qquad \varkappa_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)_0 = \varkappa_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial z}\right)_0$$

sınır şartları altındaki çözümüdür.

Son iki şart sıcaklığın ve ısı akımının iki silindiri ayıran yüzeyde sürekli olmaları demektir.

$$T_1(r, z) = R_1(r)\, Z_1(z) \qquad T(r, z) = R(r)\, Z(z)$$
$$T_2(r, z) = R_2(z)\, Z_2(z)$$

şeklinde çarpanlara ayrılırsa, sınır şartları kullanılarak, γ_n ile

$$tg\, \gamma + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \frac{\gamma h_2}{h_1} = 0$$

denkleminin sıralanmış pozitif köklerini göstermek üzere

$$Z_n(z) = \begin{cases} Z_1(z) = \sin\dfrac{\gamma_n h_2}{h_1} \sin\dfrac{\gamma_n(h_1+z)}{h_1} & [-h_1, 0] \\ Z_2(z) = \sin\gamma_n \sin\dfrac{\gamma_n(h_2-z)}{h_1} & [0, h_2] \end{cases} \tag{VIII.41.1}$$

bulunur. O hâlde

$$T(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_n(z)\, I_0\left(\frac{\gamma_n r}{h_1}\right)$$

dir. Şimdi de son sınır şartından A_n katsayılarını belirleyelim :

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{\gamma_n}{h_1} a\right) Z_n(z). \tag{VIII.41.2}$$

$A_n I_0\left(\frac{\gamma_n a}{h_1}\right)$ i bulmak için T_0 fonksiyonunu $Z_n(z)$ ye göre seriye açabilmemiz, bunun için de $Z(z)$ fonksiyon ailesinin dik bir aile oluşturması gerekir.

(VIII.41.1) ile tanımlanan $Z_n(z)$ fonksiyon ailesi $[-h_1, h_2]$ aralığında gerçekten de dik bir fonksiyon ailesi oluşturur. Çünkü :

$$Z''_n + \frac{\gamma_n^2}{a^2} Z_n = 0\,, \qquad Z''_m + \frac{\gamma_m^2}{a} Z_m = 0$$

denklemleri, sırasıyla,

$$r(z) = \begin{cases} \varkappa_1 & -h_1 \leqslant z \leqslant 0 \\ \varkappa_2 & 0 \leqslant z \leqslant h_2 \end{cases}$$

olmak üzere, $r(z)\,Z_m$ ve $r(z)\,Z_n$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkartılırsa

$$r(z)\,Z_m Z''_n + r(z)\frac{\gamma_n^2}{a^2} Z_n Z_m - r(z)\,Z''_m Z_n - r(z)\frac{\gamma_m^2}{a^2} Z_n Z_m = 0$$

bulunur. Buradan integrasyonla

$$\frac{\gamma_n^2 - \gamma_m^2}{a^2} \int_{-h_1}^{h_2} Z_m Z_n\, r(z)\, dz = \int_{-h_1}^{h_2} r(z)\,[Z_m'' Z_n - Z_n'' Z_m]\, dz =$$

$$= \varkappa_1 \Big[Z_{1m}' Z_{1n} - Z_{2n}' Z_{1m} \Big]_{-h_1}^{0} \Big[-\varkappa_2 (Z_{2m}' - Z_{2n} - Z_{2n}' Z_{2m} \Big]_{0}^{h_2}$$

ve sınır şartlarından da

$$m \neq n \text{ için:} \qquad \int_{-h_1}^{h_2} Z_m Z_n r(z)\, dz = 0$$

şeklinde, Z_m fonksiyonlarının $r(z)$ ağırlık fonksiyonuna göre dik bir fonksiyon ailesi olduğuna işâret eden diklik bağıntısı bulunur.

(VIII.41.2) nin her iki tarafı $r(z) Z_m$ ile çarpılır ve z üzerinden $-h_1$ den h_2 ye kadar integre edilirse

$$I_0\left(\frac{\gamma_n a}{h_1}\right) A_n = T_0 \frac{\varkappa_1 \int_{-h_1}^{0} Z_{1n}(\xi)\, d\xi + \varkappa_2 \int_{0}^{h_2} Z_{2n}(\xi)\, d\xi}{\varkappa_1 \int_{-h_1}^{0} [Z_{1n}(\xi)]^2 d\xi + \varkappa_2 \int_{0}^{h_2} [Z_{2n}(\xi)]^2 d\xi}$$

ve integraller hesaplanarak

$$A_n = \frac{2T_0 \operatorname{tg} \gamma_n \left(\cos \gamma_n - \cos \frac{\gamma_n h_2}{h_1}\right)}{\gamma_n I_0\left(\frac{\gamma_n a}{h_1}\right)\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \sin^2 \frac{\gamma_n h_2}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \sin^2 \gamma_n\right)}$$

bulunur. O hâlde sıcaklık dağılımı fonksiyonu

$$T(r, z) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_n \left(\cos \gamma_n - \cos \frac{\gamma_n h_2}{h_1}\right)}{\gamma_n \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \sin^2 \frac{\gamma_n h_2}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \sin^2 \gamma_n\right)} \frac{I_0\left(\frac{\gamma_n r}{h_1}\right)}{I_0\left(\frac{\gamma_n a}{h_1}\right)} Z_n(z)$$

ve

$$Z_n(z) = \begin{cases} \sin \frac{\gamma_n h_2}{h_1} \sin \frac{\gamma_n (h_1 + z)}{h_1} & [-h_1, 0] \\[2ex] \sin \gamma_n \sin \frac{\gamma_n (h_2 - z)}{h_1} & [0, h_2] \end{cases}$$

dir.

VIII.42. Dik kesiti *s* ve özgül ısısı da *c* olan yalıtılmış sonsuz uzun bir çubuk başlangıçta 0 derecede bulunmaktadır. $t=0$ anında çubuğun ξ ile belirlenen bir noktasına âniden *Q* kadar ısı ithâl edilmiştir. Herhangi bir *t* ânında çubuktaki sıcaklık dağılımını *GREEN* yöntemiyle bulunuz. *GREEN* fonksiyonunu yazınız.

ÇÖZÜM: $t = 0$ ânında çubuğun ξ noktasına ithâl edilen Q kadar ısının $\delta > 0$ küçük ve keyfî bir sayı olmak üzere $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ aralığına ânî olarak yayıldığını farzedelim. Buna göre problemin başlangıç şartı

$$T(x,0) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leqslant \xi - \delta \\ \dfrac{Q}{2\rho c s \delta} & \xi - \delta < x \leqslant \xi + \delta \\ 0 & \xi + \delta < x < \infty \end{cases}$$

olur. Çubuktaki sıcaklık dağılımının uyduğu

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

ısı iletim denkleminin her iki yanını, λ reel pozitif bir parametre olmak üzere, $\dfrac{e^{-i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}$ ile çarpıp x üzerinden $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar integre edelim:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}e^{-i\lambda x}dx$$

ve

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,t)\,e^{-i\lambda x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}e^{-i\lambda x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}e^{-i\lambda x}dx =$$

$$= \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\left[T(x,t)\,e^{-i\lambda x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,t)\,e^{-i\lambda x}dx = -\lambda^2\,\tilde{T}(\lambda,t).$$

bulunur. Netice itibariyle $T(x,t)$ nin *FOURİER* dönüşmüşü olan $\tilde{T}(\lambda,t)$ nin

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}\frac{d\tilde{T}(\lambda,t)}{dt} = -\lambda^2\,\tilde{T}(\lambda,t)} \qquad \text{(VIII.42.1)}$$

denklemini gerçeklediğini görürüz.

Bu denklemin çözümü için önce $T(x, 0)$ ın *FOURİER* dönüşmüşünü hesaplayalım:

$$\tilde{T}(\lambda, 0, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, 0)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Q}{2\rho cs\,\delta} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\, 2\,\rho cs\delta} \frac{i}{\lambda} \left[e^{-i\lambda(\xi+\delta)} - e^{-i\lambda(\xi-\delta)}\right] = \frac{Q\, e^{-i\lambda\xi}}{\sqrt{2\pi}\, \lambda\rho cs\delta} \sin\lambda\delta$$

ve

$$\tilde{T}(\lambda, 0) = \lim_{\delta\to 0} \tilde{T}(\lambda, 0, \delta) = \frac{Q\, e^{-i\lambda\xi}}{\sqrt{2\pi}\,\rho cs} \tag{VIII.42.2}$$

dir.

(VIII.42.1) denklemi (VIII.42.2) başlangıç şartı altında çözülerek

$$\tilde{T}(\lambda, t) = \frac{Q\, e^{-i\lambda\xi}}{\sqrt{2\pi}\,\rho cs} e^{-\lambda^2 \alpha t} \tag{VIII.42.3}$$

bulunur.

(VIII.42.3) ün her iki tarafının ters *FOURİER* dönüşümü alınarak

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(\lambda, t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,\rho cs} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\alpha t}\, e^{i\lambda x}\, e^{-i\lambda\xi}\, d\lambda =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\,\rho cs} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\alpha t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda$$

olduğu görülür. Son integral rezidü metoduyla hesaplanarak

$$T(x, t) = \frac{Q}{2\pi\,\rho cs} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\,\alpha t}\right]$$

elde edilir.

GREEN fonksiyonu ise

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\,\alpha t}\right]$$

dir.

VIII.43. Dik kesiti *s* ve özgül ısısı da *c* olan sonsuz uzun ve çok ince bir çubuk, yüzeyinden *NEWTON* soğuma kaanûnuna göre ısı kaybetmektedir. Başlangıçta çubuk 0 derecede bulunmaktadır. $t = 0$ ânında çubuğun ξ ile belirlenen noktasına ânî olarak Q ısı mikdarı verilirse, bir t ânında çubukdaki sıcaklık dağılımı ne olur? Bu problem için *GREEN* fonksiyonunu yazınız. Dış ortamın sıcaklığı devamlı olarak 0 °C dır.

ÇÖZÜM: Çubuk yüzeyinden *NEWTON* soğuma kaanûnuna göre ısı kaybettiğinden, sıcaklık dağılımının uyduğu denklem

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - h' \, [T(x,t) - T_d]$$

ve $T_d = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h' \, T$$

olur. Bu denklemi uygun bir dönüşümle bir önceki problemdeki denkleme dönüştürelim ; gerçekten de

$$T(x,t) = e^{-h't} \, \overline{T}(x,t)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}$$

elde edilir. Bu denklemin verilen başlangıç şartı altındaki çözümünü biliyoruz:

$$\overline{T}(x,t) = \frac{Q}{2\pi \rho c s} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right].$$

O hâlde

$$T(x,t) = \frac{Q\, e^{-h't}}{2\pi \rho c s} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right]$$

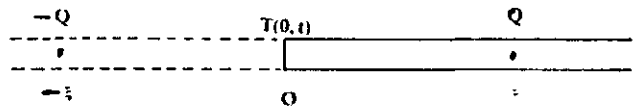
dir. Buna göre *GREEN* fonksiyonu da

$$G(x,\xi,t) = \frac{e^{-h't}}{2\sqrt{\alpha \pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right]$$

olur.

VIII.44. Dik kesiti s ve özgül ısısı da c olan çok uzun bir çubuğun $x = 0$ yüzeyine birinci cins bir sınır şartı uygulanmakta ve çubuğun yan yüzeyi de yalıtılmaktadır. *GREEN* fonksiyonunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM : Çubuğun $x = 0$ yüzeyine birinci cins bir sınır şartı uygulandığına göre, çubuğun bu yüzeyi üzerindeki sıcaklık dağılımı biliniyor demektir.



Çubuğun 0 dan $-\infty$ a kadar uzatıldığını düşünelim. $t = 0$ ânında ξ noktasına Q ısı mikdarı ve $-\xi$ noktasına da $-Q$ ısı mikdarı ithâl edilirse sınır şartında herhangi bir değişme olmaz.

Başlangıç şartları

$$T(x, 0, \delta) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -\xi - \delta \\ \dfrac{-Q}{2\,\rho c s \delta} & -\xi - \delta < x < -\xi + \delta \\ 0 & -\xi + \delta < x < \xi - \delta \\ \dfrac{Q}{2\,\rho c s \delta} & \xi - \delta < x < \xi + \delta \\ 0 & \xi + \delta < x < \infty \end{cases}$$

olur. Buradan

$$\lim_{\delta \to 0} \bar{T}(\lambda, 0, \delta) = \lim_{\delta \to 0} \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,\rho c s} \left[e^{-i\lambda\xi} - e^{i\lambda\xi}\right] \frac{\sin \lambda\delta}{\lambda\delta}$$

yâni

$$\bar{T}(\lambda, 0) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,\rho c s} \left[e^{-i\lambda\xi} - e^{i\lambda\xi}\right]$$

ve

$$\bar{T}(\lambda, t) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\,\rho c s} \left[e^{-i\lambda\xi} - e^{i\lambda\xi}\right] e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

bulunur. O hâlde

$$T(x,t)=\frac{Q}{2\pi cs\rho}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\lambda^2 t+i\lambda(x+\xi)}\,d\lambda\right]=$$

$$=\frac{Q}{2\pi\rho cs}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha t}\right]\right\}$$

ve

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha t}\right]\right\}$$

dir.

Eğer çubuğun $\mp\xi$ noktalarına $\mp Q$ ısı mikdarları $t=0$ ânında değil de $t=\tau$ ânında verilmiş olsaydı

$$T(x,t)=\frac{Q}{2\pi\rho\,\mathrm{cs}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha(t-\tau)}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha(t-\tau)}\right]\right\}$$

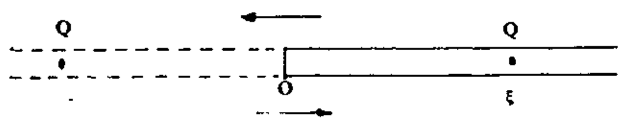
ve

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi(t-\tau)}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha(t-\tau)}\right]\right\}$$

olurdu.

VIII.45. Bir önceki problemde söz konusu olan çubuğun $x=0$ yüzeyine ikinci cins bir sınır şartı uygulanmış olsaydı *GREEN* fonksiyonu ne olurdu?

ÇÖZÜM: Sınır şartı ikinci cins olduğundan $x=0$ yüzeyinden geçen ısı akım vektörü biliniyor demektir.



—ξ noktasına —Q ısısı ithâl edilirse $x=0$ yüzeyinden geçen ısı akım vektörü değişir. Q ısı mikdarı nedeniyle ← yönünde geçen ekstra bir ısı akım vektörü ve —ξ noktasına ithâl edilen —Q ısısı nedeniyle de gene ← yönünde geçen bir ısı akım vektörü oluşur. Bunların hem yönleri ve hem de büyüklükleri aynı olduğundan toplam ısı akım vektörü sıfır olamaz. Fakat —ξ noktasına Q ısısı ithâl edilirse, bunun sebep olduğu ısı akım vektörü → yönünde olacağından toplam ısı akım vektörü sıfır olur.

Başlangıç şartı

$$T(x, 0, \delta) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -\xi - \delta \\ \dfrac{Q}{2\delta \rho c s} & -\xi - \delta < x < -\xi + \delta \\ 0 & -\xi + \delta < x < \xi - \delta \\ \dfrac{Q}{2\delta \rho c s} & \xi - \delta < x < \xi + \delta \\ 0 & \xi + \delta < x < \infty \end{cases}$$

olur. Bir önceki problemdeki işlemler bu başlangıç şartı için tekrarlanarak, *GREEN* fonksiyonunun bu hâl için

$$G(x\,, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha \pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\,\alpha t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\,\alpha t}\right] \right\}$$

şeklinde olduğu saptanır.

IX. BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL MEKANİKLER

IX.1. Birbirinden bağımsız ve ayırdedilebilen N adet tânecikten oluşan bir sistemde tek bir tâneciğe tekaabül eden dağıtım fonksiyonu z ise tüm sistemin $\mathscr{Z}$ dağıtım fonksiyonunun $\mathscr{Z} = z^N$ şeklinde olacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM: Sistemi oluşturan tâneciklerin haiz oldukları kuvantik hâlleri sırasıyla $i_1, i_2, \ldots, i_N$ indisleriyle ve enerjilerini de $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_N}$ ile gösterelim. Buna göre sistemin toplam enerjisi

$$\varepsilon(i_1, i_2, \ldots, i_N) = \varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2} + \ldots + \varepsilon_{i_N}$$

ve $\mathscr{Z}$ dağıtım fonksiyonu da

$$\mathscr{Z} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_N} e^{-\beta\varepsilon(i_1, i_2, \ldots, i_N)} =$$

$$= \left(\sum_{i_1} e^{-\beta\varepsilon_{i_1}}\right)\left(\sum_{i_2} e^{-\beta\varepsilon_{i_2}}\right)\ldots\left(\sum_{i_N} e^{-\beta\varepsilon_{N}}\right)$$

şeklinde olacaktır. Burada her biri, tek bir tâneciğe tekaabül eden z dağıtım fonksiyonu olan N çarpan bulunduğu görülmektedir. Şu hâlde

$$\mathscr{Z} = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{N} = z^N$$

dir.

IX.2. Bir B magnetik alanında ve T sıcaklığında birbirleriyle etkileşmeksizin denge hâlinde bulunan N adet spinden oluşan bir sistem göz önüne alınıyor. Sistemin M toplam magnetik momentini ve χ magnetik duyarlığını hesaplayınız. $\mu B \gg kT$ ve $\mu B \ll kT$ limit hâllerini inceleyiniz.

ÇÖZÜM: B magnetik alanında bir spinin ancak 2 hâli mümkündür. Bunlardan biri B ile aynı yönde olup buna μB diğeri ise zıt yönde olup buna da $-\mu B$ enerjisi tekaabül eder. Buna göre dağıtım fonksiyonunun ifâdesi olarak

$$\mathscr{Z} = \sum_{\substack{i \\ \text{kuvantik} \\ \text{halleri}}} e^{-\varepsilon_i/kT} = e^{\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT} = 2\cosh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

bulunur. Sistemin toplam magnetik momentini hesaplamak için önce B magnetik alanına zıt yöndeki spinlerin n sayısının

$$n = \frac{N}{\mathscr{Z}}\, e^{-\mu B/kT}$$

olacağına dikkati çekelim. M toplam magnetik momenti buna göre

$$M = -n\mu + (N-n)\,\mu = \frac{N}{\mathscr{Z}}\,\mu\,(e^{\mu B/kT} - e^{-\mu B/kT})$$

$$= 2\frac{N\mu}{\mathscr{Z}}\sinh\left(\frac{\mu B}{kT}\right) = N\mu\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

olur.

$\mu B \ll kT$ için M yi *MAC-LAURİN* serisine açıp seriyi ilk teriminde keserek

$$M \cong \frac{N\mu^2}{kT}\, B = \chi\, B$$

bulunur. Şu hâlde magnetik duyarlık

$$\chi = \frac{N\mu^2}{kT}$$

şeklindedir.

$\mu B \gg 1$ için ise $\tanh(\mu B/kT) \rightarrow 1$ olur. Buna göre de M toplam magnetik momenti B magnetik alanından bağımsız olmaktadır. Bu takdirde termik çalkantı artık B magnetik alanına zıt yöndeki hâlleri doldurmak için yetersiz olur; spinlerin hepsi de B yönünde bulunurlar. M toplam magnetik momenti de böylece $N\mu$ değerini haiz olmuş olur.

IX.3. Hızları v ile $v + dv$ arasında bulunan T sıcaklığındaki fermiyonların sayısının

$$dN = \frac{8\pi V m^2}{h^3}\,\frac{v^2}{e^{[(mv^2/2)-\varepsilon_F]/kT} + 1}\, dv \qquad \text{(IX.3.1)}$$

ile verileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Enerjileri E ve $E + dE$ arasında bulunan T sıcaklığındaki fermiyonların sayısının

$$dN = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{\sqrt{E}\, dE}{e^{(E-\varepsilon_F)/kT} + 1} \qquad \text{(IX.3.2)}$$

ile verileceği ISI TEORİSİ'nde (IX.9). alt-bölümünde saptanmıştı. $E = \frac{1}{2} mv^2$, $dE = mv\, dv$, ve ayrıca $\sqrt{E} = \sqrt{m/2}\; v$ olduğuna dikkat ederek bu ifâdeler (IX.3.2) de yerlerine konursa, buradan derhâl (IX.3.1) ifâdesi elde edilmiş olur.

IX.4. N fermiyondan oluşan bir sistemin çok düşük sıcaklıklarda haiz olacağı toplam U enerjisinin ifâdesini tesis ediniz.

ÇÖZÜM: U toplam enerjisi

$$U = \int E\, dN = \int E \frac{dN}{dE} dE \qquad \text{(IX.4.1)}$$

ile verilmektedir. Sıcaklık çok düşük kabul edildiğinden $T = 0$ için dN/dE nin değerini (IX.4.1) e ikaame etmek iyi bir yaklaşıklık olur; hâlbuki $T = 0$ için $dN/dE = g(E)$ dir. Ayni sonuç, $E - \varepsilon_F < 0$ olması hâlinde, (IX.3.2) de $T = 0$ vaz etmekle de bulunur:

$$\left(\frac{dN}{dE}\right)_{T=0} = \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \sqrt{E}\,.$$

Bu (IX.4.1) e vaz edilir de 0 dan ε_F ye kadar integrasyon yapılırsa

$$U = \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_F} E^{3/2}\, dE = \frac{16\pi V (2m^3)^{1/2}}{5h^3} \varepsilon_F^{5/2}$$

bulunur. Öte yandan ε_F nin değerinin

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} \qquad \text{(IX.4.2)}$$

olduğu bilinmektedir. [Bk. ISI TEORİSİ: (IX.9.16)]. Bu değerin U nun bulunan ifâdesine ikaamesiyle N fermiyondan oluşan sistemin toplam enerjisi olarak

$$U = \frac{3}{5} N\varepsilon_F \qquad \text{(IX.4.3)}$$

değeri ve fermiyonların ortalama enerjisi olarak da

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{U}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$

değeri elde edilir.

IX.5. Bir çekirdek içindeki nükleonların protonlar ve nötronlar olmak üzere iki ayrı fermiyon sistemi oluşturduklarını göz önünde tutarak çok düşük sıcaklıklarda çekirdek içindeki nükleonların kinetik enerjilerini belirleyiniz.

ÇÖZÜM: Bir önceki problemde elde edilen U nun ifâdesindeki ε_F nin (IX.4.2) ile verilmiş olan değeri ikaame edilirse

$$U = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$$

olur. Bir çekirdek göz önüne alırsak bunun haiz olduğu V hacmı içinde nötronlar ve protonlar olmak üzere iki cins tânecik bulunur. Nötronların sayısını N ve protonların sayısını da Z ile gösterir ve her iki cins tânecik arasındaki küçük kütle farkını ihmâl edersek toplam kinetik enerji

$$U_{\text{top}} = U_N + U_Z = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}\cdot\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{V^{2/3}}$$

ifâdesiyle verilecektir. Ancak, bilindiği gibi, $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}r_0^3 A$ dır. $(A = N + Z)$. Buna göre

$$U_{\text{top}} = \frac{3}{40}\left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{2/3}\frac{h^2}{mr_0^2}\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}} = C\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}} \qquad \text{(IX.5.1)}$$

olur. C sâbitinin değeri ise

$$C = \frac{3}{40}\left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{2/3}\frac{h^2}{mr_0^2} \sim 3{,}74.10^{-12}\ \text{J} = 23{,}4\ \text{MeV}$$

dir. Şimdi $D = N - Z$ vaz edelim. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{1}{2}(A+D) = \frac{A}{2}\left(1+\frac{D}{A}\right) \\ Z &= \frac{1}{2}(A-D) = \frac{A}{2}\left(1-\frac{D}{A}\right) \end{aligned}\right\}$$

olur. Bu değerler (IX.5.1) deki yerlerine yerleştirilirse

$$U_{\text{top}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} CA\left\{\left(1+\frac{D}{A}\right)^{5/3} + \left(1-\frac{D}{A}\right)^{5/3}\right\}$$

ifâdesi elde edilir. Büyük parantez içindeki iki parantezi binom teoremine göre açar ve D/A nın 1 in önünde küçük olduğunu düşünerek açılımları ikinci dereceden terimlerden sonra kesersek

$$\left(1+\frac{D}{A}\right)^{5/3}=1+\frac{5}{3}\frac{D}{A}+\frac{5}{9}\frac{D^2}{A^2}+\ldots$$

$$\left(1-\frac{D}{A}\right)^{5/3}=1-\frac{5}{3}\frac{D}{A}+\frac{5}{9}\frac{D^2}{A^2}+\ldots$$

$$U_{top}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}CA\left\{1+\frac{5}{9}\frac{D^2}{A^2}+\ldots\right\}=$$

$$=CA\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}+\frac{5C}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\frac{(N-Z)^2}{A}+\ldots$$

bulunur. Buradaki 1. terim çekirdekte bulunan tâneciklerin toplam sayısıyla orantılı bir enerji, 2. terim ise $(N-Z)^2$ ile orantılı bir enerji katkısına delâlet etmektedir.

IX.6. Birbirleriyle zayıf etkileşmede bulunan 1/2 spinli N adet tânecikten oluşan yalıtılmış bir sistem olsun. Her bir tânecik sisteme uygulanmış olan B magnetik alanıyla ya aynı ya da aksi yönde olan bir μ magnetik momentini haiz bulunmaktadır.

1) Sistemin $(U, U+\delta U)$ enerji şeridinde haiz olacağı $\Omega(U)$ mikrohâl sayısını $U \gg \delta U \gg \mu B$ ve $U \ll N\mu B$ varsayımları altında saptayınız. $S=S(U)$ yu hesaplayınız.

2) $U=U(T)$ fonksiyonunu tesis ediniz ve $T<0$ olup olmayacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM: 1) Sistemin mikrohâl sayısı

$$\Omega=\frac{N!}{n_1!\,n_2!}\;\frac{\delta U}{2\,\mu B}$$

den ibâret olacaktır; n_1 ve n_2 ise mümkün iki kuvantik hâlde bulunan tâneciklerin sayılarıdır.

Bir spin tersine döndüğünde enerji de $2\mu B$ kadar değişecektir. Buna göre δU kadarlık bir enerji aralığında $\delta U/2\mu B$ adet zıtlaşabilecek spin var demektir. Eğer

$$\left\{\begin{array}{l} U=-(n_1-n_2)\,\mu B=-n\,\mu B \\ n_1+n_2=N \end{array}\right.$$

vaz edilirse

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = n & \text{ve} \quad n_1 = -\dfrac{U}{\mu B} \\ n_1 + n_2 = N \end{cases}$$

den

$$n_1 = \frac{n+N}{2} = \frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B}$$

$$n_2 = \frac{N}{2} + \frac{U}{2\mu B}$$

ve dolayısıyla da

$$\boxed{\Omega(U) = \frac{N!}{\left(\dfrac{N}{2} - \dfrac{U}{2\mu B}\right)!\left(\dfrac{N}{2} + \dfrac{U}{2\mu B}\right)!}\,\frac{\delta U}{2\mu B}}$$

olur.

Öte yandan $S = k \ln \Omega$ olduğundan

$$\frac{S}{k} = \ln \Omega = \ln N! - \ln\left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B}\right)! - \ln\left(\frac{N}{2} + \frac{U}{2\mu B}\right)! + \ln \frac{\delta U}{2\mu B}$$

yazılabilir. *STİRLİNG* yaklaşımıyla ($\ln x! \cong x \ln x - x$) bu ifâde

$$\frac{S}{k} = N \ln N - \left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B}\right) \ln\left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B}\right) - \left(\frac{N}{2} + \frac{U}{2\mu B}\right) \ln\left(\frac{N}{2} + \frac{U}{2\mu B}\right) + \ln \frac{\delta U}{2\mu B}$$

şeklini alır.

2) Öte yandan

$$\frac{1}{kT} = \beta = \frac{d(\ln \Omega)}{dU} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V$$

dir. Buna göre, ve gerek $N \ln N$ gerekse $\ln(\delta U/2\mu B)$ sâbit olduklarından

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{2\mu B} \ln\left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B}\right) - \frac{1}{2\mu B} \ln\left(\frac{N}{2} + \frac{U}{2\mu B}\right)\right\}$$

ve buradan da

$$\frac{2\mu B}{kT} = \ln \frac{N\mu B - U}{N\mu B + U} \quad \rightarrow \quad e^{-2\mu B/kT} = \frac{N\mu B + U}{N\mu B - U}$$

elde edilir. Bu son ifâdeden de U nun değeri çıkarılırsa

$$\boxed{U(T) = -N\mu B \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)}$$

olduğu görülür. Buradan da $U > 0$ için $T < 0$ olması gerektiği görülmektedir (Negatif sıcaklık kavramı!).

IX. 7. A) Kuvantik bir lineer harmonik osilâtör göz önüne alınıyor.

1) $\mathscr{Z}$ dağıtım fonksiyonunu ve buradan da $\langle \varepsilon \rangle$ u hesaplayınız.

2) $\langle \varepsilon \rangle = f(T)$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz. $kT \ll h/2\pi\omega$ ise $\langle \varepsilon \rangle$ ne olur? Eğer $kT \gg h/2\pi\omega$ ise $\langle \varepsilon \rangle$ nun limiti ne olur? Bu limit değeri T ve ω ya nasıl bağlıdır?

B) Etkileşmeleri çok zayıf olan ve T sıcaklığında dengede bulunan N adet harmonik osilâtörden oluşmuş bir sistem göz önüne alınıyor. Bu, bir katı cismin atomları için uygun bir model olarak kabul edilebilir.

1. Bu osilâtör topluluğunun c_v özgül ısısını belirleyiniz.

2. $c_v = f(T)$ yi çiziniz ve $kT \gg \hbar\omega$ için c_v nin limitini bulunuz.

C) Bir katı cisimdeki atomların titreşimlerini incelemek üzere, Kuvantum Mekaniğinde, her bir katı cisim atomunun diğerlerinden bağımsız olarak 3 doğrultuda aynı ω frekansıyla titreşim yaptığını öngören bir model kabul edilir. Bundan ötürü, N atomdan oluşan katı cisim tek bir doğrultuda ω frekansıyla titreşen $3N$ osilâtöreden oluşmuş gibi telâkki edilebilir.

1. Katı cisim bir T sıcaklığında dengede bulunuyor iken bir osilâtörün $\langle \varepsilon \rangle$ ortalama enerjisini ve katı cismin atomlarının $\langle \varepsilon \rangle_{At}$ ortalama enerjisini bulunuz.

2. Katı cismin c_v özgül ısısının $w = \hbar\omega/2kT = \theta/T$ olmak üzere

$$c_v = 3R \frac{w^2 e^w}{(e^w - 1)^2}$$

şeklinde olduğunu gösteriniz.

3. $T \gg \theta$ için $c_v = 3R$ olduğunu ve $T \rightarrow \theta$ için $c_v \rightarrow 0$ olacağını gösteriniz.

4. $T \ll \theta$ hâli için c_v nin yaklaşık bir ifâdesini bulunuz ve $c_v = f(T)$ yi tesis ediniz.

D) Harmonik olmayan ve enerjisi, kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplamı olarak

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + bx^4$$

ile verilen lineer bir osilâtör olsun. T kâfî derecede büyük kabul edilmektedir.

1. Bu osilâtörün ortalama kinetik enerjisi nedir? Bunu harmonik osilâtörünkiyle karşılaştırınız.

2. Osilâtörün ortalama potansiyel enerjisi nedir? Harmonik osilâtörünkiyle karşılaştırınız.

3. Toplam ortalama enerjisi nedir?

ÇÖZÜM: A) 1. Harmonik osilâtörün enerjisi, bilindiği gibi,

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{h\omega}{2\pi} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega , \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

dir. Buna göre

$$\mathscr{Z} = \sum_n \exp\left[-\varepsilon_n/kT\right] = \exp\left[-\hbar\omega/2kT\right] \sum_n \exp\left[-n\hbar\omega/kT\right] = \frac{\exp\left[-\hbar\omega/2kT\right]}{\exp\left[\hbar\omega/kT\right] - 1}$$

ve ortalama enerjisi de, $\beta = 1/kT$ olmak üzere,

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\partial(\ln \mathscr{Z})}{\partial\beta} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp[-\hbar\omega/kT] - 1} \qquad \text{(IX.7.1)}$$

bulunur.

2. $T = 0°\text{K}$ için (IX.7.1) den $\langle \varepsilon \rangle_{T=0} = \hbar\omega/2$ olacağı görülmektedir. T nin büyük değerleri için ise üstel terimi seriye açıp kuvadratik terimde açılımı keserek:

$$\langle \varepsilon \rangle = \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \left\{\frac{\hbar\omega}{kT}\left(1 + \frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right\}^{-1}\right] = \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{kT}{\hbar\omega}\left(1 - \frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right] \cong kT$$

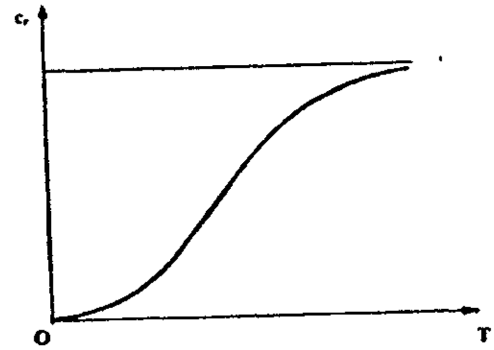
bulunur; yâni sıcaklığın büyük değerleri için enerjinin ortalama değeri kT ye gitmektedir. (Enerjinin eşdağılımı).

B) 1.

$$c_v = N\left(\frac{\partial\langle \varepsilon \rangle}{\partial T}\right)_V = N\hbar\omega\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{\exp\left[\hbar\omega/kT\right] - 1}\right]$$

$$= Nk\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \frac{\exp\left[\hbar\omega/kT\right]}{(\exp\left[\hbar\omega/kT\right] - 1)^2} .$$

$u = \hbar\omega/kT$ vaz ederek $c_v = \dfrac{u^2 e^u}{(e^u - 1)^2}$ şeklindeki bu fonksiyonun incelenmesi c_v nin T nin monoton artan bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir.



Eğer $T \to 0$ ise $c_v \to 0$ ve eğer $kT \gg \hbar\omega$ ise de $c_v \to Nk = R$ olmaktadır.

C) 1. Ortalama enerji (IX.7.1) ile verildiğine göre N atomdan oluşan bir katı cismin $\langle\varepsilon\rangle_{At}$ ortalama enerjisi de

$$\langle\varepsilon\rangle_{At} = 3N\langle\varepsilon\rangle = 3N\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp[\hbar\omega/kT] - 1}\right] \qquad \text{(IX.7.2)}$$

olur.

2. $$c_v = \left(\frac{\partial\langle\varepsilon_{At}\rangle}{\partial T}\right)_V = 3Rw^2\frac{e^w}{(e^w - 1)^2}, \qquad w = \frac{\hbar\omega}{2kT} = \frac{\theta}{T}$$

olduğu (IX.7.2) den kolayca hesaplanır.

3. Bu son ifâdeden de, kolayca, eğer $T \gg \theta$ ise $c_v = 3R$ olduğu; ve $T \to 0$ için $c_v \to 0$ olduğu hesaplanır.

4. Eğer $T \ll \theta$ ise, bu takdirde c_v nin yaklaşık bir ifâdesi olarak

$$c_v = 3R\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 e^{-\theta/T}$$

bulunur.

D) 1. Harmonik olmayan osilâtör misâlinde $\varepsilon_p = p^2/2m$ ve $\varepsilon_x = bx^4$ olmak üzere osilâtörün enerjisi

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_x$$

şeklinde iki terim ihtivâ etmektedir. Buradan

$$\langle \varepsilon_p \rangle = \frac{\int e^{-(\varepsilon_p+\varepsilon_z)/kT}\, \varepsilon_p\, dp}{\int e^{-(\varepsilon_p+\varepsilon_z)/kT}\, dp}$$

olduğunu ifâde edebiliriz. Fakat ayrıca

$$\langle \varepsilon_p \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\varepsilon_p}\, dp \right]$$

de yazılabilir. Hâlbuki $\beta p^2 = y^2$ vaz ederek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta p^2/2m}\, dp = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2m}\, dy$$

olur; yâni integral β ya bağlı değildir. Buna göre de

$$\langle \varepsilon_p \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} kT$$

olur. Bu ise harmonik osilâtörünkinin aynıdır.

2. Diğer taraftan, tanımı gereği,

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \frac{\int e^{-\beta\varepsilon_x}\, \varepsilon_x\, dx}{\int e^{-\beta\varepsilon_x}\, dx} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\varepsilon_x}\, dx \right]$$

dir. Fakat $\beta x^4 = y^4$ vaz ederek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta b x^4}\, dx = \beta^{-1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b y^4}\, dy$$

olduğu, yâni integralin β ya bağlı olmadığı saptanır. Buna göre

$$\langle \varepsilon_x \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln \beta^{-1/4}) = \frac{kT}{4}$$

den ibâret olur. Hâlbuki harmonik osilâtör için bu değer $kT/2$ dir.

3. Bu verilere göre ortalama toplam enerjinin $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{4} kT$ olacağı görülmektedir. Hatırlanacağı vechile harmonik osilâtörün ortalama toplam enerjisi kT idi.

4. Isı sığası da

$$c_v = -N \left(\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{4} R$$

olur.

✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶ ✶

IX.8. Toplam tânecik sayısı 30 olan bir sistem göz önüne alalım. $\varepsilon_1 = 2J$, $\varepsilon_2 = 4J$, $\varepsilon_3 = 6J$, olan enerji seviyelerinde sırasıyla onar tânecik bulunsun. Bu hâlde ε_3 e tekaabül eden dalgalanma — 2 iken ε_1 ve ε_2 ye tekaabül eden dalgalanmaları, sistemdeki toplam tânecik sayısı ve sistemin toplam enerjisi sâbit kalacak şekilde bulunuz.

ÇÖZÜM: ε_1 enerji seviyesinde n_1, ε_2 enerji seviyesinde n_2 ve ε_3 enerji seviyesinde de n_3 adet tânecik bulunsun. Toplam tânecik sayısı

$$N = 30 = n_1 + n_2 + n_3$$

ve toplam tânecik sayısındaki dalgalanma da

$$0 = \delta N = \delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3$$

dür.

Sistemin toplam enerjisi ve toplam enerjideki dalgalanma da sırasıyla

$$U = n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3 ,$$

$$0 = \delta U = \varepsilon_1 \delta n_1 + \varepsilon_2 \delta n_2 + \varepsilon_3 \delta n_3$$

dür. Bu denklemlerden

$$\delta n_1 = 6, \qquad \delta n_2 = -4$$

bulunur.

IX.9. 10^6 tane tânecik ihtivâ eden bir sistem göz önüne alalım. 5.10^5 adet de birbirinin aynısı enerji seviyesi olsun. Ortak enerjiyi ε ile gösterelim. Her enerji seviyesine bir tek kuvantik hâlin tekaabül ettiğini kabul ederek, en muhtemel dağılım için termodinamik ihtimâliyeti bulunuz,.

ÇÖZÜM: En muhtemel dağılım hâlinde

$$\mathscr{Z}=\sum_{i=1}^{5.10^5} g_i\, e^{-\beta\varepsilon_i}=\sum_{i=1}^{5.10^5} 1.e^{-\beta\varepsilon}=5.10^5\, e^{-\beta\varepsilon}$$

için

$$n_i=N\frac{g_i\, e^{-\beta\varepsilon_i}}{\mathscr{Z}}=N\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{5.10^5\, e^{-\beta\varepsilon}}=\frac{N}{5.10^5}$$

olur. Buna göre

$$\ln\Omega=\sum_{i=1}^{5.10^5} n_i\ln\frac{g_i}{n_i}+N=\frac{N}{5.10^5}\left(\ln\frac{5.10^5}{N}\right)5.10^5+10^6=10^6(1-\ln 2)$$

yâni

$$\Omega=\exp[10^6(1-\ln 2)]$$

dir.

IX.10. N adet tânecik ihtivâ eden bir sistem alalım. Enerji seviyeleri $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=2$ olsun. Her bir enerji seviyesine bir tek kuvantik hâlin tekaabül ettiğini kabul ederek en muhtemel dağılım için U, S ve C yi hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Bu problem için

$$\mathscr{Z}=1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT}$$

dir.

$$U=NkT^2\frac{d\ln\mathscr{Z}}{dT}=N\varepsilon\frac{e^{-\varepsilon/kT}+2\,e^{-2\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT}},$$

$$S=Nk\ln\mathscr{Z}+\frac{U}{T}=Nk\ln(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT})+$$

$$+\frac{N\varepsilon}{T}\,\frac{e^{-\varepsilon/kT}+2\,e^{-2\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT}},$$

$$C=\frac{dU}{dT}=\frac{N\varepsilon^2}{kT^2}\,\frac{e^{-\varepsilon/kT}+4\,e^{-2\varepsilon/kT}+e^{-3\varepsilon/kT}}{(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT})^2}$$

bulunur.

IX.11. Tek atomlu bir ideal gazın dağıtım fonksiyonunun

$$\ln\mathscr{Z}=\ln V+\frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mk}{h^2}+\frac{3}{2}\ln T$$

ile belirlendiğini biliyoruz. Bu gaz için $F = U - ST$ **şeklinde tanımlanan** *HELMHOLTZ* **fonksiyonunu ve bundan faydalanarak da gazın hâl denklemini bulunuz.**

ÇÖZÜM: $$F = -NkT\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mk}{h^2} + \frac{3}{2}\ln T - \ln N\right]$$

ve

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

den

$$VP = RT$$

bulunur.

IX.12. N **çok büyük bir sayı olmak üzere, birbirinden ayırdedilmeyen ve aralarında çok zayıf etkileşme bulunan** N **adet 2 atomlu molekülden oluşan bir gaz sistemi alalım. Her molekül aynı bir** ν **frekansıyla fakat**

$$\varepsilon_i = \left(\frac{1}{2} + i\right)h\nu \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

enerjisiyle titreşebilmektedir. Titreşim dağıtım fonksiyonunun

$$\mathscr{Z}_\nu = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{h\nu}{2kT}}$$

olduğunu gösterip, U, S, F, C_V **yi hesaplayınız.**

ÇÖZÜM: $\mathscr{Z}_\nu = \sum_i g_i\, e^{-\beta\varepsilon_i}$ olup her enerji seviyesine bir tek kuvantik hâl tekaabül etttiğinden $g_i = 1$ dir. Yâni

$$\mathscr{Z}_\nu = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} = \sum_i e^{-(1/2+i)h\nu/kT} = e^{-h\nu/2kT}\sum_i e^{-ih\nu/kT}$$

olur. $\exp[-h\nu/kT] = x$ için $x < 1$ dir. Buna göre toplamın üst limitini N den ∞ a kadar uzatmakla $\mathscr{Z}_\nu$ nin değeri değişmez.

$$\mathscr{Z}_\nu = e^{-h\nu/2kT}\sum_{i=0}^{\infty} x^i = e^{-h\nu/2kT}\cdot\frac{1}{1-x} = e^{-h\nu/2kT}\,\frac{1}{1-e^{-h\nu/kT}} = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{h\nu}{2kT}}\,.$$

$$U = NkT^2 \left(\frac{\partial \ln \mathscr{Z}}{\partial T}\right)_V = -\frac{Nh\nu}{2} \coth \frac{h\nu}{2kT},$$

$$S = -Nk \ln 2N \operatorname{sh} \frac{h\nu}{2kT} - \frac{Nh\nu}{2T} \coth \frac{h\nu}{2kT} + Nk,$$

$$F = NkT \ln 2N \operatorname{sh} \frac{h\nu}{2kT} - NkT,$$

$$C_V = \frac{Nh^2\nu^2}{4kT^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{h\nu}{2kT}}$$

dir.

IX.13. ***N*** **çok büyük bir sayı olmak üzere** ***N*** **adet tânecikten oluşan bir sistem alalım. Tâneciklerin her biri sırasıyla**

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots,\ n\varepsilon, \ldots,\ N\varepsilon$$

enerji seviyelerinde olsun. Her enerji seviyesinin bir tek kuvantik hâle tekaabül ettiğini farzediyoruz. ***MAXWELL-BOLTZMANN*** **istatistiğine göre en muhtemel dağılım için termodinamik ihtimâliyet ne olur?**

ÇÖZÜM: Dağıtım fonksiyonu

$$\mathscr{Z} = \sum_{i=0}^{N} e^{-\varepsilon_i/kT} = \sum_{i=0}^{N} e^{-i\varepsilon/kT}$$

dir. $\exp[-\varepsilon/kT] = x$ denirse $x < 1$ olacağı âşikârdır. Bu nedenle, $n > N$ için $x^n = 0$ olarak kabul edilebilir.

$$\mathscr{Z} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon/kT}}$$

olur. En muhtemel dağılım hâlinde ε_i enerji seviyesinde bulunan tâneciklerin sayısı da

$$n_i = N \frac{e^{-\varepsilon_i/kT}}{\mathscr{Z}} = N(1 - e^{-\varepsilon/kT})\, e^{-i\varepsilon/kT}$$

dir. Öte yandan termodinamik ihtimâliyet de

$$\ln \Omega = -\sum_{i=0}^{N} N(1-e^{-\varepsilon/kT})\, e^{-i\varepsilon/kT} \ln [N(1-e^{-\varepsilon/kT})\, e^{-i\varepsilon/kT}] + N =$$

$$= -N(1-e^{-\varepsilon/kT}) \left[\ln [N(1-e^{-\varepsilon/kT})] \sum_{i=0}^{N} e^{-i\varepsilon/kT} - \sum_{i=0}^{N} \frac{i\varepsilon}{kT}\, e^{-i\varepsilon/kT} \right] + N$$

ve deminki yaklaşımla

$$\ln \Omega = -N \ln [N(1-e^{-\varepsilon/kT})] + N \frac{\varepsilon}{kT} \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{1-e^{-\varepsilon/kT}} + N$$

olur.

IX.14. Küp şeklindeki bir kutuda bulunan bir tâneciğin haiz olduğu kinetik enerji değerlerinin

$$\varepsilon_i = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan n_x, n_y, n_z karteziyen koordinatlarının meydana getirdiği uzayda, bir tek kuvantik hâlin birim hacıma tekaabül ettiği âşikârdır. Buna göre

(i) $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ şeklinde tanımlanan n için, dn aralığı içinde bulunan kuvantik hâllerin sayısının $\frac{1}{8}(4n^2\pi)\,dn$,

(ii) $d\varepsilon$ enerji aralığındaki kuvantik hâllerin sayısının da

$$\frac{2\pi}{h^3} V(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon\,,$$

(iii) ε enerjisine tekaabül eden moleküllerin sayısının

$$dN_\varepsilon = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: (i) $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ aslında n_x, n_y, n_z uzayında merkezi orijinde bulunan ve yarıçapı da n olan bir küre belirler. Bunun hacmı $\frac{4}{3}\pi n^3$ dür. n_x, n_y, n_z hep pozitif sayılar olduğundan bu hacmın ancak 8 de biri bizi ilgilendirmektedir. Bu da

$$\frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\,\pi n^3$$

dür. Her kuvantik hâl bu uzayda birim hacıma tekaabül ettiğinden 0 ile n arasındaki kuvantik hâllerin sayısı da

$$\frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\,\pi\, n^3$$

olur. Biz dn aralığındaki kuvantik hâllerin sayısını aradığımıza göre bunun diferansiyelini almalıyız:

$$dg = \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\,\pi\, 3n^2\, dn = \frac{1}{8}\,(4\pi\, n^2)\, dn.$$

(ii) $$\varepsilon_i = \frac{h^2}{8mL^2}\, n^2$$

den

$$d\varepsilon_i = \frac{h^2}{8mL^2}\, 2n\, dn \quad \text{yâni} \quad dn = \frac{8mL^2}{2nh^2}\, d\varepsilon_i$$

ve

$$n = \sqrt{\frac{8mL^2}{h^2}}\,\varepsilon_i^{1/2} = \frac{2\sqrt{2m}\,L}{h}\,\varepsilon^{1/2}$$

bulunur. O hâlde

$$dg_\varepsilon = \frac{1}{8}\, 4\pi\, n^2\, \frac{8mL^2}{2nh^2}\, d\varepsilon_i = \frac{2\pi\, mnL^2}{h^2}\, d\varepsilon_i$$

$$= \frac{2\pi}{h^3}\, V\,(2m)^{3/2}\,\varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon_i$$

dir.

(iii) $$dN_\varepsilon = \frac{N}{\mathscr{Z}}\, dg_\varepsilon\, e^{-\varepsilon/kT}$$

olduğundan $\mathscr{Z}$ yi hesaplamamız gerekir.

$$\mathscr{Z} = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/kT}$$

olup enerji de sürekli değiştiğinden toplamın yerini integral alır:

$$\mathscr{Z} = \int_0^\infty e^{-\varepsilon/kT}\, dg_\varepsilon = \int_0^\infty \frac{2\pi}{h^3} V (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon =$$

$$= \frac{2\pi}{h^3} V (2m)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon.$$

$\varepsilon^{1/2} = x$ dönüşümü yapılarak

$$\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = 2 \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/kT} dx$$

ve

$$\frac{x}{\sqrt{kT}} = y$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yaparsak da

$$\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = (kT)^{3/2} \int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

olduğu görülür. O hâlde

$$\mathscr{Z} = \frac{2\pi}{h^3} V (2m)^{3/2} \frac{1}{2} (kT)^{3/2} \sqrt{\pi} = \frac{V (2mkT\pi)^{3/2}}{h^3}$$

dür. Buradan

$$dN_\varepsilon = \frac{N h^3}{V (2mkT\pi)^{3/2}} e^{-\varepsilon/kT} \frac{2\pi}{h^3} V (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon.$$

bulunur.

IX.15. Bir önceki problem için U, S, F, P, C_V yi hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $U = 3NkT$, $S = Nk \ln \frac{V}{Nh^3} (2mk\pi T)^{3/2} + 4Nk$,

$$F = -Nk \ln \frac{V}{Nh^3} (2mk\pi T)^{3/2} - 4Nk , \quad P = \frac{Nk}{V} , \quad C_V = 3Nk$$

dır.

IX.16. İki atomlu bir gazın *MAXWELL-BOLTZMANN* istatistiğine göre dönme hâllerine tekabül eden dağıtım fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM: $\mathscr{Z} = \sum_i g_i e^{-\beta\varepsilon_i}$ dir. Diğer taraftan Kuvantum Mekaniğinden bir cismin dönme kinetik enerjisinin

$$\varepsilon_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I_c} j(j+1)$$

ve ε_r ye tekaabül eden hâllerin sayısının da $g_r = (2j+1)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\mathscr{Z}_r = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 I_c kT} j(j+1)\right]$$

olur. Dönme enerji seviyelerinin sürekli kabul edilebilecek kadar birbirine yakın olduğunu farzedersek toplamın yerini integral alır:

$$\mathscr{Z}_r = \int_0^{\infty} (2j+1) \exp\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 I_c kT} j(j+1)\right] dj$$

ve

$$j(j+1) = y^2$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa

$$2y\,dy = (2j+1)\,dj$$

olacağından

$$\mathscr{Z}_r = \int_0^{\infty} 2y \exp\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 I_c kT} y^2\right] dy = \frac{8\pi^2 I_c kT}{h^2}$$

bulunur. Bu takdirde

$$\theta_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I_c k}$$

vaz edilirse

$$\mathscr{Z}_r = \frac{T}{\theta_r}$$

olur.

Burada şöyle bir durum ortaya çıkar. Eğer molekül, birbirinin aynısı iki atomdan oluşmuş ise 180° döndürüldüğü zaman ilk hâliyle çakışır. Eğer molekül farklı iki atomun birleşmesiyle meydana gelmiş ise, 180° döndürüldüğü zaman ilk durumundan ayrılır. Bunu belirleyebilmek için $\mathscr{Z}_r$ ye bir σ faktörü ithâl edeceğiz, ve

$$\mathscr{Z}_r = \frac{T}{\sigma\,\theta_r}$$

yazacağız. İlk hâl için $\sigma = 2$, son hâl $\sigma = 1$ dir.

IX.17. N_2 için 500°K de dönme hâllerine tekabül eden dağıtım fonksiyonunu hesaplayınız. Azot molekülünün yarıçapı 1,0976 Å ve kütlesi de $23{,}25.10^{-24}$ gr dır.

ÇÖZÜM: Önce I_ε u hesaplayalım.

$$I_\varepsilon = m_r\, r_\varepsilon^2$$

dir. Bir tek azot atomunun kütlesi m_N ise, tanımı dolayısıyla

$$m_r = \frac{m_N\, m_N}{m_N + m_N} = \frac{m_N}{2}$$

dir. Sayısal değerler kullanılarak

$$I_\varepsilon = \frac{23{,}25.10^{-24}}{2}(1{,}0976)^2 = 14.10^{-40}\ \text{g. cm}^2$$

bulunur. O hâlde

$$\theta_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I_\varepsilon k} = \frac{(6{,}625.10^{-27})^2}{8\pi^2\, 14.10^{-40}\,(1{,}3804.10^{-16})} = 2{,}875\ ^\circ\text{K}$$

ve

$$\mathscr{Z}_r = \frac{500}{2{,}2 \times 875} = 87$$

olur.

ERRATA

(* işaretli satırlar sayfanın altından itibaren sayılacaktır.)

Sayfa	Satır	Y a n l ı ş	D o ğ r u
2	8	$\Delta Q = \Delta U + W_{14} + \Delta W_{42}$	$\Delta Q = \Delta U + \Delta W_{14} + \Delta W_{42}$
14	3	z ve dz	z ve $z + dz$
16	17	Z_0 yüksekliğinde	z_0 yüksekliğinde
17	12	$P_0 = P_0 \exp [\ldots]$	$P = P_0 \exp [\ldots]$
17	23	alt piston durgunumsu	alt pistonun durgunumsu
18	4	$NMg\, [e^{-\alpha Z_1}\, e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\, S^{-1}$	$NMg\, [e^{-\alpha Z_1} - e^{-\alpha Z_2}]^{-1}\, S^{-1}$
18	14	$Z_1 = \alpha^{-1} + \dfrac{Z_1 e^{-\alpha Z_1} - \ldots}{e^{-\alpha Z_1} - \ldots}$	$Z_A = \alpha^{-1} \dfrac{Z_1 e^{-\alpha Z_1} - \ldots}{e^{-\alpha Z_1} - \ldots}$
21	15	merkezindeki basıncı	merkezindeki P_0 basıncı
26	9	$f(T) = C = sâbit$	$f(T) = K = sâbit$
31	6	konan ortaya	ortaya konan
32	21	**olan yay bir**	**olan bir yay**
32	22	**içindebir**	**içinde bir**
34	1	$c(x) - c_v = P \dfrac{dv}{dT} = PS \dfrac{dx}{dT}$	$c(x) - c_v = -P \dfrac{dv}{dT} = -PS \dfrac{dx}{dT}$
36	8	**eettirilen**	**ettirilen**
36	5*	$= -RT \displaystyle\int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v-b} - a \int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v^2}$	$= -RT \displaystyle\int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v-b} + a \int_{v_1}^{v_2} \dfrac{dv}{v^2}$
42	8	$\left(\dfrac{\partial x_T}{\partial T}\right)_P = \left[\dfrac{\partial}{\partial P} (\ldots\right.$	$\left(\dfrac{\partial x_T}{\partial T}\right)_P = \left[\dfrac{\partial}{\partial T} (\ldots\right.$

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
44	14	(i) Gazın a, c, e	(i) Gazın b, c, e
49	12	a hâlinde b hâline	a hâlinden b hâline
51	7 ve 10	$\ln \frac{T_a}{T_b}$	$\ln \frac{T_b}{T_a}$
58	1	$\ldots + (n_A + n_B) \frac{a}{v_v} + \ldots$	$\ldots + (n_A + n_B) \frac{a}{v_0} + \ldots$
60	8*	$U_2 = A_1^{3/2} \lambda^{-3/2} = \ldots$	$U_1 = A_1^{3/2} \lambda^{-3/2} = \ldots$
64	6*	$\ldots \geqslant \alpha \ln T_1 + \ln T_2$	$\ldots \geqslant \alpha \ln T_1 + \beta \ln T_2$
72	4*	$\ldots = c_v \frac{dT}{T} c + \ldots$	$\ldots = c_v \frac{dT}{T} + \ldots$
73	6	$\Delta s = \frac{R}{\gamma - 1} \ln 3 + \ln 3$	$\Delta s = \frac{R}{\gamma - 1} \ln 3 + R \ln 3$
74	9*	$S = 1 \times 880 \times \ln \frac{373}{300}$	$\Delta S = 1 \times 880 \times \ln \frac{373}{300}$
76	7	önce eşısılı	önce eşsıcaklıklı
81	13	$dS = \frac{\delta Q}{T} = mc_P \ln \frac{dT}{T}$	$dS = \frac{\delta Q}{T} = mc_P \frac{dT}{T}$
88	7	BC eşsısı dönüşümünde	eşısılı BC dönüşümünde
91	1*	$4^{\frac{1}{\gamma - 1}}$	$4^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$
92	1	$4^{\frac{1}{\gamma - 1}}$	$4^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$
103	9	$\ldots + \frac{P}{V} dV - \ldots$	$\ldots + \frac{P}{T} dV - \ldots$
109	7	**genişletilmekdir.**	**genişletilmektedir.**
115	1	$e^x \simeq 0$	$e^x \simeq \infty$
122	8	$\ldots + \frac{2a}{v^3} dv$	$\ldots + \frac{2a}{v^2} dv$
132	8*	$\left(\frac{2a}{RT} + b\right)$	$\left(\frac{2a}{RT} - b\right)$
132	3*	$\frac{2a}{RT} - b < 0$	$\frac{2a}{RT} - b > 0$

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
143	1*	dönüşüme ayrıştıralm.	dönüşüme ayrıştıralım.
148	2*	Tv_u	T
172	8*	Problem V.20 de	Problem V.19 da
173	3*	$c_g - c_s = \frac{dH_g}{dT} = \frac{dH_s}{dT} - \dots$	$c_g - c_s = \frac{dH_g}{dT} - \frac{dH_s}{dT} - \dots$
175	14*	$U = \sum_{i=1}^{N} u_i(P, T) = \dots$	$U = \sum_{i=1}^{N} U_i(P, T) = \dots$
181	9	$\dots = \left[\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\alpha}{T}\right)\right]_E$	$\dots = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\alpha}{T}\right)\right]_E$
187	12	$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{v,T} = \dots$	$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{v,P} = \dots$
187	13	$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v,T} = \dots$	$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v,P} = \dots$
213	10	$(\Delta v^2) = \dots$	$(\Delta v)^2 = \dots$
214	7	$\frac{v}{v_{max}} = V$	$\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2 = V$
216	3	**Hızı 100°K deki hızı**	**100°K deki hızı**
234	4*	**dağılımının ifâdesi**	**dağılımının ifâdesini**
239	9	$Y = Ce^{\beta y} y + De^{-\beta y}$	$Y = Ce^{\beta y} + De^{-\beta y}$
241	9	$E = -e^{-\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,2c}$	$E = -Fe^{-\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}\,2c}$
241 242	3* ve 5* 1	$(1 - e^{-2c})$	$\left(1 - e^{-2c\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}}\right)$
243	6	$\dots + \mathscr{B}_n R_1^{n\pi/2\alpha}\Big) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}$	$\dots + \mathscr{B}_n R_1^{-n\pi/2\alpha}\Big) \sin\frac{n\pi\varphi}{2\alpha}$
243	8	$\dots + \mathscr{B}_n R_1^{n\pi/2\alpha} = \dots$	$\dots + \mathscr{B}_n R_1^{-n\pi/2\alpha} = \dots$
244	9	$[1 + (1 -)^{n-1}]$	$[1 + (-1)^{n-1}]$
246	7*	$+ \mathscr{C}_n R^{1n} + \dots$	$+ \mathscr{C}_n R_1^n + \dots$
247	1	$\dots + B_0 + \ln R_2 + \dots$	$\dots + B_0 \ln R_2 + \dots$
255	6	$\dots = \frac{4T_2}{am\pi}\left[\int_0^a \dots\right.$	$\dots = \frac{4T_2}{am\pi}\int_0^a \dots$

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
259	1	$B_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{+0}^{\infty} \cdots$	$B_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{+0}^{L} \cdots$
271	2*	$\left[-x_2 (Z'_{2m} - Z_{2n} - Z'_{2n} Z_{2m}\right]_0^{h_2}$	$\left[-x_2 (Z'_{2m} Z_{2n} - Z'_{2n} Z_{2m})\right]_0^{h_2}$
279	10*	$\cdots\left(\sum_{i_N} e^{-\beta\varepsilon_N}\right)$	$\cdots\left(\sum_{i_N} e^{-\beta\varepsilon_{i_N}}\right)$
285	5*	$c_v = 3R \; {w^2 e^w \atop (e^w - 1)^2}$	$c_v = 3R \frac{w^2 e^w}{(e^w - 1)^2}$