

TEORİK FİZİK DERSLERİ

Dizinin Kurucusu : AHMED YÜKSEL ÖZEMRE
Dizinin Yöneticisi : ÇETİN CANSOY

«Teorik Fizik Dersleri» şimdilik 6 sı Lisans ve 6 sı Lisansüstü düzeyinde 12 cild metin kitabı ile 15 cild çözümlü problem kitabından oluşan bir dizi olarak plânlanmış bulunmaktadır.

METİN KİTAPLARI :

Lisans Düzeyinde

1. Fizikte Matematik Metotlar; A. Y. Özemre (1. baskısı İTÜ Yayınları No. 826, 1971; 2. baskısı, İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları Sayı No. 173).
2. Klâsik Teorik Mekanik; A. Y. Özemre (İst Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 132, 1976; 2. baskı No. 158, 1981).
3. Kuvantum Mekanîği.

Lisansüstü Düzeyinde

4. Klâsik Elektrodinamiğe Giriş; A. Y. Özemre (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 180, 1983).
5. Isı Teorisi; A. Y. Özemre (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 140, 1977).
6. Özel Rölâtivite Teorisi.
7. Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri; A. Y. Özemre (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 168, 1982).
8. Kozmolojiye Giriş; A. Y. Özemre (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 161, 1981).
9. İleri Kuvantum Teorisi.
10. Çekirdek Teorisi; Ç. Cansoy (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 143, 1978).
11. Alan Teorilerine Giriş.
12. Temel Tâncikler Teorisi.

ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTAPLARI :

Dizinin tasarlanan 15 adet Çözümlü Problem Kitabından hâlen yayınlanmış, baskıda ya da hazırlanmakta olanlar şunlardır :

- 1/II Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı; E. Rıza (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 169, 1982).
- 2/I Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı; A.Y. Özemre ve Ş. Zebitay (HAZIRLANIYOR).
- 3/I Kuvantum Mekanîği Çözümlü Problem Kitabı; E. Rıza (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 171, 1982).
- 5/I Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı; A.Y. Özemre ve E. Rıza (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları No. 147, 1978).
- 10/I Çekirdek Teorisi Çözümlü Problem Kitabı; Ç. Cansoy (İst. Üniv. Fen Fakültesi Yayınları, BASKIDA).

TEORİK FİZİK DERSLERİ

CİLD 4

KLÂSİK ELEKTRODİNAMİĞE GİRİŞ

Prof. Dr. AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

Istanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ

==== 1983 ====

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
YAYINLARINDAN

Sayı : 3081

FEN FAKÜLTESİ

Sayı : 180

TEORİK FİZİK

Sayı : 15

© 1983 - Her hakkı İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesine aittir.

*Bu kitabın 1. basımı 1350 adet olarak İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matbaasında,
Ocak 1983 de tamamlanmıştır.*

*Bu Kitabımı,
Doğumunun 80. Yılında,
Sıhhat ve Âfiyet Dileklerimle Birlikte
Azîz ve Muhterem Hocam
Prof. Dr. FAHİR YENİÇAY'a
İthaf Ediyorum.*

Y A Z A R I N E S E R L E R İ

- * Çözülmüş Atom ve Reaktör Fiziki Problemleri; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1962 (Çeviri).
- * Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
- * Nötronların Difüzyon Teorisi, 2. Cild; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
- * Geometrik Eşitsizlikler ; Türk Matematik Derneği, 1963 (Çeviri).
- * Contributions à la Théorie de la Diffusion des Neutrons Dépendant du Temps; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1964.
- * Kuantum Mekanikine Giriş ; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1965 (Çeviri).
- * Reaktör Kritikliğinin Nötronların Difüzyon Teorisine Göre Analitik Vecheleri; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
- * Hızlı Reaktörlerin Fiziksel Analizine Giriş; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
- * Nötronların Difüzyon Teorisi, I. Cild (düzeltilmiş ikinci baskı); İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969.
- * Nükleer Reaktörler Fizikinin Matematik Temelleri; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969 (Çeviri).
- * Çağdaş Fizığe Giriş Çözümlü Problem Kitabı (Şehsuvar Zebitay ile birlikte); İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
- * Çağdaş Fizığe Giriş Ders Kitabı, 1. Cild; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
- * Fizikte Matematik Metotlar Ders Kitabı; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1971.
- * Klâsik Teorik Mekanik; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1976.
- * Isı Teorisi; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1977.
- * Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı (Emine Rıza ile birlikte), İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1978.
- * Çağdaş Fizığe Giriş Ders Kitabı (ikinci baskı); İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1978.
- * Çağdaş Fizığe Giriş Çözümlü Problem Kitabı (ikinci baskı), İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1979.
- * Klâsik Teorik Mekanik (ikinci baskı); İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1981.
- * Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1982.
- * Kozmolojiye Giriş; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1981.
- * Klâsik Elektrodinamiğe Giriş; İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1983.
- * Çağdaş Fizığe Giriş Ders Kitabı; (üçüncü baskı), İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1983.
- * Fizikte Matematik Metotlar; (ikinci baskı) İst. Üniv. Fen Fakültesi, 1983.

HAZIRLANMAKTA OLANLAR

- * Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı (Şehsuvar Zebitay ile birlikte).

ÖNSÖZ

Bu kitap 1978 - 1979 ders yılı kış smestresinde, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi (eski) Teorik Fizik Kürsüsünde, fizik lisansının Teorik Fizik opsiyonunu almış olan öğrencilere haftada 4 saat ders ve 2 saat de uygulama olmak üzere okuttuğum Elektrodinamik dersinin metnini ihtivâ etmektedir.

Söz konusu olan öğrencilerin bir yıl önce Elektrik ve Magnetizma başlıklı uygulamalı ve lboratuvarlı zorunlu bir ders görmüş olmaları dolayısıyla bu ders notları sözü edilen zorunlu derste elde edilmiş bilgilerin üzerine inşa edilmiş ve tekrarlardan kaçınılmıştır.

Bu ders notlarının I. Bölümü Klâsik Elektrodinamiğın temeli olan *MAXWELL* denklemlerinin ve sınır Şartlarının çıkarılmasına hasredilmiştir. II. Bölümde elektromagnetik alanın dalga yayılım denklemleri ve bunların çözümleri ile elektromagnetik alanın *LAGRANGE* ve *HAMILTON* formalizmlerine göre yeniden formlasyonları takdim edilmiştir. III. Bölüm *MAXWELL* denklemlerinin invaryans özelliklerinin klâsik fakat ayrıntılı bir biçimde incelenmesine tahsis edilmiş olup öğrencileri, fizik lisansının son smestresinde okutulan *zel Rölâtivite Teorisinin* daha iyi zmlenmesine hazırlama amacını gütmektedir. IV. Bölümde elektromagnetik alanın korunum kaanunları; V. Bölümde ise dzemsel elektromagnetik dalgaların özellikleri ve geometrik optiğın teorik temelleri sergilenmiş bulunmaktadır. VI. Bölüm klâsik elektron teorisine ayrıntılı bir giriştir. VII. Bölümde yüklü tâneciklerin elektromagnetik alandaki hareketleri incelenmiş ve en nihâyet VIII. Bölümde de magnetohidrodinamiğın ve *ALFVN* dalgalarının mâhiyeti kısaca takdim olunmuştur.

Kısıtlı zamanda böyle bir dersi bu düzeyde tedaris etmek, önce bir seçim ve sonra da iyi bir strateji gerektirmektedir. Yaptığımız seçim küresel elektromagnetik dalgalar, kırınım (difraksiyon), dalga kılavuzları, üstün iletkenlik,

ilb... gibi konuları dersin kapsamı dışında bırakmıştır. Bu dersi alan öğrenciler henüz daha **Fizikte Matematik Metotlar II** dersini görmemiş olduklarından, derste *FOURIER* dönüşümleri ve *GREEN* fonksiyonu yöntemi hiç kullanılmamıştır.

Bu kitabı yazma gücünü ve şevkini lütfetmiş olan CENÂB-I HAKK'a hamd ve şükürden âcizim.

Kitabın yazılması ömrümün pek zor ve sıkıntılı bir dönemine rastladı. Azîz öğrencilerimin ilgisi, Teorik Fizik Kürsüsündeki sevgili mesai arkadaşlarımın ve dostlarımın mânevî destekleri ve özellikle muhterem annemin ilgisi ve muhabbeti olmasaydı, sanırım, bu kitap hiç yazılmayabilirdi. Hepsine minnettârim.

Ayrıca, manüskriyi daktilo eden Mansûre Altıngiray'a, mürettip Tayfur Lâçin'e, baskı operatörü Şâkir Çelik'e, İ.Ü. Fen Fakültesi Matbaasının emekleri geçen diğer personeline ve matbaa müdürü Mehmet Mardinligil'e de teşekkürlerimi sunarım.

Üsküdar, Ocak 1983

Ahmed Yüksel Özemre

I. BÖLÜM

MAXWELL TEORİSİNİN TEMELLERİ

(I.1) FİZİKTE "ALAN" KAVRAMI VE KLÂSİK ELEKTRODİNAMİĞİN GEÇERLİLİK SINIRLARI

Bir uzayın tümünün ya da bir bölümünün her bir noktasına bir büyüklük tekaabül ettirilirse, göz önüne alınan uzayda bir alanın varlığından söz edilir. Bu büyüklük bir skaler, bir vektör ya da bir tansör aracılığıyla gösterilebilir. Bu takdirde de bir **skaler alanından** veyâ bir **vektör alanından** yâhut da bir **tansör alanından** söz edilir. Meselâ köşelerinden biri ısıtılan ince bir dikdörtgen saç levhadaki sıcaklık dağılımı skaler bir alana iyi bir örnektir; saç levhanın yüzeyinin oluşturduğu iki boyutlu uzay parçasının her bir noktasına böylelikle $T = T(x, y)$ gibi bir sıcaklık değeri tekaabül etmekte ve bunların tümü skaler bir sıcaklık alanı oluşturmaktadır. Bir vektör alanına örnek de: bir boru içinden akan suyun **hız alanıdır**. Eğer suyun akışı meselâ **lâminer** ise, yâni su zerrelere birbirlerine paralel kalarak akıyorlarsa, borunun cidarlarının su üzerinde sebep oldukları sürtünme dolayısıyla suyun akış hızı cidarlar civarında, borunun eksenine civarından daha düşük olur; yâni borunun oluşturduğu üç boyutlu uzay parçasının her bir noktasına bir $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\rho, \theta, z)$ vektörü tekaabül ettirilmiş olur. Sürekli ortamlar mekaniğinde esnek bir cismin bir kuvvetin etkisi altındaki deformasyonu ise cismin her bir noktasında 6 bileşeni haiz, simetrik, 2. dereceden bir tansör aracılığıyla tasvir olunur. Bu **deformasyon tansörü** göz önüne alınan cismin kapladığı uzay parçası içinde bir tansör alanını temsil eder.

Fiziksel alanlar içinde en önemlileri **kuvvet alanlarıdır**. Bir kuvvet alanı, bir uzayın ya da bunun bir parçasının içinde hareket eden maddî tâneçikler üzerine tesir eden, tâneçiğin yervektörüne (bâzan da zamana) ve kezâ tâneçiğin kendine has bir özelliğini dile getiren skaler bir büyüklüğe bağlı bir kuvvetin temsil ettiği alandır. Bu gibi alanlara iki örnek gravitasyon alanı ile elektrostatik alan olup bunlara tekaabül eden söz konusu skaler büyüklükler de, gravitasyon alanı için: tâneçiğin kütlesi; ve elektrostatik alan için de: tâneçiğin elektrik yüküdür. Buna

2 * MAXWELL TEORİSİ

göre ve m ile tâneciğin kütlesini, q ile elektrik yükünü, g ile gravitasyon alan şiddetini ve E ile de elektrik alan şiddetini göstermek üzere

$$\begin{aligned} \text{gravitasyon alanı için} & : \mathbf{K}(\mathbf{r}, t) = m \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \\ \text{elektrostatik alan için} & : \mathbf{K}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

yazılır.

Fizikte tâneçikler arasındaki etkileşmelerin tümünü dört temel sınıfta toplamak mümkündür; başka bir deyişle, doğada tâneçikler arasındaki tüm etkileşmeler dört farklı **temel kuvvetin** belirtileri olarak ortaya çıkarlar. Bunlar : 1) kütleyi haiz herhangi iki tâneçik arasındaki gravitasyon kuvveti, 2) elektrik yükünü haiz herhangi iki tâneçik arasındaki elektromagnetik kuvvet, 3) büyük kütleli temel tâneçikler (**hadronlar**) arasındaki çekirdek kuvveti, ve 4) e , μ , ν gibi hafif temel tâneçikler (**leptonlar**) arasındaki zayıf etkileşme kuvvetidirler. Kuvvetli etkileşmenin şiddetini keyfî olarak birim diye seçtiğimizde, bu dört temel etkileşmenin izafî şiddetleri kısaca şöyle özetlenebilir:

<u>Etkileşmenin cinsi</u>	<u>İzafî şiddeti</u>
Kuvvetli etkileşmeler	1
Elektromagnetik	10^{-2}
Zayıf etkileşmeler	10^{-14}
Gravitasyon etkileşmeleri	10^{-38}

Kuvvet alanlarını tasvir etmenin bir başka yolu da alan şiddetlerinin ya da bunların türetildikleri potansiyel fonksiyonlarının gerçekledikleri diferansiyel denklemlerin ortaya konulmasıyla olur; bunlara **alan denklemleri** adı verilir. Alan denklemlerinin verilmiş olmasıyla alan, prensip itibarıyla, yerel olarak tasvir edilmiş olur. Bu alan denklemleri de ya lineer ya da lineer olmayan diferansiyel denklemler olurlar. Buna göre, sırasıyla, lineer alanlardan ve lineer olmayan (*nonlinear*) alanlardan söz edilir.

Kuvvet alanlarının ortaya çıkmasına, çoğunlukla, **alanların kaynakları** sebep olur. İki örnek vermek gerekirse, meselâ, gravitasyon alanının kaynakları: kütleli cisimler, ve elektrostatik alanın kaynakları da: elektrik yükleridir. Alanların kaynaklarının belirli bir dağılımı verildiğinde, alan denklemlerini integre ederek alan belirlenir. Lineer alan teorileri söz konusu olduğunda farklı iki kaynağın doğurduğu ortak alanın, herbirinin yalnız başına doğurduğu alanların bileşkesi olduğu gösterilir (**lineer alanların süperpozisyonu ilkesi**). Aynı husus lineer olmayan alan teorileri için geçerli değildir. Gene özellikle klâsik lineer alan teorileri söz konusu olduğunda, bizzat alanın, kaynakları üzerindeki dinamik etkisini doğrudan doğruya alan denklemlerinden çıkartmak mümkün değildir. Bunun için, kaynakların alan içindeki hareket denklemini ayrı bir postülât olarak vaz etmek gereklidir.

İşte bunun içindir ki gravitasyonun klâsik alan teorisinde gravitasyon potansiyelini veren

$$\nabla^2\Phi = 4\pi Gm$$

POISSON denklemini şeklindeki skaler alan denklemine ek olarak m yoğunluklu alan kaynağının hareket denklemini olarak

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -m \nabla\Phi$$

denklemini ayrıca vaz etmek gereklidir.

İleride, elektromagnetik alanın denklemleri olan MAXWELL denklemlerinin yanısıra m kütleli ve q elektrik yükünü haiz bir maddî noktanın maddenin dışındaki hareket denklemini (LORENTZ denklemini) olarak

$$\mathbf{K} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (1.1.2)$$

denkleminin ayrıca vaz edilmesi gerektiğini göstereceğiz.

Lineer olmayan bir alan teorisi olan Genel Rölâtivite Teorisinde ise bir tâne-ciğin hareket denklemini, ayrıca vaz edilmeye gerek kalmaksızın, teorisinin alan denklemlerinden çıkartılabilmektedir [bk. A.Y.ÖZEMRE: *TEORİK FİZİK DERSLERİ*, Cild: 7, GRAVİTASYONUN RÖLÂTİVİST TEORİLERİ; X. Bölüm; İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No. 168, (1982)].

Elektrodinamik (ya da elektromagnetik teori) de, MAXWELL tarafından formüle edilmiş olduğu şekliyle, lineer bir alan teorisidir; ölçülebilir oldukları varsayılan etkilerinin, uzayın herhangi bir $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ noktasında ve herhangi bir t ânındaki belirtileri, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ elektrik alan şiddeti vektörü ve $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ magnetik alan şiddeti vektörü aracılığıyla tasvir olunan **elektromagnetik alanın** matematiksel teorisidir.

Önce boş uzayda bireysel q elektrik yüklerinin doğurduğu alan hâlini göz önüne alacağız. Bunlar noktasal q_i yükleriye uzaydaki $q(\mathbf{r}, t)$ yük dağılımı, DİRAC distribüsyonları aracılığıyla,

$$q(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.1.3)$$

şeklinde olacaktır. Eğer belirli bir V hacmi içinde yoğunluğunu $\rho(\mathbf{r}, t)$ ile göstereceğimiz sürekli bir elektrik yükü dağılımı söz konusu ise, bu takdirde toplam yük de

$$q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (I.1.4)$$

ile verilecektir. Eğer V içindeki yük dağılımı birbiçim ise $q = V\rho$ olacağı âşikârdır.

Şimdi τ zaman aralığı içinde \mathbf{r} noktasını çevreleyen bir V hacmini, m kütlesini ve birbiçim ρ elektrik yoğunluğunu haiz ve hemen hemen sükûnette bulunan bir cisim göz önüne alalım. Bu takdirde NEWTON hareket kaanûnundan [bk. A.Y. ÖZEMRE: TEORİK FİZİK DERSLERİ, Cilt 2, KLÂSİK TEORİK MEKANİK; § (III.1), İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No. 132, (1976)]

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{K} = q\mathbf{E} = \rho V \mathbf{E}$$

veyâ, büyüklüklerin ortalama değerlerini $\langle \quad \rangle$ ile göstererek,

$$\int_t^{t+\tau} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t + \tau) - \mathbf{p}(t) = \int_t^{t+\tau} \mathbf{K} dt = \langle \mathbf{K} \rangle \cdot \tau,$$

ya da

$$\langle \mathbf{K} \rangle = \rho V \langle \mathbf{E} \rangle$$

vazederek

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(t + \tau) - \mathbf{p}(t) = \rho V \tau \langle \mathbf{E} \rangle \quad (I.1.5)$$

olur. Alanın \mathbf{r} noktasındaki impulsunun ölçülebilmesi için

- 1) $v \rightarrow 0$ olması yâni, LORENTZ kuvvetinin (I.1.2) ile verilmiş olan ifâdesinden de görülebileceği üzere, magnetik kuvvetlerin işin içine karışmamaları;
- 2) $\tau \rightarrow 0$ ve $V \rightarrow 0$ limitlerinin var olmaları; ve
- 3) $\rho V = q \rightarrow 0$ olması, yâni göz önüne alınan cismin kendi üzerindeki indüksiyon etkilerinin ihmâl edilebilir olması gereklidir.

Elektron teorisinde ρV yi elektronun yükü olan e den küçük almak olanağı yoktur. Öte yandan eğer \mathbf{E} alanında göz önüne alınan cisim, kuvantum olaylarına tâbî olacak küçüklükte ve nitelikte ise, bu sefer de HEISENBERG'in belirsizlik bağıntıları dolayısıyla, alanın cismin impulsunda icrâ ettiği ve ifâdesi (I.1.5) ile verilmiş olan değişimi, alanın ölçüldüğü \mathbf{r} noktasının koordinatları üzerinde mutlak belirsizlik olmaksızın, kesin bir biçimde belirlemek mümkün değildir. Bu, bize, kuvantumsal ve hattâ atomsal olaylar söz konusu olduğunda klâsik elektrodinamiğin temelindeki alan tanımının bile kesin bir biçimde yapılamıyacağını ve dolayısıyla da bu gibi olaylar için klâsik elektrodinamiğin geçerli olamayacağını telkin

etmektedir. Nitekim bu gibi olaylar, çok farklı bir yaklaşım tarzına sâhip olan **kuantum elektrodinamiğinin** çerçevesi içinde açıklanabilmişlerdir.

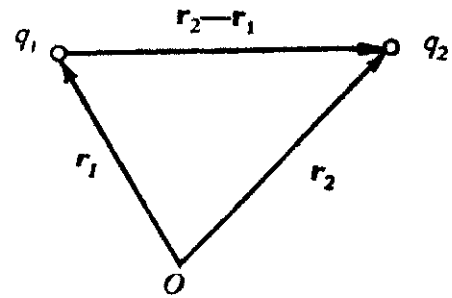
Elektrodinamik elektrik akımının çeşitli devrelerdeki çeşitli belirtilerinden, kristal yapısına; geometrik ve fiziksel optikten elektromagnetik radyasyona; histerisis olayından dia ve paramagnetizmaya; bir diyodun işlemeden devâsâ tânecik hızlandırıcılarına kadar pekçok fiziksel olayın birleştirici ve bütünleyici bir görüşle açıklanabildiği ve **MAXWELL** denklemleri denilen dört denkleme dayanan zarif bir sentezdir. Bu sentez ise beş ampirik olgunun matematiksel bir biçimde ifâde edilmesinden çıkartılmaktadır. Bunlar :

- 1) Elektrik yükleri arasındaki kuvveti veren **COULOMB** kanunu,
 - 2) Yüklerin korunum kanunu,
 - 3) **FARADAY**'ın elektromagnetik indüksiyon kanunu,
 - 4) Magnetik olayların yalnızca elektrik akımlarından doğduğunu ifâde eden **BİOT-SAVART** (ya da **LAPLACE** kanunu), ve
 - 5) **AMPÈRE** kanunu
- dur.

Bu sentezin çerçevesini tamamlamak için 6. bir ampirik olgu olarak da ifâdesi (I.1.2) ile verilmiş olan **LORENTZ** kuvvet kanununu da göz önünde tutmak gerekir.

(I.2) COULOMB KANUNU VE ELEKTROSTATİK

Sükûnet hâlinde bulunan q_1 ve q_2 yüklerini haiz iki maddî nokta arasındaki kuvvetin ifâdesi **COULOMB** tarafından ampirik olarak tesbit edilmiştir. Buna göre



Şekil : I.1 — q_1 ve q_2 yükleri arasındaki **COULOMB** kuvveti hakkında.

1 numaralı yükün 2 numaralı yük üzerinde icrâ ettiği elektrostatik kuvvet

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (\text{I.2.1})$$

dür; \mathbf{r}_1 ve \mathbf{r}_2 ile q_1 ve q_2 yüklerinin yervektörleri gösterilmektedir. Şekil: I.1

in de yardımıyla K_{12} nin eğer q_1 ve q_2 nin işaretleri aynı ise **itici**, birbirlerinin tersi ise de **çekici** bir kuvvet olduğu kolayca görülür. (1.2.1) formülü elektrik yükü biriminin tanımına da yarar. Buna göre, mutlak değerce birbirlerine eşit iki elektrik yükünün 1 cm uzaklıktan birbirlerini 1 *din*'lik bir kuvvetle itmeleri (ya da çekmeleri) hâlinde 1 elektrostatik birimi yükleri olduğu söylenir.

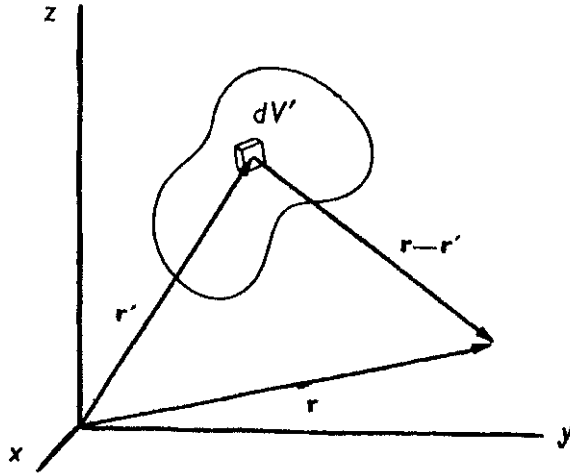
Eğer yervektörleri sırasıyla r_1, r_2, \dots, r_n olan q_1, q_2, \dots, q_n noktasal elektrik yükleri göz önüne alınırsa bunlardan i -nincisi üzerine diğerlerince uygulanan toplam kuvvet bunlardan herbirinin q_i üzerine uyguladığı bireysel kuvvetlerin vektörel bileşkesinden ibâret olur :

$$K_i = \sum_{j \neq i} K_{ji} = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j (r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^3} . \quad (1.2.2)$$

Söz konusu n yükün bir $r = r(x, y, z)$ noktasında doğurduğu **E elektrik alanı** ise (x, y, z) noktasına yerleştirilen bir q yükü üzerindeki birim elektrik yükü başına bileşke elektrostatik kuvvetin $q \rightarrow 0$ için limit değeri olarak

$$E(r) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{q \text{ üzerindeki bileşke kuvvet}}{q} \quad (1.2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Ancak doğada karşılaşılan yükler noktasal olmaktan çok belli



Şekil : 1.2

bir hacim içine sürekli bir biçimde dağılmış bulunan yüklerdir. V hacimli bir cismin toplam q yükü her bir $dV' = d^3r'$ elemanter hacim elemanına tekaabül eden yüklerin toplamı olacağından, $\rho(r')$ ile **yük yoğunluğunu** göstererek, $dQ = \rho(r') d^3r'$ ve

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho(r') d^3r' \quad (1.2.4)$$

olur. Buna göre elektrik alan vektörü de, sürekli yük dağılımı hâlinde,

$$E(r) = \int_{\text{bütün uzay}} \frac{\rho(r') (r - r')}{|r - r'|^3} d^3r' \quad (1.2.5)$$

ile ifade olunacaktır. Bu ifâdenin $r = r(x, y, z)$ değişkenlerine göre diverjansını alalım :

$$\begin{aligned}
\nabla_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \int_{\text{bütün uzay}} \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' = \\
&= \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d^3\mathbf{r}' = \int_{\text{bütün uzay}} \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d^3\mathbf{r}' \quad (1.2.6)
\end{aligned}$$

Bu integral $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ için belirsizdir. Bunun için integrali önce $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ için ve sonra da $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ de değerlendireceğiz. $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ için integrantta

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) &= \left[\left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] + \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] = \\
&= \left[-\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] + \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \cdot \mathbf{r} \right] = \\
&= -\frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \equiv 0
\end{aligned}$$

olduğundan uzayın yüksüz bölgelerinde yâni \mathbf{r} nin \mathbf{r}' ye asla eşit olamayacağı hal-lerde $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ olacağı anlaşılmaktadır.

Şimdi de (1.2.6) yı $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ de değerlendirebilmek üzere bu noktayı kapsayan sonsuz küçük bir (K) küresinin hacmi üzerinden integralin değerlendirilmesinin yeterli olacağına dikkati çekmek istiyoruz. Buna göre

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{(K)} \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d^3\mathbf{r}'$$

olur. Ancak $\rho(\mathbf{r}')$ nün sonsuz küçük (K) küresi içinde büyük bir değişim göstermeyeceği ve bu sebeple de (K) nın, $\rho(\mathbf{r}')$ nün o bölgede sâbit sayılacak kadar küçük seçilebileceği âşikârdır. Buna binâen (K) içinde $\rho(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})$ yazılabilir ve, bu, integralin dışına alınabilir:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \int_{(K)} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d^3\mathbf{r}'$$

Ancak, $\nabla_r = \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right)$ vaz ederek $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ ün x, y ve z ye göre türetilmesinin aslında $-x', -y'$ ve $-z'$ ye göre türetilmesine denk olduğuna yâni

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = -\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

yazılabileceğine dikkat edilecek olursa

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \int_{(K)} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d^3\mathbf{r}' \quad (1.2.7)$$

ifâdesi elde edilir. (K) nın yüzeyini (A) ile gösterir ve (A) nın birim normal vektörünün de $-(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ olduğuna dikkat edecek olursak (1.2.6) dan, GAUSS integral teoremi aracılığıyla,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\rho(\mathbf{r}) \int_{(K)} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d^3\mathbf{r}' = +\rho(\mathbf{r}) \int_{(A)} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' \\ &= \rho(\mathbf{r}) \int_{(A)} \frac{dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \end{aligned}$$

yâni

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho} \quad (1.2.8)$$

bulunur. (1.2.8) ifâdesi eğer bir V hacmi üzerinden integre edilirse, (1.2.4) e binaen,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 4\pi Q$$

ve, gene GAUSS teoremi aracılığıyla, bu ifâdenin sol yanını V yi sınırlandıran A dış yüzeyi üzerinden alınmış bir integrale dönüştürerek

$$\boxed{\int_{(A)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi Q} \quad (1.2.9)$$

bulunur. Bu, herhangi bir V hacminin içinden (A) dış yüzeyini katederek dışarı çıkan elektrik alanı toplam akısının V deki toplam elektrik yüklerinin 4π katı olduğunu bildiren **GAUSS teoreminin** ifâdesinden başka bir şey değildir.

(1.3) ELEKTROSTATİK ALANIN KORUNUMLU ALAN OLMA ÖZELLİĞİ

Bilindiği gibi bir vektörel alan, alan vektörünün diverjansı ile rotasyonelinin verilmesiyle tümüyle belirlenmiş olur. Elektrostatik alanın diverjansının ifâdesi (1.2.8) ile elde edilmiş bulunuyordu. Şimdi de $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ yi belirlemeye çalışacağız.

Bunun için kapalı bir (C) çevresi boyunca elektrostatik kuvvetin yaptığı işi hesaplayalım. Bu, mekanikteki iş tanımına benzer şekilde

$$W = \oint_{(C)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

olarak tanımlanır. Diğer yandan, $d\mathbf{A}$ ile (C) nin çevrelediği yüzey parçasının yönlendirilmiş elemanını göstererek STOKES teoreminden

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.3.1)$$

yazılır. Hâlbuki (1.2.5) den

$$\nabla \times \mathbf{E} = \int_{\text{bütün uzay}} \rho(\mathbf{r}') \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (1.3.2)$$

olur. Ancak,

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.3.3)$$

yazılabildiğinden ve bir yandan $\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla \times \mathbf{r} = 0$ olması, öte yandan da $\nabla (1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3)$ ile $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ nün aynı doğrultuda olmaları dolayısıyla (1.3.3) ün sağ yanının ilk teriminin de sıfır olması hasebiyle (1.3.2) den $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ olduğu bütün noktalar için

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}')$$

sonucu çıkar. Şimdi de \mathbf{r}' noktasının integralin değerine katkısını hesaplamak için \mathbf{r}' yü kapsayan sonsuz küçük bir (K) küresi üzerinden integrali değerlendirelim. (K) nin belirlediği bu sonsuz küçük hacim içinde rahatlıkla $\rho(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})$ alınabileceğinden

$$\nabla \times \mathbf{E} = \rho(\mathbf{r}) \int_{(K)} \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (1.3.4)$$

yazılabilir. Öte yandan (K) ile (A) dışyüzeyini haiz bir kapalı hacim ve \mathbf{B} ile de herhangi bir vektörü göstermek üzere, GAUSS integral teoreminden yararlanarak,

$$\int_{(K)} \nabla \times \mathbf{B} d^3\mathbf{r} = - \int_{(A)} \mathbf{B} \times d\mathbf{A} \quad (1.3.5)$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Buna dayanarak ve gene

$$\nabla \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}'} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

olduğuna dikkat ederek, (1.3.5) aracılığıyla, (1.3.4) den

$$\nabla \times \mathbf{E} = + \rho(\mathbf{r}) \int_{(A)} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times d\mathbf{A}$$

bulunur. Oysa $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ile (A) elemanter yüzey vektörü birbirlerine paralel olduklarından bu ifade özdeş olarak sıfırdır. Şu hâlde $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ için dahi $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ olduğundan uzayın bütün noktaları için

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0} \quad (1.3.6)$$

olur. Bu ise (1.3.1) dolayısıyla

$$\oint_{(C)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.3.7)$$

olmasını yâni elektrostatik kuvvetlerin iki farklı nokta arasında yaptıkları işin izlenen yola bağlı olmadığını, başka bir deyimle elektrostatik alanın **korunumlu alan** olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ skaler bir fonksiyon olmak üzere,

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

özdeşliği her zaman geçerli olduğundan bu bize $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektrik alan vektörünün, Φ_0 gibi bir sâbit yaklaşıklığıyla, daima bir skaler fonksiyonun gradyenti olarak ifade edilebileceğini telkin eder. Genellikle

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})} \quad (1.3.8)$$

yazılır ve $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ fonksiyonuna elektrik alanının **skaler potansiyel fonksiyonu** adı verilir. (1.2.5) ve (1.3.8) den

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'} \quad (1.3.9)$$

ve ayrıca (1.3.8) in her iki yanının diverjansını alarak da, (1.2.8) dolayısıyla

$$\boxed{\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r})} \quad (1.3.10)$$

POISSON denklemleri bulunur. Bu denklemler belirli bir yük dağılımı ve belirli sınır şartları verildiğinde elektrik alanının potansiyel fonksiyonunu belirler; böylece elde edilen potansiyel fonksiyonundan da, vaz olunmuş olan şartlara uyan $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektrik alan vektörü (1.3.8) aracılığıyla elde edilir.

Şimdi (1.3.9) un her iki yanına da ∇^2 *LAPLACE* operatörünü uygulayalım; buna göre

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \nabla^2 \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \int \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}'$$

olur. Bu ifâdenin sağ yanının $-4\pi \rho(\mathbf{r})$ ye eşit olması, yâni ifâdenin *POISSON* denkleminde indirgenmesi için

$$\boxed{\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (1.3.11)$$

vaz etmenin yeterli olduğu derhâl görülür. (1.3.11) bize *LAPLACE* denkleminde tekaabül eden *GREEN* fonksiyonunun

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.3.11')$$

den ibâret olduğunu ifâde etmektedir.

Şimdi, $x < 1$ olmak şartıyla, $1/\sqrt{1+x}$ in seriye açılımının

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots$$

şeklinde olduğunu hatırladık tutarak (1.3.9) un integrantında, $|r| \gg |r'|$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 r^2}{2r^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^3 - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') r'^2 r^2}{2r^6} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

yazılabileceğine dikkati çekelim. (1.3.12) açılımını $\Phi(\mathbf{r})$ nin (1.3.9) ile verilmiş olan ifâdesine yerleştirecek olursak **potansiyelin çokkutuplu açılımı** elde edilmiş olur:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \\ + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \dots$$

Sağ yanda 1. terimdeki integral, toplam q yükünü göstermektedir. Diğer taraftan

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (1.3.13)$$

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2) d^3\mathbf{r}' \quad (1.3.14)$$

vaz edilecek olursa $\Phi(\mathbf{r})$ için

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots} \quad (1.3.15)$$

bulunur. Bu açılımda q toplam yüküne tekkutup momenti, ifâdesi (1.3.13) ile verilmiş olan \mathbf{p} ye çiftkutup (*dipol*) momenti ve Q_{ij} ye de dörktutup (*kuvardupol*) momenti adı verilir. Daha yüksek mertebeden çokkutup momentleri çekirdek fiziğinde özellikle çekirdeklerin şekillerine bağlı önemli bazı sâbitlerin hesabında önemi haiz olup bu yüzden de derslerimizin konusu dışında kalmaktadırlar.

(1.4) MAKROSKOPİK ELEKTROSTATİĞİN İLKELERİ

Şimdiye kadar uzayda bireysel ya da sürekli, fakat her hâlde sükûnetteki, yük dağılımlarının doğurdıkları elektrik alanlarının genel özelliklerine değindik. Şimdi de maddenin içindeki noktasal elektrik yüklerinin doğurdıkları elektrik alanını incelemek istiyoruz. Bunun için maddeyi oluşturan atom ya da moleküllerin içindeki yüklerin elektrik alanının oluşumuna katkılarını hesaplamak gerekecektir. Bu mikroskopik yüklerin hep birlikte makroskopik olarak oluşturdukları $\epsilon(\mathbf{r})$ alanını (1.2.5) ifâdesinde olduğu gibi

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho'(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (\nabla \cdot \epsilon = 4\pi\rho') \quad (1.4.1)$$

şeklinde tesbit etmek imkânı yoktur; çünkü böylece tanımlanacak olan bir alan, en azından AVOGARDO sayısı mertebesi civarında bir sayıdaki noktasal elektrik yük-

lerinin kesin yerlerini belirlemesi gereken bir yük dağılımı ihtivâ etmek zorundadır. Ayrıca; bu alan, yervektörü \mathbf{r} ile gösterilen gözlem noktasından yalnızca atomun boyutları mertebesindeki uzaklıklarda bile büyük flüktüasyonlar arz edecektir. Dolayısıyla hiç değilse söz konusu boyutlara göre makroskopik sayılabilecek en küçük boyutlarda, meselâ lineer boyutları 0,01 cm olan hacimlerde, ortalama alan şiddetleriyle yetinmek gerekecektir. Bu türden hacimler 10^{-6} cm^3 mertebesinde olup, öte yandan da bir atomun işgal ettiği hacim da 10^{-24} cm^3 olduğundan, böyle bir hacimde hiç değilse 10^{18} kadar atom bulunacaktır. Bu itibarla da alan büyüklükleri üzerindeki ârizî mikroskopik flüktüasyonların iyi bir ortalamasını almak mümkün olacaktır. Bu bakımdan bizi ilgilendiren, yeteri kadar çok sayıda molekül kapsadığını varsayacağımız ΔV gibi küçük fakat makroskopik bir hacim üzerinden $\epsilon(\mathbf{r})$ ve $\rho(\mathbf{r})$ nin değerlerinin

$$\langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \epsilon(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (1.4.2)$$

$$\langle \rho'(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho'(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (1.4.3)$$

şeklindeki ortalamalarını almaktır; burada $\boldsymbol{\xi}$ değişkeninin tanım bölgesi ΔV hacmidir.

Dış elektrik alanlar yok iken atom ya da moleküller çiftkutup momentlerine sâhip olabilirler de, olmyabilirler de; ama eğer çiftkutup momentleri varsa bunlar rasgele yönlendirilmiş bulunur. Fakat bir alanın varlığında atom ya da moleküller polarlanmış olurlar; yâni bunların çiftkutup momentleri alanın yönüne paralel olmaya çalışır.

Şimdi çiftkutup momentlerinin nasıl işin içine girdiğini görmek için, bir \mathbf{r} noktasından gözleendiği şekliyle, ağırlık merkezi \mathbf{r}_j de olan j -nci molekülün $\rho_j'(\mathbf{r}')$ molekül yük yoğunluğunun doğurduğu $\epsilon_j(\mathbf{r})$ alanını hesaplayalım. (bk. Şekil : I.3). Buna göre

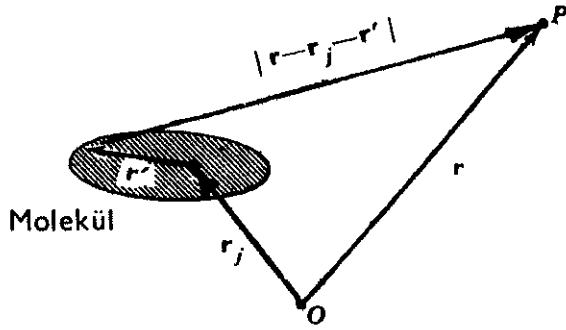
$$\epsilon_j(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_j = -\nabla \int_{\text{mol}} \frac{\rho_j'(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}'|} \quad (1.4.4)$$

olur. Bir yandan potansiyel fonksiyonunun (I.3.15) ile verilmiş olan açılımını göz önünde bulundurarak, öte yandan da **moleküler yük ve moleküler çiftkutup momentini**

$$q_j = \int_{\text{mol}} \rho_j'(\mathbf{r}') d^3r' \quad (1.4.5)$$

$$\mathbf{p}_j = \int_{\text{mol}} \mathbf{r}' \rho_j'(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (1.4.6)$$

şeklinde tanımlayarak (1.4.4) ifâdesinin açılımı, ilk iki terimle yetinerek,



Şekil: 1.3 — Bir molekülün uzayın bir P noktasında hâsil ettiği elektrostatik alanın hesaplanmasına dair.

$$\epsilon_j(\mathbf{r}) = -\nabla \left\{ \frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} + \nabla_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \right) \cdot \mathbf{p}_j + \dots \right\} \quad (1.4.7)$$

şeklinde olur. Bütün moleküllerin katkısıyla oluşan mikroskopik elektrik alanını elde etmek için (1.4.7) nin j üzerinden toplamını almak gereklidir:

$$\epsilon(\mathbf{r}) = -\nabla \sum_j \left\{ \frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} + \nabla_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \right) \cdot \mathbf{p}_j \right\} \quad (1.4.8)$$

Şimdi mikroskopik alanı elde etmek üzere (1.4.8) in ΔV hacmi üzerinden ortalamasını alacağız. Bu işlemi kolaylaştırmak için bir yandan (1.4.8) de moleküller üzerinden alınan toplam yerine integral alacak, öte yandan da

$$\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \quad (1.4.9)$$

$$\pi_{\text{mol}}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \quad (1.4.10)$$

aracılığıyla görünürde sürekli olan yük ve polârizasyon yoğunluklarını ithâl edecek olursak (1.4.8) , artık,

$$\epsilon(\mathbf{r}) = -\nabla \int \left\{ \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot \pi_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \right\} d^3\mathbf{r}' \quad (1.4.11)$$

şekline girer.

$\epsilon(\mathbf{r})$ nin (1.4.11) ile verilmiş olan ifâdesini göz önünde bulundurarak (1.4.2) ye göre $\langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle$ ortalama değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \epsilon(\mathbf{r} + \xi) d^3\xi = \\ &= \frac{1}{\Delta V} \left\{ \int_{\Delta V} d^3\xi \left[-\nabla \int \left\{ \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}''|} + \nabla'' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}''|} \right) \cdot \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{r}'') \right\} d^3\mathbf{r}'' \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

olur. Ortalama alma işlemi ile türetme işleminin değiş-tokuş edilebilir olmasını da göz önünde tutarak bu son ifâde, ayrıca

$$\langle \epsilon_1(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \left\{ \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}''|} d^3\mathbf{r}'' \right\} \quad (1.4.13)$$

$$\langle \epsilon_2(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \left\{ \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int \nabla'' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \xi - \mathbf{r}''|} \right) \cdot \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{r}'') d^3\mathbf{r}'' \right\} \quad (1.4.14)$$

vaz ederek,

$$\langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle = \langle \epsilon_1(\mathbf{r}) \rangle + \langle \epsilon_2(\mathbf{r}) \rangle \quad (1.4.15)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \xi \Rightarrow d^3\mathbf{r}'' = d^3\mathbf{r}'$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$\langle \epsilon_1(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \left\{ \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int \frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}' + \xi)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right\} \quad (1.4.16)$$

$$\langle \epsilon_2(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \left\{ \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int \nabla'' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{r}' + \xi) d^3\mathbf{r}' \right\} \quad (1.4.17)$$

ifâdeleri bulunur. (1.4.9) eğer (1.4.16) ya yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_1(\mathbf{r}) \rangle &= -\nabla \left\{ \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sum_j q_j \delta(\mathbf{r}' + \xi - \mathbf{r}_j) d^3\xi \right) \right\} \\ &= -\nabla \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_j \frac{q_j}{\Delta V} d^3\mathbf{r}' \end{aligned}$$

bulunur. \mathbf{r}' yü kuşatan ΔV hacmi içindeki molekül yoğunluğunu $N(\mathbf{r}')$, molekül başına ortalama yükü de $\langle q_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle$ ile gösterirsek son ifâdenin

$$\langle \epsilon_1(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \int \frac{N(\mathbf{r}') \langle q_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1.4.18)$$

şeklinde yazılacağı âşikârdır. Buna benzer düşüncelerle ve $\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ olduğunu da göz önünde tutarak (1.4.17) nin de

$$\langle \epsilon_2(\mathbf{r}) \rangle = +\nabla \int \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot N(\mathbf{r}') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle d^3\mathbf{r}' \quad (1.4.19)$$

olacağı görülür.

Şimdi makroskopik alanın diverjansını hesaplayalım; buna göre (1.4.18) ve (1.4.19) aracılığıyla (1.4.15) den

$$\nabla \cdot \langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle = -\int \left\{ \langle q_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \nabla \left[\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle \right] \right\} \times N(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

bulunur. Diğer taraftan (1.3.11) ile gösterilmiş olduğu vechile

$$\nabla^2(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

olduğu göz önünde tutulursa, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ nin özelliklerinden ötürü,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle &= 4\pi \int \left\{ \langle (q'_{\text{mol}}(\mathbf{r}')) \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle \right\} N(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= 4\pi N(\mathbf{r}) \langle q_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle - 4\pi \nabla \cdot \left[N(\mathbf{r}) \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle \right] \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

ifâdesi elde edilmiş olur. Buradan ise

$$\nabla \cdot [\langle \epsilon \rangle + 4\pi N \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle] = 4\pi N \langle q_{\text{mol}} \rangle \quad (1.4.21)$$

yazılabilir. Eğer

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \epsilon \rangle \\ \mathbf{P} &= N \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle \\ \rho &= N \langle q_{\text{mol}} \rangle \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.22)$$

vaz edilirse (1.4.21) ifâdesi artık

1. MAXWELL DENKLEMİ :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

(1.4.23)

şekline bürünür. Burada \mathbf{E} ile elektrik alan vektörüne; \mathbf{P} ile birim hacim başına elektrik çiftkutup momenti vektörü demek olan **polârizasyon vektörüne**; ρ ile yük yoğunluğuna ve \mathbf{D} ile de **yerdeğiştirme akımı vektörüne** işaret edilmektedir. (1.4.22) vazları çerçevesi içinde (1.4.18) ve (1.4.19) aracılığıyla

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \int \left\{ \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \right\} d^3\mathbf{r}' \quad (1.4.24)$$

olduğu görülmektedir.

Deneyler ve gözlemler \mathbf{P} polârizasyon vektörünün genellikle \mathbf{E} elektrik alan şiddetinin lineer bir fonksiyonu olduğu telkin etmektedir. Eğer göz önüne alınan ortam eşyönlü olmayan (*anizotrop*) bir ortam ise bu takdirde, \mathfrak{K}_e ile ortamın 2. mertebeden simetrik **elektrik duyarlılık tansörünü** göstererek,

$$\mathbf{P} = \mathfrak{K}_e \mathbf{E} \quad (1.4.25)$$

yazılır. Ortamın eşyönlü (*izotrop*) olması hâlinde, χ_e ile ortamın **elektriksel duyarlılık sâbitini** göstererek,

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad (1.4.26)$$

olur. Buna göre eşyönlü bir ortam için

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad , \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad (1.4.27)$$

olacaktır. ϵ a ortamın **dielektrik sâbiti** adı verilir. $\epsilon = 1$ olması hâlinde ortama yalnızca **dielektrik** denilir. Eğer ortam eşyönlü bir ortam değilse bu takdirde, \mathfrak{I} ile birim tansörü göstererek,

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{I} + 4\pi\mathfrak{K}_e \quad (1.4.28)$$

bağıntısı ortamın dielektrik tansörünü tanımlar.

Eğer dielektrik yalnızca eşyönlü olmayıp bir de birbiçim ise, bu takdirde dielektrik sâbiti \mathbf{r} ye bağlı olmaz ve (1.4.23) de

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (1.4.29)$$

ifâdesine müncer olur. Böyle bir ortamda bütün elektrostatik problemleri, verilmiş olan yüklerin $1/\epsilon$ çarpanıyla indirgenmiş olması şartıyla, boşluk için câri olan problemlere indirgenmiş olur.

(1.5) BIOT-SAVART KANUNU VE MAGNETOSTATİK

1819 da OERSTED, ilk defa, içinden elektrik akımı geçen tellerin civarında bir magnetik alanın oluştuğunu ve bu alanın söz konusu tellerin yanına bırakılan pusula ibreleri üzerinde bir kuvvet uygulayarak yönlerini değiştirdiğini gözlemiştir. Telin içinde hareket eden bir q yükünün oluşturduğu **magnetik alanın şiddeti** (ya da hâlâ kullanılan bir deyimle **magnetik indüksiyon vektörü**) \mathbf{B} vektörü ile gösterilir ve bu, magnetik alanın bir test tâneciği üzerinde icrâ ettiği

$$\mathbf{K}_m = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (1.5.1)$$

LORENTZ kuvveti aracılığıyla tanımlanır. \mathbf{v} ile q nun hız vektörü gösterilmektedir. Ancak hemen vurgulamak gerekir ki \mathbf{K}_m aracılığıyla \mathbf{B} yi tâyin etmek için tek bir ölçüm yeterli değildir; gerçekten de (1.5.1) in \mathbf{B} ye göre çözümünün, k keyfî bir parametreyi göstermek üzere,

$$\mathbf{B} = \frac{c}{q} \frac{\mathbf{K}_m \times \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} + k\mathbf{v} \quad (1.5.2)$$

şeklinde yazılacağını, bu ifâdeyi (1.5.1) e yerleştirmek sûretiyle görmek çok kolaydır. Bu çözüm k gibi keyfî bir parametre ihtivâ ettiğine göre \mathbf{B} yi tâyin etmek için en az iki ölçüm gerekecektir. Bunun için, $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ olmak üzere, birbirine dik yönde hareket eden q elektrik yüklerinin her birinin oluşturduğu \mathbf{B} alanında aynı bir noktadaki \mathbf{K}_1 ve \mathbf{K}_2 kuvvetleri ölçülecek olursa (1.5.2) den

$$\mathbf{B} = \frac{c}{q} \frac{\mathbf{K}_1 \times \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2} + k_1 \mathbf{v}_1 \quad (1.5.3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{c}{q} \frac{\mathbf{K}_2 \times \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|^2} + k_2 \mathbf{v}_2$$

yazılabilir. Bu ifâdelerin \mathbf{v}_1 ile skaler çarpımı alınır ve $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ olduğu da göz önünde bulundurulursa

$$k_1 = \frac{c}{q} \frac{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{K}_2 \times \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1|^2 \cdot |\mathbf{v}_2|^2},$$

ve k_1 parametresinin bu değerini (1.5.3) e yerleştirerek de

$$\mathbf{B} = \frac{c}{q} \frac{\mathbf{K}_1 \times \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2} + \frac{c}{q} \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{K}_2 \times \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1|^2 \cdot |\mathbf{v}_2|^2} \right) \mathbf{v}_1 \quad (1.5.4)$$

bulunarak böylece iki ölçüm aracılığıyla \mathbf{B} nin tesbit edilebileceği de gösterilmiş olur.

Şimdi içinden elektrik akımı geçen bir iletken göz önüne alalım. İletkenin dik kesitini A ile, \mathbf{v} hızıyla A ya dik doğrultuda akan q yüklerinin birim hacim başına adedini N ile, ve iletkenin \mathbf{v} nin yönüne paralel seçilmiş olan yay elemanını da ds ile göstererek; ds üzerine tesir eden $d\mathbf{K}$ kuvveti için, (1.5.1) e göre,

$$d\mathbf{K} = NqA \left| ds \right| \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B},$$

ya da \mathbf{v} ile ds nin paralel olmaları dolayısıyla

$$d\mathbf{K} = NqA \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right| ds \times \mathbf{B} = I \frac{ds \times \mathbf{B}}{c} \quad (1.5.5)$$

bulunur. Burada $I = NqA |\mathbf{v}|$ toplam elektrik akımını göstermektedir. Ayrıca

$$j = Nq |\mathbf{v}| \quad \text{ve} \quad \mathbf{J} = Nq \mathbf{v} \quad (1.5.6)$$

diye bir **akım yoğunluğu** tanımlanırsa A dik kesitini haiz çizgisel bir iletken için

$$I = jA \quad (1.5.7)$$

da yazılabilir. Eğer keyfî bir A yüzeyi göz önüne alınırsa bunun normal birim vektörü \mathbf{n} olmak üzere A dan geçen toplam elektrik akımı da

$$I = \int_{(A)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \quad (1.5.8)$$

ifâdesiyle verilecektir. Eğer A bir V hacmini çevreleyen kapalı bir yüzey ise elektrik yüklerinin korunum ilkesine göre V de hiç bir elektrik yükü yaratılıp yok olmayacağına göre I , ancak V deki toplam yükün zamana göre azalış oranına eşit olmalıdır:

$$I = \int_{(A)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\mathbf{r} \quad (1.5.9)$$

ya da GAUSS integral teoremine göre ilk integrali, V üzerinden alınmış bir hacim integraline dönüştürerek neticede

SÜREKLİLİK DENKLEMİ :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0} \quad (1.5.10)$$

elde edilir.

Akım yoğunluğu vektörü (1.5.6) ile tanımlandığına göre bir $dV = d^3\mathbf{r}$ hacim elemanındaki elektrik akımı dolayısıyla ortaya çıkacak olan $d\mathbf{K}$ kuvvetinin de (1.5.5) e benzer şekilde

$$d\mathbf{K} = \frac{1}{c} \mathbf{J} dV \times \mathbf{B} \quad (1.5.11)$$

şeklinde ifade edileceği aşîkârdır. Buradan

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{r} \quad (1.5.12)$$

bulunur.

BİOT ve *SAVART* 1820 de, ve birkaç sene sonra da *AMPÈRE*, çok hassas deneylerle \mathbf{B} magnetik alan vektörünün akım yoğunluğu vektörüne bağıllığının ifâdesini tesbit etmişlerdir. Çağdaş matematik notasyonuyla bu

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (1.5.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifâdeden de açıkça görüldüğü üzere \mathbf{B} nin sıfırdan farklı oluşu yalnızca elektrik akımının var oluşuna bağılı bulunmaktadır. Bu gözlem, magnetik alanın kaynakları olarak magnetik yüklerin mevcûd olmadığını; yâni elektrik alan için bulmuş olduğumuz (1.2.8) bağıntısına benzer bir bağıntının burada söz konusu olamayacağını telkin etmektedir. Bunun gerçek olup olmadığını tesbit etmek için önce (1.5.13) ün

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1.5.14)$$

şeklinde de yazılabileceğine dikkati çekelim. Nitekim

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) \equiv (\nabla u) \times \mathbf{A} + u(\nabla \times \mathbf{A})$$

özdeşliğinden yararlanarak (1.5.14) in (1.5.13) e özdeş olduğu kolayca görülür. Şimdi (1.5.14) in her iki yanının da diverjansını alırsak, vektörel kutu çarpımının özelliğinden derhâl,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right\} = 0$$

olduğu görülür. Şu hâlde

2. MAXWELL DENKLEMİ :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

(1.5.15)

dir.

Şimdi bir de \mathbf{B} nin rotasyonelini hesaplayalım. Bunun için (1.5.14) den, ve $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ özdeşliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c} \nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' - \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

olur. Ancak,

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= -\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

olduğunu da göz önünde tutarak (1.5.16) ifadesi

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.5.17)$$

ya da sağ yandaki birinci terim

$$\alpha = \mathbf{J}(\mathbf{r}'), \quad d\beta = \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}', \quad d\alpha = d\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

$$\beta = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \int \alpha \cdot d\beta = \alpha \cdot \beta - \int \beta \cdot d\alpha$$

vaz ederek kısmî integrasyonla

$$\begin{aligned} -\nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' &= -\nabla \left\{ -\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} + \\ &+ \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) + \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right] + \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \\ &= \nabla \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

bulunur. Bu sonuç (1.5.17) ye yerleştirilirse

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (1.5.19)$$

bulunur. Ancak, zamana bağılı olmayan olaylar göz önüne alınırsa (1.5.10) süreklilik denkleminde göre

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$$

olacağından, yâni $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ şeklindeki **magnetostatik alan** söz konusu olduğunda, (1.5.19) denklemi

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.5.20)$$

ye indirgenmiş olur.

Elektrostatikte $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ nun integral şeklinin (1.2.9) ile verilmiş olan GAUSS kaanûnu olduğunu görmüştük. Şimdi de magnetostatikte (1.5.20) ye tekaabül eden integral ifâdesini tesis etmek üzere bu ifâdeyi kapalı bir (C) eğrisiyle sınırlanmış açık bir (A) yüzeyi üzerinden integre edelim:

$$\int_{(A)} \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{4\pi}{c} \int_{(A)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA$$

ve elde edilen bu ifâdeye, (1.5.8) i de göz önünde tutarak, STOKES teoremini uygulayalım; bu takdirde

$$\oint_{(C)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi I}{c} \quad (1.5.21)$$

ifâdesi elde edilir ki bu da magnetik alan vektörünün kapalı bir (C) eğrisi içinden akısının, (C) yi kateden toplam elektrik akımının 4π katı olduğunu ifâde eden AMPÈRE kaanûnundan başka bir şey değildir.

(1.6) VEKTÖREL POTANSİYEL KAVRAMI

Statik (durağan) magnetik alanların temel denklemleri olarak geçen paragrafta

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (1.6.1)$$

ifâdeleri tesis edilmişti. Şimdi mesele, bu denklemlerden hareketle $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ magnetik alan vektörünü belirlemektir. Bunun için, (1.6.1) deki ilk denklem dolaylı-

sıyla $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ nin daima $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ gibi bir vektörün rotasyoneli olarak yazılabileceğine işâret edelim. Gerçekten de

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \text{ ise: } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

dır. Şu hâlde

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})} \quad (1.6.2)$$

dir. Böylece tanımlanan $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ye **vektörel potansiyel** adı verilir. Öte yandan (1.5.14) den

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

yazıldığından (1.6.2) yi gerçekleyecek olan $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektörel potansiyelinin genel şekli olarak, $\Psi = \Psi(\mathbf{r})$ ile skaler bir fonksiyonu göstererek,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \nabla \Psi(\mathbf{r}) \quad (1.6.3)$$

yazılabilir; yâni belirli bir \mathbf{B} magnetik alan vektörü için \mathbf{A} vektörel potansiyeli ancak keyfî bir Ψ skaler fonksiyonunun gradyenti yaklaşıklığıyla belirlenebilmektedir; başka bir deyişle \mathbf{A} vektörel potansiyelinin

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \Psi \quad (1.6.4)$$

gibi bir dönüşüme tâbî tutulması \mathbf{B} magnetik alan vektörünü etkilemeyecektir. (1.6.4) şeklindeki bir dönüşüme bir **âyâr dönüşümü** adı verilir.

(1.6.2) ile ithâl olunan vektörel potansiyel, bir vektör alanı tanımlamaktadır. Ancak, bir vektör alanı, alan vektörünün diverjansı ve rotasyoneli bilindiği vakit eksiksiz tasvir olunmuş olur. \mathbf{A} nın skaler bir Ψ fonksiyonunun gradyenti yaklaşıklığıyla tâyin edilebilmesindeki serbestlik bize $\nabla \cdot \mathbf{A}$ için işimize yarayacak uygun bir fonksiyonel şekil kabul etmemiz için gerekli serbestliği sağlayacaktır.

Şimdi eğer (1.6.2) yi (1.6.1) in ikinci denklemine yerleştirirsek

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.6.5)$$

bulunur. Eğer yukarıda sözü edilen serbestliği

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv 0 \quad (1.6.6)$$

olacak şekilde kullanırsak (1.6.5) artık

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r})} \quad (1.6.7)$$

şekline girer ki bu da vektörel potansiyelin her kartezyen bileşeninin bir POISSON denklemini gerçekleyeceğini göstermektedir.

\mathbf{A} vektörel potansiyelinin (1.6.7) denklemini gerçekleyen ifadesi tıpkı elektostatikte (1.3.10) u gerçekleyen skaler potansiyelin (1.3.9) ile verilmiş olan ifadesine benzer şekilde

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \quad (1.6.8)$$

olarak bulunur; yâni, böylece, $\Psi = 0$ vaz edilmesi gerektiği ortaya çıkmış olur. Bu $\Psi = 0$ şartının nasıl anlaşılması gerektiğini aydınlatmak üzere önce (1.6.3) den hareketle $\nabla \cdot \mathbf{A}$ yı teşkil edelim. Buna göre sağ yandaki ilk terimin integrantı

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)$$

olur. Öte yandan, statik alanlar için $\text{div } \mathbf{J} = 0$ olduğunu da göz önünde tutarak,

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) &= \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \\ &= -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = +\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son bağıntı ile (1.5.18) ile verilmiş olan hesap da göz önünde bulundurulursa, (1.6.6) şartından da yararlanarak

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \int_{\text{butun uzay}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' + \nabla^2 \Psi = -\frac{1}{c} \int_{\text{butun uzay}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' + \\ &+ \nabla^2 \Psi = \frac{1}{c} \int_{\text{butun uzay}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' + \nabla^2 \Psi = 0 + \nabla^2 \Psi, \quad (\text{div } \mathbf{J} = 0), \end{aligned}$$

yâni tüm uzay için $\nabla^2 \Psi \equiv 0$ olması gerektiği bulunur. Oysa $\nabla^2 \Psi \equiv 0$ denkleminin tüm uzay için geçerli olabilmesi ancak $\Psi \equiv 0$ olmasıyla mümkün olduğu bilinmektedir ki zâten bu da aradığımız sonuçtur.

(1.7) MAKROSKOPİK MAGNETOSTATİĞİN İLKELERİ

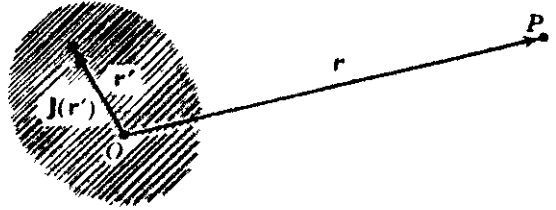
Şimdi \mathbf{B} magnetik alanını türeten \mathbf{A} vektörel potansiyelini belirli bir yaklaşımla hesaplayabilmek üzere \mathbf{A} nın (1.6.8) ile verilmiş ifâdesindeki integrantta $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ yü seriye açalım. Bu takdirde

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} + \dots$$

ve \mathbf{A} nın, $i = 1,2,3$ olmak üzere, herhangi bir bileşeni de

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{c|\mathbf{r}|} \int j_i(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{r}}{c|\mathbf{r}|^3} \cdot \int j_i(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' + \dots \quad (1.7.1)$$

olur. Bu seriye açılımdaki ilk terime tekkutup (*monopol*), ikinci terime çiftkutup (*dipol*), ilh... denir.



Şekil : 1.4.

Zamana bağlı olmayan bir $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ akımı söz konusu olduğundan $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ dır. Bu itibarla V' üzerinden $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ nün integrali de

$$\nabla' \cdot \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = 0$$

yazılabilesinden ötürü sıfırdır. Bu, bu teori çerçevesi içinde, magnetik tekkutup olamayacağını kanıtıdır.

Şimdi, (1.7.1) deki çiftkutup terimiyle sınırlandırılmış olan yaklaşımla yetinebilmek için bu terimi hesaplamaya çalışalım. Bunun için bu çiftkutup teriminin

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}' = \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^3 j_i \mathbf{e}_i$$

vazederek

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \int_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' = \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|\mathbf{r}|^3} \int_{V'} j_i x_j' dV' \quad (1.7.2)$$

yazılabileceğine dikkati çekelim. Buradan

$$x_j' j_i = \frac{1}{2} (x_j' j_i + x_i' j_j) + \frac{1}{2} (x_j' j_i - x_i' j_j) \quad (1.7.3)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$\nabla' \cdot (x_i' x_j' \mathbf{J}) \equiv (x_i' x_j') \nabla' \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla' (x_i' x_j')$$

özdeşliğini göz önüne alırsak buradan da

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot (x_i' x_j' \mathbf{J}) - (x_i' x_j') \nabla' \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{J} \cdot \nabla' (x_i' x_j') = \mathbf{J} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (x_i' x_j')}{\partial x_k'} \mathbf{e}_k \right\} = \\ &= \mathbf{J} \cdot \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\partial x_i'}{\partial x_k'} x_j' + x_i' \frac{\partial x_j'}{\partial x_k'} \right\} \mathbf{e}_k = \mathbf{J} \cdot \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} x_j' + x_i' \delta_{jk}) \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{J} \cdot (x_j' \mathbf{e}_i + x_i' \mathbf{e}_j) = x_j' j_i + x_i' j_j \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

bulunur. (1.7.4) eğer (1.7.3) e ve bu da (1.7.2) ye yerleştirilerek V' üzerinden integral alınır (1.7.4) ifâdesinin V' üzerinden integralinden dolayı ortaya çıkan terimlerin katkılarının sıfır olduğu kolaylıkla görülür. Nitekim, bir kere $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$ olması dolayısıyla (1.7.4) ün sol yanındaki ikinci terim sıfırdır; ayrıca ilk terim de (1.5.9) dan yararlanarak ve, akım ile yük dağılımının zamana bağlı olmadığını göz önünde bulundurarak

$$\int_{V'} \nabla' \cdot (x_i' x_j' \mathbf{J}) dV' = \int_A x_i' x_j' \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{V'} x_i' x_j' \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' = 0$$

olacaktır. Buna göre ve ayrıca da

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right)$$

olduğuna da dikkat ederek \mathbf{A} nın ifâdesi (1.7.1) ve (1.7.3) e göre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2c} \frac{x_j \mathbf{e}_j}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \int_{V'} (x_j' j_i - j_j x_i') \mathbf{e}_i dV' \\ &= -\frac{1}{2c} \int_{V'} \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \left[\mathbf{r}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \right] - \mathbf{r}' \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \right] \right\} dV' \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

bulunur. Ancak,

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|} \right) &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} \nabla \cdot [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] + \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \times \left\{ \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right\} \right] = \\ &= 0 + \left[\mathbf{r}' \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \right\} - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left\{ \mathbf{r}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \right\} \right]\end{aligned}\quad (1.7.6)$$

olduğundan bu sonucun ışığı altında (1.7.5)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \nabla \times \frac{\frac{1}{2c} [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}' = \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \times \frac{1}{2c} \int_{V'} \{\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')\} d^3\mathbf{r}' \quad (1.7.7)$$

şekline girer. Eğer

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_{V'} \{\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')\} d^3\mathbf{r}' \quad (1.7.8)$$

ile \mathbf{J} akım yoğunluğunun *magnetik momenti* gösterilirse bu takdirde çiftkutup yaklaşımında ve magnetostatik alan için \mathbf{A} vektörel potansiyelinin ifadesi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (1.7.9)$$

ifâdesine indirgenmiş olur.

Maddî bir ortamda oluşan \mathbf{B} magnetik alanını hesaplamak için böyle bir ortamın haiz olduğu \mathbf{A} vektörel potansiyelini tesbit etmek ve sonra da $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ bağıntısı aracılığıyla \mathbf{B} yi hesaplamak mâkûl görülmektedir. Ancak maddî bir ortam atomlardan oluşmuş olup bunların içindeki elektronlar da çok çabuk dalgalanmalar gösteren atomsal akım yoğunluklarının ortaya çıkmasına sebep olurlar. Ayrıca bu elektronlar zâtî magnetik momentlere de sâhiptirler. Bu magnetik momentler de atomsal boyutlarda küçümsenmeyecek değişimler arzeden çiftkutup alanlarının doğuşuna yol açarlar. Bütün bunların makroskopik ölçekte kendilerini nasıl gösterdiklerini hesaplamak tıpkı elektrostatikte yapmış olduğumuza benzer ortalama alma işlemi aracılığıyla mümkündür. Bunun için maddî bir ortamdaki toplam akımın

1) yüklerin naklini temsil eden \mathbf{J} iletim akım yoğunluğu ile

2) atomların ya da moleküllerin içinde dolaşan yükleri temsil eden \mathbf{J}_a atomsal akım yoğunluğundan ibâret olduğunu ve bütün akımların yol açtığı \mathbf{a} mikroskopik vektörel potansiyelinin de

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1.7.10)$$

ifâdesiyle verileceğini varsayıyoruz.

Merkezinin yervektörünü \mathbf{r}_j ile göstereceğimiz j -ninci molekülün \mathbf{r} noktasındaki vektörel potansiyeli (1.7.9) dolayısıyla

$$\mathbf{a}_{\text{mol},j}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}_{\text{mol}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (1.7.11)$$

olacaktır; \mathbf{m}_{mol} ile molekülün toplam magnetik momenti gösterilmektedir. Buna göre, N ile birim hacim başına molekül sayısını ve

$$\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m}_{\text{mol}} \rangle \quad (1.7.12)$$

ile de birim hacim başına magnetik moment diye tanımlanabilecek olan makroskopik **miknatıslaşma vektörünü** gösterirsek §(1.4) dekine benzer bir ortalama alma işlemi sonucu maddi bir ortama tekaabül eden makroskopik vektörel potansiyelin ifâdesi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (1.7.13)$$

şekline girmiş olur. (1.7.13) deki ikinci terimi önce

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' \quad (1.7.14)$$

şekline dönüştürelim. Ayrıca

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) \equiv \nabla u \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A}$$

özdeşliğinden yararlanarak (1.7.14)

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' = \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' - \int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}'$$

şekline girer. Bu son hacim integrali ise

$$\int_V \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' = \int_{(A)} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA'$$

gibi bir yüzey integraline dönüştürülür. Ancak, eğer \mathbf{M} matematiksel açıdan iyi davranan bir fonksiyon ise ve ayrıca sonlu bir hacim içinde kalıyorsa bu hacmin dış yüzeyinde sıfır olacağından

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') + c [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1.7.15)$$

olur. Buradan rotasyonel olarak \mathbf{B} yi hesaplırsak, §(1.5) deki işlemlere benzer işlemlerden sonra

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + 4\pi \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.7.16)$$

bulunur; ya da

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}} \quad (1.7.17)$$

diye yeni bir vektör tanımlanırsa (1.7.16) ifâdesi

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r})} \quad (1.7.18)$$

şeklini alır. Bu, \mathbf{H} vektörü (1.7.17) ile tanımlanmış olmak üzere, bir $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ stasyonær akım yoğunluğunun maddî bir ortamda hâsıl ettiği magnetostatik alanın denklemdir.

Çoğu kere eşyönlü ve birbiçim cisimlerde \mathbf{M} ile \mathbf{H} birbirlerine paralel olurlar. Bu takdirde χ_m ile **magnetik duyarlılık katsayısını** göstermek üzere

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

yazılabilir. Bu takdirde de

$$1 + 4\pi \chi_m = \mu$$

vaz etmek sûretiyle (1.7.17) den

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

yazılabilir. μ ye **magnetik geçirgenlik katsayısı** adı verilir. Eşyönlü ve birbiçim olmayan cisimler için μ bir tansördür.

Şimdi, eğer göz önüne alınan akım yoğunluğu vektörü zamanın da bir fonksiyonu ise ne olacağını araştıralım. Bunun için (1.5.10) ile verilmiş olan süreklilik denklemleri ile ve (1.7.18) ifâdelerini birlikte göz önüne alalım:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned} \right\} \quad (1.7.19)$$

Son denklemden

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J}$$

olması gerekir ki bu (1.7.19) un ilk denklemiyle tutarlı bir sonuç değildir. Bu tutarsızlık, ilk iki denklemden ρ yu eleyerek

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.7.20)$$

yazılabileceğine işâret etmek, ve (1.7.19) un son denklemini de zamana bağlı hâl için yazarken sağ yanda

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad (1.7.21)$$

vaz etmekle ortadan kaldırılabilir:

$$3. \text{ MAXWELL DENKLEMİ: } \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad (1.7.22)$$

Nitekim bu denklemin her iki yanının da diverjansı alınırsa sol yanın özdeş olarak sıfır olmasına karşılık sağ yan da (1.7.20) dolayısıyla özdeş olarak sıfır olur. Ayrıca, statik problemleri için (1.7.22) gene (1.7.18) e indirgenir.

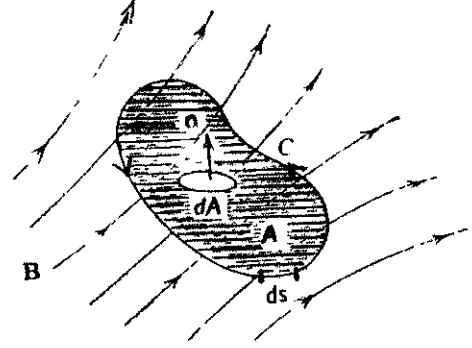
Zamana bağlı elektromagnetik olayları tasvir etmede (1.7.22) nin aranan doğru ifâde olduğu, zamana bağlı olarak değişen alanlarda (1.7.22) ye dayanarak teorik olarak öngörülen olayların yapılan gözlem ve deneylere uygun düşmesiyle kanıtlanmıştır.

(1.8) FARADAY'ın İNDÜKSİYON KANUNU

Elektrik ve magnetik alanların zamana bağlı değişimleri ile ilgili ilk deneyler FARADAY tarafından 1831 de gerçekleştirilmiştir. FARADAY bir elektrik devresinde sürekli bir akım tesis edildiğinde ya da içinden sürekli bir elektrik akımı geçen bir devredeki akım kesildiğinde bunun yakınındaki bir devrede de bir akım oluştuğunu; içinden sürekli bir akım geçen bir devre bir diğerine doğru hareket ettiğinde bu sonucunda gene bir akım oluştuğunu; ve nihâyet bir devrenin ortasına bir miknatıs sokulup çıkarıldığında devrede gene bir akım oluştuğunu tesbit etmiştir. FARADAY bu şekilde oluşan *indüklenmiş elektrik akımına* devreyi etkileyen magnetik alan değişiminin sebep olduğunu, ya da başka bir deyimle magnetik alanın devrenin yüzeyinden geçen akısının zamana göre değişiminin devrede bir *elektromotor kuvvet* oluşturduğunu kabul etmiştir. Bu yoruma göre ve GAUSS birimleri cinsinden

$$-\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_{(c)} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.8.1)$$

olur. STOKES teoremi aracılığıyla sağ yandaki integrali bir yüzey integraline dönüştürerek ve integral altında türev alma kuralını uygulayarak



Şekil : 1.5.

$$-\frac{1}{c} \int_{(A)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{(A)} \{ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \} \cdot \mathbf{n} dA$$

bulunur. Bu ifade (A) yüzeyi ne olursa olsun geçerli olacağından

4. MAXWELL DENKLEMİ:
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.8.2)$$

ifadesi ile edilir.

(1.9) MAXWELL DENKLEMLERİ

Geçen paragraflarda elde etmiş olduğumuz (1.4.23), (1.5.15), (1.7.22) ve (1.8.2) denklemleri elektromagnetik teoremin temeli olan MAXWELL denklemlerini oluştururlar :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

Optik dâhil bütün elektromagnetik olayların izahını elde edebilmek için bu şema (1.5.10) ile verilmiş olan

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.9.2)$$

sürekli denklemler ile \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} ve \mathbf{J} arasındaki şu fenomenolojik bağıntılarla da tamamlanmalıdır:

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{OHM kaanunu}) \end{array} \quad (1.9.3)$$

(σ : iletkenlik katsayısı). Ve nihâyet bütün bu denklemlere kütleli, yüklü tâneçiklerin elektrik ve magnetik alanlarda mâruz kalacakları kuvvetin ifâdesini de ilâve etmek gerekir:

$$\mathbf{K} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) . \quad (1.9.4)$$

(1.9.1) MAXWELL denklemlerinin ilk ikisi elektrik alanın diverjansı ile rotasyonelinin, son ikisi de magnetik alanın diverjansı ile rotasyonelinin ifâdesini oluşturmaktadırlar. Eğer bu iki çift denklem birbirlerinden bağımsız olsalardı o zaman elektrik ve magnetik alanları belirlemek çok kolaylaşırdı; çünkü bilindiği gibi vektörel bir alan, alanı tasvir eden fonksiyonun diverjansı ile rotasyonelinin verilmesiyle tamamiyle belirlenmiş olur. Ancak, MAXWELL denklemleri kuple bir diferansiyel denklem sistemi oluşturduklarından bunların çözümleri her zaman kolay değildir. Bunların çözümlerine ilişkin yöntemlere ileride değineceğiz.

Bu arada (1.9.3) ile verilmiş olan fenomenolojik bağıntılara da kısaca değinmek istiyoruz. Daha önce de söylemiş olduğumuz gibi, statik alanların hüküm sürdüğü eşyönlü ve birbiçim ortamlar söz konusu olduğunda ϵ dielektrik sâbiti ile μ magnetik geçirgenliği yalnızca sayılardan ibârettir; aynı husus σ iletkenlik katsayısı için de geçerlidir. Göz önüne alınan ortamların eşyönlü olmamaları ya da birbiçim olmamaları hâlinde bunlar karşımıza tansörel operatörler olarak çıkarlar. Eğer statik değil de zamanın periyodik fonksiyonu olarak değışen alanlar söz konusu ise bu takdirde \mathbf{F} ile \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} ve \mathbf{J} vektörlerinden herhangi birini göstererek

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

olur; ayrıca da

$$\epsilon = \epsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega), \quad \sigma = \sigma(\omega)$$

şeklinde olurlar ve

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon(\omega) = \epsilon, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \mu(\omega) = \mu, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(\omega) = \sigma$$

olur.

MAXWELL denklemlerinden çıkartılacak olan ilginç sonuçlardan birisi de birbiçim ve eşyönlü iletkenlerle ilgilidir; bunu tesis etmek üzere (1.9.2) süreklilik denkleminin (1.9.3) fenomenolojik denklemlerini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho$$

$$\rho + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \Rightarrow \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) e^{-\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} t} \quad (1.9.5)$$

bulunur; yâni eşyönlü ve birbiçim bir iletkende yük yoğunluğu $T = \epsilon/4\pi\sigma$ gibi bir rölâksasyon zamanıyla sifıra gitmektedir. Buna göre böyle bir iletken içinde elektrik alanı da olmayacaktır: $\mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$.

Bundan sonra MAXWELL denklemlerinin uygulamalarının çoğunda, bunların boşluktaki (yâni $\epsilon_{\text{boş}} = 1$ ve $\mu_{\text{boş}} = 1$ için) ifâdeleri olan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.9.6)$$

ifâdelerinden yararlanacağız.

(1.10) MAXWELL DENKLEMLERİYLE İLGİLİ BAZI SINIR ŞARTLARI

Bu paragrafta, farklı özelliklere sâhip iki ortamın arayüzeyinde \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} ve \mathbf{H} vektörlerinin sürekliliklerini incelemek istiyoruz. Bunun için, Şekil: 1.6 daki gibi, ϵ_1 ve ϵ_2 gibi farklı iki dielektrik sâbitine sâhip iki ortamın (P) arakesit yüzeyi üzerinde ΔS dik kesitli, h yükseklikli silindirik bir ΔV hacmi tasarlayalım.

Bu silindire GAUSS kaanûnunu uygulayacak olursak

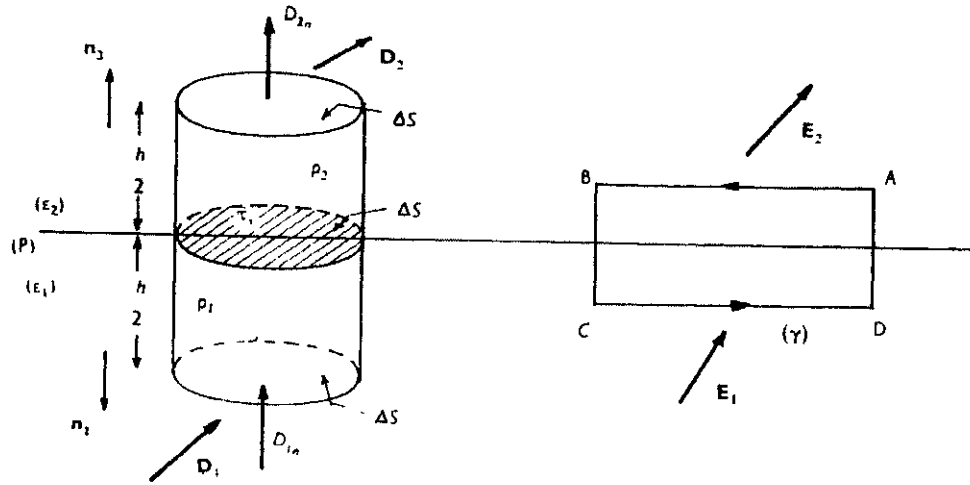
$$\iiint_{\Delta V} \rho_{\text{top}} dV = \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \iint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.10.1)$$

yazılır. ρ_{top} ile ΔV deki toplam yük gösterilmektedir; bu yük üç kısımdan oluşur: 1) 1 numaralı ortama ait ρ_1 yük yoğunluğunun katkısından, 2) 2 numaralı ortama ait ρ_2 yük yoğunluğunun katkısından, ve 3) ΔV ile (P) arayüzeyinin arakesiti üzerindeki τ_s yüzeysel yük yoğunluğunun katkısından. Buna göre (1.10.1)

$$4\pi \left[\tau_s \Delta S + (\rho_1 + \rho_2) \frac{1}{2} h \Delta S \right] = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S + (\text{yan yüzeyden ileri gelen katkı}) = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + (\text{yan yüzeyin katkısı})$$

olur. $h \rightarrow 0$ için limitte bu ifade, n indisiyle n_2 boyunca alınan bileşenleri göstererek

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \tau_s \quad (I.10.2)$$



Şekil: I.6

bulunur. Eğer her iki dielektriğin arayüzeyinde serbest yüzey yükü mevcûd değilse, (I.10.2) den, \mathbf{D} nin (P) de sürekli olarak değişeceği yâni hiç bir değer atlaması arz etmeyeceği anlaşılmaktadır.

Öte yandan \mathbf{E} elektrik alanının korunumlu bir alan olması hâsibiyle de Şekil: I.6 da (γ) ile gösterilen kapalı ABCD eğrisi boyunca \mathbf{E} nin çizgisel integrali, yâni *sirkülasyonu*, sıfır olacaktır. AD ve BC yi sıfıra götürerek sonunda, s ile de (P) ye teğet birim vektörü göstererek,

$$0 = \oint_{(\gamma)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{s} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{s}$$

olur. $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{s} = E_{1t}$ ve $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{s} = E_{2t}$ yâni \mathbf{E} nin ortamlarda, (P) arayüzeyine teğet bileşenleri olduğundan netice itibariyle

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (I.10.3)$$

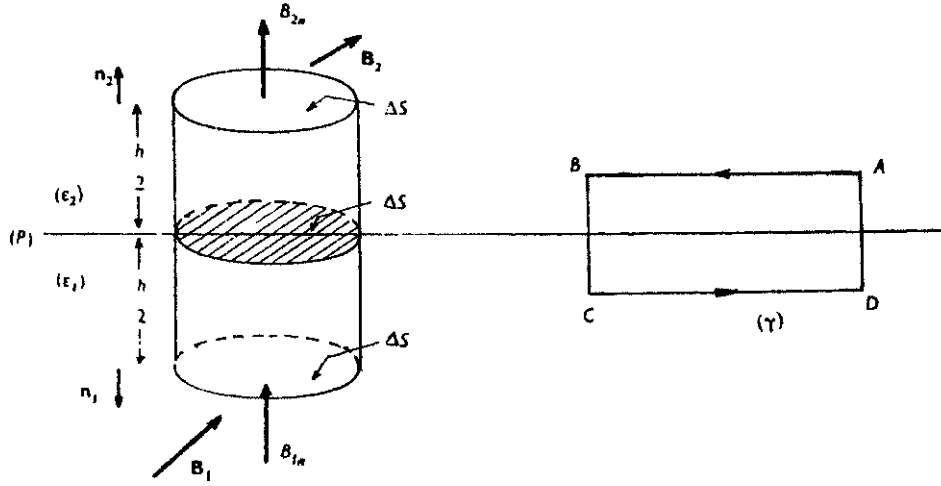
yâni elektrik alan vektörünün teğetsel bileşenlerinin ortamların arayüzeyinde sürekli olduğu belirlenmiş olur.

Eğer ortamlardan biri, meselâ 1 numaralısı, bir iletken ise §(1.9) da tesbit etmiş olduğumuz gibi $\mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1 = 0$ olacağından böyle bir ortamın bir ikinci fakat iletken olmayan ortamları arakesit yüzeyinde

$$D_{2n} = \tau_s, \quad E_{2t} = 0 \quad (1.10.4)$$

olacaktır.

Şimdi de \mathbf{B} ve \mathbf{H} vektörlerinin farklı iki ortamın arayüzeyindeki sürekliliklerini incelemek üzere Şekil : 1.7 yi göz önüne alalım.



Şekil : 1.7

Manyetik alan söz konusu olduğunda $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ olduğundan GAUSS teoremine göre

$$0 = \iiint \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \iint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.10.5)$$

ya da

$$0 = (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1) \Delta S + (\text{yan yüzeyden ileri gelen katkı})$$

olur ; ancak, $h \rightarrow 0$ için yan yüzey de ve bunun katkısı da sıfır olacağından, sonuçta

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

ya da

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \quad (1.10.6)$$

olduğu, yani \mathbf{B} nin arayüze normal bileşeninin arayüzeyde sürekli olduğu anlaşılıyor.

Öte yandan Şekil : I.7 deki $(\gamma) = ABCD$ kapalı dikdörtgen çevresini göz önünde tutarsak \mathbf{H} için, STOKES teoremi dolayısıyla ve (S) ile de (γ) nın sınırladığı keyfî bir yüzeyi göstererek,

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(S)} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{(S)} \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (I.10.7)$$

olur. Limitte yâni $A \rightarrow D$ ve $B \rightarrow C$ için (γ) nın oluşturduğu (S) yüzeyi de sifıra gidecek ve dolayısıyla (I.10.7) nin sağ yanı da sıfır olacaktır. Sonuçta, buna göre,

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{s} = 0$$

yâni

$$\boxed{H_{1t} = H_{2t}} \quad (I.10.8)$$

olduğu, yâni \mathbf{H} nın arayüzeğe teğet bileşeninin arayüzey üzerinde sürekli olduğu belirlenmiş olur.

Şimdi (I.9.6) denklemlerinin ikincisini göz önüne alarak gene aynı (γ) kapalı çevresi için

$$-\frac{1}{c} \iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{(S)} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{(\gamma)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (I.10.9)$$

yazılabilir. Limitte yâni $A \rightarrow D$ ve $B \rightarrow C$ için (γ) nın oluşturduğu (S) yüzeyi de sifıra gidecek ve dolayısıyla (I.10.9) un sol yanı da sıfır olacaktır. Sonuçta, buna göre,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{s} = 0$$

yâni

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

olduğu yâni $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ gibi zamana bağılı hâl için dahi, tıpkı statik hâlde olduğu gibi, \mathbf{E} nin arayüzeğe teğet bileşeninin arayüzey üzerinde sürekli olduğu anlaşılabilir.

Benzer düşüncelerle ve $\dot{\tau}_s = d\tau_s/dt$ olmak üzere akım yoğunluk vektörünün arayüzeğe normal bileşeninin de

$$J_{2n} - J_{1n} = 4\pi \dot{\tau}_s$$

(I.10.10)

gibi bir süreksizlik arz edeceği kolaylıkla gösterilir. Eğer arayüzeysel yük zamana göre değişmezse bu takdirde (I.10.10) dan elektrik akım yoğunluk vektörünün arayüzeyde sürekli olacağı anlaşılmaktadır.

II. BÖLÜM

ELEKTROMAGNETİK ALAN VE LAGRANGE FORMALİZMİ

(II.1) DALGA YAYILIM DENKLEMLERİ

Birbiçim ve eşyönlü maddî ortamlar ya da boşluk söz konusu olduğunda (yâni ϵ , μ ve σ nın skaler olmaları hâlinde), MAXWELL denklemlerinden hareketle yalnızca tek bir alan değişkenine bağlı ikinci mertebeden kısmî türevli lineer diferansiyel denklemler elde etmek mümkündür. (I.9.1) ve (I.9.2) denklemlerini göz önünde bulundurarak

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

veyâ

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

ifâdesi elde edilir. Uzayın yük bulunmayan ($\rho = 0$) bölgeleri göz önüne alındığında $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ olacağından, yüklerin dışında kalan bölgeler için, ve dolayısıyla iletkenler için de,

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (II.1.1)$$

denklemini geçerli olur. Buna, genel homogen dalga denklemi adı verilir. Bu denklemin sağ yanındaki ilk terimin yer değiştirme akımının varlığından ileri gelmekte olduğu kolaylıkla görülebilir. Pratikte bu terimlerin biri ya da öteki, çoğu kere, ihmâl edilebilecek kadar küçük olur. Bu terimlerin büyüklükleri ve dolayısıyla da arz ettikleri önem de, alanın zamanla değişimine ve bir de ortamın özelliklerine bağlı olur. Nitekim meselâ, \mathbf{E} nin

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t}$$

gibi zamanın harmonik olarak değişen bir fonksiyonu olduğu kabul edilirse (II.1.1) denkleminde $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ için

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(1 + \frac{4\pi\sigma i}{\varepsilon\omega}\right) \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

ifadesi elde edilir. Saf metaller söz konusu olduğunda $T = \varepsilon/4\pi\sigma$ rölaksasyon zamanı 10^{-14} saniye mertebesindedir. Bu itibarla, optik bölgeye tekaabül edenlerden daha düşük $\nu = 2\pi\omega$ frekansları için $1 \ll |4\pi\sigma i/\varepsilon\omega|$ olur ve bunun sonucu olarak da (II.1.1) diferansiyel denklemi, yalnızca, ısı iletimi denklemine benzeyen

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad (\text{II.1.2})$$

şekline indirgenmiş olur. Yalıtkan ortamlar ve özellikle boşluk söz konusu olduğunda da, yâni $\sigma = 0$ için, (II.1.1) denklemi

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}} \quad (\text{II.1.3})$$

şeklindeki homogen dalga denklemine indirgenir. Bu, uzayda yüklerin dışında kalan bölgelerde $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ elektrik alan vektörünün $v = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$ hızıyla yayılan bir dalga gibi yorumlanabilmesini mümkün kılmaktadır.

Aynı şartlar altında $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ magnetik alan vektörü için de, benzer şekilde,

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}} \quad (\text{II.1.4})$$

homogen dalga denklemi elde edilir. Bu da, gene, uzayda yüklerin ve iletim akımlarının dışında kalan bölgelerde $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ magnetik alan vektörünün aynı $v = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$ hızıyla yayılan bir dalga gibi yorumlanabilmesini mümkün kılar.

Boşluk söz konusu olduğunda $\mu = \varepsilon = 1$ olduğundan $v = c = \text{ışık hızı}$ olur. Zâten MAXWELL de dalgalar hâlinde yayılan görünen ışığın aslında elektromagnetik kökenli bir dalgasal hareket olması gerektiğine, bu sonuçlara dayanarak, hükmetmiştir.

(II.1.3) ve (II.1.4) denklemlerini birbirlerinden bağımsız olarak çözenin her zaman bir anlamı yoktur; çünkü genel hâlde \mathbf{E} ve \mathbf{B} alanları MAXWELL denklemleri aracılığıyla birbirlerine bağlı bulunmaktadır.

Şimdi

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ile tanımlanan *D'ALEMBERT* operatörü ithâl edilecek olursa boşluk için **E** ve **B** nin gerçekledikleri dalga denklemleri, kısaca,

$$\square^2 \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \square^2 \mathbf{B} = 0 \quad (II.1.5)$$

şeklinde yazılacaktır. Bunlara homogen dalga denklemleri adı verilir.

(II.1.5) dalga denklemleri yük ve iletim akımı ihtivâ etmeyen bölgeler için geçerli olduklarından, elektromagnetik alan ile bunun oluşumuna yol açan kaynaklar arasındaki ilişkiyi yansıtmamaktadırlar. Elektromagnetik alanın kökenini de tasvir edebilmek için, dış etkenlerce üretilen elektrik yüklerinin ve iletim akımının varlığını da göz önünde bulundurmamak gereklidir. Bunu gerçekleştirebilmek için ise elektromagnetik alanın potansiyel fonksiyonlarından hareket etmek en uygun yoldur.

Elektrostatik alan söz konusu olduğunda bunun korunumlu bir alan olduğunu ve $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ alan vektörünün $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ gibi skaler bir fonksiyonun gradyenti olarak ifade edilebileceğini §(I.3) de göstermiştik; buna göre

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (II.1.6)$$

yazılabiliyordu. Ayrıca **B** magnetik alanının da

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (II.1.7)$$

gibi bir **A** vektörel potansiyelinden türetilebileceğini göstermiştik. Şimdi hem **r** yervektörünün ve hem de *t* zamanının fonksiyonları olan alan büyüklüklerinin gerçekledikleri *MAXWELL* denklemleri yerine elektromagnetik alanı yalnızca $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ skaler potansiyel fonksiyonu ile $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektörel potansiyel fonksiyonu aracılığıyla tasvir etmeğe kalkışırsak Φ den türeyen $\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)$ ile $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektörel fonksiyon çiftini göz önünde bulundurmamak çok daha uygun düşecektir; zirâ vektörel bir alan, alanı tasvir eden vektörel fonksiyonun diverjansı ile rotasyonelinin verilmiş olmalarıyla tamâmen belirlenmiş olur. $\nabla \Phi$ nin rotasyoneli zâten tanımı gereği belli ve özdeş olarak sıfırdır:

$$\nabla \times \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \equiv 0. \quad (II.1.8)$$

Geriye, **A** ve $\nabla \Phi$ alanlarının tamâmen belirlenmiş olmaları için $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi$ ile $\nabla \cdot \mathbf{A}$ nın belirlenmesi kalmaktadır. Bunun için (I.9.6) *MAXWELL* denklemlerinin ikincisini ve (II.1.7) tanımını göz önüne alırsak, bu takdirde

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

yâni

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

olur. Bu ifâdenin \mathbf{E} ve \mathbf{A} ne olursa olsun gerçekleştirilebilmesi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad (\text{II.1.9})$$

olmasına bağlıdır. (II.1.9) ifâdesi böylece (II.1.6) nın \mathbf{E} nin zamana bağlı hâle teşmilini oluşturmakta ve statik alan söz konusu olduğunda gene (II.1.6) ya indirgenmektedir. Boş uzay için $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ olduğu göz önünde tutulursa (II.1.9) un her iki yanının diverjansının alınmasıyla $\nabla \cdot (\nabla \Phi)$ yâni $\nabla^2 \Phi$ ifâdesi de elde edilecektir; böylece

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) \quad (\text{II.1.10})$$

bulunur; bu, $\nabla \Phi(\mathbf{r},t)$ nin diverjansının ifâdesidir. Öte yandan (I.9.6) MAXWELL denklemlerinin sonuncusunu, (II.1.7) tanımını da göz önünde tutarak, yeniden yazacak olursak

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (\text{II.1.11})$$

olur. D'ALEMBERT operatöründen yararlanarak (II.1.10) ve (II.1.11) yeniden düzenlenirse, bu sefer de,

$$\square^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -4\pi\rho \quad (\text{II.1.12})$$

$$\square^2 \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (\text{II.1.13})$$

ifâdeleri bulunur. Eğer \mathbf{A} vektörel potansiyeli, diverjansı

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad (\text{II.1.14})$$

olacak şekilde tanımlanırsa hem $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ alanı rotasyoneli (II.1.7), ve diverjansı da (II.1.14) ile verilmiş olmakla tümüyle belirlenmiş olur; ve hem de (II.1.12) ve (II.1.13) denklemleri

$$\square^2 \Phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t) \quad (II.1.15)$$

$$\square^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (II.1.16)$$

şekline indirgenmiş olurlar. Bu denklemlere sağ yanlı (ya da homogen olmayan) dalga denklemleri veyâhut da *D'ALEMBERT* denklemleri adı verilir. (II.1.14) şartı statik hâl için bulmuş olduğumuz (I.6.6) şartının zamanla değişen alanlara teşmil edilmiş şekli olup **LORENTZ şartı** adını taşır.

Boş uzay için geçerli olan (I.9.6) *MAXWELL* denklemleri takımına eşdeğer bir denklem takımı bulmak üzere elektromagnetik potansiyellerden hareket edildiğinde Φ skaler potansiyelinin gradyenti ile \mathbf{A} vektörel potansiyelinin bu iş için uygun olacaklarını görmüş bulunmaktayız. Önceden de muhtelif vesilelerle ifâde etmiş olduğumuz gibi vektörel bir alan, bunu tasvir eden vektörün diverjansı ile rotasyonelinin verilmiş olmasıyla belirlenmiş olur. Nitekim *MAXWELL* denklemleri de elektrik alan vektörü ile magnetik alan vektörünün diverjansları ile rotasyonellerinin ifâdelerinden başka bir şey değildir. Şimdi, $\text{grad } \Phi$ nin diverjansını veren (II.1.10), rotasyonelini veren (II.1.8); \mathbf{A} nin diverjansını veren (II.1.7) denklemlerini birlikte yazarsak

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -4\pi\rho - \frac{1}{c} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla \times \nabla \Phi &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (II.1.17)$$

denklemleri (II.1.15) ve (II.1.16) ile birlikte (I.9.6) *MAXWELL* denklemlerinin eşdeğeri olurlar.

(II.1.15) ve (II.1.16) nin çözümlerini elde ettikten sonra (II.1.7) ve (II.1.9) aracılığıyla $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ve $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ alanları da tesbit edilir. Bu alanlar, Ψ ile bir skaler fonksiyon gösterilmek üzere,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) \\ \Phi'(\mathbf{r}, t) &= \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (II.1.18)$$

şeklindeki *âyâr dönüşümlerine* nazaran invaryanttır. Ancak *LORENTZ şartının* da *âyâr dönüşümlerine* nazaran invaryant kalabilmesi için, (II.1.14) ve (II.1.18) ifâdelerine binâen

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \square^2 \Psi$$

olacağından, Ψ nin

$$\square^2 \Psi \equiv 0$$

şartını gerçekleyen bir fonksiyon olması gerektiği görülür.

Statik alanlar söz konusu olduğunda karşımıza çıkan (I.3.10) ve (I.6.7) gibi POISSON denklemleri (II.1.5) gibi dalga denklemleri ve (II.1.15) ve (II.1.16) gibi D'ALEMBERT denklemleri her ne kadar ikinci mertebeden kısmî türevli lineer denklemlerse de bunlar, matematik açısından, birinci mertebeden kısmî türevler ihtivâ eden lineer MAXWELL denklemlerinden çok daha basittirler ve bunların genel çözümlerini çok daha kolay bir şekilde elde etmek mümkündür. Bundan ötürü de elektromagnetik alanın özelliklerini araştırmada olduğu kadar pek çok somut problemi çözerken de potansiyel fonksiyonlarından yararlanmak alanlar teorisinin temel matematiksel yöntemini teşkil eden çok uygun bir yaklaşımdır. Bu itibarla biz de ileride pek çok somut problemin çözümünde dalga denkleminde, ve aşağıda §(II.2) de formel çözümünü vereceğimiz D'ALEMBERT denklemlerinin çözümlerinden yararlanacağız.

(II.2) D'ALEMBERT DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Şimdi zamana bağlı olarak değişen, ya da başka bir görüş açısıyla yaklaşıldığında keyfî hareket hâlinde bulunan, bir yük sistemi tasarlayalım. Bunların, içinde bulunmakta oldukları meselâ V gibi bir hacimdeki dağılımları ve hareketleri $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ elektrik yük yoğunluğu fonksiyonu ve $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ elektrik akım yoğunluğu ile tasvir olunacaktır. Gerek $\rho(\mathbf{r}, t)$, gerekse $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ nin $-\infty < t < \infty$ aralığında tanımlanmış olduklarını varsayacağız. Bu takdirde

$$\left. \begin{aligned} \square^2 \Phi(\mathbf{r}, t) &= -4\pi \rho(\mathbf{r}, t) \\ \square^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (II.2.1)$$

denklemler sistemi elektromagnetik potansiyellerin \mathbf{r} ve t ye göre değişim ve yayılmalarını temin edeceklerdir. Ancak bu diferansiyel denklemler sistemini çözebilmek, yâni $\rho(\mathbf{r}, t)$ ve $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ verilmiş fonksiyonlar olmak şartıyla $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ve $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ yi $\rho(\mathbf{r}, t)$ ve $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ nin tek değerli fonksiyonları olarak belirlemek için problemin başlangıç şartları ile sınır şartlarının da verilmiş olmaları gereklidir. Bunun için genellikle belirli bir $t = 0$ ânından önce (yâni bütün $t < 0$ için) yüklerin sükûnette

oldukları ve ancak $t = 0$ ânında harekete geçerek elektromagnetik alanda bir değişme ya da pertürbasyona sebep olmuş olmaları kabul edilir. Buna göre

$$t \leq 0 \text{ için : } \rho(\mathbf{r},0) = 0, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r},t) = 0 \quad (\text{II.2.2})$$

vaz edilir. Buna göre başlangıç ânı olan $t = 0$ ânında elektrik ve magnetik alan vektörleri de sıfır olacak:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},0) = 0, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \quad (\text{II.2.3})$$

ve potansiyel fonksiyonları için başlangıç şartları da

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},0) = 0, \quad \Phi(\mathbf{r},t) = 0, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0 \quad (\text{II.2.4})$$

şeklinde olacaklardır. Gerçekten de eğer potansiyel fonksiyonları için (II.2.4) başlangıç şartları geçerli ise, alan vektörlerinin potansiyellerin fonksiyonu olarak tanımlarından alan vektörlerinin de $t = 0$ için sıfır olacakları kolayca görülür.

Yük ve akım dağılımlarının bulunduğu V hacminin dışında çok uzak mesafelerde ise alan potansiyellerinin

$$\left. \begin{array}{l} |r| \rightarrow \infty \text{ ve } 0 \leq t \leq \infty \text{ için } \Phi \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \\ |r| \rightarrow \infty \text{ ve } 0 \leq t \leq \infty \text{ için } |\mathbf{A}| \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \end{array} \right\} \quad (\text{II.2.5})$$

den daha yavaş olmamak üzere sifira gittikleri de **sınır şartları** olarak vaz olunur.

Şimdi gerek $\Phi(\mathbf{r},t)$ nin gerekse $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ nin bileşenlerinin aynı türden bir D'ALEMBERT diferansiyel denklemini gerçekleediklerini göz önünde bulundurarak Φ ve A_x, A_y, A_z yerine $\Psi(\mathbf{r},t)$ ve, ρ ya da $j_x/c, j_y/c, j_z/c$ in yerlerine de $f(\mathbf{r},t)$ vaz ederek, genel bir şekilde,

$$\square^2 \Psi(\mathbf{r},t) = -4\pi f(\mathbf{r},t)$$

yâni

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\mathbf{r},t) = -4\pi f(\mathbf{r},t). \quad (\text{II.2.6})$$

denkleminin çözümünü inşa etmeğe çalışacağız. (II.2.6) denklemini GREEN fonksiyonu ya da FOURIER integral dönüşümü yöntemleriyle de çözmek mümkünse de biz burada daha çok vektörel analiz yöntemlerinden yararlanan bir çözüm tarzını sunmak istiyoruz. Önce hesaplarımızda kullanacağımız birkaç ara sonuç üzerinde duralım. Bilindiği gibi u skaler bir fonksiyon ve \mathbf{a} da vektörel bir fonksiyon olduklarında

$$\nabla \cdot (ua) = u \nabla \cdot a + (\nabla u) \cdot a \quad (II.2.7)$$

dır. Eğer

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i R_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i (x_i - x_i') \\ R &= |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - x_k')^2} \end{aligned} \right\} \quad (II.2.8)$$

vaz edilirse (II.2.7) de $u = 1/R$ ve $\mathbf{a} = \mathbf{R}$ almak sûretiyle

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\nabla \cdot \mathbf{R}) + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{R} = \frac{3}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{2}{R} \quad (II.2.9)$$

olacaktır. Şimdi zaman üzerinde

$$t = \tau + \frac{R}{c} \Rightarrow \tau = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (II.2.10)$$

dönüşümünü yapalım. Buna göre (t) li alt indislerle t nin, ve (τ) lu alt indislerle de τ un sâbit tutulmaları şartıyla alınacak olan türevlere işâret ederek, ve kolaylık olsun diye yalnızca kartezyen koordinatları göz önünde tutarak,

$$\nabla_{(t)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(t)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(\tau)} + \frac{\partial t}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(\tau)} \right] \quad (II.2.11)$$

olur. Öte yandan

$$\frac{\partial t}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\tau + \frac{1}{c} \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - x_k')^2} \right] = \frac{1}{c} \frac{(x_i - x_i')}{R}$$

olduğundan (II.2.11), (II.2.8) e binâen de

$$\nabla_{(t)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(\tau)} + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{(x_i - x_i')}{R} = \nabla_{(\tau)} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial t}$$

olur. Buradan da $\nabla_{(t)}^2$ yi hesaplarsak, (II.2.9) u da göz önünde tutarak,

$$\nabla_{(t)}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\nabla_{(\tau)} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left(\nabla_{(\tau)} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial t} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{(\tau)}^2 + 2\nabla_{(\tau)} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{R}}{R} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \\
&= \nabla_{(\tau)}^2 + \frac{2}{R} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \nabla_{(\tau)} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (II.2.12)
\end{aligned}$$

bulunur.

(II.2.10) dönüşümü altında (II.2.6) D'ALEMBERT denklemi

$$\left(\nabla_{(\tau)}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi \left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c} \right) = -4\pi f \left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c} \right) \quad (II.2.13)$$

şekline girer. (II.2.12) ve (II.2.13) den, ayrıca $\partial^2/\partial t^2 = \partial^2/\partial \tau^2$ olduğu da göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla_{(\tau)}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi \left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c} \right) = -4\pi f \left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c} \right) = \\
&= \left[\nabla_{(\tau)}^2 + \frac{2}{R} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \nabla_{(\tau)} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \Psi \left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c} \right) = \\
&= R \nabla_{(\tau)} \cdot \left[\frac{1}{R} \nabla_{(\tau)} - \left(\nabla_{(\tau)} \frac{1}{R} \right) + \frac{2\mathbf{R}}{R^2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi \left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c} \right) \quad (II.2.14)
\end{aligned}$$

ifâdesi elde edilir.

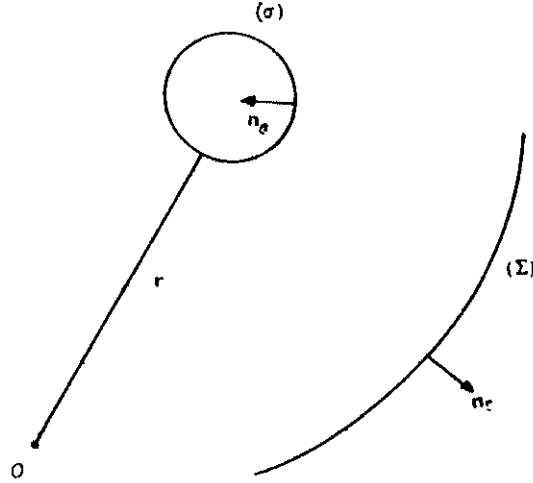
Şimdi $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ifâdesinde $\mathbf{r}' \Leftrightarrow \mathbf{r}$ dönüşümü yaparak kaynak noktasını \mathbf{r}' ve alanda ölçüm ya da gözlem yapılan noktayı da \mathbf{r} ile göstereyim. Buna göre artık $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ve $|\mathbf{R}| = R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ olacaktır. Artık $\nabla_{(\tau)}$ yerine de kısaca ∇' yazacağız. Buna göre (II.2.14) den

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla' \cdot \left[\frac{1}{R} \nabla' \Psi - \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \Psi + \frac{2\mathbf{R}}{R^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] = \frac{f \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} \quad (II.2.15)$$

ifâdesi elde edilir. Şimdi bu ifâdeyi \mathbf{r} yi çevreleyen küçük (γ) küresi ile daha büyük çaplı (Γ) küresi üzerinde kalan hacim üzerinden integre edelim. Buna GAUSS integral teoremini uygulayarak sol yandaki hacim integralleri hacimleri sınırlandıran kapalı yüzeyler üzerinden alınmış integrallere dönüştürülebilir. Buna göre:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4\pi} \iint_{(\sigma)} \left[\frac{1}{R} \nabla' \Psi - \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \Psi + \frac{2\mathbf{R}}{R^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}_\sigma dS = \iiint_{V'} \frac{f \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} dV' + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} \left[\frac{1}{R} \nabla' \Psi - \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \Psi + \frac{2\mathbf{R}}{R^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS \quad (II.2.16)
\end{aligned}$$

ya da $\mathbf{n}_\sigma = -\mathbf{n}_\Sigma$ olduğunu göz önünde tutar ve $(\sigma) \rightarrow 0$ yâni $|\mathbf{R}| \rightarrow 0$ limitini alırsak, ve (σ) nın kapsadığı hacim içinde Ψ , $\partial\Psi/\partial n_\sigma$ ve $\partial\Psi/\partial t$ nin $R \rightarrow 0$ limitinde sâbitler olacaklarını göz önünde tutarsak



Şekil: II.1

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow 0} \iint_{(\sigma)} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial n_\sigma} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_\sigma}{R^2} \Psi + \frac{2}{R} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{n}_\sigma \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dS = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial n_\sigma} 4\pi R^2 + \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 \Psi + \frac{4\pi R^2}{cR} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = \\
 & = \lim_{R \rightarrow 0} \Psi \left(\mathbf{r}, t - \frac{R}{c} \right) = \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (II.2.17)
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathbf{R}/R = -\mathbf{n}_\sigma$ olduğu da göz önünde bulundurulmuştur. Buna göre (II.2.16) ve (II.2.17) den

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{V'} \frac{f\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} \left[\frac{1}{R} \nabla' \Psi - \left(\nabla' \cdot \frac{1}{R} \right) \Psi + \frac{2\mathbf{R}}{R^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS$$

bulunur.

Eğer bütün uzay göz önüne alınırsa, yâni $R \rightarrow \infty$ limiti için, sağ yandaki ikinci terimin sifira gideceği âşikârdır. Buna göre (II.2.1) denklemlerinin çözümleri de

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.18})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.19})$$

olur. Bu çözümler Φ ve \mathbf{A} alanlarının kaynak terimleri olan ρ ve \mathbf{J} nin göz önüne alınan alanın t ânında ölçüldüğü \mathbf{r} noktasına ne tür katkıda bulduklarını ortaya koymaktadır. Buna göre t ânında \mathbf{r} noktasında ölçülen bir alanın değeri, aslında, t den önce $t - (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ ânında \mathbf{r} noktasındaki kaynakların tüm katkılarının toplamı olarak karşımıza çıkmaktadır. $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ kaynak ile ölçüm noktası arasındaki uzaklık ve c de, (II.1.5) dalga denklemlerinin de göstermiş olduğu gibi, yayılım hızı olduğuna göre kaynağın \mathbf{r} ölçüm noktası üzerindeki etkisinin \mathbf{r} deki ölçümün yapıldığı andan $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ saniye önce kaynağı terketmiş ve sonlu c hızıyla yayılarak ancak t ânında ölçüm noktasında kendisini hissettirmiş olduğu anlaşılmaktadır. Bundan ötürü (II.2.18) ve (II.2.19) denklemleriyle verilmiş olan ifâdelere **gecikmiş potansiyeller** adı verilir ve hesaplarda her sefer ρ ve \mathbf{J} nin argümentleri için $\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)$ yazmamak için bu ifâdeler

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{[\rho]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.18}')$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{J}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (\text{II.2.19}')$$

notasyonu da yazılırlar.

Statik hâl söz konusu olduğunda (II.2.18) in(I.3.9) a ve (II.2.19) un da (I.6.8) e indirgenmiş olacağına da dikkati çekelim.

(II.3) İLERLEMİŞ POTANSİYELLER SORUNU

§(II.2) de (II.2.1) ile verilen D'ALEMBERT denklemlerini çözmek üzere (II.2.10) daki dönüşüm yerine

$$t = \tau - \frac{R}{c} \Rightarrow \tau = t + \frac{R}{c} \quad (\text{III.3.1})$$

dönüşümü yapılıysaydı, bunu izleyen bütün işlemleri aynen îfa ederek bu sefer de söz konusu denklemlerin ikinci bağımsız çözümleri olarak

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (11.3.2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (11.3.3)$$

ifâdeleri bulunacaktı. Bunlar söz konusu denklemlerin **ilerlemiş potansiyeller** çözümlerini oluştururlar. Eğer *D'ALEMBERT* denklemleri *FOURIER* integral dönüşümü yöntemi ya da *GREEN* fonksiyonları yöntemi aracılığıyla çözülmüş olsaydı denklemlerin hem gecikmiş potansiyel çözümlerini ve hem de ilerlemiş potansiyel çözümlerini bir arada doğal olarak elde etmek mümkün olacaktı.

İlerlemiş potansiyeller söz konusu olduğunda bu, \mathbf{r} noktasında t ânında ölçülen alanın değerininin, kaynağın t ânından sonraki $t + (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ ânındaki değerlerinden etkilenmekte olduğuna delâlet eder ki bu da makroskopik fiziğin **nedensellik ilkesiyle** çelişik bir durum arzeder. Çünkü alanın sebebi kaynaklardır. yâni alan kaynağın sonucudur. İlerlemiş potansiyel sebep-sonuç ilişkisini tersine döndüren ve bu yüzden de makroskopik fiziğin nedensellik ilkesini gerçeklemeyen ve dolayısıyla da fiziksel gerçeğe uymadığından elenmesi gereken bir çözümdür.

Böylelikle, elektromagnetik alan denklemlerinin gecikmiş potansiyeller şeklindeki çözümünü büyük bir anlam ve önemi haizdir. Bu, klâsik mekaniktekinden farklı bir anlamı haiz olup nedensellik bağıntısının mâhiyeti hakkında kesin bir kavram ortaya koymaktadır.

Bilindiği gibi, klâsik mekanik *NEWTON*'un **uzaktan etki** kavramına dayanmaktadır. Meselâ, klâsik mekanikte, maddesel bir noktanın belirli bir anda haiz olduğu ivme o ânında maddesel noktaya tesir etmekte olan kuvvet aracılığıyla tamâmen belirlenmiş bulunur; hâlbuki bu maddesel noktaya tesir eden kuvvet de gözlenen noktadan sonlu uzaklıklarda bulunan diğer başka maddesel noktaların durumuna bağlı bulunur. Bu sonuncu noktalardan yalnız birinin bile durumu, meselâ belirli bir t_0 ânında, değişmiş olsa söz konusu kuvvetin büyüklüğünün de aynı t_0 ânında değişmiş olacağı yâni bu türden bir etkileşmenin aslında uzayda sonsuz bir hızla yayılmış olacağı klâsik mekaniğin temel aksiyomlarından biridir.

Oysa elektromagnetik teoride durum temelinden farklıdır. Eğer alanın ölçüldüğü \mathbf{r} noktasından $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ uzaklığındaki yüklerin konumu değişse \mathbf{r} deki potansiyel ancak $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ zamanı sonra değişmiş olacaktır. Bu zaman, elektromagnetik alanın uğramış olduğu pertürbasyonun $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ uzaklığını c ışık hızına eşit

bir hızla katetmesi için gerekli olan zamandır. Böylelikle elektromagnetik alan-
daki bir pertürbasyon sonsuz bir hızla ânî olarak değil, fakat sonlu bir c hızıyla
bir noktadan hemen onun yanındaki bir noktaya intikaal ederek yayılır. Bu bakı-
dan elektromagnetik pertürbasyonların yayıldığı uzaya, klâsik mekaniğin boş
addedilen uzayının aksine, belirli fiziksel özellikleri haiz bir elektromagnetik a-
lanla dolu gözüyle bakmak daha uygundur. Böylece, klâsik mekanikteki sonsuz
yayılan etkileşmelerin ve uzun menzilli etkilerin yerine, elektromagnetik teoride,
sonlu bir c hızıyla yayılan etkileşmelerden ve kısa menzilli etkilerden söz edi-
lir.

Bununla beraber c ışık hızının çok büyük bir hız olması sebebiyle pratikte,
çok kere, elektromagnetik pertürbasyonların ânî yayıldıklarını kabul etmek bü-
yük hatâlara yol açmayabilmektedir.

(II.4) HERTZ POTANSİYELİ

(II.1.15) ve (II.1.16) ile verilmiş olan sağ yanlı dalga denklemlerinin sağ yanları
birbirlerinden bağımsız olmayıp aslında

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.4.1})$$

süreklilik denklemleriyle birbirlerine bağlı bulunmaktadır. Ancak bu (II.4.1) ba-
ğıntısı, gerek \mathbf{J} nin, gerekse ρ nun aynı bir \mathbf{q} vektöründen türetilebileceğini de
telkin eder mâhiyettedir. Nitekim

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (\text{II.4.2})$$

vaz edildiğinde (II.4.1) özdeş olarak sağlanmaktadır. Öte yandan (II.4.14) ile boşluk
hâli için verilmiş olan

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.4.3})$$

şeklindeki LORENTZ şartı da şeklen (II.4.1) süreklilik denkleminin aynı olduğun-
dan, eğer (II.4.2) ye benzer şekilde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}, \quad \Phi = -\nabla \cdot \mathbf{Z} \quad (\text{II.4.4})$$

vaz edilecek olursa (II.4.3) özdeş olarak sağlandığı gibi gerek \mathbf{A} , gerekse Φ tek
bir \mathbf{Z} vektöründen türetilmiş olur. Buna göre, (II.4.2) ve (II.4.4) den yararlanarak
(II.1.15) ve (II.1.16) denklemleri de

$$\nabla^2(-\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\nabla \cdot \mathbf{Z}) = -4\pi(-\nabla \cdot \mathbf{q})$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$$

ya da

$$\boxed{\square^2 \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)} \quad (II.4.5)$$

olur. Böylece belirlenen $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$ vektörüne **HERTZ vektörü** ya da **HERTZ potansiyeli** adı verilir. (II.4.5) denkleminin fiziksel anlamı haiz çözümü de

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{q}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (II.4.6)$$

şeklinde olacaktır. \mathbf{Z} vektörü bir kere belirlendi miydi bu takdirde \mathbf{E} ve \mathbf{B} de, boşluk için,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

olmaları hasebiyle (II.4.4) aracılığıyla \mathbf{Z} nin fonksiyonu olarak

$$\mathbf{E} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} \quad (II.4.7)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$$

şeklinde ifade olunacaktır.

(II.5) ELEKTROMAGNETİK ALANIN LAGRANGE ve HAMILTON FORMALİZMİ

Klâsik mekaniğin LAGRANGE ve HAMILTON formalizmine göre formülâsyonunu "TEORİK FİZİK DERSLERİ, Cilt 2, KLÂSİK TEORİK MEKANİK" isimli kitabımızın VI-XI. Bölümlerinde ayrıntılarıyla incelemiştik.

Aslına bakılacak olursa, belirli bir denklem takımına varmayı hedef alan bir LAGRANGE fonksiyonunu belirlemek üzere genel bir reçete maalesef yoktur. Ancak pek az sayıdaki hâllerde LAGRANGE fonksiyonunu hemen yazmak mümkün olur; meselâ korunumlu, holonom bir maddesel noktalar sistemi için LAGRANGE

fonksiyonunun sistemin kinetik enerjisiyle potansiyel enerjisi arasındaki fark olduğu bilinmektedir. Bunun dışında *LAGRANGE* fonksiyonunu belirlemek için ancak bazı yapısal özellikler yol gösterici olabilir. Meselâ, L nin, varılmak istenen denklemleri invaryant bırakan dönüşüm grubuna nazaran invaryant olması da yardımcı olur. Fakat L nin belirlenmesi çoğu kere bir tahmin işidir. Bir teori muhakkak bir takım temel denklemlere dayanır. Aynı denklemleri, bunlar bir kere tesis edildikten sonra, bir kere de *LAGRANGE* ya da *HAMILTON* formalizmi aracılığıyla yeniden bulmak, aslında, bu temel denklemlerin muhtevâsına hiç bir yeni şey eklemeyiz ama bu işlemin çoğu kere "daha zarif" olduğu iddia edilir. Bununla beraber *LAGRANGE* fonksiyonu, çok kere, teorinin içerdiği korunum kaanunlarını ve simetrileri incelemek ve teorinin mümkün genelleştirmelerini ilhâm etmek yönünden daha uygundur.

Biz burada bütün elektromagnetik alanın *LAGRANGE* ve *HAMILTON* formalizmiyle yeniden formülasyonunu Klâsik Teorik Mekanik kitabımızda yapmış olduğumuz gibi ayrıntılarıyla ve sistematik bir biçimde yapacak değiliz; bu bir lisan kitabı olarak tasarlanmış olan kitabımızın düzeyini çok aşan bir konudur. Amacımız yalnızca elektromagnetik teorisinin de böyle bir formülasyon çerçevesinde mütâlea edilebileceğine dair ışık tutacak bir giriş sunmaktan ibârettir.

Bunun için önce $\mu = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c \partial t}, \nabla \right) \equiv \vec{\square} \quad (II.5.1)$$

diye tanımlıyacağımız bir 4-lü vektör ithâl edelim. Ayrıca

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (II.5.2)$$

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}) \quad (II.5.3)$$

da sırasıyla 4-lü akım yoğunluğu vektörü ile 4-lü potansiyel vektörünü gösterinler. Buna göre *D'ALEMBERT* operatörü, 4-lü vektörlerin skaler çarpımlarının tanımına uygun olarak, *EİNSTEİN*'in tekrarlanan indisler üzerinden toplam kovansiyonuna da uyarak,

$$\vec{\square} \cdot \vec{\square} = \square^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (II.5.4)$$

yazılır ve;

$$\partial_\nu j^\mu = 0 \quad (II.5.5)$$

süreklilik denklemini,

$$\square^2 A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (II.5.6)$$

ise (II.1.15) ve (II.1.16) denklemlerini gösterir.

Bu tanımlar çerçevesi içinde eğer elektromagnetik alanın L LAGRANGE fonksiyonu A^μ lerin fonksiyonu olarak

$$L = -\frac{1}{8\pi} \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{c} j_\mu A^\mu \quad (II.5.7)$$

şeklinde seçilirse

$$\delta \int L d^4x = 0 \quad (II.5.8)$$

şeklindeki bir varyasyon ilkesinin vereceği

$$\partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} - \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0 \quad (II.5.9)$$

EULER denklemlerinden derhâl

$$\square^2 A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

nün yâni elektromagnetik alanın potansiyeller cinsinden alan denklemlerinin elde edildiği tesbit edilir.

Şimdi de teorinin *HAMILTON* fonksiyonunu bulmak için m kütleli, q yüklü ve elektromagnetik kökenli olmayan bir $U = U(\mathbf{r})$ potansiyel alanından türeyen bir kuvvet ile *LORENTZ* kuvvetinin ortak etkisi altında bulunan bir maddesel noktanın hareket denkleminin

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U + q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (II.5.10)$$

ifâdesi aracılığıyla verileceğine dikkati çekelim. Amacımız, bu denklemin bileşenlerine eşdeğer olacak şekilde

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (II.5.11)$$

bağıntılarıyla belirlenen ve $H = H(x_i, p_i)$ gibi x_i ve p_i kanonik eşlenik değişkenlerin fonksiyonu olan bir fonksiyon tesbit etmektedir.

Eğer elektromagnetik alan olmasaydı böyle bir fonksiyon

$$H_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} p^2 + U(\mathbf{r})$$

şeklinde olacaktı; nitekim

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}, \quad m\ddot{x}_i = \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

dir. Elektromagnetik alan mevcûd olduğunda

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

ile tanımlanmış olan potansiyelleri göz önüne alalım. Bu takdirde aradığımız HA-MİLTON fonksiyonunun

$$H = H_0\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}, \mathbf{r}\right) + q\Phi \quad (\text{II.5.12})$$

olduğunu göreceğiz. Nitekim (II.5.11) e binâen

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \quad (\text{II.5.13})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^3 \frac{1}{m} \left(p_j - \frac{q}{c} A_j \right) \left(-\frac{q}{c} \right) \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.5.14})$$

bulunur. (II.5.13) den

$$p_i = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i \quad (\text{II.5.15})$$

ve (II.5.14) ile (II.4.15) den de

$$m\ddot{x}_i = -\frac{q}{c} \frac{dA_i}{dt} - q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{q}{c} \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad (\text{II.5.16})$$

olur. Ancak

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \quad (\text{II.5.17})$$

olduğundan (II.5.16) ve (II.5.17) den de

$$\ddot{m}x_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q}{c} \sum_{j \neq i}^3 \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j \quad (11.5.18)$$

bulunur ki bu da (11.5.10) un aynısıdır.

III. BÖLÜM

MAXWELL DENKLEMLERİNİN INVARYANS ÖZELLİKLERİ

(III.1) GALİLE DÖNÜŞÜM GRUBU

Klâsik Mekanik'in kaanunlarının, birbirlerine nazaran düzgün doğrusal hareket yapan referans sistemlerinde invaryant olduklarını, yâni şekillerini koruduklarını biliyoruz [bk. A.Y.ÖZEMRE: TEORİK FİZİK DERSLERİ CİLD: 2, KLÂSİK MEKANİK; §(II.4)]. Klâsik Mekanik'in kaanunlarının, formülasyonları bakımından invaryant kaldıkları bu referans sistemlerine *GALİLE referans sistemleri* ya da *eylemsizlik sistemleri* adı verilmektedir. Bu türden (S) ve (S') gibi iki referans sisteminin dik koordinat eksenlerini sırasıyla (x_1, x_2, x_3) ve (x_1', x_2', x_3') diye göstereyim. Ayrıca, meseleyi basitleştirmek üzere $x_1'/x_1, x_2'/x_2, x_3'/x_3$ olduğunu kabul edip (S) nin (S') ye göre izâfi düzgün doğrusal hareketinin doğrultusunun da x_1, x_1' doğrultusunda ve v hızıyla vukuu bulduğunu varsayalım. Buna göre "Galile dönüşüm grubu" denilen dönüşüm denklemlerinin

$$x_1' = x_1 - vt, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad t' = t \quad (III.1.1)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Sonucu denklem ise hem (S) de ve hem de (S') de ölçülen zamanın aynı olduğunu ifâde eden, *NEWTON*'un mutlak zaman kavramının formülasyonundan başka bir şey değildir.

Şimdi insanın aklına: «elektromagnetik teori kaanunları da (III.1.1) *GALİLE* dönüşüm grubuna göre invaryant kalırlar mı?» sorusu takılmaktadır. Eğer gerçekten de elektromagnetik teori kaanunları *GALİLE* dönüşüm grubuna nazaran invaryant kalıyorsa, o zaman en azından, kaynakların dışındaki boş uzayda geçerli olan meselâ $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(x_i, t)$ skaler potansiyelinin gerçeklediği dalga denkleminin şeklinin (S) de

$$\frac{\partial^2 \Phi(x_i, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x_i, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x_i, t)}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(x_i, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (III.1.2)$$

olmasına karşılık, ve (III.1.1) dönüşümü göz önünde tutulduğunda

$$\Phi(x_i, t) = \Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(x_i' + vt', x_2', x_3', t') = \Phi(x_i', t')$$

yazılabileceğinden, (S') de de

$$\frac{\partial^2 \Phi(x_i', t')}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x_i', t')}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x_i', t')}{\partial x_3'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(x_i', t')}{\partial t'^2} = 0 \quad (\text{III.1.3})$$

olması gereklidir. Gene (III.1.1) den yararlanarak, kolaylıkla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i'^2} \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1'^2} \end{aligned} \quad (\text{III.1.5})$$

olduğu bulunur. (III.1.4) ve (III.1.5) ifâdeleri (III.1.2) deki yerlerine konulduğunda ise (S') deki dalga denkleminin ifâdesi olarak

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3'^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = 0 \quad (\text{III.1.6})$$

bulunur ki bunun (III.1.3) den farklı olduğu; yâni (III.1.1) GALİLE dönüşüm grubunun, eylemsizlik sistemlerinde, elektromagnetik teorinin sonucu olan dalga denklemlerinin invaryant kalmalarını emin edemediği oraya çıkmış olmaktadır.

O hâlde acaba birbirlerine nazaran meselâ paralel x_1, x_1' eksenleri doğrultusunda v izafi hızıyla düzgün doğrusal hareket yapan dik eksenli iki referans sisteminde (III.1.2) denklemini invaryant bırakacak olan dönüşüm grubu acaba ne şekilde olacaktır?

(III.2) LORENTZ DÖNÜŞÜM GRUBU

Dalga denklemini eylemsizlik sistemlerinde invaryant bırakan dönüşüm grubunun GALİLE dönüşüm grubu olmadığını gördükten sonra şimdi, aynı türden sistemler söz konusu olduğunda, bu invaryansın nasıl sağlanabileceğini tesbit edebilmek için γ ve $f(x_i, t)$ değer ve şekilleri sonradan tesbit edilecek olan, sırasıyla, bir sâbit ve bir fonksiyon olmak üzere

$$x_1' = \gamma(x - vt), \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad t' = f(x_1, t) \quad (\text{III.2.1})$$

gibi bir dönüşüm grubunun dalga denklemini invaryant kılması için gerekli şartları arayalım.

(III.2.1) den de yararlanarak ve $f_x = \partial f / \partial x_1 = \partial t' / \partial x_1$, $f_t = \partial f / \partial t = \partial t' / \partial t$ vaz ederek, kolaylıkla,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_1} = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} + f_x \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \quad (i = 2, 3) \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i'^2} \quad (i = 2, 3) \quad (\text{III.2.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial t} = f_t \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - v \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1'^2} + 2\gamma f_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1' \partial t'} + f_x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \quad (\text{III.2.3})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = f_t^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - 2v\gamma f_t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1' \partial t'} + v^2 \gamma^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1'^2} \quad (\text{III.2.4})$$

ifâdeleri elde edilir. (III.2-4) ifâdeleri (III.1.2) dalga denklemine yerleştirilirse

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3'^2} + 2\gamma \left(f_x + \frac{v}{c^2} f_t\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \left(f_t^2 - c^2 f_x^2\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = 0 \quad (\text{III.2.5})$$

bulunur. Bu ifâdenin (III.1.3) şeklinde olabilmesi için

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{III.2.6})$$

$$f_x + \frac{v}{c^2} f_t = 0 \quad (\text{III.2.7})$$

$$f_t^2 - c^2 f_x^2 = \frac{c^2}{c'^2} = \alpha^2 \quad (\text{III.2.8})$$

olması gereklidir. (III.2.1) i göz önünde tutarak (III.2.7) den

$$\frac{\partial t'}{\partial x_1} = -\frac{v}{c^2} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

ve (III.2.8) den de

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 = \alpha^2 + c^2 \left(\frac{\partial t'}{\partial x_1}\right)^2$$

bulunur. Bu son iki ifâdeden ise

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 = \alpha^2 + c^2 \left(\frac{\partial t'}{\partial x_1}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{c^2 v^2}{c^4} \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2$$

veyâ

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 = \alpha^2 \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \pm \alpha \gamma \quad (\text{III.2.9})$$

yâni, integral alarak

$$t' = f(x_1, t) = \pm \gamma [\alpha t + g(x_1)] \quad (\text{III.2.10})$$

bulunur. Şimdi (III.2.9) u (III.2.6) ya vaz edip (III.2.8) i de göz önünde tutarak

$$f_x = -\frac{v}{c^2} f_t \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial x_1} = \pm \gamma \frac{dg}{dx_1} = -\frac{v}{c^2} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{v}{c^2} (\pm \alpha \gamma)$$

yâni

$$\frac{dg}{dx_1} = -\frac{v}{c^2} \alpha \Rightarrow g_1(x) = -\alpha \frac{vx_1}{c^2} \quad (\text{III.2.11})$$

bulunur. (III.2.11) i integre ederken ortaya çıkan integrasyon sâbiti, ifâdelerde maksimum basitliği sağlamak üzere, sıfır olarak alınmıştır; zirâ bu integrasyon sâbitinin değerinin söz konusu invaryans üzerinde hiç bir etkisi olmayacaktır.

(III.2.6), (III.2.10) ve (III.2.11) sonuçlarına göre, birbirlerine nazaran paralel $x_1 x_1'$ eksenleri doğrultusunda izafî v hızıyla hareket etmekte olan referans sistemlerinde elektromagnetik teorenin dalga denklemlerini invaryant bırakan dönüşüm takımının, $\alpha = c/c'$ olduğunu da göz önünde tutarak,

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad t' = \frac{\frac{c}{c'} \left(t - \frac{vx_1}{c^2} \right)}{\pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{III.2.12})$$

ile verileceği anlaşılmış olur. Bu dönüşüm formülleri ister (+) lısı isterse (—) lisi olsun dalga denklemini salt matematik açısından invaryant kılmaya yetmektedirler. Ancak konuyu bir de fizik açısından incelemek gereklidir. Bunun için (S) referans sisteminin orijinine ($x = 0$) yerleştirilmiş bir saatin t_1 ve t_2 anlarıyla belirlediği ($t_2 - t_1$) zaman aralığı ile aynı zamanlara tekaabül eden t_1' ve t_2' anlarıyla belirlenen ($t_2' - t_1'$) zaman aralığını (III.2.12) ye binâen inceleyelim. Eğer bu dönüşüm formüllerinde (—) lisini alırsak

$$(t_2' - t_1') = \alpha \gamma (t_1 - t_2)$$

olacak yâni (S) deki zamanın akışı (S') de tersine gözlenecek ve bunun sonucu olarak da, tâbiî, makroskopik fiziğin nedensellik ilkesi (S') de anlamını kaybedecektir; çünkü, eğer (S) de t_1 ânında vukuu bulan bir olay $t_2 (> t_1)$ ânındaki başka bir olayın sebebi ise bu durum (S') deki bir gözlemci tarafından t_2 ânında vukuu bulmuş olan olayın t_1 ânında vukuu bulmuş olandan daha önce gözlenmesine yâni t_2 ânındaki olayın, (S') den bakıldığında, t_1 ânındaki gibi hükmedilmesine yol açacaktır. Bu ise (S') deki gözlemcinin (S) deki olayları, ters yönde sarılarak oynatılan bir sinema şeridindekiler gibi, yâni gelecekte geçmişe doğru, zamanın akış yönü değişmiş olarak izlemesi demektir.

Gerçeği çarpıtan ve nedensellik ilkesine ters düşen bu olanağın, söz konusu invaryansın fiziksel bir anlamı olabilmesi için, elenmesi gereklidir. Buna göre (S) deki (III.1.2) ifâdesinin (S') de de şeklini koruyarak (III.1.3) ifâdesine dönüşmesini sağlayan yegâne dönüşüm takımının

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad t' = \frac{\frac{c}{c'} \left(t - \frac{vx_1}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{III.2.13})$$

şeklinde olması gerektiği anlaşılır.

Ancak 1880 denberi defalarca ve daha ileri teknolojik şartlar altında gerçekleştirilmiş olan ve bugün artık *MICHELSON-MORLEY* deneyi diye bilinen bir deneyin sonucu olarak elektromagnetik bir dalganın boşluktaki yayılma hızının, kendisini yayan kaynağın ya da bu kaynağın bağlı bulunduğu referans sisteminin hızına bağlı olmaksızın, evrensel bir sâbit olduğunu biliyoruz. Bu denel sonuç karşısında (III.1.3) deki c' yerine c yazılması gerekmektedir. Buna göre $\alpha = c/c' = 1$ olacağından dalga denklemini invaryant bırakan dönüşüm takımı da, bu şartlar altında,

$$\begin{aligned}
 x_1' &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 x_2' &= x_2 \\
 x_3' &= x_3 \\
 t &= \frac{t - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \end{aligned}
 \tag{III.2.14}$$

ile verilmiş olacaktır. Buna tekaabül eden ters dönüşümün de

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad t = \frac{t' + \frac{vx_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \tag{III.2.15}$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. (III.2.14) ve bunun ters dönüşümüne *LORENTZ-POINCARÉ-EINSTEIN dönüşüm grubu* adı verilir. Bu dönüşüm takımının $v^2/c^2 \ll 1$ için (III.1.1) *GALİLE* dönüşüm takımına indirgenebileceği kolayca görülmektedir.

Kısaca *LORENTZ* dönüşüm grubu diye de bilinen (III.2.14) ve (III.2.15) dönüşüm denklemlerinin fiziğin, elektromagnetik teori dışında kalan, diğer bölümleri üzerindeki etkisine ve fiziğin tümüne getirdiği yeni kavramlara ve görüş açısına burada değinmeyeceğiz [bk. 1) A.Y.ÖZEMRE: ÇAĞDAŞ FİZİĞE GİRİŞ; 2) E. RIZA , A.Y.ÖZEMRE: TEORİK FİZİK DERSLERİ, Cild 6: ÖZEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİ; 3) A.Y.ÖZEMRE: TEORİK FİZİK DERSLERİ, Cild 7: GRAVİTASYONUN RÖLÂTİVİST TEORİLERİ]; amacımız bu dönüşüm grubuna göre elektromagnetik alan büyüklüklerinin nasıl değişeceklerini tesbit etmektir.

(III.3) ELEKTROMAGNETİK ALAN BÜYÜKLÜKLERİNİN DÖNÜŞÜM KURALLARI

Elektromagnetik alan denklemlerini türeten Φ skaler potansiyeli ile \mathbf{A} vektörel potansiyelinin gerçekledikleri *MAXWELL* denklemlerinin, birbirlerine nazaran düzgün doğrusal hareket icrâ eden referans sistemlerinde şeklen invaryant kalmalarını sağlayan *LORENTZ* dönüşüm grubunu tesis ettikten sonra şimdi *MAXWELL* denklemlerinin

$$(S) \text{ de : } \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho & \text{(III.3.1)} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(III.3.2)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(III.3.3)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{(III.3.4)} \end{cases}$$

şeklini haiz olmalarına paralel olarak, LORENTZ dönüşümüne göre

$$(S') \text{ de : } \begin{cases} \nabla' \cdot \mathbf{D}' = 4\pi\rho' & \text{(III.3.5)} \\ \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} & \text{(III.3.6)} \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 & \text{(III.3.7)} \\ \nabla' \times \mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} & \text{(III.3.8)} \end{cases}$$

şeklinde invaryant bir biçimde ifade edilebilmeleri için alan büyüklüklerinin $(S) \rightarrow (S')$ dönüşümünde nasıl değişeceklerini araştıralım. LORENTZ dönüşümlerine göre

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1'} + \frac{\partial t'}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_1'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x_1'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x_1'} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial t}{\partial x_1'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x_1}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

olduğunu bir kere hatırlattıktan sonra önce, (III.3.3) ü de göz önünde tutarak (III.3.2) nin bileşenleri için

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t'} = -\frac{\gamma}{c} \left[\frac{\partial B_1}{\partial t} + v \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \right] = -\frac{\gamma}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t} + \gamma \frac{v}{c} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right)$$

$$= \gamma \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) + \gamma \frac{v}{c} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right)$$

ya da

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial x_2'} = \frac{\partial}{\partial x_2'} \left[\gamma \left(E_3 + \frac{v}{c} B_2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_3'} \left[\gamma \left(E_2 - \frac{v}{c} B_3 \right) \right] \quad (\text{III.3.9})$$

bulunur; kezâ diğer bileşenler için de

$$\begin{aligned} - \frac{1}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t'} &= - \frac{\gamma}{c} \left[\frac{\partial B_2}{\partial t} + v \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right] = \gamma \left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) - \frac{v}{c} \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right] \\ &= \gamma \frac{\partial E_1}{\partial x_3'} - \gamma^2 \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_1'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_3}{\partial t'} \right) - \gamma^2 \frac{v}{c} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_2}{\partial t'} \right) \end{aligned}$$

ya da

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left[B_2 + \gamma^2 \frac{v}{c^2} E_3 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} B_2 \right] = \gamma \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3'} - \gamma \frac{\partial E_3}{\partial x_1'} - \gamma \frac{v}{c} \frac{\partial B_2}{\partial x_1'} \right)$$

yâni

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_2 + \frac{v}{c^2} E_3 \right) \right] = \frac{\partial E_1}{\partial x_3'} - \frac{\partial}{\partial x_1'} \left[\gamma \left(E_3 + \frac{v}{c} B_2 \right) \right] \quad (\text{III.3.10})$$

ve benzer hesaplarla da

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_1'} \left[\gamma \left(E_2 - \frac{v}{c} B_3 \right) \right] - \frac{\partial E_1}{\partial x_2'} \quad (\text{III.3.11})$$

bulunur. (III.3.9-11) formüllerinin (S') sisteminde (III.3.6) şeklinde ifade edilebilmeleri ancak

$B_1' = B_1$	$E_1' = E_1$	(III.3.12)
$B_2' = \gamma \left(B_2 + \frac{v}{c^2} E_3 \right)$	$E_2' = \gamma \left(E_2 - \frac{v}{c} B_3 \right)$	
$B_3' = \gamma \left(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2 \right)$	$E_3' = \gamma \left(E_3 + \frac{v}{c} B_2 \right)$	

olmasıyla mümkün olacaktır. (S') \rightarrow (S) dönüşümü söz konusu olduğunda da \mathbf{E} ve \mathbf{B} nin bileşenlerinin

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B_1' & E_1 &= E_1' \\
 B_2 &= \gamma \left(B_2' - \frac{v}{c^2} E_3' \right) & E_2 &= \gamma \left(E_2' + \frac{v}{c} B_3' \right) \\
 B_3 &= \gamma \left(B_3' + \frac{v}{c^2} E_2' \right) & E_3 &= \gamma \left(E_3' - \frac{v}{c} B_2' \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.3.13}$$

şeklinde değişecekleri kolaylıkla hesaplanır.

Şimdi (III.3.4) bağıntısının ilk bileşenini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} = \frac{4\pi}{c} j_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial D_1}{\partial t}. \tag{III.3.14}$$

Bu ifade, türevlerin değişim kuralları göz önünde tutularak

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2'} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3'} = \frac{4\pi}{c} j_1 + \frac{\gamma}{c} \left(\frac{\partial D_1}{\partial t'} - v \frac{\partial D_1}{\partial x_1'} \right) \tag{III.3.15}$$

şeklinde de yazılır. Ancak (III.3.1) dolayısıyla

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 4\pi\rho \Rightarrow \gamma \left(\frac{\partial D_1}{\partial x_1'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial D_1}{\partial t'} \right) + \frac{\partial D_2}{\partial x_2'} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3'} = 4\pi\rho$$

olduğundan son ifâdeden $\gamma \cdot \partial D_1 / \partial x_1'$ nün değeri olan

$$\gamma \frac{\partial D_1}{\partial x_1'} = 4\pi\rho - \frac{\partial D_2}{\partial x_2'} - \frac{\partial D_3}{\partial x_3'} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial D_1}{\partial t'}$$

şekilir de bu (III.3.15) e yerleştirilirse

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2'} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3'} = \frac{4\pi}{c} j_1 + \frac{\gamma}{c} \frac{\partial D_1}{\partial t'} - 4\pi \frac{v}{c} \rho + \frac{v}{c} \left(\frac{\partial D_2}{\partial x_2'} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3'} \right) - \gamma \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial D_1}{\partial t'}$$

ve bu ifade de yeni baştan düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial x_2'} \left[\gamma \left(H_3 - \frac{v}{c} D_2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_3'} \left[\gamma \left(H_2 + \frac{v}{c} D_3 \right) \right] = \frac{4\pi}{c} [\gamma (j_1 - v\rho)] + \frac{1}{c} \frac{\partial D_1}{\partial t'} \tag{III.3.16}$$

bulunur. (III.3.14) ün (S') de

$$\frac{\partial H_3'}{\partial x_2'} - \frac{\partial H_2'}{\partial x_3'} = \frac{4\pi}{c} j_1' + \frac{1}{c} \frac{\partial D_1'}{\partial t'}$$

şeklinde invariant kalması için (III.3.16) ifâdesinden

$$\begin{aligned}
 H_3' &= \gamma \left(H_3 - \frac{v}{c} D_2 \right) & D_1' &= D_1 \\
 H_2' &= \gamma \left(H_2 + \frac{v}{c} D_3 \right) & j_1' &= \gamma (j_1 - v\rho)
 \end{aligned}$$

olması gerektiği bulunur.

Benzer işlemler (III.3.4) ün diğer bileşenleri için de tekrarlanacak olursa neticede **D**, **H** ve **J** nin bileşenlerinin

$D_1' = D_1$	$H_1' = H_1$	$j_1' = \gamma (j_1 - v\rho)$
$D_2' = \gamma \left(D_2 - \frac{v}{c^2} H_3 \right)$	$H_2' = \gamma \left(H_2 + \frac{v}{c} D_3 \right)$	$j_2' = j_2$
$D_3' = \gamma \left(D_3 + \frac{v}{c^2} H_2 \right)$	$H_3' = \gamma \left(H_3 - \frac{v}{c} D_2 \right)$	$j_3' = j_3$

(III.3.17)

şeklinde değişmeleri gerektiği bulunur. (S') \rightarrow (S) dönüşümü söz konusu ise bu takdirde de ters dönüşüm formüllerinin

$$\begin{aligned}
 D_1 &= D_1' & H_1 &= H_1' & j_1 &= \gamma (j_1' + v\rho') \\
 D_2 &= \gamma \left(D_2' + \frac{v}{c^2} H_3' \right) & H_2 &= \gamma \left(H_2' - \frac{v}{c} D_3' \right) & j_2 &= j_2' \\
 D_3 &= \gamma \left(D_3' - \frac{v}{c^2} H_2' \right) & H_3 &= \gamma \left(H_3' + \frac{v}{c} D_2' \right) & j_3 &= j_3'
 \end{aligned} \tag{III.3.18}$$

ifâdeleriyle verileceği kolaylıkla tesbit edilir.

Son olarak (S') deki bir gözlemci için (S) deki ρ elektrik yükünün ρ' değerinin nasıl gözleneceğini belirlemek üzere $\nabla \cdot \mathbf{J} + (\partial\rho/\partial t) = 0$ süreklilik denkleminin hareket edeceğimiz. Bu takdirde bu denklem

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial j_1}{\partial x_1'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial j_1}{\partial t'} \right) + \frac{\partial j_2}{\partial x_2'} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3'} + \\
 &\quad + \gamma \left(\frac{\partial \rho}{\partial t'} - v \frac{\partial \rho}{\partial x_1'} \right)
 \end{aligned}$$

ya da (III.3.18) i göz önünde bulundurarak

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} \left[\gamma (j_1 - v\rho) \right] + \frac{\partial j_2}{\partial x_2'} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3'} + \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(\rho - \frac{vj_1}{c^2} \right) \right] = 0$$

olur. Bu ifâdenin (S') de

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = 0$$

a indirgenerek invaryant kalmış olması için

$$j_1' = \gamma (j_1 - v\rho), \quad j_2' = j_2, \quad j_3' = j_3$$

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{vj_1}{c^2} \right)$$

olması gereklidir. Bunlardan ilk üçü zâten daha önce bulmuş olduğumuz (III.3.17) ifâdeleridir. Şu hâlde elektrik yükünün dönüşüm ifâdeleri

$$\boxed{\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{vj_1}{c^2} \right) \quad \text{ve} \quad \rho = \gamma \left(\rho' + \frac{vj_1'}{c^2} \right)} \quad (\text{III.3.19})$$

olur.

Böylelikle, birbirlerine nazaran v izafî hızıyla x_1, x_1' doğrultusunda düzgün doğrusal hareket yapan iki referans sisteminde elektromagnetik teori denklemlerinin şeklen invaryant kalmaları için \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} alan vektörlerinin bileşenleri ile, \mathbf{J} ile ρ kaynak terimlerinin nasıl değişmeleri gerektiğini tümüyle belirlemiş bulunmaktayız.

Bu III. Bölüm, böylece, MAXWELL teorisinin birbirlerine nazaran düzgün doğrusal hareket yapan referans sistemlerindeki elektromagnetik alana ve yüklerle nasıl teşmil edilmesi gerektiği hususunda da bir giriş oluşturmaktadır. Bunun daha ayrıntılı ve formalizm bakımından daha zarif ve tatminkâr bir takdimi TEORİK FİZİK DERSLERİ, Cild: 6: ÖZEL RÖLÂTİVİTE TEORİSİ'nde yer alacaktır.

IV. BÖLÜM

ELEKTROMAGNETİK ALANIN KORUNUM KANUNLARI

(IV.1) ENERJİNİN KORUNUMU

Bilindiği gibi klâsik mekanikte m kütleli maddî bir noktanın üzerine tesir eden bir \mathbf{K} kuvvetinin yaptığı elemanter dW işi, $d\mathbf{r}$ ile \mathbf{K} nın etkisi altında m nin elemanter ötelenmesi gösterilecek olursa, $dW = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$ den ibârettir. Eğer söz konusu olan m kütleli maddî bir nokta değil de belirli bir V hacmine yayılmış $m(\mathbf{r})$ maddî yoğunluk dağılımını haiz bir cisimse, bu takdirde

$$dW = \int_V (\mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}) dV$$

olur. Buradan, bu işin yapılma hızı yâni güç olarak

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (\text{IV.1.1})$$

bulunur. Şimdi biz de $\rho = \rho(\mathbf{r})$ diye sürekli bir yük dağılımı kapsayan sonlu bir V hacminde hüküm süren elektromagnetik bir alan ile tâneçiklerden oluşan kapalı bir sistem için dW/dt yi yâni V hacmindeki serbest elektrik yükünün hareketi dolayısıyla elektromagnetik alana intikaal eden gücü hesaplayalım. LORENTZ kuvvetinin ifâdesini de göz önünde tutarak, (IV.1.1) e ve (I.5.6) ya göre

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int_V (\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} = \int_V \rho \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{v} dV \\ &= \int_V \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dV + \frac{1}{c} \int_V \rho (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \end{aligned} \quad (\text{IV.1.2})$$

olur; zirâ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ vektörü \mathbf{v} ye dik olduğundan 2. integral sıfırdır.

(I.9.1) MAXWELL denklemlerinin sonucusu (IV.1.2) ye yerleştirilecek olursa

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV \quad (\text{IV.1.3})$$

bulunur. Öte yandan (I.9.1) MAXWELL denklemlerinin ikincisinden dolayı

$$-\frac{c}{4\pi} \int_V \mathbf{H} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV \equiv 0 \quad (\text{IV.1.4})$$

yazılabileceği âşikârdır. Eğer (IV.1.4) ü (IV.1.3) e yerleştirir; ve bir yandan

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \equiv \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

vektörel özdeşliği dolayısıyla

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (\text{IV.1.5})$$

yazılabileceğini ve diğer yandan da, eşyönlü bir ortam için $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ve $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ olacağından,

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t} = \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (\text{IV.1.6})$$

yazılabileceğini göz önünde tutarsak, bu şartlar altında (IV.1.3) denklemini

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = -\frac{c}{4\pi} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad (\text{IV.1.7})$$

şekline girer; ya da sağ yandaki ilk integrali, GAUSS teoremi aracılığıyla, V yi kuşatan (A) yüzeyi üzerinden alınmış bir yüzey integraline dönüştürerek

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = -\frac{c}{4\pi} \int_{(A)} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dA - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad (\text{IV.1.8})$$

olur. Eğer V , bütün uzayı kaplayacak şekilde büyütülürse, \mathbf{E} ve \mathbf{H} alan vektörlerinin $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ için $1/|\mathbf{r}|$ den daha çabuk sifira gitmeleri hâlinde, (A) üzerinden alınmış olan integral de (A) nın $|\mathbf{r}|^2$ gibi artması dolayısıyla sifira gidecek ve neticede (IV.1.8) ifâdesi

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \right\} \quad (\text{IV.1.9})$$

den ibâret kalacaktır. (IV.1.9) un sol yanı zaman birimi başına yapılan işi temsil ettiğinden, sağ yanı da şu hâlde gene zaman birimi başına elektromagnetik alanın enerjisinde vukuu bulan azalmayı temsil edecektir. Bu itibarla

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (\text{IV.1.10})$$

ya *elektromagnetik alanın enerji yoğunluğu* adı verilir. Âşikâr olarak bu ifâdede $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/8\pi$ alanın elektriksel enerji yoğunluğu ve $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/8\pi$ de alanın magnetik enerji yoğunluğu olarak yorumlanabilir. Elektromagnetik alanın bir V hacmindaki toplam

$$U = \int_V u dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad (\text{IV.1.11})$$

enerjisinin yüklerin izafî konumları ve hareketleriyle belirlenen büyüklüklere indirgenemeyeceğine ve dolayısıyla etkileşen bir takım tâneciklerin potansiyel enerjileriymiş gibi yorumlanamayacağına dikkati çekelim. Elektromagnetik alanın enerji yoğunluğu uzayın tânecik ve yük ihtivâ etmeyen bölgelerinde dahi sıfırdan farklı olabilmektedir. Elektromagnetik alanın bir enerjiye sâhip olması, yüklü tânecikler arasındaki etkileşmeyi tasvir etmek üzere uydurulmuş hayalî bir matematiksel varlık yâni uygun bir hesap hilesi olmayıp içindeki tânecikler kadar gerçek bir varlığa sâhip olduğunun bir kanıtıdır. Ancak hemen şuna da dikkati çekelim ki klâsik elektrodinamik, yüklerle alan arasındaki sıkı bağıntıyı tatminkâr bir şekilde açıklıyabilmekten âciz kalmaktadır. Alan ile yükler ve tânecikler arasındaki sıkı bağıntılara ışık tutabilen, ancak kitabımızın konusu dışında kalan, **kuvantum elektrodinamiğidir**.

Şimdi

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{IV.1.12})$$

vaz ederek (IV.1.8) i

$$\boxed{\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{(A)} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dV = 0} \quad (\text{IV.1.13})$$

şeklinde de yazabiliriz. Buna göre birinci terim göz önüne alınan kapalı sistemin zaman birimi başına yaptığı işi, ikinci terim ise enerjisindeki artışı göstermektedir.

Şu hâlde son terim de sistemi kuşatan (A) yüzeyinden, zaman birimi başına, dışarı akan enerjiye delâlet edecektir.

(IV.1.12) ile tanımlanmış olan ve hem \mathbf{E} ye hem de \mathbf{H} ya dik olan \mathbf{S} vektörüne **POYNTİNG vektörü** ya da **radasyon vektörü** adı verilir. \mathbf{S} vektörü \mathbf{E} ve \mathbf{H} alan vektörlerine dik doğrultudaki yüzey biriminden zaman birimi başına geçen elektromagnetik enerji akısını göstermektedir.

Eğer (IV.1.13) ile verilmiş olan elektromagnetik alanın enerji korunumu ifâdesini diferansiyel şekliyle yazarsak

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} \right) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (\text{IV.1.14})$$

olur. Bunun, elektrik yükünün korunumunun ifâdesi olan (I.5.10) süreklilik denklemleriyle olan benzerliğine dikkati çekmek istiyoruz. (IV.1.14) ün sol yanı birim hacim başına elektromagnetik alan enerjisindeki (yâni korunan büyüklükteki) değişimi göstermekte; sağ yanı ise birim hacimdeki yüklerin yaptıkları işi ve korunan enerji yoğunluğunun akısının diverjansını göstermektedir.

(IV.2) İMPULSUN KORUNUMU

Elektromagnetik alana bir impuls yoğunluğu da izâfe ettirmek mümkündür. Bunun için elektromagnetik alanın bulunduğu bir V hacmi içindeki tâneçiklerin toplam impulslarının zamana göre türevini göz önüne alalım. Eğer toplam impuls \mathbf{P}_t ve impuls yoğunluğu da \mathbf{p} ile gösterilecek olursa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_t}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{p} dV = \int_V \rho \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) dV = \\ &= \int_V \rho \mathbf{E} dV + \frac{1}{c} \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \end{aligned} \quad (\text{IV.2.1})$$

bulunur. Bu son ifâdede ρ yu ve \mathbf{J} yi (I.9.1) MAXWELL denklemlerinin 1. ve 4. sü aracılığıyla ifâde edersek:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_t}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV - \frac{1}{4\pi c} \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} dV \end{aligned} \quad (\text{IV.2.2})$$

olur. Bu ifâdenin sağ yanına

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ (\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \times \mathbf{D} + (\mathbf{H} [\nabla \cdot \mathbf{B}]) \right\} dV \quad (\text{IV.2.3})$$

ilâve edersek (IV.2.2) değişmez; zirâ (IV.2.3) ifâdesindeki integranttaki parantezler MAXWELL denklemleri dolayısıyla sıfırdırlar. Fakat böylece (IV.2.2) yi simetrik bir şekle sokmuş olur ve neticede

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_t}{dt} = & -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{D}) \mathbf{E} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{H} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right\} dV \quad (\text{IV.2.3}) \end{aligned}$$

ifâdesi elde edilmiş olur. Bu ifâdenin sağındaki ikinci integralin bir yüzey integrale dönüştürülebileceği gösterilebilir. $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ için alan vektörlerinin $1/|\mathbf{r}|$ den daha çabuk sıfıra gitmeleri hâlinde yüzeyin $|\mathbf{r}|^2$ gibi artmasına karşılık integranttaki alan vektörlerinin çarpımları $1/|\mathbf{r}|^2$ den daha çabuk sıfıra gideceklerinden limite söz konusu alan integrali sıfır olur ve neticede

$$\frac{d\mathbf{P}_t}{dt} = -\frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) dV$$

ya da

$$\mathbf{P}_t + \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) dV = \text{sâbit vektör} \quad (\text{IV.2.5})$$

bulunur. Bu ifâde elektromagnetik alan ile alanın içindeki tâneciklerden oluşan bir sistemin toplam impulsunun korunduğuna delâlet etmektedir.

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (\text{IV.2.6})$$

ile gösterilen vektörün ise *elektromagnetik alanın impuls yoğunluğunu* temsil ettiği âşikârdır.

(IV.2.5) korunum denkleminde, alandaki tâneciklere intikaal edecek olan bir impulsun alanın impulsunun azalmasına; tâneciklerin, meselâ radyasyon yoluyla, impuls kaybetmelerinin de alanın impulsunun artmasına yol açacağı anlaşılmaktadır.

Elektromagnetik alanın \mathbf{g} impuls yoğunluk vektörü ile \mathbf{S} POYNTİNG vektörü arasında

$$\mathbf{g} = \frac{E\mathbf{I}}{c^2} \mathbf{S} \quad (\text{IV.2.7})$$

şeklinde bir bağıntı bulunduğu gözden kaçmayacaktır.

Eğer (IV.2.3) ün sağ yanındaki 2. integral sonlu bir hacim üzerinden alınırsa, bu takdirde elektromagnetik alanın toplam impuls değişimi, göz önüne alınan hacimdeki tâ neciklerin impulslarındaki değişimi ile hacmi kuşatan yüzeyden dışarı akan impuls akısının toplamına eşit olacaktır.

Elektromagnetik alanın

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{r} \times (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

şeklinde bir dönme impulsu yoğunluk vektörü de tanımlanabilir. Buna göre belirli bir V hacmindaki elektromagnetik alanın toplam dönme impulsu da

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi c} \int_V \{\mathbf{r} \times (\mathbf{D} \times \mathbf{B})\} dV$$

ile verilecektir. Tıpkı elektromagnetik alanın enerjisi ve impulsu için olduğu gibi, dönme impulsu için de bir korunum kaanûnu çıkartmak kaabildir.

V. BÖLÜM

DÜZLEMSEL ELEKTROMAGNETİK DALGALAR

(V.1) İLETKEN OLMAYAN ORTAMLARDA ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN YAYILMASI

§(II.1) de iletken olmayan ortamlarda **E** elektrik alanı ile **B** magnetik alanının,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{V.1.1})$$

ile dalgaların yayılma hızını göstermek üzere,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\text{V.1.2})$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (\text{V.1.3})$$

dalga yayılım denklemlerini gerçeklediklerini tesbit etmiştik. Şimdi bu paragrafta önce bu denklemlerin genel çözümlerini tesis edecek ve bazı özelliklerine değineceğiz. Bu dalga denklemlerini gerçekleyen **E** ve **B** vektörlerinin dik kartezyen koordinatlardaki her bir bileşeni, şu hâlde,

$$\nabla^2 \Psi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2} \quad (\text{V.1.4})$$

şeklinde bir denklemin çözümü olacak demektir. Böyle bir denkleme değişkenlere ayrışım yöntemi uygulanırsa, yâni

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, t) = \psi(x_1, x_2, x_3) T(t) \quad (\text{V.1.5})$$

vaz edilirse

$$\frac{v^2}{\psi} \nabla^2 \psi = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (\text{V.1.6})$$

bulunur. Bu ifâdenin sol yanı yalnızca x_1, x_2 ve x_3 koordinatlarının; sağ yanı ise yalnızca t nin fonksiyonu görünümündedir. Eğer bu görünüm gerçeği yansıtıyorsa (V.1.6) ifâdesi

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(t)$$

şeklinde olurdu ki bu x_1, x_2, x_3 ve t nin arasında fonksiyonel bir bağıntı var; yâni bunlar bağımsız değişkenler değildirler demek olurdu. Bu ise x_1, x_2, x_3 ve t nin bağımsız değişkenler olması keyfiyetiyle bir çelişki teşkil eder. Şu hâlde (V.1.6) da sol yanın x_1, x_2, x_3 e bağıllığı ve sağ yanın da t ye bağıllığı gerçek değil ancak zâhiridir. Nitekim

$$f(x) = \frac{2a \sin x}{e^{ix} - e^{-ix}}, \quad a = \text{sâbit}$$

in de x e bağıllığı yalnızca zâhirîdir; çünkü $\sin x$ in tanımı göz önüne alındığında: $f(x) = a = \text{sâbit}$ 'den ibâret olduğu kolayca görülür. Şu hâlde yukarıda söz konusu olan çelişkiye düşmemek için (V.1.6) nın her iki yanı da ancak bir sâbite eşit olabilir. Uygunluk mülâhazasıyla bu sâbiti $-\omega^2$ şeklinde yazacağız. Buna göre (V.1.6) dan, derhâl, ψ ve T fonksiyonlarının

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0 \quad (\text{V.1.7})$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (\text{V.1.8})$$

denklemleriyle belirlenecekleri anlaşılır. (V.1.8) in genel çözümü, $a = a(\omega)$ ve $a' = a'(\omega)$ ile ω nin, integrasyon parametresi rolü oynayan keyfi iki fonksiyonunu göstererek

$$\omega \neq 0 \quad \text{ve} \quad 0 < \omega < \infty \quad \text{için} : \quad T(t) = a(\omega) e^{i\omega t} + a'(\omega) e^{-i\omega t} \quad (\text{V.1.9})$$

şeklinde olacaktır.

ω ya dalganın **açısız frekansı** adı verilir; dalganın lineer v frekansı ise, λ ile dalgaboyu gösterilmek üzere

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \quad (\text{V.1.10})$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$k = \frac{\omega}{v} = 2\pi \frac{v}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{V.1.11})$$

ile de **dalga sayısı** kavramı ithâl edilir.

Mesele, şimdi, (V.1.7) denklemini çözmeye kalmaktadır. (V.1.11) tanımı dolayısıyla artık

$$\nabla^2 \psi(x_1, x_2, x_3) + k^2 \psi(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (\text{V.1.12})$$

şekline giren bu denklem, gene

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \xi(x_1) \eta(x_2) \zeta(x_3) \quad (\text{V.1.13})$$

vaz edip değişkenlere ayrışım yöntemi uygulanırsa,

$$\frac{d^2 \xi}{dx_1^2} + k_1^2 \xi = 0 \quad (\text{V.1.14})$$

$$\frac{d^2 \eta}{dx_2^2} + k_2^2 \eta = 0 \quad (\text{V.1.14}')$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dx_3^2} + k_3^2 \zeta = 0 \quad (\text{V.1.14}''')$$

şeklinde üç denkleme ayrışır. k_1^2 , k_2^2 ve k_3^2 aralarında

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \text{sabit} \quad (\text{V.1.15})$$

bağıntısıyla bağlı üç ayrışım parametresidir. (V.1.14) denklemlerinin hepsi de (V.1.8) denklemi şeklindedir. Bu takdirde $i = 1, 2, 3$ olmak ve $b_i = b_i(k_i)$ ile de, $-\infty < k_i < +\infty$ hâlinde, integrasyon parametreleri göstermek üzere (V.1.2) nin çözümü olarak

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, x_3) &= \{b_1(k_1) e^{ik_1 x_1}\} \{b_2(k_2) e^{ik_2 x_2}\} \{b_3(k_3) e^{ik_3 x_3}\} \\ &= b(k_1, k_2, k_3) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} \end{aligned}$$

ya da \mathbf{n} ile \mathbf{k} yönünde bir birim vektör göstererek

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{e}_i \quad \text{ve} \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

vaz edilirse

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi(\mathbf{r}) = b(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{V.1.16})$$

bulunur. Bu takdirde (V.1.5) ve (V.1.16) ya göre (V.1.4) dalga denkleminin belirli bir \mathbf{k} ve ω için özel bir çözümü

$$\begin{aligned} \Psi_0(\mathbf{r}, t) &= a(\omega) b(\mathbf{k}) e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + a'(\omega) b(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ &= f(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + g(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (\text{V.1.17})$$

olur. Buna göre (V.1.4) dalga denkleminin genel çözümü de her \mathbf{k} ve ω değerine tekaabül eden özel çözümlerin lineer bir kombinasyonu olacaktır. Ancak \mathbf{k} ve ω sürekli değerler alan parametreler olduklarından aranan genel çözüm, \mathbf{k} ve ω nın tanım bölgeleri üzerinden (V.1.17) yi integre etmek sûretiyle

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r},t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\omega f(\mathbf{k},\omega) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\omega g(\mathbf{k},\omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (\text{V.1.18})$$

şeklinde elde edilecektir. Burada $d^3\mathbf{k} = dk_1 dk_2 dk_3$ den ibârettir.

$\Psi(\mathbf{r},t)$ ile, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ve $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ nin dik kartezyen bileşenlerine işâret edildiğinden $\Psi(\mathbf{r},t)$ nin aslında reel bir büyüklük olması gerekir. Bu itibarla (V.1.2) ve (V.1.3) dalga denklemleri için kabul edilebilir çözümlerin ancak (V.1.18) in reel kısımları olabileceği anlaşılmaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\omega \Re \left\{ \mathbf{E}_1(\mathbf{k},\omega) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right\} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\omega \Re \left\{ \mathbf{E}_2(\mathbf{k},\omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.1.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\omega \Re \left\{ \mathbf{B}_1(\mathbf{k},\omega) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right\} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\omega \Re \left\{ \mathbf{B}_2(\mathbf{k},\omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.1.20})$$

olur. Bu ifâdeler \mathbf{E} ve \mathbf{B} nin **spektral gösterilişlerini** teşkil etmektedirler. Son iki ifâdede ilk terimler $-\mathbf{k}$ yönünde ve ikinci terimler de $+\mathbf{k}$ yönünde hareket eden dalgalara tekaabül etmektedirler.

Uygulamada çoğu kere meselâ belirli bir $+\mathbf{k}$ yönünde yayılmakta olan, belirli bir $\nu = \omega/2\pi$ frekanslı **monokromatik** tek bir elektromagnetik dalgayı göz önüne almak gerekebilir. Bu takdirde

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{e}_E E_0, \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{e}_B B_0$$

$$|\mathbf{e}_E| = |\mathbf{e}_B| = 1$$

olmak üzere (V.1.17) ye binâen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{R}e \{ \mathbf{E}_2(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \} \\ &= \mathcal{R}e \{ \mathbf{e}_E E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \} \end{aligned} \quad (\text{V.1.21})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{R}e \{ \mathbf{B}_2(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \} \\ &= \mathcal{R}e \{ \mathbf{e}_B B_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \} \end{aligned} \quad (\text{V.1.22})$$

yazılabilir. Buradaki E_0 ve B_0 da kompleks olabilen büyüklüklerdir. Öte yandan (V.1.2) dalga denkleminin uzayın elektrik yükü ihtivâ etmeyen, yâni

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

olduğu bölgesinde geçerli olduğu ve ayrıca da MAXWELL denklemlerine göre

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

olduğu göz önünde tutulursa (V.1.21) ve (V.1.22) nin bu son iki bağıntıya yerleştirilmesiyle

$$\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{e}_B \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (\text{V.1.23})$$

olduğu anlaşılır. Bu sonuç gerek \mathbf{E} nin gerekse \mathbf{B} nin elektromagnetik dalgaların yayılma doğrultusuna dik olduklarını göstermektedir. \mathbf{E} ve \mathbf{B} nin her ikisi de aynı ω açısıl frekansı ile salınım yapmaktadırlar. Salınımları, bu misalde olduğu gibi, yayılma doğrultularının dikine olan dalgalara **enine dalgalar** adı verilir. Bu itibarla, elektromagnetik dalgaların enine dalgalar oldukları anlaşılmaktadır.

Formalizmi ağırlaştırmamak için, bundan böyle (V.1.21) ve (V.1.22) gibi ifâdeleri yazarken, yalnızca reel kısımların göz önünde tutulması gerektiğine işâret eden $\mathcal{R}e$ yi yazmaktan vaz geçeceğiz ama buna rağmen söz konusu ifâdelerin fizik yönünden kabul edilen kısımlarının da yalnızca reel kısımları olduğu gerçeğini de akıldan çıkartmayacağız. Bu şartlar altında ve yayılma doğrultuları ile genliklerinin her yerde aynı olmasıyla karakterize edilebilen bu monokromatik

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_E E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_B B_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.1.24})$$

düzlemsel dalga ifâdelerini MAXWELL denklemlerinden

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

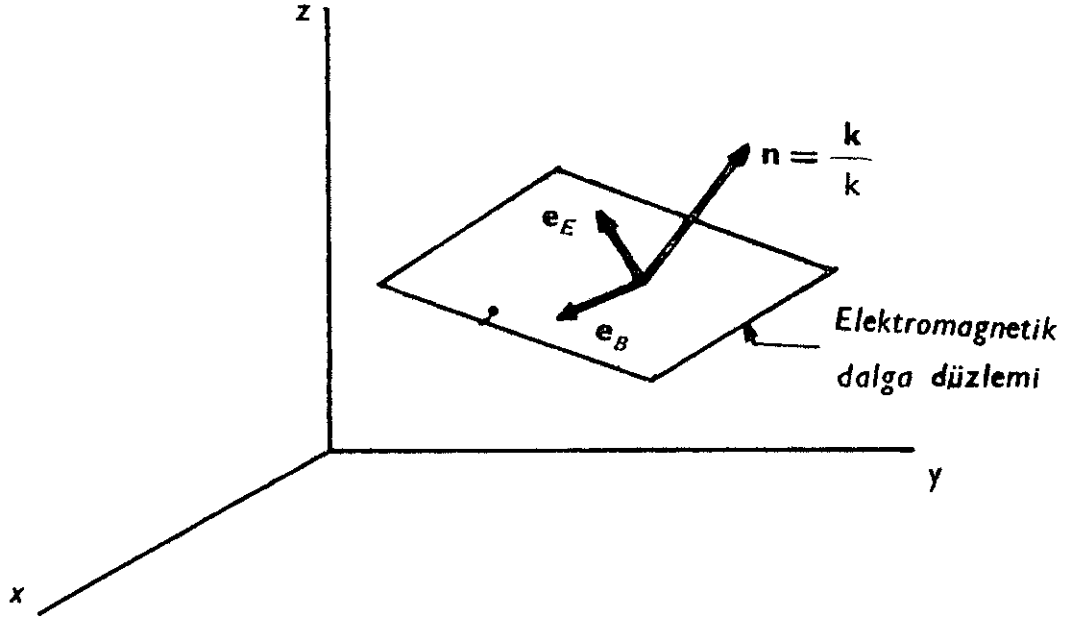
denkleminde vaz edersek

$$i \left[(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_E) E_0 - \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_B B_0 \right] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0$$

bulunur. (V.1.1) ve (V.1.11) i de göz önünde bulundurarak bu denklemin çözümünün

$$B_0 = \sqrt{\mu\epsilon} E_0, \quad \mathbf{e}_B = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_E}{k} \quad (\text{V.1.25})$$

ile verileceği kolayca anlaşılır. Bu çözüm: 1) elektromagnetik dalga cephesi düzlemini belirleyen \mathbf{e}_E ve \mathbf{e}_B birim vektörlerinin dalganın yayılma doğrultusu olan $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ birim vektörüyle birlikte dik bir sağ el üçyüzlüsü oluşturduklarına, ve ayrıca da 2) \mathbf{E} ile \mathbf{B} nin daima aynı fazda olduklarına işâret etmektedir.



Şekil : V.1

Şimdi gene (V.1.24) ile temsil olunan monokromatik elektromagnetik dalga ifâdelerini bir kere daha

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

MAXWELL denklemine, ve bir de kaynakların bulunmadığı ($\mathbf{J} = 0$) uzay bölgesinde

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E})$$

ifâdesine indirgenen diğer MAXWELL denklemine taşırsak sonuçlar

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B} = \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\frac{\omega\epsilon}{c} \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.1.26})$$

şeklinde yazılabilirler.

(V.1.26) bağıntılarından yararlanarak düzlemsel elektromagnetik dalganın taşıdığı enerjinin zaman birimi içinde birim alandan geçen akısını, yâni *POYNTING* vektörünü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\omega\mu} [(\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}))] = -\frac{c^2}{4\pi\omega\epsilon} [(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}] \\ &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{V.1.27})$$

bulunur. Öte yandan bu dalganın taşıdığı *u* elektromagnetik enerji yoğunluğu da (IV.1.10) a göre, ve (V.1.27) yi göz önünde tutarak,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} (\epsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2) \\ &= \frac{\epsilon}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\mu}{4\pi} |\mathbf{H}|^2 \end{aligned} \quad (\text{V.1.28})$$

olacaktır. *S/u* oranı âşikârdır ki enerji akısının hızı demektir; buna göre

$$\frac{\mathbf{S}}{u} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \mathbf{n} = v\mathbf{n} \Rightarrow \boxed{\mathbf{S} = uv} \quad (\text{V.1.29})$$

olduğu bulunur; yâni elektromagnetik enerjinin yayılma hızı kendisini taşıyan elektromagnetik dalganın ortamdaki yayılma hızına eşittir.

(V.2) DÜZLEMSEL DALGALARIN POLÂRİZASYONU

Şimdi gene (V.1.24) ile belirlenen bir elektromagnetik alan göz önüne alalım; ve bu sefer bunu

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.2.1})$$

şeklinde yazalım. \mathbf{E}_0 ve \mathbf{B}_0 in genellikle kompleks ifâdeler olduklarını söylemiş-tik; bu itibarla $(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0)$ ve $(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0)$ da genellikle kompleks büyüklükler olacaklardır. Meselâ eğer $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0$ büyüklüğünün argümenti -2α ise, yâni eğer

$$\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$$

ise, bu takdirde

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{-i\alpha}$$

ile tanımlanacak olan \mathbf{b} vektörünün karesi

$$\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} e^{-2i\alpha} = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$$

uyarınca reel olacaktır. Şu hâlde eğer

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$$

şeklinde ise

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + 2i \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = b_1^2 - b_2^2 + 2i \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2$$

nin de reel olması gerekeceğinden \mathbf{b}_1 ile \mathbf{b}_2 nin birbirlerine dik (yani $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \equiv 0$) olacakları anlaşılmış olur.

Eğer \mathbf{b}_1 vektörünü, y -ekseninin yönünde ve elektromagnetik dalganın yayılma yönü olan \mathbf{k} yı da x -ekseninin yönünde seçersek \mathbf{b}_2 nin de hem \mathbf{b}_1 ve hem de \mathbf{k} ya dik olması dolayısıyla doğrultusu da z -ekseni doğrultusunda olur. Buna göre, ve (V.2.1) de,

$$\mathcal{R}e \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \} = E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3$$

olacağından kolaylıkla

$$\begin{aligned} E_y(\mathbf{r}, t) &= b_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \\ E_z(\mathbf{r}, t) &= \pm b_2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \end{aligned} \quad (\text{V.2.2})$$

ifâdeleri elde edilir. Burada E_z nin ifâdesindeki (+) işâreti \mathbf{b}_2 nin z -ekseninin yönünde ; (—) işâreti de \mathbf{b}_2 nin z -ekseninin aksi yönünde seçilmiş olmasına tekaabül edecektir. (V.2.2) den, kolayca, elektrik alanı vektörünün bileşenlerinin

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1 \quad (\text{V.2.3})$$

bağıntısını gerçekledikleri görülür. Bu bir elips denklemdir.

Şu hâlde (V.2.2) dolayısıyla uzayın her noktasında \mathbf{E} elektrik alan vektörünün dalganın yayılma doğrultusuna dik bir düzlemde ω açısal hızıyla bir rotasyon hareketi yapacağı; ve (V.2.3) dolayısıyla da \mathbf{E} nin ucunun bir elips çizeceği tesbit edilmiş olmaktadır. Bu özelliği haiz bir dalgaya **elips biçiminde polârize edilmiş dalga** adı verilir.

Eğer $b_1 = b_2$ ise (V.2.3) ifâdesi bir daire denkleminde indirgenmiş olur. Bu takdirde \mathbf{E} vektörü, dalganın yayılma yönüne dik düzlemdeki rotasyon hareketi-

ni, uzunluğu sâbit kalarak yapar. Bu türden dalgalara da **daireysel olarak polârize edilmiş** dalgalardanir.

Ve nihâyet eğer b_1 ya da b_2 sıfır ise, bu takdirde dalğanın alanı her yerde ve her zaman aynı bir doğrultuya paralel olacaktır. Bu türden bir dalgaya da **lineer olarak polârize edilmiş** denir.

Şimdi \mathbf{B} nin polârizasyonunu incelemek üzere (V.1.26) nin ikinci denkleminin, göz önüne alınan şartlarda yâni $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_1$ için,

$$\mathbf{E} = -\frac{c}{\omega\mu\epsilon} \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{B} \quad (\text{V.2.4})$$

şeklinde yazılacağına dikkati çekelim. $E_x = B_x = 0$ olduklarından (V.2.4) den

$$E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} (-B_z \mathbf{e}_2 + B_y \mathbf{e}_3)$$

yâni

$$B_y = -\sqrt{\mu\epsilon} E_z, \quad B_z = \sqrt{\mu\epsilon} E_y \quad (\text{V.2.5})$$

bulunur. (V.2.2) ve (V.2.5) den

$$\left. \begin{aligned} B_y(\mathbf{r}, t) &= \mp b_2 \sqrt{\mu\epsilon} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \\ B_z(\mathbf{r}, t) &= b_1 \sqrt{\mu\epsilon} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.2.6})$$

ifâdeleri elde edilir ki buradan da kolayca

$$\frac{B_y^2}{b_2^2 \mu\epsilon} + \frac{B_z^2}{b_1^2 \mu\epsilon} = 1 \quad (\text{V.2.7})$$

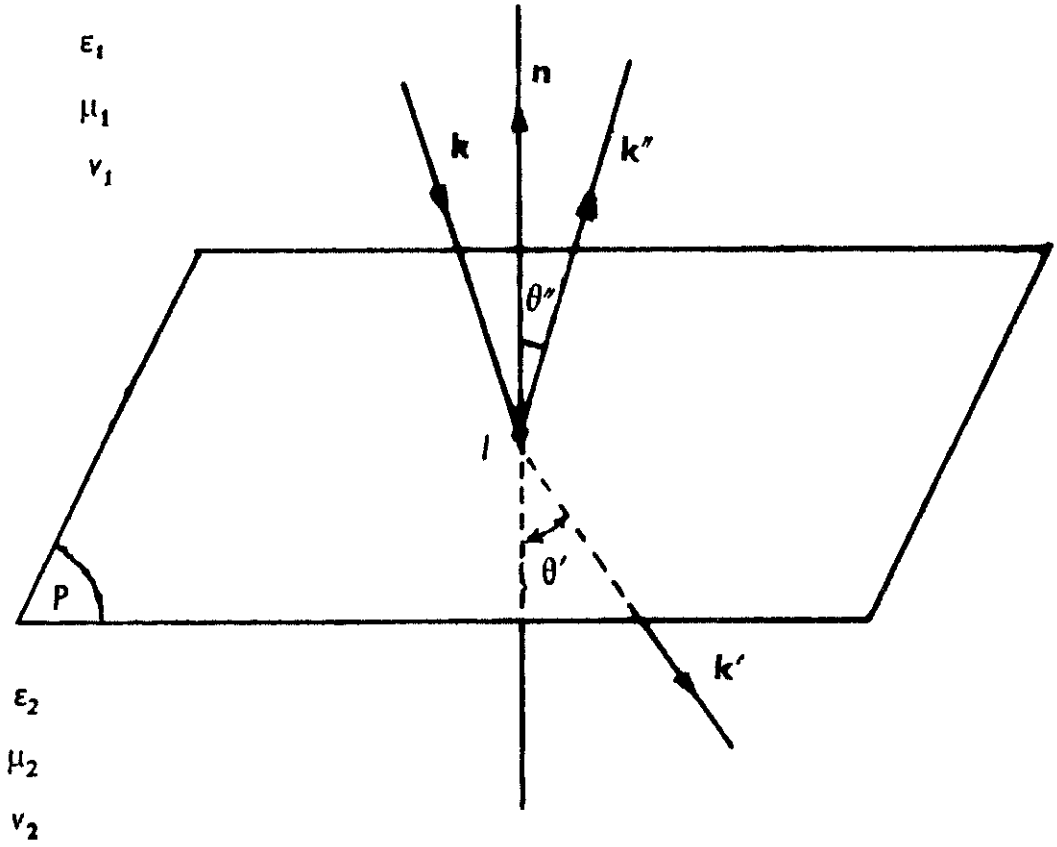
gibi bir elips denklemi bulunur. Bu, \mathbf{B} nin de tıpkı \mathbf{E} gibi elips biçimde polârize edilmiş olduğunu ortaya koymaktadır.

Eğer göz önüne alınan elektromagnetik dalga boşlukta yayılıyorsa $\mu = \epsilon = 1$ olacağından, $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$ olacağı anlaşılmaktadır.

Elektromagnetik dalğanın yayılım doğrultusuna dik bir düzlemde eğer \mathbf{E} ve \mathbf{B} vektörlerinin rotasyon yönü, elektromagnetik dalga kendisine doğru gelen bir gözlemci için saatin aksi yönünde ise böyle bir dalgaya **soldan polârize olmuş dalga** ya da **pozitif helezonluğu** haiz dalga adı verilir; eğer rotasyon yönü saat yönünde ise böyle bir dalgaya da **sağdan polârize olmuş dalga** ya da **negatif helezonluğu** haiz dalga adı verilir.

(V.3) DÜZLEMSEL ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN YANSIMA VE KIRILMASI

Şimdi Şekil: V.2 de gösterilmiş olduğu gibi farklı elektriksel ve magnetik özelliklere sâhip, iletken olmayan, hiç biri kaynak ihtivâ etmeyen ve birbirlerinden (P) gibi düzlemsel bir sınırla ayrılmış iki ortam göz önüne alalım. 1 numaralı ortamın dielektrik sâbiti ϵ_1 , magnetik geçirgenliği μ_1 , bu ortamdaki elektromagnetik dalgaların yayılma hızı da $v_1 = c/\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$; 2 numaralı ortamdaki müteakabil sâbitler de sırasıyla ϵ_2 , μ_2 ve $v_2 = c/\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$ olsun.



Şekil : V.2

(P) düzlemine 1 numaralı ortamdaki k yayılım yönünde düzlemsel bir monokromatik elektromagnetik dalga gelsin. (P) nin birim normal vektörü olan n ile k nin belirlediği düzleme dalganın geliş düzlemi adı verilir. Kolaylık olmak üzere (P) yi x_1x_2 düzleminde ve n yi de x_1x_3 düzleminde olacak şekilde seçelim. Gelen elektromagnetik dalganın alan vektörlerini (V.2.1) denklemlerini göz önünde bulundurarak

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{E}_{g0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{H}_g = \mathbf{H}_{g0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{V.3.1})$$

ile göstereceğiz.

Gözlemler, gelen monokromatik elektromagnetik dalganın hem (P) düzlemi üzerinde yansıdığı ve hem de 2 numaralı ortama geçtiğini ortaya koymaktadır. 2 numaralı ortama geçen dalgaya **kırılmış dalga** demek âdet olmuştur.

Kırılmış dalgaya tekaabül eden karakteristik büyüklükleri üslü harflerle ve yansımış dalgaya tekaabül edenleri de çift üslü harflerle göstererek, kırılmış ve yansımış dalgaların alanları, sırasıyla

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_{k0} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} \quad , \quad \mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{k0} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} \quad (\text{V.3.2})$$

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_{y0} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} \quad , \quad \mathbf{H}_y = \mathbf{H}_{y0} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} \quad (\text{V.3.3})$$

ifâdeleri aracılığıyla belirlenecektir.

(P) arayüzeyindeki l geliş noktasını $x_3 = 0$ ile karakterize ederek bu noktadaki sınır şartlarını yazalım. l de, elektrik ve magnetik alanların düzleme teğetsel bileşenlerinin, (I.10.3) ve (I.10.8) e göre sürekliliklerini yazarsak (x_1, x_2 ve t ne değeri alırlarsa alsınlar)

$$\begin{aligned} E_{g1} + E_{y1} &= E_{k1} \\ E_{g2} + E_{y2} &= E_{k2} \\ H_{g1} + H_{y1} &= H_{k1} \\ H_{g1} + H_{y2} &= H_{k2} \end{aligned} \quad (\text{V.3.4})$$

olması gerektiği bulunur. (V.3.4) şartlarının $x_3 = 0$ olmak üzere x_1, x_2 ve t nin bütün değerleri için gerçekleştirilmesinin ancak ve ancak

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (\text{V.3.5})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \quad , \quad (x_3 = 0) \quad (\text{V.3.6})$$

olması hâlinde mümkün olabildiği kolayca görülür.

Şu hâlde monokromatik bir düzlemsel elektromagnetik dalganın frekansı yansıdığı ya da kırıldığı zaman değişmemektedir.

Öte yandan (V.3.6) nin ilk iki bağıntısını göz önüne alalım. \mathbf{k} vektörü x_1, x_3 düzleminde olup (V.1.11) dolayısıyla da $|\mathbf{k}| = \omega/v_1$ dir. Bunu da hatırd tutarak (V.3.6) dan

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x_1 = k_1'' x_1 + k_2'' x_2 = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} \quad (\text{V.3.7})$$

ve dolayısıyla

$$k_2'' x_2 = 0 \quad (\text{V.3.8})$$

olması gerektiği, yâni yansıyan dalganın yayılma doğrultusunun da tıpkı \mathbf{k} gibi x_1, x_3 , ya da (\mathbf{k}, n) düzlemi içinde bulunduğu anlaşılabilir. Öte yandan

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \mathbf{r} = \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} x_1 \Rightarrow \frac{\omega}{v_1} \sin \theta = k_1 x_1 \\ \sin \theta' &= \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|} \cdot \mathbf{r} = \frac{k_1'}{|\mathbf{k}'|} x_1 \Rightarrow \frac{\omega}{v_1} \sin \theta' = k_1' x_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.3.9})$$

yazılabileceğinden (V.3.8) ve (V.3.9) bağıntıları dolayısıyla (V.3.7) den

$$\theta = \theta' \quad (\text{V.3.10})$$

olduğu bulunur. Özetlersek: 1) gelen dalganın ve yansıyan dalganın yayılım yönleri ile yasıtıcı düzlemin normali aynı bir düzlem içinde bulunurlar: 2) geliş açısı, yansıma açısına eşittir.

Şimdi de (V.3.6) nın birinci ve üçüncü terimleri arasındaki eşitliği göz önüne alalım:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x_1 = k_1' x_1 + k_2' x_2 = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \quad (\text{V.3.11})$$

ve dolayısıyla

$$k_2' x_2 = 0 \quad (\text{V.3.12})$$

olması gerektiği yâni kırılan dalganın yayılma doğrultusunun da tıpkı \mathbf{k} gibi $x_1 x_3$, ya da (\mathbf{k}, \mathbf{n}) düzlemi içinde bulunduğu anlaşılabilir. Öte yandan da, (V.3.5) i de göz önünde tutarak,

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \mathbf{r} = \frac{k_1 x_1}{|\mathbf{k}|} \Rightarrow \frac{\omega}{v_1} \sin \theta = k_1 x_1 \\ \sin \theta' &= \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|} \cdot \mathbf{r} = \frac{k_1' x_1}{|\mathbf{k}'|} \Rightarrow \frac{\omega}{v_2} \sin \theta' = k_1' x_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.3.13})$$

yazılabileceğinden (V.3.12) ve (V.3.13) aralığıyla (V.3.11) den

$$\boxed{\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \eta_{21}} \quad (\text{V.3.14})$$

olduğu bulunur. η_{21} e 2 numaralı ortamın 1 numaralı ortama göre kırma indisi ya da 1 numaralı ortamın 2 numaralı ortama göre kırılma indisi adı verilir. (V.3.12) ve (V.3.14) ifâdelerine elektromagnetik dalgaların kırılma kaanunları ya da DESCARTES - SNELLİUS kaanunları adı verilir.

(V.4) İLETKEN ORTAMLARDAKİ DÜZLEMSEL DALGALAR

Bu kısımda, fazla ayrıntıya girmeksizin, bir σ iletkenlik katsayısıyla karakterize edilen iletken bir ortamda yayılan düzlemsel elektromagnetik dalgaların be-

İlgin bazı özelliklerini ortaya koymak istiyoruz. İletken ortamın dielektrik sâ-bitini ve magnetik geçirgenliğini gene ϵ ve μ ile göstererek,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{V.4.1})$$

OHM kaanûnu aracılığıyla, bu ortam için *MAXWELL* denklemleri

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mu \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{V.4.2})$$

şekline girer. Elektrik ve magnetik alanın gene monokromatik bir düzlemsel elektromagnetik dalğanın yayılmasına yol açacak şekilde yâni

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{V.4.3})$$

gibi değıştikleri kabul olunursa, (V.4.3) ü (V.4.2) deki rotasyonelli ifâdelere vaz ederek, sırasıyla,

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \quad (\text{V.4.4})$$

$$i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) + i\epsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{V.4.5})$$

ifâdeleri elde edilir. Bu sonuncu denklemden ister \mathbf{E} isterse \mathbf{H} elensin, sonunda

$$|\mathbf{k}|^2 = k^2 = \frac{\mu\epsilon}{c} \omega^2 \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \quad (\text{V.4.6})$$

bulunur. Bu, iletken ortamlarda \mathbf{k} yayılma vektörünün kompleks bir büyüklük olacağını göstermektedir. Kompleks bir yayılma vektörünün fizik yönünden anlamını ortaya koyabilmek amacıyla

$$k = \alpha + i\beta$$

vaz edilirse basit bir takım hesaplar sonunda

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c} \omega \left[\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \pm 1}{2} \right]^{1/2} \quad (\text{V.4.7})$$

olduğu görülür. Nisbeten kötü bir iletken için

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$$

varsayılabileceğinden k için yaklaşık olarak

$$k = \alpha + i\beta \cong \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c} \omega + i \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma \quad (\text{V.4.8})$$

bulunur. Eğer söz konusu olan iyi bir iletken ise

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

olacağından bu sefer de $\alpha \cong \beta$ olduğu ve k 'nin de

$$k \cong (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}{c} \quad (\text{V.4.9})$$

olacağı anlaşılır. Buna göre ve $\mathbf{k}/k = \mathbf{n}$ vaz edersek artık (V.4.3) alan vektörleri

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{-\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.4.10})$$

şekillerini alırlar. Bunlar, iletkende yayılan monokromatik düzlemsel elektromagnetik dalganın $e^{-\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}$ çarpanına bağlı olarak sönen bir dalga olacağına işâret etmektedirler. $\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ dan $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ olduğu tespit edilirken (V.4.4) e göre de artık

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega} (\alpha + i\beta) (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \quad (\text{V.4.11})$$

olacağı ve dolayısıyla da \mathbf{E} ile \mathbf{H} alan vektörlerinin, bir iletken söz konusu olduğunda, aynı fazda kalmadıkları anlaşılmış olur. k 'nin mutlak değeri ve fazı

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{k}| &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} \\ \varphi &= \text{arc tg } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} \text{arc tg } \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.4.12})$$

olarak tanımlanır. Buna göre (V.4.12)

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\varphi} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \quad (\text{V.4.13})$$

şeklinde yazılır. Bu, \mathbf{H} 'nin \mathbf{E} 'yi bir φ faz açısı farkıyla izlemekte olduğunu ve her iki alanın genliklerinin oranının da

$$\frac{|H_0|}{|E_0|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} \quad (\text{V.4.14})$$

şeklinde yazılabileceğine delâlet eder. (V.4.12) nin ikinci denkleminde çok iyi iletkenler, yâni $4\pi\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ için, faz açısının hemen hemen 45° civarında olacağını ve alanın enerjisinin de daha çok magnetik enerji olacağını görmekteyiz.

(V.4.10) ile verilen dalganın uzaklığa bağlı olarak söneceği âşikârdır. Buna binâen iyi iletken bir ortama giren monokromatik düzlemsel bir elektromagnetik dalganın iletkenin yüzeyinden içine doğru

$$\delta = \frac{1}{\beta} \cong \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}} \quad (\text{V.4.15})$$

uzaklığında iletkenin yüzeyinde haiz olduğu değerin $1/e \cong \%37$ sine düşeceği anlaşılmaktadır. δ ya **deri derinliği** ya da **nüfûz derinliği** adı verilmektedir.

(V.5) GEOMETRİK OPTİĞİN TEMELLERİ

Yukarıda 1. paragrafta düzlemsel dalgaların, yayılma yönlerinin ve genliklerinin uzayın her noktasında aynı olmalarıyla karakterize edilebileceklerine değinmiştik. Hiç şüphesiz bunlar mümkün bütün elektromagnetik dalgalar için geçerli olan özellikler değildir. Nitekim, meselâ (V.1.4) dalga denkleminde ∇^2 yi küresel koordinatlarda ifâde ederek denklemin küresel elektromagnetik dalgaları temsil eden çözümleri elde edilmiş olsaydı, dalgaların yayılma yönünün düzlemsel dalgalarda olduğu gibi $\mathbf{k} = \text{sâbit}$ olmayıp hiç değilse $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\varphi)$ gibi azimut açısına bağlı periyodik bir fonksiyon olacağı ortaya çıkmış olacaktı. Daha genel hallerde dalganın genliğinin de değişken olması ve yervektörünün $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ gibi bir fonksiyonu olarak değişmesi mümkündür.

Bununla beraber düzlemsel olmayan elektromagnetik dalgaların çoğu da ilk bir yaklaşıklıkta uzayın her bir küçük bölümünde düzlemsel olarak kabul edilebilirler. Eğer bu mümkünse, bu takdirde, dalganın fazının belirli bir t ânında aynı olduğu bütün noktaların geometrik yerleri olan **dalga yüzeyleri** kavramını ithâl etmek de mümkün olur. Düzlemsel dalgalar söz konusu olduğunda bunlara tekaabül eden dalga yüzeylerinin, dalganın yayılma doğrultusuna dik olan düzlemler olacağı âşikârdır.

Genel türden bir dalga göz önüne alındığında uzayın her bir küçük bölümünde dalga düzeyine dik, dalga yayılım doğrultusundan söz edilebilir. Söz konusu dalga yayılım doğrultularının zarfları **ışın eğrilerini** oluştururlar; yâni ışın eğrileri, teğetleri dalganın yayılım doğrultusuyla çakışan eğrilerdir.

Elektromagnetik dalgaların yayılımlarını, bunları dalgasal özelliklerinden tüümüyle soyutlayarak, yalnızca ışınların yayılımı imiş gibi inceleyen görüş açısına **geometrik optik** adı verilir.

Geometrik optiğin temel ilkelerini tesbit edebilmek üzere. önce, eğer monokromatik bir dalga düzlemsel değilse fakat buna geometrik optik yaklaşımı uygulanabiliyorsa artık, düzlemsel bir dalğanın

$$\psi(\mathbf{r},t) = A e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha)} \quad (\text{V.5.1})$$

ifâdesindeki gibi ne A genliğinin sâbit addedilebileceğine ve ne de üssel fonksiyonun argümentinin burada olduğu gibi bir şekli haiz olabileceğine dikkati çekelim. Bu takdirde alanın ifâdesi

$$\psi(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r},t) e^{i\bar{S}(\mathbf{r},t)} \quad (\text{V.5.2})$$

gibi bir şekli haiz olacaktır. Buradaki $\bar{S} = \bar{S}(\mathbf{r},t)$ fonksiyonuna **eikon** (yunanca $\epsilon\iota\chi\omega\nu$: görüntü, sûret, biçim) fonksiyonu adı verilmektedir. Küçük uzay ve zaman aralıklarında $\bar{S}(\mathbf{r},t)$ yi seriye açmak ve birinci mertebeden terimlerle yetinmek mümkün olur. Bu takdirde, ve koordinatların orijini ile zaman başlangıcının göz önüne alınan aralıkların içinde bulunduğunu varsayarak,

$$\bar{S}(\mathbf{r},t) = \bar{S}_0 + \mathbf{r} \cdot \nabla \bar{S} + t \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \mathcal{O}(2) \quad (\text{V.5.3})$$

yazılabilir. Ayrıca küçük uzay bölgeleri söz konusu olduğunda bu bölgelerde $A(\mathbf{r},t)$ genliğinin belirgin bir biçimde değişmediği de varsayılırsa bu yaklaşıklık çerçevesi içinde, (V.5.3) ün ışığı altında, (V.5.2) ile (V.5.1) karşılaştırıldığında

$$\mathbf{k} = \nabla \bar{S}, \quad \omega = -\frac{\partial \bar{S}}{\partial t}, \quad \alpha = \bar{S}_0 \quad (\text{V.5.4})$$

olacağı görülür. Bu tekaabüliyet, uzayın her bir küçük bölgesinde ve her bir küçük zaman aralığı söz konusu olduğunda, (V.5.2) nin monokromatik düzlemsel bir dalga gibi telâkkî olunabileceğini göstermektedir. Monokromatik düzlemsel dalgalar için

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

olduğundan (V.5.4) den de, kolayca,

$$\boxed{|\nabla \bar{S}|^2 = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} \right)^2} \quad (\text{V.5.5})$$

olması gerektiği bulunur. Bu denkleme **eikon** ya da **biçim denklemi** adı verilmektedir.

Şimdi daha az genel bir hâlde biçim denkleminin şeklini bulmak üzere dalğanın v yayılma hızının

$$v = v(\mathbf{r})$$

şeklinde \mathbf{r} yervektörünün fonksiyonu olduğu

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{v^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial t^2} \quad (\text{V.5.6})$$

şeklinde bir dalga denklemi göz önüne alalım. Eğer göz önüne alınan ortamda dalga'nın yayılma hızı böylece \mathbf{r} nin fonksiyonu ise bu, aynı zamanda ortamın η kırma indisinin de \mathbf{r} nin fonksiyonu olacağına delâlet eder. Bu takdirde v_0 ile belirli bir \mathbf{r}_0 noktasına tekaabül eden (ve bir referans yayılma hızı olarak alınacak olan) yayılma hızını gösterirsek, genellikle,

$$\eta(\mathbf{r}) = \frac{v_0}{v(\mathbf{r})} \quad (\text{V.5.7})$$

olacaktır. Değişken indisli böyle bir ortamdaki monokromatik bir dalga'nın, zamana bağlı olmayan $A = A(\mathbf{r})$ şeklinde gene \mathbf{r} nin fonksiyonu olan bir genliği haiz olarak,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{i[k_0 S(\mathbf{r}) - \omega t]} \quad (\text{V.5.8})$$

şeklinde yazılabilmesi için $S = S(\mathbf{r})$ biçim fonksiyonunun ne türlü olması gerektiğini tesbit etmek istiyoruz. Burada k_0 ile, uygunluğu sağlamak üzere, $k_0 = \omega/v_0$ olarak tanımlanan bir sâbit gösterilmektedir.

Eğer (V.5.8) ifâdesi (V.5.6) dalga denklemine yerleştirilecek olursa (V.5.7) yi de göz önünde tutarak yapılan düzenleme sonunda

$$\{\nabla^2 A(\mathbf{r}) + (\eta^2(\mathbf{r}) - |\nabla S|^2) k_0^2 A(\mathbf{r}) + ik_0 [2 \nabla A(\mathbf{r}) \cdot \nabla S(\mathbf{r}) + A(\mathbf{r}) (\nabla^2 S(\mathbf{r}))]\} e^{i[k_0 S(\mathbf{r}) - \omega t]} = 0$$

bulunur. Buradan da

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) + [\eta^2(\mathbf{r}) - |\nabla S(\mathbf{r})|^2] k_0^2 A(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{V.5.9})$$

$$2 \nabla A(\mathbf{r}) \cdot \nabla S(\mathbf{r}) + A(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 S(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{V.5.10})$$

ifâdeleri elde edilir.

Eğer ilk bir yaklaşıklık olarak, gene, dalgaların genliklerinin \mathbf{r} ile çok yavaş değiştiği varsayılacak olursa $\nabla^2 A \approx 0$ alınabilir. Buna göre (V.5.9) dan, kartezyen koordinatlarda,

$$\boxed{|\nabla S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \eta^2(x, y, z)} \quad (\text{V.5.11})$$

ifâdesi elde edilir. Dalgaların yayıldığı ortamı karakterize eden $\eta = \eta(x,y,z)$ kırma indisinin verilmiş bir fonksiyon olması ve $S(x_0,y_0,z_0) = \text{sâbit}$ gibi bir yüzeyin peşinen verilmiş olması şartları altında (V.5.11) biçim denklemini çözmek mümkündür. Meselâ birbiçim bir ortam ($\eta = \text{sâbit}$), ve doğrultman kosinüsleri de α, β, γ olan ilk bir dalga yüzeyi verildiğinde (V.5.11) in çözümünün

$$S(x,y,z) = \eta \cdot (\alpha x + \beta y + \gamma z) \quad (\text{V.5.12})$$

olacağı hemen görülür. Eğer $\tau = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ ile, doğrultman kosinüsleri α, β, γ olan bir birim vektör gösterilirse (V.5.12) den

$$\nabla \cdot S = \eta \tau \quad (\text{V.5.13})$$

yazılabilir. (V.5.11) den ise $|\tau(\mathbf{r})| = 1$ olmak üzere çok daha genel bir biçimde,

$$\nabla S(\mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r}) \tau(\mathbf{r}) \quad (\text{V.5.14})$$

yazılabileceği anlaşılmaktadır.

Şimdi (V.5.14) ü peşpeşe uygulayarak ve s ile de teğeti: $\tau(s) = \tau(\mathbf{r}) = d\mathbf{r}/ds$ birim vektörü olan eğrilerin yay uzunluğunu ifâde eden değişkeni göstermek sûretiyle

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\eta \tau) &= \frac{d}{ds} (\nabla S) = \tau \cdot \nabla (\nabla S) = \\ &= \frac{\nabla S}{\eta} \cdot \nabla (\nabla S) = \frac{1}{2\eta} \nabla (\nabla S)^2 = \\ &= \frac{1}{2\eta} \nabla \eta^2 = \nabla \eta \end{aligned} \quad (\text{V.5.15})$$

denklemi elde edilir. Bu, η kırma indisi ve bir de τ_0 başlangıç yönü verildiğinde ışının izleyeceği yolu verecek olan ve **ışın denklemi** diye bilinen diferansiyel denklemdir.

Bu denklemi iki özel hâl için çözmek istiyoruz. Önce, birbiçim yâni $\eta = \text{sâbit}$ ile karakterize edilen bir ortam göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\frac{d\tau}{ds} = 0 \Rightarrow \tau(s) = \text{sâbit}$$

bulunur ki bu, ışınların doğrulardan ibâret olduklarını göstermektedir.

Şimdi de, kırma indisinin $\eta = \eta(y)$ gibi yalnızca y ye bağlı olduğu ve başlangıçtaki ışının da y -ekseniyle bir θ_0 açısı yaparak xy düzleminde bulunduğu hâli göz önüne alalım. Buna göre (V.5.15) denklemini bileşenleri cinsinden yazacak olursak

$$\frac{d}{ds} (\eta \sin \theta) = 0$$

$$\frac{d}{ds} (\eta \cos \theta) = \frac{d\eta}{dy} \quad (\text{V.5.16})$$

$$\frac{d}{ds} (\eta\gamma) = 0$$

olur. Bu denklemlerin ilkinden

$$\eta \sin \theta = \text{sabit} = \eta_0 \sin \theta_0 \quad (\text{V.5.17})$$

ve ikincisinden de

$$\eta\gamma = \text{sabit} = 0 \quad (\text{V.5.18})$$

bulunur. (V.5.18) denklemi bize ışının sürekli olarak xy düzleminde kaldığını göstermektedir. (V.5.17) ise (V.5.14) ile verilmiş olan kırılma kaanûnundan başka bir şey değildir.

Şimdi belirli bir ortamda bir ışının belirli iki nokta arasındaki yolu minimal zamanda katedeceğini ifade eden **FERMAT ilkesi** ile ışın denklemi arasındaki ilişkiyi ortaya koymağa çalışacağız. Işının $r_0(x_0, y_0, z_0)$ ve $r(x, y, z)$ gibi iki nokta arasındaki yolu katetmek için sarfedeceği zaman

$$T(r) = \int_{r_0}^r dt = \int_{r_0}^r \frac{ds}{v(r)} = \frac{1}{v_0} \int_{r_0}^r \eta(r) ds \quad (\text{V.5.19})$$

den ibâret olup burada s ile ışın üzerindeki uzaklık değişkeni, yâni yay uzunluğu gösterilmektedir. ds yay elemanı ise

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

dir.

(V.5.19) dan diferansiyel olarak

$$dT(r) = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz = \nabla T(r) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{v_0} \eta(r) ds$$

ya da her iki yanı v_0/ds ile çarpıp $\boldsymbol{\tau}(r) = d\mathbf{r}/ds$ olduğunu hatırlayarak

$$\nabla [v_0 T(r)] \cdot \boldsymbol{\tau}(r) = \eta(r) \Rightarrow \nabla [v_0 T(r)] = \eta(r) \boldsymbol{\tau}(r) \quad (\text{V.5.20})$$

bulunur. Bu denklem, ancak,

$$S(\mathbf{r}) = v_0 T(r) = \int_{r_0}^r \eta(\mathbf{r}) ds \quad (\text{V.5.21})$$

vaz edilirse (V.5.14) ün aynısıdır. Böylelikle değişken kırma indisli bir ortamın $S = S(\mathbf{r})$ biçim fonksiyonunun da açık ifadesi elde edilmiş olmaktadır.

(V.5.20) nin her iki yanının kendileriyle skaler çarpımları alınırsa bu sefer de (V.5.11) in aynı olan

$$|\nabla(v_0 T)|^2 = |\nabla S|^2 = \eta^2 \quad (\text{V.5.22})$$

şeklindeki **biçim denklemi** elde edilmiş olur.

Işının A ve B noktaları arasındaki yolu minimum zamanda katetmesi demek

$$\delta T = \frac{1}{v_0} \delta \int_A^B \eta ds = 0 \quad (\text{V.5.23})$$

varyasyon probleminin çözümü demektir. Bu problemi çözmek üzere

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = z(\sigma)$$

şeklinde ve A da $\sigma = 0$, B de de $\sigma = 1$ olacak şekilde bir parametre seçelim. $x' \equiv dx/d\sigma$, $y' \equiv dy/d\sigma$ ve $z' \equiv dz/d\sigma$ olmak üzere (V.5.23) varyasyon problemi

$$\delta \int_0^1 \eta(x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\sigma = 0 \quad (\text{V.5.24})$$

ya da

$$F(x, y, z; x', y', z') = \eta(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (\text{V.5.25})$$

vaz ederek

$$\delta \int_0^1 F(x, y, z; x', y', z') d\sigma = 0 \quad (\text{V.5.24'})$$

şekline dönüşür. Bu varyasyon probleminin çözümüne tekaabül eden EULER denklemleri [bk. A.Y.ÖZEMRE : FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR, §(VI.6); A.Y.ÖZEMRE: KLÂSİK TEORİK MEKANİK, §(VI.6)]

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (\text{V.5.26})$$

şeklindedir. İlk EULER denklemleri açıkça hesaplanırsa

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\eta x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right] - \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.5.27})$$

olur. $x'/\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \alpha$ nın, ışının

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\sigma$$

veya elemanın x -eksenine nazaran doğrultman kosinüsü olduğu göz önünde tutulursa (V.5.27) ifadesi

$$\frac{d}{ds} (\eta \alpha) = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{V.5.28})$$

şekline girer. Diğer EULER denklemleri de, β ve γ ile sırasıyla y ve z -eksenlerine nazaran doğrultman kosinüsler gösterilirse,

$$\frac{d}{ds} (\eta \beta) = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} (\eta \gamma) = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (\text{V.5.29})$$

verirler. (V.5.28) ve (V.5.29) dan

$$\frac{d}{ds} [\eta(\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3)] = \frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \eta}{\partial z} \mathbf{e}_3$$

ya da

$$\boxed{\frac{d}{ds} (\eta \mathbf{r}) = \nabla \eta} \quad (\text{V.5.15})$$

yâni ışın denklemi bulunmuş olur.

Şu hâlde geometrik optiğin ışın denklemi, FERMAT ilkesinin doğal sonucudur.

VI. BÖLÜM

KLÂSİK ELEKTRON TEORİSİNE GİRİŞ

(VI.1) NOKTASAL BİR YÜKÜN POTANSİYEL ALANI

Şimdiye kadar hep MAXWELL'in makroskopik elektromagnetik teorisini ve sonuçlarını inceledik. Bu teoride çeşitli maddelerin haiz oldukları elektromagnetik özellikler, **fenomenolojik bağıntılar** denilen

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

bağıntılarıyla ortaya çıkan ve değerleri ancak deneysel olarak tesbit edilebilen ϵ dielektrik sâbiti, μ magnetik geçirgenlik katsayısı ve σ iletkenlik katsayısı aracılığıyla ifâde edilebilmekteydi. Bunların teoriden çıkartılamayan büyüklükler olması dolayısıyla da MAXWELL teorisi, maddelerin elektromagnetik özelliklerinin sıcaklığa, yoğunluğa, kristal yapısına v.b... nasıl bağlı olacakları hakkında herhangi bir bilgi vermekten âcizdir. H.A.LORENTZ'in geliştirmiş olduğu klâsik elektron teorisi MAXWELL teorisinin bu eksikliğini gene elektromagnetik teori ve mekaniğin ilkeleri aracılığıyla gidermeyi amaçlamaktadır.

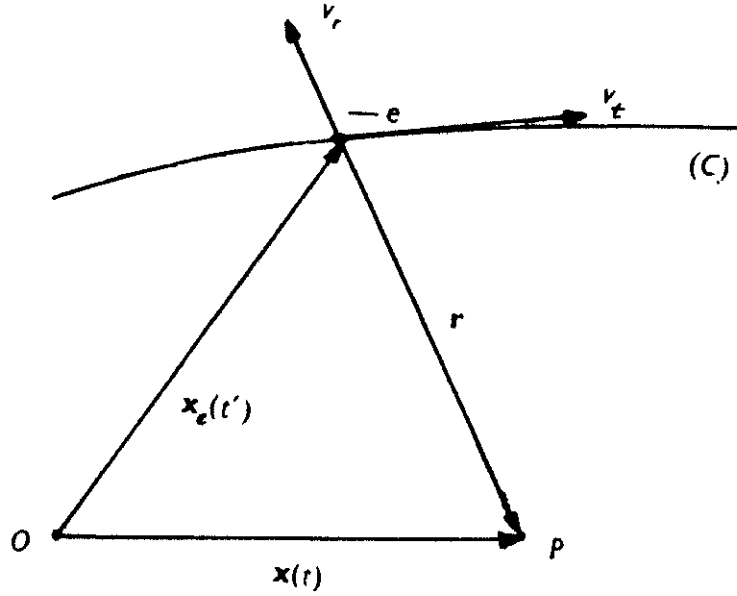
Bu teoride elektron m kütleli ve gerektiğinde noktasal sayılabilecek kadar küçük bir a yarıçapını ve temel birim elektrik yükünü haiz bir küre gibi tasarlanmaktadır. LORENTZ bütün elektromagnetik alanların $-e$ ile göstereceğimiz bu temel yüklerin etkisiyle oluştuklarını teorisinin temeli olarak kabul etmiştir. Bu itibarla, önce, v hızıyla hareket eden noktasal bir ($-e$) yükünün oluşturduğu elektromagnetik alanı hesaplamak gereklidir.

Bunun için Şekil : VI.1 de gösterildiği gibi bir (c) eğrisi boyunca bir v hızıyla hareket eden bir elektron göz önüne alalım. Belirli bir O orijinine göre elektronun yervektörü \mathbf{x}_e ; elektronun oluşturduğu alanın ölçüldüğü P noktasının yervektörü de \mathbf{x} olsun. $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ de elektrondan itibâren P nin yervektörü olsun. P noktasında t ânında ölçülen alan, alanın boşlukta sonlu c ışık hızıyla yayılması dolayısıyla ancak, elektronun

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}|}{c} < t \quad (\text{VI.1.1})$$

ânındaki etkisidir. Bu itibarla $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ve $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e(t')$ olmalıdır.

§(II.2.) de tesis edilmiş olduğu gibi, sürekli yük ve akım dağılımları hâlinde, elektromagnetik alanın skaler ve vektörel potansiyelleri, (VI.1.1) i göz önünde bulundurarak,



Şekil : VI.1

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (\text{VI.1.2})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (\text{VI.1.3})$$

verilmektedir. Burada söz konusu olan $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$ hızıyla hareket eden noktasal bir $-e$ yükü olduğundan DİRAC distribüsyonu aracılığıyla buna tekaabül eden \mathbf{J} kaynak terimleri

$$\rho(\mathbf{x}', t') = -e \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_e(t')) \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t'\right) \quad (\text{VI.1.4})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = -e \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_e(t')) \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t'\right) \mathbf{v}(t') \quad (\text{VI.1.5})$$

şeklinde temsil olunurlar. Buna göre (VI.1.2) ve (VI.1.3)

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \iiint \frac{-e \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_e(t')) \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t'\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' dt' \quad (\text{VI.1.6})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{-e \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_e(t')) \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t'\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' dt' \quad (\text{VI.1.7})$$

olur. Bunları hesaplamak için yalnızca Φ nin hesap ayrıntılarını incelemek yeterlidir. Bu amaçla (VI.1.6) da önce \mathbf{x}' ye göre integral alınırsa

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = - \int \frac{-e \delta\left(\frac{t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')|}{c} - t'\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')|} dt' \quad (\text{VI.1.8})$$

bulunur. \mathbf{x}_e nin t' ye bağlı olması dolayısıyla bu ifâde t' ye göre hemen integre edilemez. Bunun için

$$\tau(t') = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')|}{c} = t' + \frac{|\mathbf{r}(t')|}{c} = t' + \frac{1}{c} \sqrt{\sum_{i=1}^3 r_i^2(t')}$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} d\tau(t') &= dt' - \frac{1}{c} \sum_{i=1}^3 \frac{r_i(t')}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 r_j^2(t')}} \frac{\partial r_i}{\partial t'} dt' \\ &= \left[1 - \frac{\mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c |\mathbf{r}(t')|} \right] dt' \end{aligned} \quad (\text{VI.1.9})$$

olur. (VI.1.9) a binâen (VI.1.8) integrali

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{-e \delta(t - \tau)}{|\mathbf{r}| - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c)} d\tau \quad (\text{VI.1.10})$$

şekline girer. Öte yandan $t = \tau$ olması demek $t' = t - |\mathbf{r}|/c$ nin özel bir değerinin göz önüne alınması demektir ki bu da elektrona tekaabül eden gecikmiş zamandan başka bir şey değildir.

Şu hâlde (VI.1.10) integralinin sonucu olarak

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{-e}{|\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c}} \right]_{t' = t - \frac{r}{c}} = \left[\frac{-e}{s} \right] \quad (\text{VI.1.11})$$

bulunur. $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ nin de bu şartlar altında

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{-e \mathbf{v}/c}{|\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c}} \right]_{t' = t - \frac{r}{c}} = \left[\frac{-e \mathbf{v}}{cs} \right] \quad (\text{VI.1.12})$$

ifâdesiyle verileceği de kolayca görülür. (VI.1.11) ve (VI.1.12) ifâdelerine **LİÉNARD-WİECHERT potansiyelleri** adı verilmektedir. Bu ifâdelerdeki köşeli parantezler, parantez içindeki değişken büyüklüklerin $t' = t - (r/c)$ için değerlendirilmeleri gereğine delâlet etmektedirler.

(VI.2) ELEKTRONUN ELEKTROMAGNETİK ALANI

Hareket hâlindeki bir elektronun hâsil ettiği elektromagnetik alanı, **LİÉNARD-WİECHERT** potansiyellerini kullanmak sûretiyle, elektrik ve magnetik alan vektörlerinin skaler ve vektörel potansiyeller cinsinden yazılmış olan

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.2.1})$$

ifâdelerinden elde etmek mümkündür. Ancak, (VI.2.1) deki türevlerin gözlemciye ait, yâni Şekil: VI.1 de gösterilmiş olduğu gibi alanın ölçüldüğü P noktasına tekaabül eden, koordinat ve zamana göre alınacaklarını göz önünde bulundurmak gereklidir. Hâlbuki **LİÉNARD-WİECHERT** potansiyelleri ise gecikmiş t' zamanının fonksiyonu olarak ifâde edilmiş bulunmaktadır. Bu itibarla hem $\partial t'/\partial t$ nin ve hem de $\nabla t'$ nün ayrıca hesaplanmaları gereklidir.

Şimdi $|\mathbf{r}(t')| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_e(t')| = c(t - t')$ olduğunu da göz önünde tutarak

$$\frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial t} = \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\mathbf{v}(t') \cdot \frac{\mathbf{r}(t')}{|\mathbf{r}(t')|} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

ya da s ile, (VI.1.11) de yapılmış olduğu gibi,

$$s = |\mathbf{r}(t')| - \frac{\mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \quad (\text{VI.2.2})$$

vaz ederek,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r}(t')|c}} = \frac{|\mathbf{r}|}{s} = \frac{r}{s} \quad (\text{VI.2.3})$$

olur. Şu hâlde

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{r}{s} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (\text{VI.2.4})$$

yazabileceğiz. Benzer şekilde ve ∇' ile t' sâbit tutulmak sûretiyle uygulanan grad-yent operatörünü göstererek gene $r = c(t - t')$ den,

$$\nabla \mathbf{r} = -c \nabla t' = \nabla' r + \frac{\partial r}{\partial t'} \nabla t' = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{r}|} \nabla t' \quad (\text{VI.2.5})$$

olur. Buradan da derhal

$$\nabla t' = - \frac{\mathbf{r}}{c \left(|\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)} = - \frac{\mathbf{r}}{cs} \quad (\text{VI.2.6})$$

ve (VI.2.6) yı (VI.2.5) e koyarak da

$$\nabla = \nabla' - \frac{\mathbf{r}}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (\text{VI.2.7})$$

olduğu bulunur.

Buna göre (VI.2.4) ve (VI.2.7) diferansiyel operatörlerini göz önünde tutarak (VI.2.1) elektromagnetik alan denklemleri (VI.1.11) ve (VI.2.12) ile verilmiş olan *LİÉNARD-WIECHERT* potansiyelleri cinsinden hesaplanırlarsa, bu takdirde, bir (C) yörüngesi üzerinde \mathbf{v} hızıyla hareket etmekte olan bir elektronun hâsil ettiği elektrik ve magnetik alanların ifâdeleri için formel olarak önce

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left[-\frac{e}{s^2} \nabla s + e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}}{sc^2} \right) \right]_{t'=t-(r/c)} = \left[-\frac{e}{s^2} \left\{ \nabla' s - \frac{\mathbf{r}}{cs} \frac{\partial s}{\partial t'} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + e \frac{r}{s} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2 s} \right) \right]_{t'=t-(r/c)} \\ \mathbf{B} &= \left[-\frac{e}{c} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{s} \right]_{t'=t-(r/c)} = \left[-\frac{e}{c} \left\{ \nabla' \times \frac{\mathbf{v}}{s} - \frac{\mathbf{r}}{cs} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} \right\} \right]_{t'=t-(r/c)} \end{aligned}$$

yazılır. Bunların açık ifâdelerini bulmak için, $\partial r / \partial t' = \dot{r} = |\mathbf{v}|$ ve

$$\frac{\partial s}{\partial t'} = \dot{s} = \dot{r} - \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r} + \frac{v^2}{c} - \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c}$$

$$\nabla' s = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{c} \nabla' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c}$$

olduğu da göz önünde tutulursa bir takım ara hesaplardan sonra

$$\mathbf{E} = \left[-\frac{e}{s^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{v}}{c} \right) - \frac{e}{c^2 s^3} \left\{ \mathbf{r} \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{v}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right\} \right]_{t'=t-(r/c)}$$

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{E}}{r} \right]_{t'=t-(r/c)}$$

(VI.2.8)

ifâdeleri elde edilir. Bu, hareket hâlindeki bir elektronun (ya da başka bir noktasal yükün) hâsıl ettiği \mathbf{B} magnetik alanının \mathbf{E} elektrik alanına her yerde dik olduğuna ve \mathbf{r} , \mathbf{E} , \mathbf{B} vektörlerinin dik bir sağ el üçyüzlüsü oluşturduklarına işâret etmektedir. Ayrıca dikkati çeken bir husus da gerek \mathbf{E} nin gerekse \mathbf{B} nin, biri, elektronun $\dot{\mathbf{v}}$ ivmesinden bağımsız ve diğeri ise varlığını ivmenin sıfırdan farklı olmasına borçlu iki kısımdan oluştuğudur.

Elektronun hızının ışığın hızı yanında ihmal edilebileceği hallerde, yâni $v/c \ll 1$ için,

$$\mathbf{E} \cong \left[-\frac{e\mathbf{r}}{r^3} - \frac{e}{c^2 r^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})] \right]_{t'=t-(r/c)} \quad (\text{VI.2.9})$$

$$\mathbf{B} \cong \left[\frac{e}{c^2} \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}}{r^2} \right]_{t'=t-(r/c)} \quad (\text{VI.2.10})$$

bulunur. \mathbf{E} nin bu ifâdesindeki ilk terim statik *COULOMB* alanına tekaabül eden terimdir. Elektronun ışık hızına oranla çok küçük bir hızla ve ivmesiz ($\dot{\mathbf{v}} = 0$) bir hareket yapması hâlinde

$$\mathbf{E} \cong -\frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{B} = 0$$

olacağı âşikârdır.

(VI.3) ELEKTRONUN RADYASYONU

Şimdi, gene $v/c \ll 1$ şartı altında elektronun *POYNTING* vektörünü hesaplayalım. Boşlukta $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mathbf{H}$ olması hasebiyle ve (VI.2.9) ile (VI.2.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi} \left(-\frac{e^2}{c^4 r^5} \right) \{ [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})] \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) \} \\
&= -\frac{e^2}{4\pi c^3 r^5} \{ (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{r} - r(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})^2] \} \\
&= \left[\frac{e^2}{4\pi c^3 r^5} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})^2 \cdot \mathbf{r} \right]_{t'=t-(c/r)} \quad (VI.3.1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Elektronun, bu şartlar altında, toplam radyasyon enerjisinin değişim hızı ya da başka bir deyişle *elektronun radyasyon gücü*, (IV.1.13) ile verilmiş olan korunum denkleminde,

$$P_{\text{top}} = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \frac{\partial U}{\partial t} = - \int_{(A)} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VI.3.2)$$

ile verilecektir. Elektronun r yarıçaplı bir küre içinde ışınlandığı toplam güç, şu hâlde, \mathbf{S} nin (VI.3.1) ile verilmiş olan ifâdesini (VI.2.12) ye yerleştirip, kolaylık olsun diye bir de $\dot{\mathbf{v}}$ nin doğrultusunu z-ekseni olarak seçerek ve küresel koordinatlardaki alan elemanının da $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ile verildiğini göz önünde tutarak hesaplanırsa

$$P_{\text{top}} = -\frac{dU}{dt} = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{r^2 \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2 \theta}{r^5} \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) r^2 \sin \theta d\theta$$

olarak bulunur; yâni elektronun birim zaman başına yayınladığı enerji

$$\boxed{-\frac{dU}{dt} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}} \quad (VI.3.3)$$

dür. Buna klâsik LARMOR formülü adı verilmektedir. Buradan da açıkça görüldüğü gibi elektronun radyasyon yayınlaması için muhakkak ivmeli bir hareket yapması gerekmektedir. $\dot{\mathbf{v}} = 0$ için $dU/dt = 0$ olacaktır. Bunun, \mathbf{S} nin tanımı ve \mathbf{E} ile \mathbf{B} nin de (VI.2.8) ile verilmiş olan ifâdeleri göz önünde tutulduğunda, $v/c \ll 1$ şartının cârî olmadığı genel hâl için de aynen geçerli bir sonuç olduğu kolayca görülür.

İvmeli hareket yapan her yükün elektromagnetik radyasyon yayınlacağı hakkındaki bu kural, RUTHERFORD atom modeline uygulandığında çekirdeğin etrafında dairesel yörüngeler üzerinde dolanan elektronların yapmakta oldukları bu ivmeli hareket dolayısıyla elektromagnetik radyasyon yayınlamak surekli

bir spektrum arz etmelerini ve kaybettikleri enerji dolayısıyla yörüngelerinin yarıçaplarının küçülerek nihâyet çekirdeğin üzerine düşeceklerini yâni RUTHERFORD atomunda elektronların kararlı dairesel yörüngeleri olamayacağını öngörmekteydi. Bu, kuvantum teorisinin BOHR tarafından atoma uygulanmasına yol açmasına olanak veren ilk ciddi kavramsal krizi oluşturmuş ve BOHR da, modelini kurarken, elektrodinamiğin atomun içindeki olaylara uygulanamayacağını bir postülât olarak peşinen kabul etmek zorunda kalmıştı.

Şimdi bir merkezin civarında

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \cos \omega t$$

şeklinde lineer harmonik salınımlar yapan bir elektron düşünelim. \mathbf{R}_0 genliği (meselâ bir kristaldeki bağlı elektronlarda olduğu gibi) çok küçükse artık $t' = t - (r/c) = t$ alınabilir. Bu elektronun dipol momentini, (I.3.13) tanım bağıntısından yararlanarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_0^{|\mathbf{R}_0|} \mathbf{r}' [-e \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_0 \cos \omega t)] d^3 r' \\ &= -e \mathbf{R}_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

ile temsil edebiliriz. Buna göre

$$\dot{\mathbf{p}} = +e\omega \mathbf{R}_0 \sin \omega t, \quad \ddot{\mathbf{p}} = -e\omega^2 \mathbf{R}_0 \cos \omega t = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$$

ve

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = -\omega \mathbf{R}_0 \sin \omega t, \quad \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{R}_0 \cos \omega t$$

olacağından

$$-e\dot{\mathbf{v}} = -e\omega^2 \mathbf{R}_0 \cos \omega t = \omega^2 \mathbf{p}_0 \cos \omega t$$

ve

$$e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 = \omega^4 p_0^2 \cos^2 \omega t \quad (\text{VI.3.4})$$

bulunur. (VI.3.4) eğer (VI.3.3) e vaz edilirse elektronun zaman birimi başına yayınladığı enerjinin

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \cos^2 \omega t$$

şeklinde değişeceği ve bir salınım periyodu boyunca bir elektrik dipolün yayınlayacağı radyasyon enerjisinin ortalama değerinin de, böylece,

$$\left\langle -\frac{dU}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \cos^2 \omega t dt = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} \quad (\text{VI.3.5})$$

olduğu bulunur.

(VI.4) RADYASYONUN TEPKİ KUVVETİ

Gene $v/c \ll 1$ şartına uyan ivmeli bir elektronun sonlu bir $t_2 - t_1$ zaman aralığı boyunca yayınladığı radyasyon enerjisi (VI.3.13) e göre

$$-U_r = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K}_r \cdot d\mathbf{s} = - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{v} dt$$

olacaktır. Buradan $\dot{v} dt = d\alpha$, $v = \alpha$ ve $\dot{v} = \beta$, $\ddot{v} dt = d\beta$ vazederek kısmî integrasyonla

$$\frac{2e^2}{3c^2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} d(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}}) dt \right\} = - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{v} dt$$

bulunur; buna göre

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{K}_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt + \left[\frac{2e^2}{3c^3} (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

yazılabilir. Eğer elektronun hareketi bu ifâdedeki ikinci terimin hem t_1 de ve hem de t_2 de aynı değeri haiz olmasını sağlayacak biçimdeyse bu terim sıfır olur ve netice itibarıyla

$$\mathbf{K}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (\text{VI.4.1})$$

sonucu elde edilir. \mathbf{K}_r ye **radyasyonun tepki kuvveti** adı verilir. Eğer m kütleli elektrona dışarıdan uygulanan herhangi bir başka kuvveti \mathbf{K} ile gösterecek olursak bu takdirde, $v/c \ll 1$ şartı altında, ivmeli bir elektronun hareket denklemi

$$\boxed{m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_r = \mathbf{K} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}} \quad (\text{VI.4.2})$$

şeklinde olacaktır.

Klâsik elektron teorisinin tutarsızlıklarından birini bu denklemden hareket ederek gözlemek kaabildir. Bunun için elektrona hiç bir dış kuvvet alanının uygulanmamış olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (\text{VI.4.3})$$

olacaktır. Bunun çözümü, k ile integrasyon sâbitini göstererek,

$$\mathbf{v} = k \exp(3 \pi c^2 t / 2e^2) = k e^{3t/2\tau_0}$$

şeklindedir; $\tau_0 = e^2/mc^2 \cong 10^{-10}$ saniye mertebesinde olduğundan bu herhangi bir dış alan yok ise bile elektron kendi kendini sonsuz ivmelendirecek demektir ki bu da saçma bir sonuçtur. (VI.4.2) nin geçerli olabilmesi için

$$|m\dot{\mathbf{v}}| \gg \left| \frac{2e^2}{3c^2} \ddot{\mathbf{v}} \right| = |K_r| \quad (\text{VI.4.4})$$

olması gerektiği görülmektedir.

(VI.5) ELEKTRONUN ELEKTROMAGNETİK KÜTLESİ

Bir elektromagnetik alanın enerjisi ile impulsunun yoğunluklarının ifâdelerini (IV.1.10) ve (IV.2.6) ile vermiştik. Buna binâen ve boşluk için elektromagnetik alanın toplam U enerjisi ile toplam G impulsunun değerleri

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) d^3r \quad (\text{VI.5.1})$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3r \quad (\text{VI.5.2})$$

olacaktır. Şimdi a yarıçapını haiz elektronun sükûnet hâlindeki elektromagnetik alanını göz önüne alalım. Ayrıca, kolaylık olsun diye elektronun bütün $-e$ yükünün de elektronun yüzeyinde bulunduğu varsayacağız. Buna göre elektronun merkezinden r uzaklığındaki bir noktadaki elektromagnetik alan

$$\mathbf{E} = -\frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{H} = 0 \quad (\text{VI.5.3})$$

ile verilecektir. (VI.5.3) ü (VI.5.1) e ve (VI.5.2) ye vaz eder de bütün uzay üzerinden integre edersek

$$U = \frac{e^2}{8\pi} \int_a^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{e^2}{2a} \quad (\text{VI.5.4})$$

$$G = 0$$

bulunur.

Eğer elektronunun $U_0 = m_0c^2$ sükûnet enerjisi tümüyle elektromagnetik enerji kökenli ise bunun sükûnet hâlindeki elektronun hâsıl ettiği elektromagnetik alanın tüm enerjisine eşit, yâni

$$U_0 = m_0c^2 = \frac{e^2}{2a} \quad (\text{VI.5.5})$$

olması gerekir. Buna binâen de elektronun sükûnet kütlesi

$$\boxed{m_0 = \frac{e^2}{2ac^2}} \quad (\text{VI.5.6})$$

olmalıdır. Ancak, elektronu noktasal alırsak sükûnet kütlesi de sonsuza gider. İşte bu da klâsik elektron teorisinin büyük zorluk ve tutarsızlıklarından biridir.

(VI.6) RADYASYON YAYIMI

Radyasyon yayımı için en basit model salınım yapan bir elektrondan ibâettir. Elektronun üzerine tesir eden kuvvetin

$$\mathbf{K} = -kr \quad (\text{VI.6.1})$$

şeklinde merkezî bir esnek kuvvet olduğu varsayılarak elektronun hareket denklemi olarak (VI.4.2) den,

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \text{ve} \quad \Gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} \quad (\text{VI.6.2})$$

vaz ederek,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \frac{\Gamma}{\omega_0^2} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0 \quad (\text{VI.6.3})$$

bulunur. Ancak (VI.4.2) denklemi yalnızca (VI.4.4) şartı altında geçerli olduğundan ilk bir yaklaşıklıkta

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cong -\omega_0^2 \mathbf{r}$$

ve dolayısıyla da

$$\frac{d\mathbf{r}^3}{dt^3} \cong -\omega_0^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\text{VI.6.4})$$

yazılabileceğinden (VI.6.4) ifâdesini (VI.6.3) e vaz ederek, ilk yaklaşıklıkta

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0 \quad (\text{VI.6.5})$$

bulunur. Bu, **sönümlü osilâtör** denklemdir. Bu denklemin genel çözümü,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}$$

olmak ve **A** ile **B** ile de keyfî iki integrasyon parametresini göstermek üzere

$$\mathbf{r}(t) = e^{-\Gamma t/2} \{ \mathbf{A} \cos \omega_1 t + \mathbf{B} \sin \omega_1 t \} \quad (\text{VI.6.6})$$

şekindedir. Eğer $\mathbf{r}(0)$ ve $\dot{\mathbf{r}}(0)$ başlangıç şartları verilmişse bu takdirde bu şartlara uyan özel çözüm

$$\mathbf{r}(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ \mathbf{r}(0) \cos \omega_1 t + \left[\dot{\mathbf{r}}(0) + \frac{\Gamma}{2} \mathbf{r}(0) \right] \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right\} \quad (\text{VI.6.7})$$

olur.

Eğer $\Gamma/2 \ll \omega_0$ ise osilâtörün salınımlarının **zayıf sönümlü** olduğu; $\Gamma/2 = \omega_0$ ise hareketin **kritik sönümlü** olduğu söylenir. Bu son hâlde $\omega_1 = 0$ olacağından (VI.6.7) ifâdesi de

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \rightarrow t, \quad \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \cos \omega_1 t \rightarrow 1$$

olması dolayısıyla

$$\mathbf{r}(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ \mathbf{r}(0) + \left[\dot{\mathbf{r}}(0) + \frac{\Gamma}{2} \mathbf{r}(0) \right] t \right\}$$

şekline girer.

Eğer $\Gamma/2 > \omega_0$ ise bu takdirde de osilâtörün **kuvvetli sönümlü** olduğundan söz edilir ve (VI.6.5) in, başlangıç şartları altındaki çözümü de,

$$\omega_1 = \pm i |\omega_1|, \quad |\omega_1| = \sqrt{(\Gamma/2)^2 - \omega_0^2}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{r}(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ \mathbf{r}(0) \cosh |\omega_1| t + \left[\dot{\mathbf{r}}(0) + \frac{\Gamma}{2} \mathbf{r}(0) \right] \frac{\sinh |\omega_1| t}{\omega_1} \right\}$$

şekline indirgenir.

Şimdi $\Gamma^2/4 \ll \omega_0^2$ şartı altında osilâtörün enerjisini hesaplayalım. Bu takdirde, ilk yaklaşıklıkta, (VI.6.7)

$$\mathbf{r}(t) \cong \mathbf{r}(0) e^{-\Gamma t/2} \cos \omega_0 t$$

olur. Öte yandan osilâtörün enerjisi olarak

$$U = \frac{1}{2} (m\dot{\mathbf{r}}^2 + k\mathbf{r}^2) = \frac{m |\mathbf{r}(0)|^2 e^{-\Gamma t}}{2} \left\{ \frac{\Gamma^2}{4} \cos^2 \omega_0 t - \frac{\Gamma \omega_0}{2} \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t + \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t \right\} \\ \cong \frac{m |\mathbf{r}(0)|^2 \omega_0^2}{2} e^{-\Gamma t}, \quad (\text{VI.6.8})$$

ve zaman birimi başına yayınladığı radyasyon enerjisi olarak da (VI.6.2) ye binâen

$$-\frac{dU}{dt} = \Gamma U = \frac{e^2 \omega_0^4 |\mathbf{r}(0)|^2}{3c^3} e^{-\Gamma t} \quad (\text{VI.6.9})$$

bulunur. Son iki ifâde bize osilâtörün enerjisinin de, yayınladığı radyasyon enerjisinin de sönümlü olduğunu göstermektedir. Özellikle (VI.6.9) ifâdesi, bir dış etkenle genliği $\mathbf{r}(0)$ oluncaya kadar uyarılmış olan bir osilâtörün sönümlü bir radyasyon, bir enerji pulsu, yayınladığını göstermektedir. Bu radyasyon pulsunun ortalama süresi, yâni $1/e$ ye düşünceye kadar geçen süre, $1/\Gamma$ dir. Bu radyasyon sönümü dolayısıyla, bir osilâtörün yayınladığı radyasyon monokromatik olamamaktadır; buna birbiri üzerine binmiş monokromatik dalgaların oluşturdukları bir dalga paketi nazarıyla bakmak en uygun modeli teşkil eder.

(VI.7) ELEKTRONUN BİR ELEKTROMAGNETİK DALGA İLE ETKİLEŞMESİ

ω_0 açısal frekansıyla salınım yapan bir elektronun, üzerine düşen ve ω açısal frekansıyla karakterize edilen monokromatik bir elektromagnetik dalga ile etkileşmesini klâsik mekaniğin sağladığı etkileşme modeli çerçevesi içinde incelemek için, NEWTON'un hareket kaanûnu uyarınca, elektronun kütlesi ile üzerine tesir eden kuvvetlerin etkisi altında kazandığı ivmenin çarpımının, söz konusu kuvvetlerin bileşkesine eşit olduğunu yazmak yeterlidir.

Bu model çerçevesi içinde elektrona tesir eden kuvvetleri üçe ayırmak mümkündür: 1) harmonik bir potansiyelden türeyen ve elektronun kendine özgü bir ω_0 frekansıyla salınmasını sağlayan $\mathbf{K}_e = -k\mathbf{r}$ gibi elâstik bir kuvvet; 2) elektronun kendi radyasyon alanının kendisi üzerine uyguladığı $\mathbf{K}_r = (2e^2/3c^3) \ddot{\mathbf{v}}$ radyasyon tepkisi kuvveti, ve 3) elektronun üzerine düşen monokromatik elektromag-

netik dalgayı oluşturan \mathbf{E} ve $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mathbf{H}$ alanlarının doğurdukları

$$\mathbf{K}_L = -e [\mathbf{E} + (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{H}]$$

şeklindeki LORENTZ kuvveti.

Ancak, boşlukta (yâni $\epsilon = \mu = 1$ hâlinde) yayılan düzlemsel bir elektromagnetik dalga göz önüne alındığında (V.1.28) den bu hâl için $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ olacağı anlaşıldığından, $v/c \ll 1$ olduğu yâni elektronun hızının ışık hızına göre ihmâl edilebileceği durumlarda LORENTZ kuvvetinde magnetik kuvvetin katkısının elektrik kuvvetin katkısı yanında rahatlıkla ihmâl edilebileceği anlaşılır:

$$\mathbf{K}_L = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \cong -e\mathbf{E}.$$

Buna göre elektronun hareket denklemi

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} - e\mathbf{E} \quad (\text{VI.7.1})$$

şeklinde yazılır. Gene

$$\omega_0^2 = k/m, \quad \Gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$$

vaz eder, ayrıca da, (VI.6.4) yaklaşıklığı ile \mathbf{E} alanının elektrona tesir ettiği noktada

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$$

şeklinde olduğunu göz önünde bulundurursak (VI.7.1) denklemi

$$\boxed{\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}} \quad (\text{VI.7.2})$$

şekline girer. Bu denklemin genel çözümü, buna tekaabül eden (VI.6.5) şeklindeki sağ yansız (*homogen*) denklemin genel çözümüne (VI.7.2) denkleminin bir özel çözümünün ilâvesiyle elde edilecektir. (VI.6.5) homogen denkleminin (VI.6.6) ile verilmiş olan genel çözümü $2/\Gamma$ lık bir zaman sâbitiyle üstel olarak söneceğinden, (VI.7.2) nin genel çözümünde bu kısmı pekçok hâlde ihmâl etmek kaabildir. Şu hâlde bizi, özellikle, (VI.7.2) yi sağlayan özel çözüm ilgilendirmektedir.

(VI.7.2) nin çözümünün

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} e^{i\omega t} \quad (\text{VI.7.3})$$

şeklinde olup olmadığını araştıralım. Bu vaz çerçevesi içinde (VI.7.2)

$$\left\{ \mathbf{R} [(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma] + \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \right\} e^{i\omega t} = 0$$

olur. Bu ifâdenin, t ne olursa olsun sağlanması için

$$\mathbf{R} = \frac{(-e/m) \mathbf{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma}$$

olması gerektiği görülmektedir. Şu hâlde

$$\mathbf{r}(t) = \frac{(-e/m) \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma} \quad (\text{VI.7.4})$$

(VI.7.2) nin bir özel çözümüdür. Tabii bu çözümün fiziksel anlamı haiz kısmı, önceden de işâret edilmiş olduğu gibi, yalnızca reel kısmıdır.

Şimdi elektronun $\dot{\mathbf{v}}$ ivmesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \Re e \left\{ \frac{(e/m) \omega^2 \mathbf{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega)^2 + i\omega\Gamma} e^{i\omega t} \right\} = \\ &= \Re e \left\{ \frac{(e/m) \omega^2 \mathbf{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right\} = \\ &= \Re e \left\{ \frac{(e/m) \omega^2 \mathbf{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) [(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma] \right\} = \\ &= \frac{(e/m) \omega^2 \mathbf{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}} \left\{ \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \omega\Gamma \sin \omega t}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI.7.5})$$

Eğer

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{VI.7.6})$$

vaz edilirse (VI.7.5) den kolayca

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{e^2 \omega^2 E_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi)}{m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2]} \quad (\text{VI.7.7})$$

olduğu sonucu çıkarılır. Buna göre elektronun zaman birimi başına yayınladığı radyasyon enerjisi (VI.3.3) ve (VI.7.7) uyarınca

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{2e^4 E_0^2 \omega^4 \cos^2(\omega t - \varphi)}{3m^2 c^3 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2]} \quad (\text{VI.7.8})$$

olacaktır. Buna göre bir salınım periyodu üzerinden elektronun zaman birimi başına yayınladığı ortalama radyasyon enerjisi, $\cos^2(\omega t - \varphi)$ nin ortalama değerinin 1/2 olduğunu hatırlayarak,

$$\left\langle -\frac{dU}{dt} \right\rangle = \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{3m^2 c^3 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2]} \quad (\text{VI.7.9})$$

den ibâret olacaktır.

Öte yandan elektron üzerine düşen yâni elektronu uyartan monokromatik düzlemsel bir elektromagnetik dalğanın zaman birimi başına elektrona intikaal ettirdiği radyasyon enerjisinin ise (V.1.27) ye binâen

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} \quad , \quad |\mathbf{n}| = 1$$

olduğunu ve gene $\cos^2(\omega t - \varphi)$ nin bir periyot boyunca ortalama değerinin 1/2 olduğunu göz önünde tutarak

$$\langle |S| \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{E_0^2}{2} \quad (\text{VI.7.10})$$

bulunur. Buna göre zaman birimi başına elektronun yayınladığı ortalama radyasyon enerjisinin, kendisine intikaal etmiş olan ortalama radyasyon enerjisine oranının

$$\left\langle -\frac{dU}{dt} \right\rangle / \langle |S| \rangle = \sigma_s = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (\text{VI.7.11})$$

olacağı belirlenmiş olur. Elektron sanki üzerine düşen elektromagnetik radyasyonun bir kısmını yeniden uzaya saçıyor gibidir; buna elektromagnetik radyasyonun saçılması ve σ_s ye de **toplam saçılma tesir kesiti** adı verilir.

Eğer

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} \quad (\text{VI.7.12})$$

vaz edilirse (VI.7.11) ifâdesi

$$\sigma_s = \sigma_0 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (\text{VI.7.13})$$

şekline girer.

Saçılma tesir kesitinin elektrona çarpan monokromatik elektromagnetik dalğanın açısal frekansının elektronunkine eşit olması ($\omega = \omega_0$) hâlinde maksimum değerine ulaşacağı görülmektedir. Bu takdirde

$$\sigma_{s,\max} = \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\Gamma} \right)^2 \quad (\text{VI.7.14})$$

olur; buna **rezonans saçılması tesir kesiti** adı verilir. Bu takdirde, ve (VI.6.2) den de kolayca görüleceği üzere $\Gamma \ll \omega$ olduğundan, saçılma tesir kesiti çok yüksek değerlere ulaşabilir. Bu olay maddî ortamlar optiğinde önemli bir rol oynamakta olup buna **rezonans fluoresansı** adı da verilir.

Eğer gelen radyasyonun frekansı elektronunkine nazaran çok düşükse yâni $\omega \ll \omega_0$ ise

$$\sigma_s \cong \sigma_0 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (\text{VI.7.15})$$

olur. Bu hâle **RAYLEIGH saçılması** adı verilmektedir. **RAYLEIGH** 1899 da bu formüle dayanarak gökyüzünün maviliğini ve güneşin batışındaki kırmızılığını ilk defa kantitatif bir biçimde açıklamayı başarmıştır.

Eğer gelen radyasyonun frekansı elektronunkinden çok yüksekse yâni $\omega \gg \omega_0$ ise, bu takdirde de

$$\sigma_s = \sigma_0 = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} \quad (\text{VI.7.16})$$

olur. Buna da **THOMSON saçılması** adı verilmektedir. Bu, radyasyonun serbest, yâni üzerine herhangi bir harmonik potansiyelden türemiş bir kuvvet tesir etmeyen bir elektron tarafından saçılmasına tekaabül eden tesir kesitini göstermektedir.

Bağlı (yâni kendine özgü harmonik bir salınımı olan) bir elektron üzerine düşen elektromagnetik bir radyasyonun elektron tarafından soğurulması (absorplanması) da mümkündür. Bu hâle tekaabül eden elektronun hareket denklemi (VI.7.2) nin benzeridir; genel hâlde tek fark, sağ yanın, gelen radyasyonun monokromatik değil de sürekli bir frekans dağılımını haiz bir radyasyonu temsil etmesindedir. Bu, bileşke elektrik alan vektörünün bir **FOURIER** açılımı şeklinde yazılmasını sağlar. Bu bileşke vektör **E** ile gösterildiğinde, radyasyon alanının elektron üzerinde icra ettiği fiziksel iş

$$-U_r = W = \int \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} dt = -e \int \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt \quad (\text{VI.7.17})$$

dir. Ancak bu integralin bilfiil hesabı **FOURIER** integral dönüşümünün bu düzeyde henüz görmemiş olduğumuz bazı özelliklerine dayandığından bu hesabın ayrıntılarına girmeyeceğiz. Ancak hesabın sonunda, osilatörün, gelen radyasyonun rezonans frekansında şiddet birimi ve zaman birimi başına soğurduğu ortalama enerji olan

$$a = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} \quad (\text{VII.7.18})$$

büyükliğünün **osilâtörün soğurma katsayısı** olarak tanımlanabileceğinin ; ve netice itibariyle, eğer radyasyon alanıyla osilâtörler arasında termodinamik bir denge teessüs etmişse soğurulan $\nu = \omega/2\pi$ frekanslı elektromagnetik radyasyonun $u(\omega) = u(\nu)$ enerji yoğunluğu ile bir osilâtörün $\langle U \rangle$ ortalama mekanik enerjisi arasında

$$u(\omega) = u(\nu) = \frac{2\omega^2}{\pi c^3} \langle U \rangle = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \langle U \rangle \quad (\text{VI.7.19})$$

şeklinde bir bağıntı bulunduğunun ortaya çıktığını söylemekle yetineceğiz.

(VI.8) DIELEKTRİK ORTAMLARIN DISPERSİYON TEORİSİNE GİRİŞ

A) Etkileşmesiz Elektronlar Hâli:

Aralarında herhangi bir etkileşme bulunmadığını varsayacağımız atomlardan oluşan bir dielektrik ortam gözönüne alalım. Meselâ bir gaz bulutu buna iyi bir örnektir. Böyle bir gazın atomlarına bağlı olan elektronlardan, aynı bir ω_{0n} doğal frekansıyla salınım yapanlarını n -ninci türden elektronlar diye isimlendireceğiz.

Atomlara bağlı bulunan elektronlardan herhangi bir n -ninci türden olanlarının

$$\mathbf{K}_n = -k_n \mathbf{r}_n, \quad \omega_{0n} = \sqrt{k_n/m}$$

esnek kuvvetinin etkisi altında salınım yaptıklarını kabul etmek en basit ve mâkûl bir modeldir.

Eğer gazın üzerine monokromatik bir elektromagnetik düzlemsel dalga düşerse, gene $v/c \ll 1$ yaklaşıklığı çerçevesi içinde, elektromagnetik dalganın n -ninci türden bir elektrona uygulayacağı LORENTZ kuvveti

$$\mathbf{K}_{n,L} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_n}{c} \times \mathbf{B} \right) \cong -e \mathbf{E}$$

den ibâret olur. Şu hâlde monokromatik ve düzlemsel bir elektromagnetik dalganın radyasyon alanının etkisi altındaki n -ninci türden bağlı elektronların hareket denklemi, (VI.7.2) ye binâen, ve

$$\omega_{0n}^2 = k_n/m, \quad \Gamma_n = \frac{2e^2 \omega_{0n}^2}{3mc^2}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

vaz ederek,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} + \Gamma_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} + \omega_{0n}^2 \mathbf{r}_n = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{VI.8.1})$$

olur. Bu denklemin özel bir çözümünün

$$\mathbf{r}_n(t) = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}}{(\omega_{on}^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma_n} \quad (\text{VI.8.2})$$

şeklinde olduğu kolayca tahkik edilebilir.

(VI.8.1) in genel çözümünün açık ifâdesi bu denkleme tekaabül eden homogen denklemin genel çözümüne sağ yanlı denklemin (VI.8.2) ile verildiği gibi bir özel çözümünü ilâve etmekle bulunur. Ancak, homogen denklemin çözümünün $\exp(-\Gamma_n t/2)$ gibi üstel bir çarpan ihtivâ ettiğini görmüştük. Bu çarpan dolayısıyla homogen denklemin genel çözümü çok kısa bir zaman aralığı sonunda varlığını ve etkisini hissettirmeyecek kadar sönmüş olacağından pratik bir değeri haiz değildir.

Öte yandan, belirli bir yaygınlığı haiz bir yük dağılımına tekaabül eden elektrik dipol momentinin ifâdesini (I.4.6) ile vermiştik. $-e$ yüklü noktasal bir tâneceğe tekaabül eden dipol momenti ise, yükün DİRAC distribüsyonu aracılığıyla temsil olunan tek bir noktada yoğunlaşmış olması hasebiyle

$$\mathbf{p}_n = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int \mathbf{r}' [-e \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n)] d^3\mathbf{r}' = -e \mathbf{r}_n$$

şeklinde olacaktır. Buna göre, göz önüne alınmış olan ortamın \mathbf{P} polârizasyon vektörü, N ile ortamda hacim birimi başına toplam elektron sayısını ve f_n ile de $N_n/N = f_n$ yâni birim hacımdaki tüm doğal frekansları ω_{on} olan n - ninci türden elektronların tüm elektronlara oranını göstermek üzere, (VI.8.2) ve (I.4.26) ya binâen

$$\mathbf{P} = \sum_n (-e) N f_n \mathbf{r}_n = \sum_n \frac{N f_n e^2 \mathbf{E}}{m [(\omega_{on}^2 - \omega^2) - i\omega \Gamma_n]} = \chi \mathbf{E} \quad (\text{VI.8.3})$$

olacaktır. (I.4.27) ye göre $\chi = (\epsilon - 1)/4\pi$ olduğundan (VI.8.3) den, göz önüne alınan ortamın ϵ dielektrik katsayısının

$$\boxed{\epsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_n \frac{f_n}{(\omega_{on}^2 - \omega^2) - i\omega \Gamma_n}} \quad (\text{VI.8.4})$$

ifâdesiyle belirleneceği ortaya çıkmaktadır. Bu ifâde ϵ un

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_g(\omega) + i \epsilon_s(\omega)$$

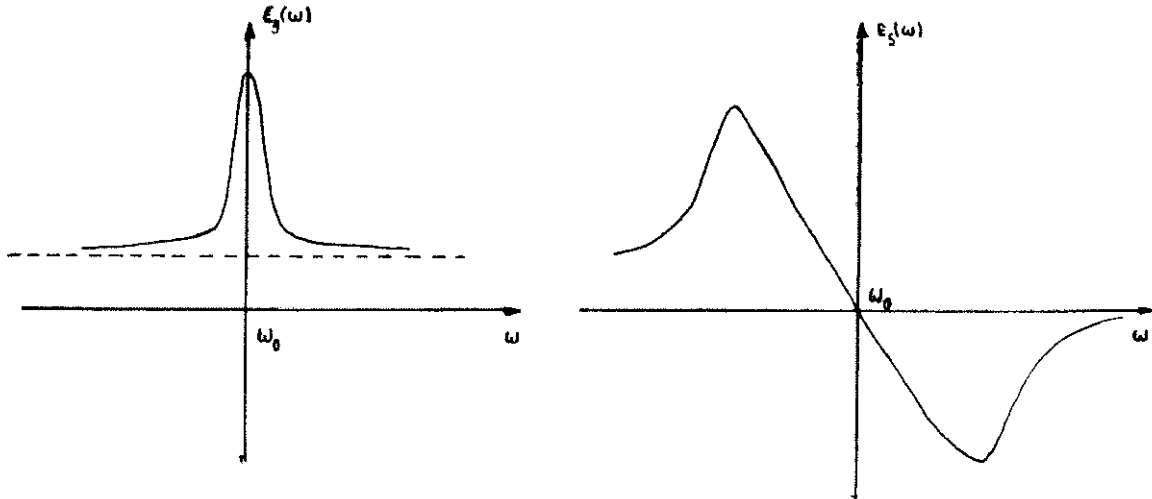
şeklinde ve reel kısmı

$$\epsilon_g(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \sum_n \frac{f_n (\omega_{on}^2 - \omega^2)}{(\omega_{on}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_n^2} \quad (VI.8.5)$$

ile, sanal kısmı da

$$\epsilon_s(\omega) = \frac{4\pi Ne^2}{m} \sum_n \frac{f_n \omega \Gamma_n}{(\omega_{on}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_n^2} \quad (VI.8.6)$$

ile verilen kompleks bir büyüklük olduğuna delâlet etmektedir. Şekil: VI.2 de $\epsilon_g(\omega)$ ve $\epsilon_s(\omega)$ nın değişimleri gösterilmiştir.



Şekil : VI.2

ϵ un ω frekansına bağlı olarak değişimini veren bu son üç ifâdeye dielektrik sâbitinin **dispersiyon bağıntıları** adı verilir. (VI.8.4) den

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon(\omega) = 1$$

olduğu yâni elektromagnetik dalğanın frekansının olağanüstü büyük olduğu hâl-lerde, çarptığı ortamın dielektrik sâbitinin değerinin boşluğun dielektrik sâbitinin değerine gittiği görülmektedir. Eğer $\omega \ll \omega_0$ ise bu sefer de

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \sum_n \frac{f_n}{\omega_{on}^2} \quad (VI.8.7)$$

olur. f_n büyüklüklerine doğal frekansları ω_{on} olan n -ninci türden elektronların **osilâtör şiddetleri** ya da yanlış bir deyimle **osilâtör kuvvetleri** adı verilir.

B) Katı ya da Sıvı Ortamlar Hâli:

Göz önüne alınan ortamın, etkileşmesiz tâneciklerden oluşacak yerde, arala-rındaki COULOMB etkileşmesi ihmâl edilemeyecek kadar birbirlerine yakın tâne-

çiklerden oluşan (yâni katı veyâ sıvı) bir ortam olması hâlinde elektronlar üzerine tesir eden kuvvet artık yalnızca elektronların üzerine gelen monokromatik dalganın ($v/c \ll 1$ yaklaşıklığındaki) \mathbf{E} elektrik alanı değil fakat ortamın polârizasyonu dolayısıyla ortaya çıkan polârizasyonun icrâ ettiği \mathbf{P} kuvveti ile \mathbf{E} nin bileşkesi olur.

N ile gene hacim birimi başına elektron sayısını n ile de bir dA yüzey elemanının normal birim vektörünü göstererek polârizasyonun $-Ne \mathbf{r} \cdot n dA$ adet elektronun dA yüzey elemanını katetmelerine bağlı olduğuna dikkati çekelim. Yüklerin, oluşan polârizasyondan ötürü, ortamın bir yerinden bir başka yerine göçleri başlangıçta nötr olan ortamdaki yükler arasında bir asimetri doğurur.

V gibi bir hacimi kuşatan (A) kapalı yüzeyini katederek V yi terk eden toplam Q yükü \mathbf{P} nin (A) yı kateden akısına eşit olacaktır :

$$Q = \int_{(A)} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dA .$$

V deki hacimsal polârizasyon yük yoğunluğu eğer ρ_P ile gösterilirse Q aynı zamanda

$$Q = - \int_V \rho_P d^3r$$

dir. Son iki bağıntıdan

$$\boxed{\int_{(A)} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho_P d^3r = 0} \quad (VI.8.8)$$

ya da OSTROGRADSKİ-GAUSS bağıntısı aracılığıyla (VI.8.8) den

$$\boxed{\text{div } \mathbf{P} + \rho_P = 0} \quad (VI.8.9)$$

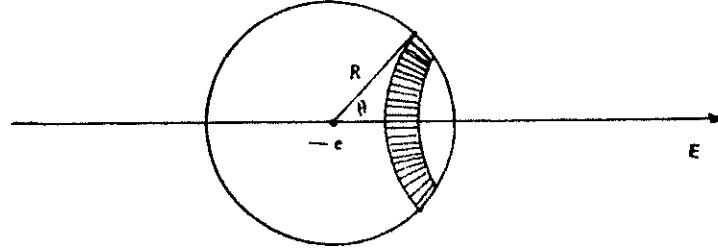
olduğu sonucu çıkar.

Şimdi böyle katı ya da sıvı bir ortamda n -ninci türden bir elektronun üzerine tesir eden polârizasyon kuvvetini hesaplamak için elektron merkezde olmak üzere R yarıçaplı bir küre içindeki polârizasyon kuvvetini hesaplayalım. Kürenin dış yüzeyindeki σ yüzeysel elektrik yükü yoğunluğu (VI.8.8) e göre

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta$$

olacak ve bu yüzeysel yük kürenin merkezindeki elektron üzerine \mathbf{K}_c gibi bir COULOMB kuvveti icrâ edecektir.

Şekil : VI.3 deki gibi bir θ açısına tekaabül eden, θ ile $\theta + d\theta$ arasında kalan küresel şeridin üzerindeki dQ yüzeysel yükü



Şekil VI.3

$$dQ = (2\pi R^2 \sin \theta d\theta) \cdot (P \cos \theta) = 2\pi PR^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$$

dır. Bu yükün kürenin merkezindeki elektron üzerinde \mathbf{E} ye paralel olarak hâsil edeceği kuvvet alanı ise

$$dK = \left(\frac{-e dQ}{R^2} \right) \cos \theta = -2\pi eP \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

dır. Buna binâen \mathbf{E} ye paralel toplam kuvvet alanının şiddeti de

$$K = -2\pi eP \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -e \frac{4\pi}{3} P \quad (\text{VI.8.10})$$

olacaktır. Buna göre (VI.8.1) hareket denklemi, göz önüne alınan hâlde,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} + \Gamma_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} + \omega_{\text{on}}^2 \mathbf{r}_n = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right)$$

ya da $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ den $\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon - 1} \mathbf{P}$ olması dolayısıyla

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} + \Gamma_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} + \omega_{\text{on}}^2 \mathbf{r}_n = -\frac{e}{m} \frac{4\pi}{3} \frac{\epsilon + 2}{\epsilon - 1} \mathbf{P} \quad (\text{VI.8.11})$$

şekline girer. Bunun özel bir çözümü

$$\mathbf{r}_n = -\frac{4\pi e}{3m} \left(\frac{\epsilon + 2}{\epsilon - 1} \right) \frac{\mathbf{P}}{(\omega_{\text{on}}^2 - \omega^2) - i\omega \Gamma_n} \quad (\text{VI.8.12})$$

dir. Öte yandan, aynı zamanda,

$$\mathbf{P} = \sum_n (-e) N f_n \mathbf{r}_n \quad (\text{VI.8.13})$$

olduğu da göz önünde bulundurulursa (VI.8.12) ve (VI.8.13) den

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi N e^2}{3m} \sum_n \frac{f_n}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega \Gamma_n} \quad (\text{VI.8.14})$$

bağıntısı elde edilir. Buna *CLAUSIUS-MOSOTTİ* bağıntısı adı verilmektedir.

Optikteki maddî ortamların çoğu paramagnetik ya da diamagnetik polârizasyon olaylarının zuhur etmediği yâni magnetik duyarlılıkları $\chi_m \cong 0$ olan ortamlardır. Bunun sonucu olarak da bu tür ortamlarda magnetik geçirgenlik

$$\mu = 1 + 4\pi \chi_m \cong 1$$

ve dolayısıyla ortamın boşluğa göre η kırma indisi de sâdece $\eta = \sqrt{\epsilon}$ dan ibârettir.

Buna göre (VI.8.14) *CLAUSIUS-MOSOTTİ* bağıntısı, ortamın boşluğa nazaran haiz olduğu η kırma indisi cinsinden

$$R = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 2} = \frac{4\pi N e^2}{3m} \sum_n \frac{f_n}{(\omega_{0n}^2 - \omega^2) - i\omega \Gamma_n} \quad (\text{VI.8.15})$$

şeklinde ifâde olunacaktır. R ye **kırılma** demek âdet olmuştur.

(VI.8.15) in sağ yanı kompleks bir ifâde olduğuna göre kırma indisi de kompleks olacaktır. Eğer (V.1.11) i, $v = c/\sqrt{\eta\epsilon}$ olduğunu ve optik ortamlar için de $\mu \cong 1$ olduğunu göz önünde bulundurursak kompleks kırma indisini de

$$\bar{\eta} = \eta(1 + ix) \quad (\text{VI.8.16})$$

şeklinde yazarak,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c} \bar{\eta} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\eta} \quad (\text{VI.8.17})$$

yazılabilir. Buna binâen, ve analizi basitleştirmek üzere alan büyüklüklerinin yayılma doğrultusu olarak meselâ z-eksenini seçerek,

$$e^{i(kz - \omega t)}$$

ile orantılı olan bütün alan büyüklükleri (VI.8.16) ve (VI.8.17) dolayısıyla

$$e^{i\left(\frac{2\pi\bar{\eta}}{\lambda}z - \omega t\right)} \cdot e^{-\frac{2\pi\bar{\eta}}{\lambda}xz}$$

ile orantılı olacaklardır. Bu, yayılan elektromagnetik dalgaların (ışığın) şiddetinin z nin fonksiyonu olarak

$$I(z) = I_0 e^{-\frac{4z\bar{\eta}}{\lambda}xz} \quad (\text{VI.8.18})$$

şeklinde üstel olarak azalması demektir. Eğer

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda} x, \quad \tau = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{VI.8.19})$$

ile ortamın, sırasıyla, *absorpsiyon* (soğurma) *katsayısı* ve *optik derinliği* gösterilirse

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} = I_0 e^{-z/\tau} \quad (\text{VI.8.20})$$

olur. (VI.8.19) ifâdesi ortamın soğurma katsayısının kompleks $\bar{\eta}$ kırma indisinin sanal kısmıyla orantılı olduğunu ortaya koymaktadır.

Şimdi (VI.8.15) ile verilmiş olan kompleks kırılmayı reel ve sanal kısımlarına ayıracak olursak

$$\Re(R) = \frac{4\pi Ne^2}{3m} \sum_n \frac{f_n(\omega_{on}^2 - \omega^2)}{(\omega_{on}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_n^2} \quad (\text{VI.8.21})$$

$$\Im(R) = \frac{4\pi Ne^2}{3m} \sum_n \frac{if_n \omega \Gamma_n}{(\omega_{on}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_n^2} \quad (\text{VI.8.22})$$

ifâdeleri bulunur. $|\bar{\eta}| \cong 1$ olduğu yâni kırma indisinin 1 den çok az fark ettiği ortamlar için

$$R = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 2} = \frac{\bar{\eta} + 1}{\eta^2 + 2}, \quad (\bar{\eta} - 1) \approx \frac{2}{3} (\bar{\eta} - 1) \quad (\text{VI.8.23})$$

yazılabilir ve böylece (VI.8.21) ve (VI.8.22) e (VI.8.16) ve (VI.8.23) ün ışığında

$$\eta - 1 = \frac{2\pi Ne^2}{m} \sum_n \frac{f_n(\omega_{on}^2 - \omega^2)}{(\omega_{on}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_n^2} \quad (\text{VI.8.24})$$

$$\alpha = \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{4\pi}{\lambda} \sum_n \frac{f_n \omega \Gamma_n}{(\omega_{on}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_n^2} \quad (\text{VI.8.25})$$

ifâdelerine indirgenirler.

Böylelikle klâsik elektron teorisinin elektromagnetik dalgaların dispersiyonu ile absorpsiyonuna da açıklık getirdiği görülmüş olmaktadır.

VII. BÖLÜM

YÜKLÜ TÂNECİKLERİN ELEKTROMAGNETİK ALANDAKİ HAREKETİ

(VII.1) SÂBİT ELEKTRİK VE MAGNETİK ALANLARDA HAREKET

Yüklü tâneciklerin elektromagnetik alanlardaki hareketlerinin teorisi fiziksel uygulamaları yönünden elektrodinamiğin en önemli bölümlerinden biridir. Tüm elektronik âletlerin, tânecik hızlandırıcılarının, elektron ve proton mikroskoplarının, kütle spektrografisinin, plâzma reaksiyonlarının, termonükleer füzyon araştırmaları için geliştirilen araçların teknolojisinin temeli hep yüklü tâneciklerin elektrik ve magnetik alanların etkisi altındaki hareketlerinin arz ettikleri özelliklere dayanır. Bu özelliklerin iyi bilinmesi astrofizikteki pekçok olayın ve kezâ kozmik ışınların bazı vechelerinin mâkûl bir izah tarzının inşa edilmesinde de vaz geçilmez bir unsurdur.

Biz bu paragrafta sâbit bir elektrik ve sâbit bir magnetik alanın ortak etkisi altında hareket eden m kütleli ve q yüklü bir maddî noktanın (tâneciğin) hareketini genel bir biçimde inceleyeceğiz. Bu durumda tâneciğin üzerine tesir eden kuvvet *LORENTZ* kuvveti olduğundan hareket denklemi

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{VII.1.1})$$

şeklinde olacaktır. Bu denklem,

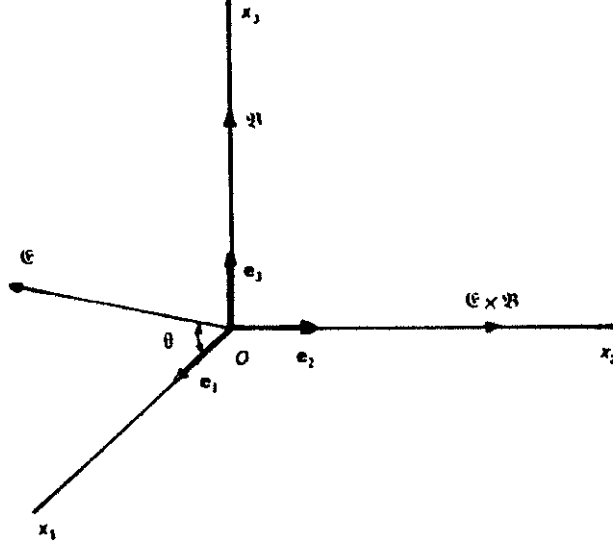
$$\frac{q}{m} \mathbf{E} = \mathfrak{E} = \sum_{i=1}^3 \mathfrak{E}_i \mathbf{e}_i, \quad \frac{q}{m c} \mathbf{B} = \mathfrak{B} = \sum_{i=1}^3 \mathfrak{B}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

vaz ederek

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathfrak{B} \quad (\text{VII.1.2})$$

şekline girer. Bu denklemi kolay bir biçimde çözebilmek amacıyla dik kartezyen koordinatları öyle seçelim ki \mathfrak{B} vektörü \mathbf{e}_3 ve $\mathfrak{B} \times \mathfrak{E}$ vektörü de \mathbf{e}_2 birim vektör-

leri yönünde olsunlar. Eğer tâneciğin $t = 0$ başlangıç ânındaki yervektörü ile hızı biliniyorsa, yâni



Şekil VII.1

$$\mathbf{r}(0) = \sum_{i=1}^3 x_{0i} \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \sum_{i=1}^3 u_{i0} \mathbf{e}_i \quad (\text{VII.1.2})$$

verilmişse (VII.1.1) hareket denklemini rahatlıkla çözebiliriz. Ancak, önce, seçilmiş olan referans sistemi dolayısıyla

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_3 \mathbf{e}_3 = \mathfrak{B} \mathbf{e}_3, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \mathbf{e}_1 + \mathfrak{C}_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{VII.1.3})$$

olduğuna da bir kere dikkati çekelim.

Şimdi (VII.1.1) i bir kere integre ederek

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathfrak{C}t + (\mathbf{r} \times \mathfrak{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{VII.1.4})$$

bulunur. (VII.1.3) başlangıç şartlarından $\mathbf{C} = \dot{\mathbf{r}}(0) - [\mathbf{r}(0) \times \mathfrak{B}]$ olduğu görüldüğünden

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathfrak{C}t + [\mathbf{r}(t) \times \mathfrak{B}] + \dot{\mathbf{r}}(0) - [\mathbf{r}(0) \times \mathfrak{B}] \quad (\text{VII.1.5})$$

olur. Bu denklemin referans sisteminin eksenleri üzerindeki izdüşümleri alınırsa

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \mathcal{E}_1 t + \mathcal{B} x_2(t) + u_{01} - x_{02} \mathcal{B} \\ \dot{x}_2(t) &= -\mathcal{B} x_1(t) + u_{02} + x_{01} \mathcal{B} \\ \dot{x}_3(t) &= \mathcal{E}_3 t + u_{03} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.1.6})$$

bulunur. Buradan derhal

$$x_3(t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_3 t^2 + u_{03} t + x_{03} \quad (\text{VII.1.7})$$

olduğu tesbit edilir.. (VII.1.6) denklem sisteminin diğer iki denklemini de integre etmek için, kolaylık olsun diye referans sisteminin orijini o türlü seçelim ki bu iki denklem mümkün olduğu kadar basitleşsin. Bunun için

$$x_{03} = 0, \quad x_{02} = \frac{u_{01}}{\mathcal{B}}, \quad x_{01} = -\frac{u_{02}}{\mathcal{B}} \quad (\text{VII.1.8})$$

seçmek sùretiyle orijini kaydırmak yeterlidir. Bu takdirde

$$\dot{x}_1(t) = \mathcal{E}_1 t + \mathcal{B} x_2(t) \quad (\text{VII.1.9})$$

$$\dot{x}_2(t) = -\mathcal{B} x_1(t) \quad (\text{VII.1.10})$$

olur. Buradan

$$x_2(t) = \frac{\dot{x}_1(t) - \mathcal{E}_1 t}{\mathcal{B}} \quad (\text{VII.1.11})$$

bulunur. (VII.1.9) un zamana göre türevi alınır da (VII.1.10) aracılığıyla $\dot{x}(t)$ ele-
nirse, bu sefer de

$$\ddot{x}_1(t) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{B} \dot{x}_2(t) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{B}^2 x_1(t)$$

ya da

$$\boxed{\ddot{x}_1(t) + \mathcal{B}^2 x_1(t) = \mathcal{E}_1} \quad (\text{VII.1.12})$$

bulunur. Buradaki $\mathcal{B} = \frac{qB}{mc}$ ye **siklorton frekansı** adı verilir. A ve φ ile, baş-
langıç şartlarına bağlı iki integrasyon parametresini göstererek (VII.1.12) nin çö-
zümü

$$x_1(t) = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} + A \cos(\mathcal{B}t + \varphi) \quad (\text{VII.1.13})$$

olur. Buradan türev alarak elde edilen $\dot{x}(t)$ nin ifâdesini (VII.1.11) e vaz ederek de

$$x_2(t) = -\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} t - A \sin(\mathcal{B}t + \varphi) \quad (\text{VII.1.14})$$

bulunur. Buna göre sâbit elektrik ve magnetik alanlardaki m kütleli ve q yüklü tâneciğin hareketinin parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} + A \cos(\mathcal{B}t + \varphi) \\ x_2(t) &= -\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} t - A \sin(\mathcal{B}t + \varphi) \\ x_3(t) &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_3 t^2 + u_{03} t \end{aligned} \quad (\text{VII.1.15})$$

olurlar.

Şimdi yüklü tâneciğin uzayda izlediği yörüngeyi belirlemek üzere

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathbf{e}_i = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} \mathbf{e}_1 - \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} t \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}_3 t^2 + u_{03} t \right) \mathbf{e}_3 \quad (\text{VII.1.16})$$

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \mathbf{e}_i = A \cos(\mathcal{B}t + \varphi) \mathbf{e}_1 - A \sin(\mathcal{B}t + \varphi) \mathbf{e}_2 \quad (\text{VII.1.17})$$

olmak üzere

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t) \quad (\text{VII.1.18})$$

yazılabileceğine dikkati çekelim. $\mathbf{X}(t)$ nin \mathbf{e}_1 boyunca bileşeni

$$\xi_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} = \text{sâbit}$$

dir. Şu hâlde $\mathbf{X}(t)$ vektörü ($\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) düzlemi içinde kalan bir (P) eğrisi çizmektedir. $\mathbf{X}(t)$ nin diğer

$$\xi_2 = -\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} t \quad \text{ve} \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_3 t^2 + u_{03} t$$

bileşenleri arasında eğer t parametresi elenecek olursa $\mathbf{X}(t)$ vektörünün $\xi_1 = \mathcal{E}_1/\mathcal{B}^2 = \text{sâbit}$ düzleminde çizdiği eğrinin

$$\xi_3 = \left(\frac{\mathcal{E}_3 \mathcal{B}^2}{2 \mathcal{E}_1^2} \right) \xi_2^2 - \left(\frac{u_{03} \mathcal{B}}{\mathcal{E}_1} \right) \xi_2 \quad (\text{VII.1.19})$$

şeklinde, tepe noktası $\xi_2 = u_{03} \mathcal{E}_1 / \mathcal{B} \mathcal{E}_3$, $\xi_3 = -u_{03}^2 / 2 \mathcal{E}_3$ de bulunan ve eksenini de \mathbf{e}_3 e paralel olan bir parabol olduğu anlaşılmış olur.

Buna karşılık $\mathbf{Y}(t)$ vektörü de $z = \text{sâbit}$ düzlemleri üzerine izdüşümü,

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = A^2$$

ile verilen A yarıçaplı bir daire çizmektedir.

Şu hâlde iki hareketin bileşkesi olan yüklü tâneciğin $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektörü de yüklü tâneciğin yörüngesi olarak (VII.1.19) parabolünü eksen olarak kabul eden bir çeşit bükülmüş dairesel bir helis çizecektir.

(VII.2) HAREKETİN ÖZEL HALLERİ

a) Eğer yalnızca sâbit bir \mathbf{E} elektrik alanı mevcûd ise bu takdirde yüklü tâneciğin klâsik mekanikteki eğik atış problemine benzer şekilde $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ düzlemi içinde bir parabol çizeceği kolaylıkla görülür.

b) Eğer magnetik alan ile elektrik alan birbirlerine paralel iseler bu takdirde yalnızca $\mathcal{E}_3 \neq 0$ olacağından (VII.1.15) hareket denklemleri

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= A \cos(\mathcal{B}t + \varphi) \\ x_2(t) &= -A \sin(\mathcal{B}t + \varphi) \\ x_3(t) &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_3 t^2 + u_{03} t \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.2.1})$$

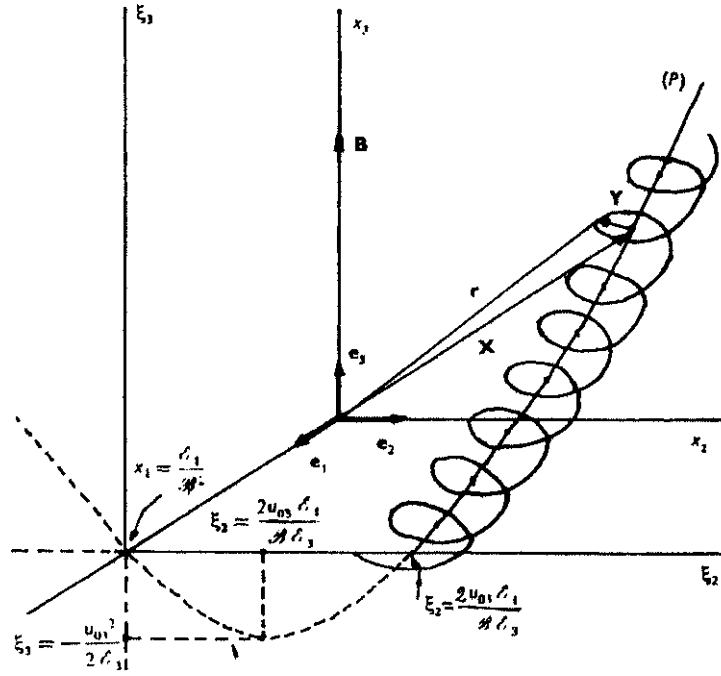
den ibâret olur. Bu takdirde hareket helisimsi (*helikoydal*) bir harekettir; ancak helisin adımları geometrik bir dizi oluştururlar, yâni helisin her adımı bir öncekine nisbetle daha uzun olur. Eğer $\mathcal{E}_3 = 0$ ise yâni yüklü tânecik \mathbf{B} magnetik alanına \mathbf{B} ye paralel bir başlangıç hızıyla giriyorsa bu sefer de (VII.1.15)

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= A \cos(\mathcal{B}t + \varphi) \\ x_2(t) &= -A \sin(\mathcal{B}t + \varphi) \\ x_3(t) &= u_{03} t \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.2.2})$$

ye indirgenir; yâni yüklü tâneciğin yörüngesi, \mathbf{e}_3 ü eksen kabul eden sâbit adımlı bir dairesel helistir.

c) Eğer yalnızca \mathbf{B} magnetik alanı varsa ve yüklü tânecik de \mathbf{B} ye dik bir başlangıç hızını haiz ise yâni $u_{03} \equiv 0$ ise bu sefer de yörüngesinin A yarıçaplı kapalı bir daireden ibâret olacağı (VII.2.2) den derhâl görülür.

d) Eğer \mathbf{E} ile \mathbf{B} birbirlerine dik iseler $\mathbf{E} = E_1 \mathbf{e}_1$ den ibâret olur. Buna göre $\mathbf{Y}(t)$ nin gene, $x_3 = \text{sâbit}$ düzlemleri üzerine izdüşümü dairesel olan bir eğri çizeceği kolaylıkla görülür. Ancak bu hâlde



Şekil VII.2

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathbf{e}_i = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} \mathbf{e}_1 - \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} t \mathbf{e}_2 + u_{03} t \mathbf{e}_3$$

olacağından $\mathbf{X}(t)$ nin $\xi_1 = \mathcal{E}_1/\mathcal{B}^2 = \text{sâbit}$ düzleminde kalacağı ve bu düzlemde

$$\left. \begin{array}{l} \xi_2 = -\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} t \\ \xi_3 = u_{03} t \end{array} \right\} \Rightarrow \xi_3 = -\left(\frac{u_{03}\mathcal{B}}{\mathcal{E}_1}\right) \xi_2 \quad (\text{VII.2.3})$$

gibi (ξ_2, ξ_3) düzleminin orijininin geçen bir doğru çizeceği anlaşılmaktadır. Şu hâlde göz önüne alınan şartlara uyan yüklü tâneceğin hareketi (VII.2.3) doğrusunu eksen kabul eden sâbit adımlı bir helistir.

e) Eğer hem $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ ve hem de $u_{03} = 0$ ise bu takdirde

$$\mathbf{X}(t) = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} \mathbf{e}_1 - \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} t \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{Y}(t) = A \cos(\mathcal{B}t + \varphi) \mathbf{e}_1 - A \sin(\mathcal{B}t + \varphi) \mathbf{e}_2$$

olacağından yüklü tâneciğin yörüngesi ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) düzleminde olacaktır. Yörüngenin parametrik denklemleri bu takdirde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} + A \cos(\mathcal{B}t + \varphi) \\ x_2(t) &= -\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}} - A \sin(\mathcal{B}t + \varphi) \end{aligned} \quad (\text{VII.2.4})$$

den ibâret olurlar. Eğer başlangıç şartları

$$A = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{B}^2} = \frac{mc^2}{q} \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|^2}$$

bağıntısını temin ederlerse (VII.2.4) denklemleri

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= A [1 + \cos(\mathcal{B}t + \varphi)] \\ x_2(t) &= -A [\mathcal{B}t + \sin(\mathcal{B}t + \varphi)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.2.5})$$

ye indirgenirler. Bunlar bir sikloit eğrisinin parametrik gösterilişidir. Şu hâlde yörünge bir sikloit eğrisidir.

(VII.3) BİR MAGNETİK ALANDAKİ HARMONİK OSİLÂTÖR HÂLİ

Üç boyutlu eşyönlü bir harmonik osilâtör, U potansiyel enerjisi

$$U = \frac{1}{2} k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad (\text{VII.3.1})$$

ile verilen m kütleli maddî bir noktanın merkezî bir kuvvet altındaki hareketidir. Böyle bir harmonik osilâtörün bir \mathbf{B} magnetik alanındaki davranışı özellikle atom fiziği açısından büyük önem arz eder; çünkü atomlara ve katı cisimlere bağlı elektronları bir denge durumu etrafında harmonik salınımlar yapan maddî noktalar olarak tasarımlamak uygun bir modellendirmedir. Ayrıca uygulanan bir magnetik alanın etkisi altında bu türlü tasarımlanan elektronların reaksiyonlarının bilinmesi de bu tür ortamlar hakkında bilgi elde etmemize imkân verir. Her ne kadar klâsik elektrodinamik atomsal boyutlarda kesinlikle geçerli değil ise de bu hâlde, magnetik alanın elektronların hareketine etkisinin hiç değilse niteliksel açıdan iyi bir tasvirini vermektedir.

Şu hâlde bir atoma ya da bir katı cisme bağlı olarak harmonik bir salınım yapan bir elektrona meselâ z-ekseni boyunca $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ gibi sâbit bir magnetik alan uygulanırsa elektronun üzerine tesir eden merkezî esnek kuvvetin

$$\mathbf{K}_0 = -kr \quad (\text{VII.3.2})$$

ve LORENTZ kuvvetinin de

$$\mathbf{K}_L = -e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = -\frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = -\frac{eB}{c} (\dot{x}_2 \mathbf{e}_1 - \dot{x}_1 \mathbf{e}_2) \quad (\text{VII.3.3})$$

olması dolayısıyla elektronun hareket denklemleri

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -kr - \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (\text{VII.3.4})$$

şekline girer. $k/m = \omega_0^2$ olmak üzere, (VII.3.4) hareket denklemleri bileşenlerine ayrıştırılırsa

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{eB}{mc} \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \frac{eB}{mc} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.3.5})$$

elde edilir. Buradan, magnetik alanın \mathbf{e}_3 doğrultusunda olmasına rağmen elektronun bu doğrultudaki salınımlarını etkilemediği görülmektedir.

İlk iki denklemin çözümlerini bulmak için

$$\zeta(t) = x_1(t) + ix_2(t) \quad (\text{VII.3.6})$$

olarak tanımlayacağımız kompleks bir fonksiyon ithâl edelim. Buna binâen (VII.3.5) in ilk iki denklemini kısaca

$$\ddot{\zeta} + i \frac{eB}{mc} \dot{\zeta} + \omega_0^2 \zeta = 0 \quad (\text{VII.3.7})$$

şeklinde yazmak mümkün olur. Bu, ikinci mertebeden sâbit katsayılı lineer bir âdi diferansiyel denklem olup buna tekaabül eden karakteristik denklem

$$\alpha^2 + i \frac{eB}{mc} \alpha + \omega_0^2 = 0,$$

ve bunun kökleri de

$$\alpha = i \left[\frac{eB}{2mc} \mp \sqrt{\frac{e^2 B^2}{4m^2 c^2} + \omega_0^2} \right] \quad (\text{VII.3.8})$$

şekline sokulabilir. Eğer magnetik alan

$$\frac{eB}{2m} \ll \omega_0$$

şartını sağlayacak kadar küçükse, ω_L ile **LARMOR frekansı** denilen

$$\omega_L = \frac{eB}{2mc} \quad (\text{VII.3.9})$$

büyükliğini göstermek üzere, (VII.3.8.) ifâdesi

$$\alpha = i(\pm \omega_0 - \omega_L) \quad (\text{VII.3.10})$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdirde (VII.3.7) nin bağımsız iki çözümü

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= C_1 e^{i(\omega_0 - \omega_L)t} \\ \zeta_2(t) &= C_0 e^{i(\omega_0 + \omega_L)t} \end{aligned} \quad (\text{VII.3.11})$$

şeklinde olacaktır. ζ_1 den

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \cos(\omega_0 - \omega_L)t \\ x_2(t) &= C_1 \sin(\omega_0 - \omega_L)t \end{aligned} \quad (\text{VII.3.12})$$

bulunur ki bu, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ düzleminde C_1 yarıçaplı ve

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0 - \omega_L) \mathbf{e}_3 \quad (\text{VII.3.13})$$

açısal hızlı dairesel bir harekete delâlet etmektedir. ζ_2 den de

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_2 \cos(\omega_0 + \omega_L)t \\ x_2(t) &= -C_2 \sin(\omega_0 + \omega_L)t \end{aligned} \quad (\text{VII.3.14})$$

bulunur ki bu da gene $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ düzleminde C_2 yarıçaplı ve

$$\boldsymbol{\omega} = -(\omega_0 + \omega_L) \mathbf{e}_3 \quad (\text{VII.3.15})$$

açısal hızlı bir hareket demektir.

$\mathbf{B} \neq 0$ gibi bir magnetik alanın etkisi altında, bu magnetik alan yok iken \mathbf{B} ye dik bir düzlemde $\boldsymbol{\omega}_0 = \pm \omega_0 \mathbf{e}_3$ açısal hızına sâhip olan elektronun,

$$\delta\boldsymbol{\omega} = -\omega_L \mathbf{e}_3 \quad (\text{VII.3.16})$$

gibi ek bir açısal hızla bir presesyon hareketi yapacağı böylece tesbit edilmiş olmaktadır.

VIII. BÖLÜM

MAGNETOHİDRODİNAMİK

(VIII.1) GİRİŞ

Magnetohidrodinamiğin konusu, çok yüksek değeri haiz iletkenlik katsayısını haiz ve bir magnetik alanın etkisi altındaki bir akışkanda oluşan olayların tasviridir. Böyle bir akışkan erimiş bir metalin oluşturduğu bir ortam olabileceği gibi yıldızların içindeki yoğun ya da zarflarındaki seyrelmiş, iyonlaşmış gazdan oluşan bir plâzma da olabilir. Aslında magnetohidrodinamiğin kökenini, belki de, 1899 da *BİGELOW*'un tam Güneş tutulması esnâsında gözlenen güneş koronasının, birbirini bir şekilde mıknatıslştırılmış bir kürenin magnetik kuvvet çizgilerine benzediğine işâret ederek Güneşin bir büyük mıknatıs olduğu sonucunu çıkarmasına kadar götürülebiliriz.

1908 de *HALE*'in *ZEEMAN* olayından yararlanarak güneş lekelerinin bin gauss mertebesindeki güçlü magnetik alanların egemen olduğu yerler olduğunu ortaya koymasıyla evrendeki gök cisimleri içinde magnetik alana sâhip tek cismin Arz olmadığı da anlaşılmış oldu. Bu, astrofizikte yeni bir çığır açan bir keşif oldu. Magnetohidrodinamiğin temelindeki fiziksel ilkelerin *MAXWELL*'in elektromagnetik teorisinden çok önceleri bilinmelerine rağmen bununla ilgili olaylar, özellikle lâboratuvarda gözlenebilme imkânsızlıkları dolayısıyla, ancak gök cisimleri gibi büyük ölçekte cisimler söz konusu olduğunda gözlenebilir hâle gelmekteydiler. *HALE*'in keşfini, Güneşin yalnız lekeleri dolayısıyla değil fakat daha genel, global bir magnetik alana sâhip olduğunun *BABCOCKS* tarafından ortaya konulması izledi.

Magnetohidrodinamiğin konusunun derinleştirilmesi 1942 de *H. ALFVÉN*'in önce çok yüksek iletkenlik katsayısına sâhip akışkanlarda magnetik alan çizgilerinin **donmuş (!)** olduklarını ve daha sonra da bu tür ortamlarda egemen olan mekanik kuvvetler ile magnetik kuvvetlerin etkileşmesinin ürünü olarak ortaya yepyeni bir türden bir dalga çıktığını göstermesiyle başladı. *ALFVÉN* bu yeni tür dalgalara **magnetohidrodinamik dalgalar** adını verdi.

Magnetohidrodinamik dalgaların gerçekten de var oldukları lâboratuvarda ilk defa 1951 de 10 000 gauss'luk bir magnetik alana t b  tutulan cıva içinde *LINQUIST* tarafından ve sonra da daha ileri bir teknik aracılığıyla 1957 de erimiş sodyum metalinden oluşan bir ortam içinde *LEHNERT* tarafından gösterildi.

1950 de *TELLER* ve *HOFFMANN* magnetohidrodinamik çok dalgalarını incelediler. Daha sonraları Arz magnetizmasını magnetohidrodinamik  er evesi içinde incelemek üzere özellikle *ELSASSER*, *BULLARD* ve *GELLMAN*'ın geliştirdikleri **dinamo teorisi** ortaya  ıktı.

Magnetohidrodinamik, sonradan, termonükleer füzyonu gerçekleştirmek üzere pl zmaların incelenmesi, belirli hacimler içine kapatılması ve kararlılıkları sorunlarının açıklığa kavuşturulması ve bu amaçla geliştirilen araçların tasarımına başarıyla uygulanmıştır.

Biz bu bölümde magnetohidrodinamiğin ancak temel bazı ilke ve sonuçlarına bir giriş takdim etmekle yetineceğiz.

(VIII.2) MAGNETİK ALANIN DONMASI OLAYI

şimdi sâbit bir v hızıyla l miner akımlı, iletkenlik katsayısı çok büyük, sıkıştırılmıyan bir akışkan göz önüne alalım. $v^2/c^2 \ll 1$ olduğunu varsayacağız.

Böyle bir akışkanda oluşan elektrik alanı, v yi e_1 eksenini boyunca almak şartıyla, sâbit bir gözlemci için (VIII.3.12) dönüşüm formülleri uyarınca,

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (\text{VIII.2.1})$$

ile verilecektir. şu hâlde akışkandaki \mathbf{J} elektrik akımının ifadesi de

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right] \quad (\text{VIII.2.2})$$

olacaktır. Eğer bunu

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

MAXWELL denklemiyle terkeb edersek, σ nın çok büyük olmasından ötürü,

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{c}{\sigma} \mathbf{J} \right]} \cong \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{VIII.2.3})$$

bulunur.

Şimdi de akışkanın içinde (A) gibi herhangi bir yüzeyden geçen magnetik akının zamana göre değişimini yâni

$$\frac{d}{dt} \int_{(A)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (\text{VIII.2.4})$$

yı hesaplayalım. Ancak, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3, t)$ şeklinde olabildiğinden, çok değişkenli fonksiyonların türetilmesine ilişkin zincir kuralına göre

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (\text{VIII.2.5})$$

olduğuna dikkati çekelim. Buna göre (VIII.2.4) akı değişimi için

$$\frac{d}{dt} \int_{(A)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{(A)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{(A)} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (\text{VIII.2.6})$$

yazabiliriz. Öte yandan herhangi iki \mathbf{B} ve \mathbf{v} vektörü için

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{VIII.2.7})$$

özdeşliği olduğu bilinmektedir. Ancak, göz önüne aldığımız bu iki vektörün ayrıca özellikleri de vardır. \mathbf{B} nin diverjansı MAXWELL denklemlerine göre sıfırdır: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; öte yandan akışkanın sıkıştırılamayan bir akışkan olması dolayısıyla $\mathbf{v} = 0$ dir. Bu itibarla (VIII.2.7)

$$-\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{VIII.2.8})$$

den ibâret olur. Bu sonuca göre (VIII.2.6) ifâdesi, (VIII.2.3) de göz önünde tutularak,

$$\frac{d}{dt} \int_{(A)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{(A)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\} \cdot \mathbf{n} \, dA \equiv 0 \quad (\text{VIII.2.9})$$

olur; yâni göz önüne alınan akışkan içinde herhangi bir alan içinden geçen magnetik alanın akısı (ya da başka bir deyimle magnetik alanın kuvvet çizgilerinin yoğunluğu) sâbittir. Bu, σ iletkenlik katsayısı çok yüksek olan bir akışkanın içinde magnetik alanın kuvvet çizgilerinin zamandan bağımsız olarak "donmuş" olarak kaldığı ve dolayısıyla akışkanla birlikte sürüklenmekte oldukları şeklinde yorumlanmaktadır.

(VIII.3) MAGNETOHİDRODİNAMİĞİN TEMEL DENKLEMLERİ VE ALFVÉN DALGALARI

Göz önüne alınan akışkanın birim hacmi üstüne tesir eden kuvvetler, eğer akışkanın viskozitesi olmadığı varsayılırsa, yalnızca basınç kuvveti ile magnetik

alanın *LORENTZ* kuvveti ve bir de gravitasyon kuvvetinden ibâret olacaktır. Buna göre ve ρ ile akışkanın hacim birimi başına kütlesini ve p ile de basıncı göstererek

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \rho \mathbf{g} \quad (\text{VIII.3.1})$$

hareket denklemi elde edilmiş olur. Burada \mathbf{g} ile gravitasyonun ivme vektörü gösterilmektedir.

\mathbf{D} öteleme akımının zamana göre türevinin \mathbf{J} yanında ihmâl edilebilecek kadar küçük olduğunu yâni *MAXWELL* denklemlerinde

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\mu}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (\text{VIII.3.2})$$

yazılabileceğini de $\rho \mathbf{g}$ gravitasyon kuvvetinin de ψ gibi bir potansiyelden türediğini varsayarak (VIII.3.1) denklemi

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla (p + \psi) - \frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{VIII.3.3})$$

şeklini alır. Bu denklem akışkanın

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{VIII.3.4})$$

süreklilik denklemi ve (VIII.2.3) ile verilmiş olan

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{VIII.3.5})$$

ile birlikte, göz önüne alınan magnetohidrodinamik ortamın hareketini ve özelliklerini tasvir eder. Ancak bu tasvirin tam olması için bir de buna, akışkanın basıncını yoğunluğuna bağlayan bir termodinamik hâl denkleminin ilâvesi gereklidir.

Şimdi, göz önüne almış olduğumuz viskozitesiz ve mükemmel iletken akışkanın \mathbf{e}_3 eksenini boyunca yönlendirilmiş bir biçimde bir \mathbf{B}_0 magnetik alanının etkisi altında olduğunu varsayalım. \mathbf{B}_0 da vukuu bulan pertürbasyonu \mathbf{b} vektörüyle gösterelim. Bu pertürbasyonun b^2 li terimleri ihmâl edecek kadar küçük olduğunu varsayacağız. Ayrıca *MAXWELL* denklemleri dolayısıyla da

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{VIII.3.6})$$

olacaktır. Eğer \mathbf{v} yi de, v^2 ya da bv çarpımları ihmâl edilebilecek kadar küçük kabul edecek olursak (VIII.3.3) yaklaşık olarak

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cong -\nabla \left(p + \psi + \frac{B^2}{8\pi\mu} \right) + \frac{B_0}{4\pi\mu} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_3} \quad (\text{VIII.3.7})$$

şekline girer. Burada $B^2/8\pi\mu$ nün fazladan bir basınç rolü oynadığı görülmektedir; bu büyüklüğe **ortamın magnetik basıncı** adı verilir.

(VIII.3.7) nin diverjansını alırsak, akışkanın sıkıştırılmayan bir akışkan olması özelliğinin $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ olmasıyla karakterize edildiğini göz önünde tutarak,

$$\nabla^2 \left(p + \psi + \frac{B^2}{8\pi\mu} \right) = 0 \quad (\text{VIII.3.8})$$

elde edilir; yâni $[p + \psi + (B^2/8\pi\mu)]$ büyüklüğü LAPLACE denkleminin çözümüdür.

Eğer göz önüne alınan akışkanın sonsuz yaygınlıkta olduğu kabul edilirse (VIII.3.8) in, sonsuz dâhil, her yerde regüler olan çözümü

$$p + \psi + \frac{B^2}{8\pi\mu} = \text{sabit}$$

dir. Buna binâen (VIII.3.7)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\mu} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_3} \quad (\text{VIII.3.9})$$

e indirgenir. Diğer taraftan $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ olması şartı altında (VIII.3.5) in de, (VIII.2.7) yi göz önünde tutup $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ve $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ olduğunu hatırlayarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \\ &= -v \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_1} + [(\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \cdot \nabla] \mathbf{v} \\ &\cong B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.10})$$

bulunur. \mathbf{v} ya da \mathbf{b} yi (VIII.3.9) ve (VIII.3.10) arasında elemek sûretiyle

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial x_3^2} = \frac{4\pi\mu\rho}{B_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_3^2} = \frac{4\pi\mu\rho}{B_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \quad (\text{VIII.3.11})$$

şeklinde iki dalga denklemi bulunur ki buradan da, göz önüne alınan ortamda ve vaz olunan şartlar çerçevesi içinde gerek magnetik alanın gerekse hızın pertürbasyonlarının

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\mu\rho}} \quad (\text{VIII.3.12})$$

hızıyla yayılan dalgalar olarak yorumlanabilecekleri sonucu çıkmaktadır. Bu dalgalara **ALFVÉN dalgaları** ya da **magnetohidrodinamik dalgalar** adı verilmektedir. (VIII.3.12) ile verilen yayılma hızı da **ALFVÉN hızı** adını almaktadır. Görüldüğü gibi **ALFVÉN dalgaları** yalnızca magnetik alanın şiddeti ile maddî ortamın yoğunluğuna bağlı olan tāmamen magnetohidrodinamik bir olaydır.

Eğer akışkan olarak oda sıcaklığındaki cıva ($\mu = 1$) göz önüne alınırsa **ALFVÉN dalgalarının** cıva içindeki hızları $V_A = B_0$ (gauss)/13.1 cm/san olur. Ses hızının $1,45 \cdot 10^5$ cm/san olduğu düşünülürse ses hızı mertebesinde hıza sâhip bir **ALFVÉN dalgasını** lâboratuvarda üretebilmek için 10^6 gauss mertebesinde magnetik alanlara ihtiyaç olduğu görülmektedir.

Ancak, astrofizik problemleri söz konusu olduğunda hem yıldızların haiz oldukları büyük magnetik alanlar ve hem de söz konusu ortamların olağanüstü seyrelmiş gazlardan (ya da plâzmadan) oluşmasından ötürü **ALFVÉN dalgalarının** yayılma hızları daha yüksek olabilmektedir. Bir örnek vermiş olmak için Güneşin fotosferinde $V_A = 10^3 B_0$ cm/san ses hızının ise 10^6 cm/san mertebesinde olduğunu söyleyelim.

İÇİNDEKİLER

<i>İTHAF</i>	V
<i>ÖNSÖZ</i>	VII

I. BÖLÜM

MAXWELL TEORİSİNİN TEMELLERİ

(I.1)	Fizikte «alan» kavramı ve klâsik elektrodinamiğin geçerlilik sınırları	1
(I.2)	<i>Coulomb</i> kaanûnu ve elektrostatik	5
(I.3)	Elektrostatik alanın korunumlu olma özelliği	8
(I.4)	Makroskopik elektrostatığın ilkeleri	12
(I.5)	<i>BIOT - SAVART</i> kaanûnu ve magnetostatik	18
(I.6)	Vektörel potansiyel kavramı	22
(I.7)	Makroskopik magnetostatığın ilkeleri	25
(I.8)	<i>FARADAY</i> 'ın indüksiyon kaanûnu	30
(I.9)	<i>MAXWELL</i> denklemleri	31
(I.10)	<i>MAXWELL</i> denklemleriyle ilgili bazı sınır şartları	33

II. BÖLÜM

ELEKTROMAGNETİK ALAN VE LAGRANGE FORMALİZMİ

(II.1)	Dalga yayılım denklemleri	38
(II.2)	<i>D'ALEMBERT</i> denkleminin çözümü	43
(II.3)	İlerlemiş potansiyeller sorunu	48
(II.4)	<i>HERTZ</i> potansiyeli	50
(II.5)	Elektromagnetik alanın <i>LAGRANGE</i> ve <i>HAMILTON</i> formalizmi	51

III. BÖLÜM**MAXWELL DENKLEMLERİNİN İNVARYANS ÖZELLİKLERİ**

(III.1)	<i>GALİLE</i> dönüşüm grubu	56
(III.2)	<i>LORENTZ</i> dönüşüm grubu	57
(III.3)	Elektromagnetik alan büyüklüklerinin dönüşüm kuralları	61

IV. BÖLÜM**ELEKTROMAGNETİK ALANIN KORUNUM KANUNLARI**

(IV.1)	Enerjinin korunumu	67
(IV.2)	İmpulsun korunumu	70

V. BÖLÜM**DÜZLEMSEL ELEKTROMAGNETİK DALGALAR**

(V.1)	İletken olmayan ortamlarda elektromagnetik dalgaların yayılması	73
(V.2)	Düzlemsel dalgaların polârizasyonu	79
(V.3)	Düzlemsel elektromagnetik dalgaların yansıma ve kırılması	82
(V.4)	İletken ortamlardaki düzlemsel dalgalar	84
(V.5)	Geometrik optiğin temelleri	87

VI. BÖLÜM**KLÂSİK ELEKTRON TEORİSİNE GİRİŞ**

(VI.1)	Noktasal bir yükün potansiyel alanı	94
(VI.2)	Elektronun elektromagnetik alanı	97
(VI.3)	Elektronun radyasyonu	99
(VI.4)	Radyasyonun tepki kuvveti	102
(VI.5)	Elektronun elektromagnetik kütlesi	103
(VI.6)	Radyasyon yayımı	104
(VI.7)	Elektronun bir elektromagnetik dalga ile etkileşmesi.	106
(VI.8)	Dielektrik ortamların dispersiyon teorisine giriş.	111

VII. BÖLÜM**YÜKLÜ TÂNECİKLERİN
ELEKTROMAGNETİK ALANDAKİ HAREKETİ**

(VII.1)	Sâbit elektrik ve magnetik alanlarda hareket	118
(VII.2)	Hareketin özel halleri	122
(VII.3)	Bir magnetik alandaki harmonik osilâtör hâli	124

*VIII. BÖLÜM***MAGNETOHİDRODİNAMİK**

(VIII.1) Giriş	127
(VIII.2) Magnetik alanın donması olayı	128
(VIII.3) Magnetohidrodinamiğin temel denklemleri ve <i>ALFVÉN</i> dalgaları	129
<i>İÇİNDEKİLER</i>	133
