

TEORİK FİZİK DERSLERİ

Dizinin Yöneticisi : AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

"Teorik Fizik Dersleri" şimdilik 6 sı Lisans ve 6 sı da Lisansüstü düzeyinde 12 cild metin kitabı ile 15 cild de çözümlü problem kitabından oluşan bir dizi olarak plânlanmış bulunmaktadır.

METİN KİTAPLARI :

Lisans Düzeyinde

1. Fizikte Matematik Metotlar; A.Y.Özemre (1. baskısı İTÜ Yayınları No. 826, 1971; genişletilmiş 2. baskısı hazırlanıyor)
2. Klâsik Teorik Mekanik; A.Y.Özemre (İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları No. 132 1976)
3. Kuantum Mekanığı
4. Elektromagnetik Teori
5. Isı Teorisi; A.Y.Özemre (İst. Üniv. Fen Fak. Yay. BASKIDA)
6. Özel Rölâtivite Teorisi

Lisansüstü Düzeyinde

7. Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri; A.Y.Özemre (HAZIRLANIYOR)
8. Kozmoloji; A.Y.Özemre (HAZIRLANIYOR)
9. İleri Kuantum Teorisi
10. Çekirdek Teorisi; Ç.Cansoy (İst.Üniv. Fen Fak. Yay. BASKIDA)
11. Alan Teorilerine Giriş
12. Temel Tâneçikler Teorisi

ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTAPLARI :

Dizinin tasarlanan 15 adet Çözümlü Problem Kitabından hâlen baskıda ya da hazırlanmakta olanlar şunlardır:

- 1/I Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı, Cild I; E.Rıza ve G.Akdeniz (HAZIRLANIYOR)
- 2/I Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı; A.Y.Özemre ve Ş.Zebitayan (HAZIRLANIYOR)
- 5/I Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı; A.Y.Özemre ve E. Rıza (İst.Üniv.Fen Fak. Yay. BASKIDA)
- 10/I Çekirdek Teorisi Çözümlü Problem Kitabı; Ç.Cansoy (HAZIRLANIYOR)

TEORİK FİZİK DERSLERİ

CİLD 2

KLÂSİK TEORİK MEKANİK

Prof. Dr. AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

**İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Teorik Fizik Kürsüsü Başkanı**

**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ**

====1976====

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
YAYINLARINDAN

Sayı : 2224

FEN FAKÜLTESİ

Sayı : 132

TEORİK FİZİK KÜRSÜSÜ

Sayı : 1

© 1976 - Her hakkı İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesine aittir.

Bu kitabın basımı İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevinde Eylül 1976 da tamamlanmıştır.

Bu Kitabımı
Doğumunun 55. Yıldönümünde
Azíz ve Muhterem Hocam
Prof. Dr. FEZA GÜRSEY'e
Saygılarımla İthaf Ediyorum

YAZARIN ESERLERİ

- * **Çözülmüş Atom ve Reaktör Fiziği Problemleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1962 (Çeviri).
- * **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1.Cild**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
- * **Nötronların Difüzyon Teorisi, 2.Cild**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
- * **Geometrik Eşitsizlikler**; Türk Matematik Derneği, 1963. (Çeviri).
- * **Contributions à la Théorie de la Diffusion des Neutrons Dépendant du Temps**; İTÜ Nükleer Enstitüsü, 1964.
- * **Kuantum Mekaniği Matematigine Giriş**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1965 (Çeviri).
- * **Reaktör Kritikliğinin Nötronların Difüzyon Teorisine Göre Analitik Vecheleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
- * **Hızlı Reaktörlerin Fiziksel Analizine Giriş**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
- * **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild (düzeltilmiş ikinci baskı)**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969.
- * **Nükleer Reaktörler Fiziğinin Matematik Temelleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969 (Çeviri).
- * **Çağdaş Fiziğe Giriş Çözümlü Problem Kitabı (Şehsuvar Zebitayan ile birlikte)**; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
- * **Çağdaş Fiziğe Giriş Ders Kitabı, 1. Cild**; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
- * **Fizikte Matematik Metotlar Ders Kitabı**; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1971.
- * **Klâsik Teorik Mekanik, İst. Üniv. Fen Fak., 1976.**
- * **Isı Teorisi, İst. Üniv. Fen Fakültesi, (Baskıda)**
- * **Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı (Emine Rıza ile birlikte), (Baskıda)**

HAZIRLANMAKTA OLANLAR

- * **Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı (Şehsuvar Zebitayan ile birlikte).**
- * **Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri**
- * **Kozmoloji**

ERRATA

(* işâretli satırlar sayfanın altından itibaren sayılacaktır).

| S a y f a | S a t ı r | Y a n l ı Ő | D o ğ r u |
|-----------|-----------|------------------------------------|------------------------------------|
| 8 | 9* | $z = r = \cos \theta$ | $z = r \cos \theta$ |
| 45 | 11* | p : ışınsal | e : ışınsal |
| 46 | 1 | $= \rho(\pi) \overline{F_1 A_1}$ | $\rho(\pi) = \overline{F_1 A_1}$ |
| 47 | 2 | ifâdeye | ifâdeyi |
| 96 | 17 | $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}$ | $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}$ |
| 117 | 9* | yok | yol |
| 118 | 3* | V ile... | V ile ... |
| 118 | 2* | test parçacığı | test tâneciği |
| 119 | 2 | test parçacığı | test tâneciği |
| 135 | 2* | $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ | $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ |
| 180 | 1 | keyfî bir | keyfî skaler bir |
| 254 | 1* | r - nin... | r nin... |

ÖNSÖZ

Bu kitap 1973-1976 yılları arasında her yıl, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsünde 5. yarıyıl lisans öğrencilerine haftada 4 saat ders ve 2 saat de tatbikat olmak üzere okutmuş olduğum bir yarıyıllık "Klâsik Teorik Mekanik" dersinin notlarının derlenip toparlanmasıyla meydana gelmiştir. Bu itibarla da, işlediği konular bakımından, bir orijinalliği olmayan bir ders kitabıdır.

Ancak kitabın, şimdiye kadar türkçe olarak yayınlanmış mekanikle ilgili diğer kitaplardan görüş açısı, amaç, yaklaşım ve tertib bakımından farklı olduğu gözden kaçmayacaktır, sanırım.

Bu kadar kısıtlı bir zaman süresi içinde, öğrenciye, daha sonraki teorik fizik derslerine de temel olması zorunlu olan bir mekanik dersini tedris ederken işlenen konuların, boğucu teferruata düşmeden, tütizlikle seçilmesi vaz geçilmez bir zarûrettir. Bu sebeptendir ki işlenen konuların sayısı bile bile çok sınırlı tutulmuş; ve daha birçokları yanında meselâ: "burgular teorisi", "pertürbasyonlar teorisi", "adyabatik değişkenler", "küçük titreşimler", "sürekli ortamların mekaniğine giriş" *ilh...* gibi konulara hiç değinilmemiştir.

Derslerin tertibinde şartların müsaadesi nisbetinde iki husus üzerinde ısrarla durulmuştur. Bunlardan biri (öğrencinin daha sonra izleyeceği Teorik Fizik derslerinden Rölâtivite Teorisi dersine girişi hazırlamak üzere) dinamiğin dayandığı temel kavramların ve ilkelerin eleştirisi; diğeri ise (çağdaş Teorik Fizikte vaz geçilmez bir unsur ve çok kıymetli bir yol gösterici ilke olarak ortaya çıkan) *denklemlerin simetri ve invaryans özelliklerinin* incelenmesidir.

Özellikle bu sonuncu hususla ilgili olarak, *Lagrange* formalizmine dayanan bütün alan teorilerinin temellerinden biri olan **Noether teoremine** de temas edilmiş; ancak gerek *Emmy Noether*'in 1918 deki orijinal makalesinin, gerekse bununla ilgili literatürün muhtevasını bu düzeydeki elemanter bir ders kitabına olduğu gibi aktarma söz konusu olamayacağından teoremin isbatının kolay izlene-

bilir ve mümkün olduğu kadar sâde bir şekilde takdimine gayret edilmiş bulunmaktadır.

Kinematik, Dinamik ve Analitik Mekanik diye üç kısımdan oluşan kitap on-bir bölüm ihtivâ etmektedir. Analitik Mekanik kısmının, bundan sonra izlenecek olan Kuvantum Mekaniği, Isı Teorisi, Elektrodinamik *ilh...* gibi derslerin, formel strüktür açısından, öğrenci tarafından rahatlıkla özümlelenebilmesini mümkün kılacak organik bir biçimde işlenmesine ve takdimine özen gösterilmiştir. Bu arada hareket denklemlerinin simetri ve invaryans özellikleri yanında mekaniğin varyasyon ilkeleri, *Poisson* parantezleri, *Liouville* teoremi, *Hamilton-Jacobi* teorisi ve madde-dalga düalitesinin temelindeki dalga denkleminin çıkarılışı da hep bu amaçla takdim edilmiştir. Bu itibarla kitabın aziz ve muhterem hocam Fikret Kortel'in İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsünde kurmuş ve 1956 danberi geliştirmiş olduğu öğretim tradisyonunun evrim çizgisinde bulunduğunu da ifade etmek isterim.

Kitap her bölümün sonunda yer alan toplam 205 alıştırmaya ve problem ihtivâ etmektedir. Bunların ayrıntılı çözümleri "**Teorik Fizik Dersleri, Cild: 2/I; Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı**" adı altında yakında yayınlanacaktır.

Kanaatimce bu kitap tertibinde, uslûbunda ve takdimindeki eksiklik ve aksaklıkları dolayısıyla her yönden daha iyisinin yazılması hususunda bir tahrik unsuru olduğu zaman asıl amacına ulaşmış, vazifesini bihakkın ifâ etmiş olacaktır. O zamana kadar ise kitabın fizik lisansı öğrencilerine gene de yararlı olabileceğini ümit etmekteyim.

Bu kitabı yazma gücünü lûtfettiği için **CENÂB-I HAK**'ka hamd ve şükrederim.

Aziz eşim ve kızıma kitabın yazılışı esnâsında göstermiş oldukları müşfik sabır ve anlayış için; Teorik Fizik Kürsüsü sekreteri Mansûre Altıngiray'a manüskrinin daktilo edilmesinde gösterdiği sür'at ve dikkat için; Öğr.Gör.Dr. Şehsuvar Zebitayan'a manüskriyi dikkatle okuyup bir takım düzeltmelere ve bazı vuzuhsuzlukların izâlesine yol açan yapıcı eleştirileri ve ayrıca da basım süresince provaların tashihinde gösterdiği titiz yardım için; nihâyet, başta mürettip Tayfur Lâçin olmak üzere kitabın basımında büyük emekleri geçmiş olan İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevinin güler yüzlü ve titiz bütün elemanlarına ve Basımevi Müdürü Mehmet Mardinligil'e samimî teşekkürlerimi burada ifade etmeyi bir borç bilirim.

Mekanik zevkini bana sayın hocam Prof. Dr.Fezâ Gürsey'in 1954-1955 ders yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Enstitüsünde vermiş olduğu Rasyonel Mekanik dersi aşlamıştır. Bu kitap bu şâhâne derse ve bu derste tutmuş olduğum iki cild nota, bu bakımdan, çok şey borçludur. Bu itibarla, bu kitabımı bir talebenin hocasına karşı şükranının bir ifâdesi olarak doğumunun 55. yıldönümünde aziz ve muhterem hocam Fezâ beye en hâlis dileklerle ithaf ediyorum.

BİRİNCİ KISIM

KİNEMATİK



I. BÖLÜM

NOKTANIN KİNEMATİĞİ

(I.1) NOKTANIN UZAYDA BELİRLENMESİ

Kendisine şimdilik hiç bir dinamik özellik atfetmeyeceğimiz bir noktanın uzaydaki konumunun ve, sebepleri göz önüne alınmaksızın, hareketinin belirlenmesini ve incelenmesini mümkün kılan bilim dalına "Noktanın Kinematığı" adı verilir.

Şu hâlde Noktanın Kinematığının başlıca amacı noktanın uzaydaki konumunu matematiksel bir biçimde belirlemektir. Noktanın gözlenebilmesi mümkün olan bütün kinematik özelliklerinin matematiksel olarak incelenebilmesi için yararlanılan uzay üç boyutlu ÖKLİT (*EUCLIDES*) uzayı ile bunun kapsadığı alt uzaylardır. Meselâ düzlem ve küre yüzeyi üç boyutlu ÖKLİT uzayının kapsadığı, sırasıyla, biri iki boyutlu bir ÖKLİT uzayı diğeri ise iki boyutlu bir RIEMANN uzayıdır. Bir ÖKLİT uzayı ile bir RIEMANN uzayı arasındaki yapısal fark bu uzayların *metrik yapıları* (yâni birbirine sonsuz yakın herhangi nokta çifti arasındaki uzaklığın karesinin bu uzaylardaki matematiksel ifâdeleri) arasındaki şekil farkından ileri gelmektedir. Bu husus zâten Fizikte Matematik Metotlar isimli kitabımızda derinliğine incelenmişti. İleride bu noktaya değinerek kısa bir açıklamada da bulunacağız.

Şimdi biz üç boyutlu bir ÖKLİT uzayında bir noktanın konumunu belirlemek üzere en çok yararlanılan bazı yöntemleri gözden geçireceğiz.

(I.2) DİK REFERANS SİSTEMLERİ

Bir noktanın uzaydaki konumunu belirlemek üzere kullanılan ölçüm süreçlerine dayanak olan geometrik sistemlere *referans* veyâ *koordinat sistemleri* denir. Meselâ düzlemde dik iki eksen göz önüne alındığında bir noktanın bu eksenlere göre konumunun belirlenmesi, noktanın eksenlere uzaklıklarını ifâde eden iki sayı aracılığıyla olur. Bu sayı çiftine noktanın *düzlem kartezyen koordinatları* adı verilir.

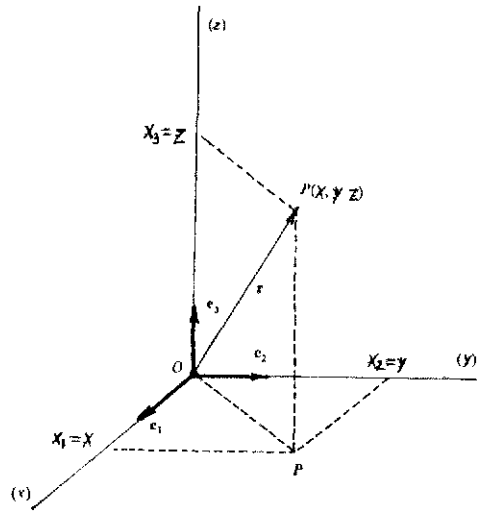
Aynı şekilde, bir şehir plânındaki yollar da yukarıdaki misâldekinden daha girift bir referans sistemi olarak düşünülebilirler. Kezâ coğrafi enlem ve boylamlar da Arz üzerindeki bir noktanın coğrafi koordinatlarını belirlemek üzere seçilmiş uygun bir referans sistemi oluştururlar.

Referans sistemleri arasında bazıları kinematik problemlerinin formüle edilmeleri ve çözümlenmelerinde pratik bakımdan uygunluk ve kolaylık sağladıklarından bunların geometrik özellikleri üzerine özel bir dikkatle eğilmek gereklidir.

(I.2a) DİK KARTEZYEN REFERANS SİSTEMİ

Birbirlerine dik üç e_i ($i = 1, 2, 3$) birim vektörünün doğrultularının oluşturduğu koordinat eksenlerine *dik kartezyen referans sistemi* adı verilir.

Uzaydaki bir P noktasının koordinatları, P nin koordinat yüzeylerine uzaklıklarından ibârettir. Böylece her P noktası bir (x, y, z) sayı üçlüsüyle belirlendiği gibi her (x, y, z) sayı üçlüsüne de tekaabül eden bir ve bir tek nokta vardır.



Şekil : I.1 — Dik kartezyen referans sisteminde birim taban vektörleri ve bir noktanın koordinatları.

Orijini referans sisteminin O orijini ve ucu da P noktası olan $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ vektörü, P nin x, y, z koordinatlarının $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ şeklinde fonksiyonu olan geometrik bir büyüklüktür. \mathbf{r} ye P noktasının *yervektörü* denir. Şüphesiz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

yazılır. Eğer koordinat eksenlerine yeni isimler takar da, meselâ

$$x = x_1, \quad y = x_2 \quad \text{ve} \quad z = x_3$$

dersek

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \quad (\text{I.2a.1})$$

yazılır. P noktasının orijine olan $d(\text{OP})$ uzaklığı \mathbf{r} yervektörünün uzunluğundan başka bir şey olmayıp

$$d(\text{OP}) = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$$

dir.

(I.2a.1) den diferansiyel alacak olursak, \mathbf{e}_i birim taban vektörlerinin sâbit olmalarından ötürü,

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 dx_i \mathbf{e}_i \quad (\text{I.2a.2})$$

bulunur. Bu ifâdenin kendisiyle skaler çarpımı olan

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|^2 = ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{I.2a.3})$$

de \mathbf{r} ve $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ yervektörlerinin temsil ettikleri birbirlerine sonsuz yakın iki nokta arasındaki ds uzaklığının karesinin bu referans sistemindeki ifâdesi olur.

(I.2a.3) ifâdesindeki δ_{ij} KRÖNECKER sembolü bilindiği gibi

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

özelliğini haizdir.

Dik kartezyen referans sistemindeki sonsuz küçük hacim elemanı da

$$dV = dx dy dz = dx_1 dx_2 dx_3$$

dir.

Fiziksel evrende somut bir gerçeğe tekaabül etmemekle beraber her bir bileşeni bağımsız bir değişken olarak düşünülen ve $n > 3$ adet bileşeni haiz olan yervektörlerini,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2a.4})$$

şeklinde ve birbirlerine ikişer ikişer dik oldukları yâni $e_i e_j = \delta_{ij}$ bağıntılarını gerçekledikleri kolayca görülen n adet birim taban vektörü aracılığıyla

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

şeklinde tanımlamak mümkündür.

Böylece tanımlanmış olan \mathbf{r} yervektörünün n boyutlu bir vektör olduğu ve (I.2a.4) birim vektörlerinin de n boyutlu bir ÖKLİT uzayının birbirlerinden lineer bağımsız n birim vektörden oluşan taban vektörleri takımını teşkil ettikleri söylenir.

Böylece tanımlanan bu n boyutlu ÖKLİT uzayında birbirlerine sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesi, (I.2a.3) ifâdesine benzer şekilde,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{I.2a.5})$$

ifâdesiyle verilir.

Eğer n boyutlu bir uzayda sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesi $g_{ij} = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere bağımsız koordinatların fonksiyonları olan bir takım katsayılar aracılığıyla

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{I.2a.6})$$

şeklinde ise ve g_{ij} katsayılarını da δ_{ij} sâbit değerlerine indirgeyecek hiç bir sürekli koordinat dönüşümü yoksa, (I.2a.6) ifâdesiyle karakterize edilen uzaya n boyutlu RIEMANN uzayı adı verilir. Bu takdirde bu uzayı oluşturan \mathbf{e}_i birim taban vektörleri takımının da (I.2a.4) şekline indirgenemeyeceği gösterilir.

$n > 3$ boyutlu uzay kavramı pekçok fizik teorisinde uyumlu bir matematiksel iskelet oluşturmak ve özellikle fiziksel olayları çelişkisiz bir geometrik dil aracılığıyla inceleyebilmek bakımından büyük bir pratik yarar sağlar. (n boyutlu uzayların geometrik özellikleri için bk. Ahmed Yüksel ÖZEMRE; Fizikte Matematik Metotlar, I. ve II. Bölümler).

(I.2b) DİK SİLİNDİRİK REFERANS SİSTEMİ

Bir dik kartezyen referans sistemiyle bir dik silindirik referans sistemi arasındaki bağıntı, bir P noktasının her iki sistemde de haiz olduğu koordinatlar arasındaki bağıntılarla ortaya konur. P noktasının dik silindirik referans sistemine göre konumu P nin (x, y) düzlemine uzaklığı olan z kotu; P nin bu düzlem üzerindeki P' izdüşümünün O orijinine olan ρ radyal (ışınsal) uzaklığı ve OP' nün (x) eksenine yaptığı θ azimüt açısıyla belirlenir.

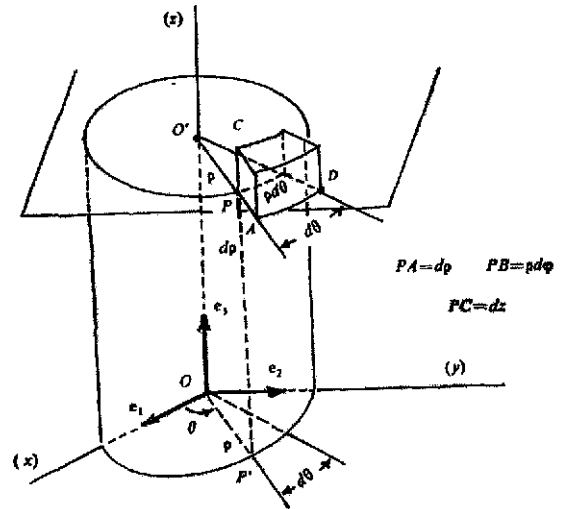
(Şekil : I.2) den $P(x, y, z)$ ve $P(\rho, \theta, z)$ arasındaki ilişki kolayca çıkartılır, ve

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (I.2b.1)$$

olduğu veya, ters dönüşüm söz konusu olduğunda da,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad (I.2b.2)$$

bağıntılarının geçerli oldukları görülür.



Şekil : I.2 — Dik silindirik referans sisteminde ρ radyal uzaklığı, θ azimüt açısı ve z kotunun anlamları: elemanter hacmin hesaplanması.

Eğer nokta (x, y) düzleminde ise referans sistemi *kutupsal referans sistemine* indirgenmiş olur ($z = 0$).

Silindirik referans sisteminde koordinat yüzeylerinin mâhiyetini araştırmak istersek $\rho = \lambda = \text{sâbit}$ ile ekseri (z) olan dik silindir yüzeyleri; $\theta = \mu = \text{sâbit}$ ile (x, y) düzlemine dik olan ve (z) eksenini boyunca kesişen düzlemler ve $z = \nu = \text{sâbit}$ ile de (x, y) düzlemine paralel düzlemler elde ederiz. $P(\rho, \theta, z)$ noktası, böylece, bu üç cins koordinat yüzeyinin ortak kesim noktasıyla belirlenmiş olur.

Dik silindirik bir referans sisteminde dV hacim elemanını hesaplamak için her bir değişkene sonsuz küçük bir artış vererek ortaya çıkan ve birinci mertebeden sonsuz küçük bir paralelyüzlü sayılabilecek olan elemanter hacmi hesaplayalım. ρ ışınsal uzaklığı ile z kotunun sonsuz küçük artışları sırasıyla $d\rho$ ve dz uzunluklarını doğururlar. θ azimüt açısının $d\theta$ sonsuz küçük artışı ise orijinden ρ uzak-

lığında $\rho d\theta$ gibi bir uzunluk doğurur. Böylece ortaya çıkan dV sonsuz küçük hacim elemanının boyutları sırasıyla $d\rho$, $\rho d\theta$ ve dz olacağından

$$dV = \rho d\rho d\theta dz \quad (I.2b.3)$$

olur. Düzlem kutupsal koordinatlarda z olmadığından dS yüzey elemanı

$$dS = \rho d\rho d\theta \quad (I.2b.4)$$

olacaktır.

Dik silindirik referans sisteminde r yervektörünün, dik kartezyen referans üçlüsüne göre,

$$\mathbf{r} = \rho \cos \theta \mathbf{e}_1 + \rho \sin \theta \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$$

ifadesiyle verildiği göz önünde tutulacak olursa sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesinin de

$$|d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (I.2b.5)$$

şeklinde olacağı kolaylıkla gerçekleşir.

(I.2c) KÜRESEL REFERANS SİSTEMİ

Küresel bir referans sisteminde bir P noktasının koordinatları sırasıyla P nin, referans sisteminin O orijinine olan r ışımsal uzaklığı; P nin (x, y) düzlemi üzerine izdüşümünü orijine birleştiren doğru ile (x) eksenini arasında kalan ve (x) ekseninden itibaren pozitif dönme yönünde ölçülen φ azimüt açısı; ve (z) eksenini ile $r = OP$ arasında kalan ve (z) ekseninden itibaren ölçülen θ zenit açısıdır.

P nin kartezyen koordinatlarıyla küresel koordinatları arasındaki bağıntı (Şekil : I.3) den kolaylıkla elde edilir ve :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (I.2c.1)$$

dir.

λ , μ ve ν parametreler olmak üzere küresel referans sistemindeki koordinat yüzeyleri $r = \lambda$ küreleri, $\varphi = \mu$ meridyen düzlemleri ve $\theta = \nu$ enlem düzlemlerinden oluşurlar. P noktası bu üç cins koordinat yüzeyinin ortak kesim noktasıdır. $\varphi = \text{sabit}$ ve $\theta = \text{sabit}$ düzlemleri $r = \text{sabit}$ küresi üzerinde, sırasıyla, bir meridyen ve bir enlem dairesi meydana getirirler. r , φ ve θ nın değişim aralıkları ise

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

dir.

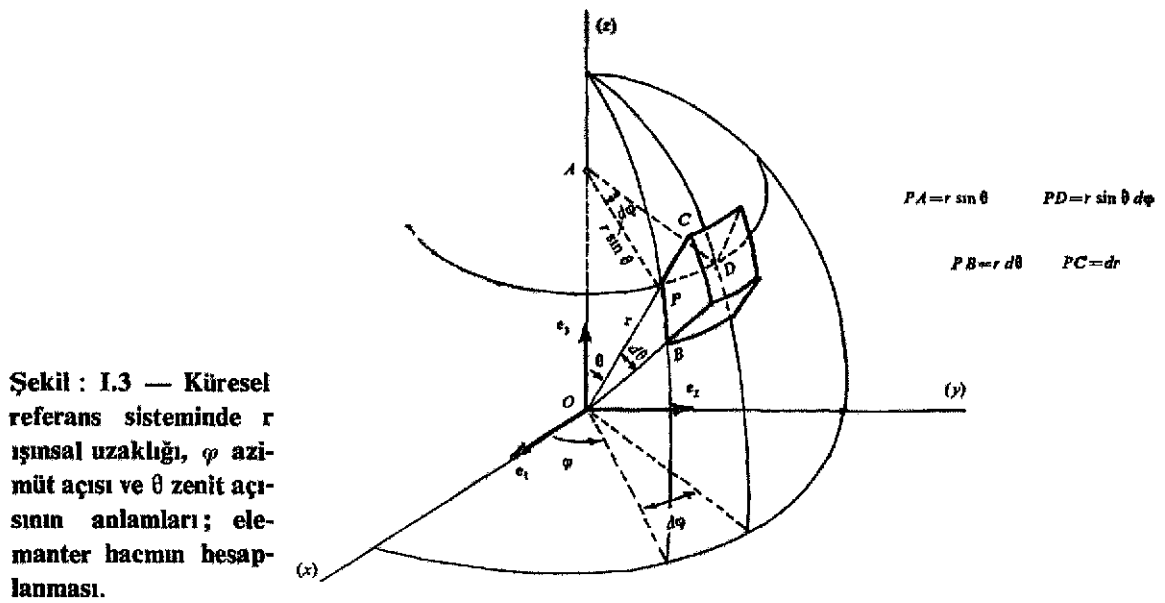
Küresel referans sisteminde r yervektörünün, dik kartezyen üçlüsüne göre,

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + r \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (\text{I.2c.2})$$

ifâdesiyle verildiği göz önünde tutulacak olursa sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesinin de

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|^2 = ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{I.2c.3})$$

şeklinde olacağı kolaylıkla gerçekleşir.



Küresel koordinatlardaki hacim elemanını hesaplamak için r nin dr artışının dr uzunluğunu, θ nin $d\theta$ artışına tekaabül eden $r d\theta$ uzunluğunu ve φ nin de $d\varphi$ artışına tekaabül eden $r \sin \theta d\varphi$ uzunluğunu doğurduğunu göz önüne alırsak dr , $d\theta$ ve $d\varphi$ artışlarının meydana getirdikleri ve boyutları dr , $r d\theta$ ve $r \sin \theta d\varphi$ olan sonsuz küçük paralelyüzlünün hacminin

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \quad (\text{I.2c.4})$$

olduğu anlaşılır.

(I.3) DOĞAL REFERANS SİSTEMİ (SERRET-FRENET ÜÇYÜZLÜSÜ)

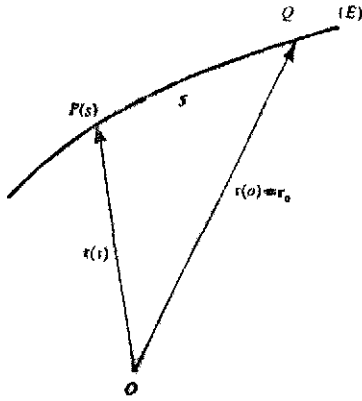
Sürekli bir (E) uzay eğrisi üzerinde hareket eden bir P noktasının yerini belirlemek için bunun (E) üzerinde keyfi seçilmiş bir Q orijinine göre s yay uzunluğunu vermek kâfidir. P nin dik bir kartezyen referans sistemine göre haiz olacağı $x_i = x_i(s)$, ($i = 1, 2, 3$), koordinatları da P nin (E) üzerinde kalması şartı dolayısıyla tabiidir ki s yay uzunluğunun fonksiyonu olacaklardır. Bu koordinat sisteminin O orijinine göre tanımlanan $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ yervektörü de

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = \sum_{i=1}^3 x_i(s) \mathbf{e}_i$$

şeklinde olacaktır. (E) uzay eğrisinin sürekli bir eğri olduğu kabul edildiğine göre bu, eğrinin analitik bir ifâdeyle temsil edilmesi ve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ vektörünün de her $P(s)$ noktası civarında

$$\mathbf{r}(s+h) = \mathbf{r}(s) + \frac{h}{1!} \mathbf{r}'(s) + \frac{h^2}{2!} \mathbf{r}''(s) + \dots + \frac{h^n}{n!} \mathbf{r}^{(n)}(s) + \dots \quad (I.3.1)$$

şeklinde yakınsak bir TAYLOR serisine açılabilmesi demektir. Bu ise, tabiidir ki,



Şekil : I.4 — Bir uzay eğrisi üzerinde hareketli bir $P(s)$ noktasının s yay uzunluğu ve yervektörü aracılığıyla belirlenmesi.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ nin her $x_i(s)$ bileşeninin de her $P(s)$ noktası civarında (I.3.1) gibi bir seriye açındırılabilceğini içerir.

Eğrinin s ve $s+h$ yay değerlerine tekaabül eden $P(s)$ ve $P(s+h)$ noktalarını birleştiren

$$\mathbf{r}(s+h) - \mathbf{r}(s)$$

vektörünün $h \rightarrow 0$ için limit doğrultusu eğrinin $P(s)$ noktasındaki teğet doğrultusunu ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(s+h) - \mathbf{r}(s)}{h} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T} \quad (I.3.2)$$

de (E) nin $P(s)$ noktasındaki \mathbf{T} teğet vektörünü tanımlar.

Diğer taraftan (E) üzerindeki sonsuz yakın iki nokta arasındaki yay uzunluğunun karesi de

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 \quad (I.3.3)$$

olduğundan son iki ifâdeden \mathbf{T} teğet vektörünün, tanımı gereği, bir birim vektör olduğu yâni

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \quad (\text{I.3.4})$$

olduğu sonucu çıkarılır.

(I.3.4) ün her iki yanını da s ye göre türetirsek

$$\frac{d(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})}{ds} = 2 \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0$$

olduğu, yâni teğet birim vektörüyle bunun türevinin $P(s)$ noktasında birbirlerine dik oldukları tesbit edilmiş olur. $d\mathbf{T}/ds$ yönündeki birim vektörü \mathbf{N} ile gösterirsek ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$), κ bir katsayı olmak üzere

$$\boxed{\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}} \quad (\text{I.3.5})$$

vazedeceğiz. κ katsayısına (E) eğrisinin $P(s)$ noktasındaki *eğriliği* ve \mathbf{T} teğet birim vektörüne dik olan \mathbf{N} birim vektörüne de (E) nin $P(s)$ noktasındaki *asal birim normal vektörü* denir. $R = 1/\kappa$ büyüklüğüne (E) nin $P(s)$ deki *eğrilik yarıçapı* denir. Açıkta ki eğrilik genellikle $\kappa = \kappa(s)$ şeklinde yay uzunluğunun bir fonksiyonu olacaktır.

Şimdi

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (\text{I.3.6})$$

bağıntısıyla hem \mathbf{T} teğet birim vektörüne ve hem de \mathbf{N} asal birim normal vektörüne dik bir birim vektör tanımlayalım. Buna göre, kezâ,

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \times \mathbf{B} \quad \text{ve} \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} \quad (\text{I.3.7})$$

olacaktır. (I.3.7) nin ikinci ifâdesinden s yayına göre türev alınır (I.3.5), (I.3.6) ve (I.3.7) yi göz önünde tutarak

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\mathbf{B} \times \mathbf{T}) = \left(\frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} \right) + \left(\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right) = \left[\frac{d\mathbf{B}}{ds} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{B}) \right] + \\ &+ \kappa (\mathbf{B} \times \mathbf{N}) = \left[\left(\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbf{N} - \left(\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right) \mathbf{B} \right] - \kappa \mathbf{T} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifâdenin birinci terimi \mathbf{B} birim vektörü ile bunun s ye göre türevinin doğal olarak birbirlerine dik olmaları dolayısıyla sıfırdır. İkinci terimdeki \mathbf{B} nin katsayısı ise \mathbf{N} ile $d\mathbf{B}/ds$ nin skaler çarpımına bağlıdır. $d\mathbf{B}/ds$ vektörü \mathbf{B} ye dik ve \mathbf{N} nin aksi doğrultusunda olan bir vektördür. Bu itibarla

$$-\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = - (\text{negatif bir skaler}) = \tau = \tau(s)$$

vazedersek

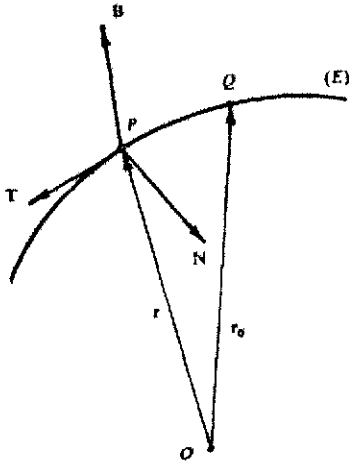
$$\boxed{\frac{dN}{ds} = \tau B - \kappa T} \quad (I.3.8.)$$

olur.

Eğer şimdi $B = T \times N$ tanımından hareket edilerek s ye göre türev alınırsa, kolaylıkla,

$$\boxed{\frac{dB}{ds} = -\tau N} \quad (I.3.9)$$

bağıntısı elde edilir. B ye (E) nin $P(s)$ noktasındaki *binormal birim vektörü* denir. $\tau = \tau(s)$ büyüklüğüne (E) eğrisinin $P(s)$ noktasındaki *burulması* adı verilir. τ^{-1} büyüklüğü de *burulma yarıçapı* adını alır.



Şekil : I.5 — "SERRET-FRENET üçyüzlüsü ya da "doğal referans sistemi".

(T, N) düzlemi (E) uzay eğrisinin $P(s)$ noktasındaki *oskülâtör düzlemi*, (N, B) düzlemi *normal düzlemi* ve (B, T) düzlemi ise *rektifiyan düzlemi* oluştururlar.

T, N ve B birim vektörlerinin (E) uzay eğrisinin $P(s)$ noktasındaki *doğal referans sistemini* veya başka bir deyimle *SERRET - FRENET üçyüzlüsünü* meydana getirdikleri söylenir. Bu, şüphesiz ki, eğri üzerinde göz önüne alınan noktaya bağlı ve dolayısıyla da eğri üzerindeki nokta değiştiğinde kendisi de s yay değişkenine bağlı olarak değişen *yerel* bir referans sistemidir.

Teğet, normal ve binormal birim vektörlerinin türevlerinin FRENET üçyüzlüsünün eksenleri üzerindeki bileşenlerini veren ve

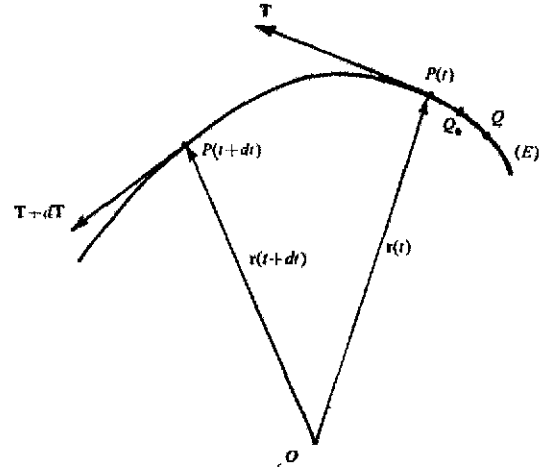
$$\begin{pmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \\ \frac{dB}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (I.3.10)$$

matris denkleminde gösterebileceğimiz (I.3.5), (I.3.8) ve (I.3.9) formüllerine *FRENET formülleri* adı verilir.

(I.4) HIZ VE İVME

Bir (E) uzay eğrisi üzerinde kalmak şartıyla hareket eden bir noktanın t ânında $P(t)$, ve dt sonsuz küçük zaman aralığı sonunda da $P(t + dt)$ konumlarında bulunduğunu tasarlayalım. Noktanın (E) üzerindeki konumu kendisine tekaabül eden r yervektörü aracılığıyla gösterilebilir.

(E) üzerindeki keyfi bir Q orijininin itibaren yay uzunluğu noktanın eğri üzerindeki yerini belirlemek hususunda yararlı olabileceği gibi noktanın belirli bir Q_0 noktasında bulunduğu t_0 ânından itibaren geçen t zamanı da (E) üzerindeki konumunun belirlenmesine aracı olabilir. Şu halde noktanın katettiği s yay



Şekil : I.6 — Noktanın âni hız vektörünün tanımını ve yönü hakkında.

uzunluğu ile s yi katetmek için geçen zaman arasında

$$s = s(t)$$

şeklinde fonksiyonel bir bağıntı bulunacağı da âşikârdır. Bu itibarla noktanın r yervektörünün ifâdesi de

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s(t)) = \mathbf{r}(t)$$

şeklinde ister s yay uzunluğunun, isterse t zamanının fonksiyonu olarak göz önüne alınabilir. Bu takdirde (E) uzay eğrisinin t parametresine göre bir gösterilişinden bahsedilir.

Öte yandan

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (I.4.1)$$

ile tanımlanan vektöre (E) üzerinde göz önüne alınan noktanın t ânındaki hız vektörü veyâ sâdece *âni hız vektörü* adı verilir.

(I.3.3) ü de göz önünde tutarak

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T} = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \mathbf{T} = v \mathbf{T} \quad (\text{I.4.2})$$

yazılabilmesi hasebiyle \mathbf{v} $\hat{a}n$ hız vektörünün daima (E) uzay eğrisinin teğet birim vektörü yönünde olduğu anlaşılır.

Silindirik bir referans sistemindeki bir noktanın hızının karesi, noktanın yer-vektörünün kartezyen ifâdesi

$$\mathbf{r} = \rho \cos \theta \mathbf{e}_1 + \rho \sin \theta \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$$

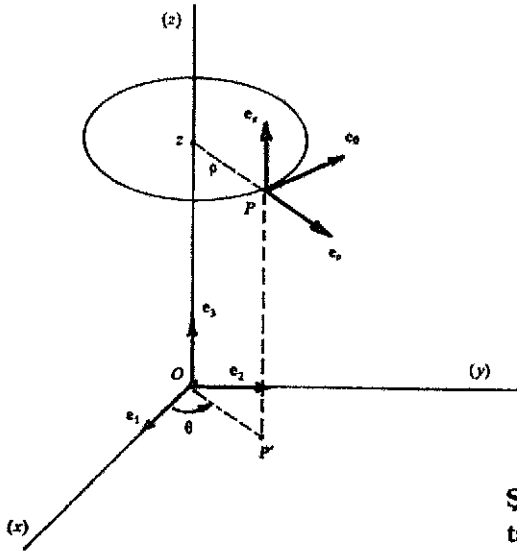
olması ve dolayısıyla da

$$d\mathbf{r} = (d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta d\theta) \mathbf{e}_1 + (d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta) \mathbf{e}_2 + dz \mathbf{e}_3$$

yazılması nedeniyle (I.4.2) ye binâen

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \quad (\text{I.4.3})$$

ile verilir. Bu sonucu, v yi daha değişik bir birim taban vektörleri takımında hesaplayarak da bulmak mümkündür.



Şekil : I.7 — Dik silindirik referans sisteminde noktaya bağlı olarak tanımlanan yerel dik referans sisteminin birim taban vektörleri.

Bunun için P ye bağlı ve silindirik koordinatların artış yönlerine yöneltilmiş \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_θ ve \mathbf{e}_z birim vektörlerini göz önüne alalım (bk. Şekil : I.7). Silindirik koordinatlarda dV elemanter hacmini hesaplarken ρ nun, θ nun ve z nin sonsuz küçük artış miktarlarına tekaabül eden uzunluklar olarak sırasıyla $d\rho$, $\rho d\theta$ ve dz bulmuştuk. Bunlara, noktanın P deki konumuna bağlı biri ρ nun artış yönündeki birim vektörü olan \mathbf{e}_ρ , diğeri θ nun artış yönündeki ve ρ yarıçaplı daireye teğet birim vektörü olan \mathbf{e}_θ ve öteki de z nin artış yönündeki birim vektörü olan

e_2 den müteşekkil bir kartezyen referans sistemindeki sonsuz küçük bir dr vektörünün bileşenleri gözüyle bakacak olursak

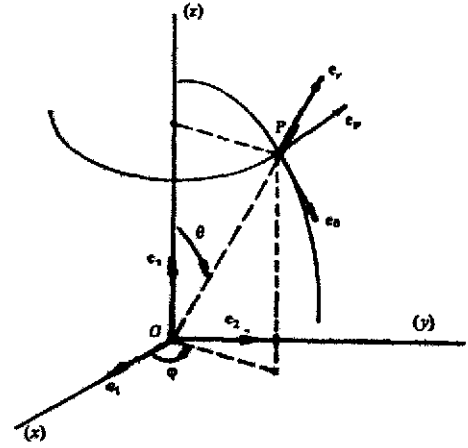
$$dr = d\rho e_\rho + \rho d\theta e_\theta + dz e_z$$

olur. Bu ifâdenin dt zaman diferansiyeline oranı P nin v âni hız vektörünün noktaya bağlı $[e_\rho, e_\theta, e_z]$ yerel dik referans sistemindeki ifâdesini verecektir :

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\theta} e_\theta + \dot{z} e_z. \quad (I.4.4.)$$

Böylelikle $\dot{\rho}$ nın P nin âni hız vektörünün $[e_\rho, e_\theta, e_z]$ referans sistemindeki ışınsal bileşeni ve $\rho \dot{\theta}$ nın da v nin açısal bileşeni olduğu görülür. (I.4.4) den kolaylıkla gene (I.4.3) ifâdesi elde edilir.

Aynı muhakemeyi küresel koordinatlara da uygulayacak olursak bu takdirde P noktasına bağlı ve onunla birlikte hareket eden ve r, θ ve φ koordinatlarının artış yönlerinde biri ışınsal yönde (yâni zenit yönünde), diğeri kuzey-güney yönünde, ötekisi ise batı-doğu yönünde olmak üzere $[e_r, e_\theta, e_\varphi]$ şeklinde birim taban vektörlerinden oluşan yerel bir dik kartezyen referans sistemi tanımlayabiliriz (bk. Şekil : I.8).



Şekil : I.8 — Küresel referans sisteminde noktaya bağlı olarak tanımlanan yerel dik referans sisteminin birim taban vektörleri.

Bu referans sisteminde r nin dr artışı : e_r boyunca dr , e_θ boyunca $r d\theta$ ve e_φ boyunca da $r \sin \theta d\varphi$ şeklinde olduğundan

$$dr = dr e_r + r d\theta e_\theta + r \sin \theta d\varphi e_\varphi$$

ifâdesini dt ye bölmek sûretiyle

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} e_\varphi \quad (I.4.5)$$

ve dolayısıyla da küresel bir referans sistemindeki bir noktanın hızının karesi olarak

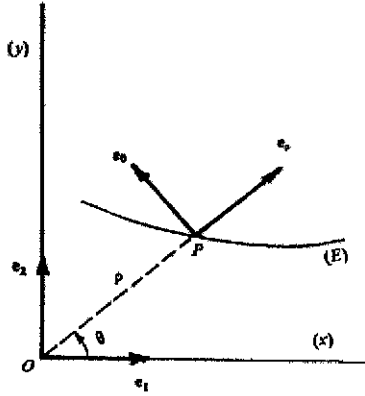
$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (\text{I.4.6})$$

bulunur.

Şimdi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

ile tanımlanan ve âni hız vektörünün zamana göre değişiminin ölçüsü olan ivme vektörünün göz önüne aldığımız referans sistemlerindeki ifâdelerini tesbit edebilmek amacıyla önce *düzlem kutupsal koordinatlarda* noktaya bağlı ve koordinatların artış yönlerindeki birim vektörlerle belirlenmiş *yerel* bir dik referans sistemi tanımlayacağız (bk. Şekil : I.9).



Şekil : I.9 — Düzlem kutupsal koordinat sisteminde noktaya bağlı olarak tanımlanan yerel dik referans sisteminin birim taban vektörleri.

Şekil : I.9 den kolaylıkla

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_2 \\ &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.4.7})$$

olduğu görülür. Ayrıca bu ifâdelerden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_\rho \end{aligned} \quad (\text{I.4.8})$$

olduğu da gözükmektedir.

OP yervektörünü ister sâbit $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ ister değişken $[\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta]$ yerel tabanına göre ifâde edelim, seçtiğimiz taban OP nin yönünü ve büyüklüğünü etkilemez. Buna göre

$$\mathbf{OP} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 = \rho \mathbf{e}_\rho + 0 \cdot \mathbf{e}_\theta = \rho \mathbf{e}_\rho$$

olur. Buradan hız vektörü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{OP}) = \dot{x} \mathbf{e}_1 + \dot{y} \mathbf{e}_2 = \frac{d\rho}{dt} \mathbf{e}_\rho + \rho \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (\text{I.4.9})$$

bulunur. Burada P noktası hareket ettiğinde, \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 nin sâbit kalmalarına karşılık P ye bağlı \mathbf{e}_ρ ve \mathbf{e}_θ nin da t nin fonksiyonu olarak değişmekte oldukları göz önüne alınmış bulunmaktadır.

Eğer dik silindirik koordinatlar göz önüne alınırsa \mathbf{v} hızını

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z = v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \quad (\text{I.4.10})$$

şeklinde olduğunu görmek kolaydır. Burada ise $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$ olduğuna dikkat etmek gereklidir.

Dik silindirik koordinatlarda ivme vektörünü bulmak için (I.4.10) dan (I.4.8) bağıntılarını da göz önünde tutarak t ye göre türev alalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \ddot{z} \mathbf{e}_z + \dot{z} \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \dot{\theta}^2 (-\mathbf{e}_\rho) + \ddot{z} \mathbf{e}_z + \dot{z}^2 \cdot (0) \end{aligned}$$

yâni

$$\boxed{\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z} \quad (\text{I.4.11})$$

bulunur.

P noktasına bağlı olan $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi]$ yerel kartezyen referans sisteminin özelliklerini tesbit üzere bunun birim taban vektörlerinin bağımsız değişkenlere göre kısmî türevlerini hesaplayalım.

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (\text{I.4.12})$$

olduğundan

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3 \rightarrow \left| \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \right| = 1 \quad (\text{I.4.13})$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_2 \rightarrow \left| \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right| = \sin \theta \quad (\text{I.4.14})$$

olduğu kolayca tesbit edilir. Bu son iki bağıntıdan da yararlanarak

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 - r \sin \theta \mathbf{e}_3 = r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_2 = r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}$$

bağıntıları bulunur. Buradan da \mathbf{e}_θ ve \mathbf{e}_φ taban birim vektörlerinin analitik ifâdeleri olarak, (I.4.13) ve (I.4.14) ün ışığında,

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|} = \frac{\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \right|} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \quad (\text{I.4.15})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|} = \frac{\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right|} = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \quad (\text{I.4.16})$$

bulunur. Şimdi artık $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi]$ yerel kartezyen referans sisteminin taban birim vektörlerinin diğer kısmî türevlerini rahatlıkla hesaplayabiliriz. Nitekim:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 - \cos \theta \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_r \quad (\text{I.4.17})$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_2 = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{I.4.18})$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{I.4.19})$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2 \quad (\text{I.4.20})$$

\mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ ve \mathbf{e}_φ taban vektörlerinin r bağımsız değişkeninin fonksiyonu olmadıklarına dikkat edilmelidir. Şimdi eğer bu birim taban vektörlerinin t zamanına göre türevlerini alırsak, (I.4.15-20) formüllerini de göz önünde tutarak,

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{I.4.21})$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{I.4.22})$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_2 \quad (\text{I.4.23})$$

bulunur.

Yerel $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi]$ koordinat sisteminin birim taban vektörlerinin (I.4.12), (I.4.15) ve (I.4.16) formülleriyle verilmiş olan ifâdelerinden hareketle bunların

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta\end{aligned}\quad (\text{I.4.24})$$

bağıntılarını gerçeklediklerini yâni bir *sağ-el-üçyüzlüsü* oluşturduklarını görmek kolaydır.

P noktasının hızına gelince bu

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{e}_r)}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \quad (\text{I.4.25})$$

olur. Buradaki birinci terim *ışınsal hızı*, ikinci terim kuzey-güney ve üçüncü terim de batı-doğu yönlerindeki hız bileşenlerini göstermektedir.

İvmenin küresel koordinatlardaki ifâdesi ise (I.4.25) den t ye göre türev alıp yerel sistemin taban vektörlerinin yukarıda ifâdeleri çıkarılmış olan kısmî türevlerinden yararlanarak bulunur ve neticede

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\theta + \\ & + (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (\text{I.4.26})$$

ifâdesi elde edilir.

(I.4.2) ifâdesine dayanarak, bir (E) uzay eğrisi üzerinde hareket eden bir noktanın hız vektörünün eğrinin teğet birim vektörüyle eşyönlü olduğunu tesbit etmiş-tik. Şimdi gene bir (E) uzay eğrisi üzerinde hareket eden bir noktanın ivmesinin ifâdesini arayalım. FRENET formüllerini de göz önünde tutarak (I.4.2) den

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\mathbf{T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \dot{v}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}\end{aligned}$$

bulunur. R ile, $\kappa^{-1} = R$ bağıntısıyla belirlenen, eğrilik yarıçapını göz önünde tutarsak bu takdirde ivmenin ifâdesi de

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N} \quad (\text{I.4.27})$$

şekline girer. Bu ifade *ivmenin*, eğrinin teğet ve normal birim vektörleri boyunca iki bileşeni haiz olduğunu ve *daima oskülâtör düzlem içinde kaldığını göstermektedir*. İvmenin T boyunca bileşenine *teğetsel ivme* ve N boyunca bileşenine de *merkezcil veya normal ivme* adı verilir.

(I.5) GENEL DOĞRUSAL HAREKET

Özellikle, eğer P noktasının (E) uzay eğrisi üzerindeki v hızının normu

$$v = \dot{s} = \alpha t + \beta \quad (I.5.1)$$

şeklinde t zamanının lineer bir fonksiyonu ise P nin teğetsel ivmesinin $a_T = \alpha$ dan ibaret olduğu kolayca görülür. Bu özelliği haiz bir harekete *düzgün hızlanan hareket* adı verilir. Bu takdirde, (I.5.1) ifâdesini integre ederek,

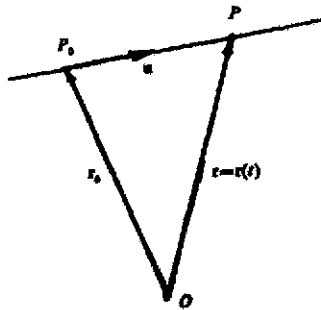
$$s(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

olur. İntegrasyon sâbiti olarak bu ifâdeye girmiş olan γ nın yorumu ise $t = 0$ vaz etmekle kolaylıkla elde edilir ve: $\gamma = s(0)$ olduğu, yâni $t = 0$ ânında P noktasının, (E) uzay eğrisi üzerindeki yayların orijinine olan uzaklığını temsil ettiği görülür.

Eğer $v = \text{sâbit}$ ise $a_T = dv/dt = 0$ olacağından ivme sâdece a_N merkezcil ivmesine indirgenmiş olur :

$$\mathbf{a} = a_N \mathbf{N} = \frac{v^2}{R} \mathbf{N}$$

Eğer (E) bir doğrudan ibâret ise bu takdirde, doğrunun eğrilik yarıçapının sonsuz olması dolayısıyla $a_N = 0$ olur ve ivme de doğrunun doğrultusunda bulunur. Bu takdirde ayrıca $v = \text{sâbit}$ ise teğetsel ivme de sıfır olacağından harekete *düzgün doğrusal hareket* adı verilir.



Şekil : I.10 Düzgün doğrusal hareketin belirlenmesi.

Daha genel bir görüş açısından hareket etmek için Şekil: I.10 daki gibi bir doğru üzerinde bir u birim vektörü yönünde hareket etmekte olan bir P noktası tasarlayalım. Doğru üzerinde keyfî seçilmiş sâbit bir P_0 referans noktasının sâbit yervektörü r_0 ve zamanın fonksiyonu olarak yer değiştiren P noktasındaki de $r = r(t)$ olsun. $|u| = 1$ olduğuna göre şekilden

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \lambda(t) \mathbf{u}$$

yazılır. Şu hâlde en genel doğrusal hareketin vektörel denklemi

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \lambda(t) \mathbf{u} + \mathbf{r}_0} \quad (\text{I.5.2.})$$

dır. \mathbf{u} sâbit bir birim vektör olduğundan hız için

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\lambda}(t) \mathbf{u}$$

ifâdesi bulunur. Bu, noktanın hızının hareketin yönünde olduğuna delâlet eder. Kezâ ivmeyi de hesaplırsak

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\lambda}(t) \mathbf{u}$$

bulunur ki bu, ivmenin de hareket yönünde olacağını gösterir.

(I.5.2) nin her iki yanı \mathbf{u} ile vektörel olarak çarpılırsa genel doğrusal hareket için (I.5.2) ye eşdeğer hareket denklemi olarak

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{u} = 0$$

bulunur. Buradan t ye göre türev alındığında

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 ,$$

ve buradan da gene t ye göre türev alındığında

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = 0 \rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{a} = 0 ,$$

bulunur ki bu son iki ifâde gerek hızın gerekse ivmenin hareket yönünde olduklarına işâret etmekte olup bu tek bir

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$$

bağıntısıyla da özetlenebilir.

(I.6) GENEL DÜZLEMSEL HAREKET

Bir (π) düzlemi üzerindeki bir (E) düzlem eğrisi üzerinde hareket eden bir P noktasının yervektörü $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ve (E) üzerindeki sâbit bir referans noktasınıki de \mathbf{r}_0 olsun. (π) nin normâl birim vektörünü \mathbf{B} ile gösterirsek

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}).\mathbf{B} = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0).\mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.6.1})$$

olacağı açıktır. α_1 ve α_2 düzlemdeki lineer bağımsız iki birim vektör olduklarında

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \lambda(t) \alpha_1 + \mu(t) \alpha_2$$

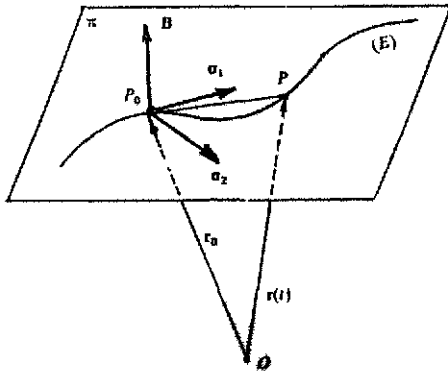
yazılabilir. Bu takdirde P noktasının hızının

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\lambda}(t) \boldsymbol{\alpha}_1 + \dot{\mu}(t) \boldsymbol{\alpha}_2$$

ve ivmesinin de

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\lambda}(t) \boldsymbol{\alpha}_1 + \ddot{\mu}(t) \boldsymbol{\alpha}_2$$

olmakla her ikisinin de hareketin vukuu bulduğu aynı (π) düzlemi içinde oldukları anlaşılabilir olur.



Şekil : 1.11 — Genel düzlemsel hareketin belirlenmesi.

Eğer hareket doğrusal değilse \mathbf{v} ve \mathbf{a} birbirlerinden lineer olarak bağımsızdır; ve her ikisi için de

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = 0$$

yazılabilir. Bu ise düzlemsel harekette düzlemin normal birim vektörünün hareketin hız ve ivmesinin vektörel çarpımına paralel olması demektir. Şu hâlde

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \quad (\text{I.6.2})$$

dir. \mathbf{B} aynı zamanda (E) yörünge eğrisinin de binormalidir. (I.6.1) ve (I.6.2) den genel düzlemsel hareketin hareket denklemi olarak

$$\boxed{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) = 0} \quad (\text{I.6.3})$$

ifadesi bulunur.

(I.7) MERKEZİL HAREKET

Bir P noktasının bir (E) yörüngesi üzerindeki hareketi esnâsında ivmesinin daima sâbit bir O noktasına yönelik olduğu harekete *merkezil hareket* denir.

Merkezil hareketin çok önemli bir özelliği hareketin aynı zamanda düzlemsel bir hareket oluşudur. Düzlemsel bir harekette hem r hem de v hep aynı bir düzlem içindedirler. Eğer $OP = r$ vazeder de hem r ye ve hem de P nin hızı olan v ye dik olan

$$\mathbf{B} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

vektörünün zamana göre türevini alacak olursak

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{a})$$

ifâdesinin hem birinci teriminin ve hem de merkezil hareketin tanımı gereği ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{a}$) ikinci teriminin sıfır olduğu anlaşılır; şu hâlde

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0$$

dır. Bu ise \mathbf{B} vektörünün sâbit bir vektör olması ve dolayısıyla da \mathbf{B} ye dik olan (\mathbf{r}, \mathbf{v}) düzleminin de uzayda sâbit bir doğrultuya sâhip olması demektir. Ayrıca, (\mathbf{r}, \mathbf{v}) düzlemi sâbit O noktasından da geçtiğine göre bu düzlem de sâbittir demektir. Şu halde *merkezil bir hareket sâbit bir düzlem içinde vukuu bulur.*

Şimdi bir merkezil hareketin daima sâbit bir O noktasına yönelik ivmesini hesaplamak için, O yu küresel bir koordinat sisteminin orijini olarak kabul edelim ve merkezil hareketin de (x, y) düzleminde vukuu bulunduğunu varsayalım. Buna göre küresel koordinatlarda bulduğumuz (I.4.26) ivme ifâdesinde $\theta = \pi/2$ yapmak yeterlidir. Buna göre $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ olacağından ivme

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi$$

ye indirgenmiş olur. Ancak merkezil harekette $\mathbf{a} \parallel \mathbf{r} \parallel \mathbf{e}_r$ olduğundan bu ifâdenin \mathbf{e}_φ bileşeninin bulunmaması yâni

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$$

olması gereklidir. Bu son eşitlikten ise

$$r^2 \dot{\varphi} = C = \text{sâbit} \quad (\text{I.7.1})$$

yazılır. Öte yandan noktanın hız vektörü biri ışınsal bir v_r , diğeri de buna dik bir v_φ bileşenine ayrılabilir :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Hâlbuki $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ dir. Buna göre

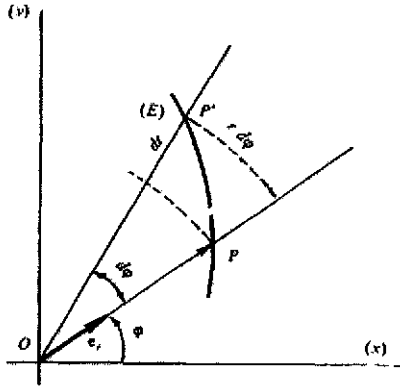
$$|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = |\mathbf{r} \times (v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi)| = r \cdot v_\varphi = r^2 \dot{\varphi} = C \quad (I.7.2)$$

yazılabilecek, veyâ C ile sâbit bir vektör göstermek üzere

$$\boxed{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}} \quad (I.7.3)$$

olacaktır.

Şekil : I.12 den P noktasının yervektörünün O orijini etrafında $d\varphi$ açısı kadar



Şekil : I.12 — Merkezil hareket için alanlar kaanûnunun çıkarılması : $dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \text{sâbit}$.

döndüğünde süpürdüğü dA alanının

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi \quad (I.7.4)$$

olduğu görülmektedir. Eğer P noktasının yervektörü dA alanını dt zamanı zarfında süpürüyorsa bu takdirde (I.7.1) ve (I.7.4) den

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = C' = \text{sâbit} \quad (I.7.5)$$

veya (I.7.2), (I.7.3) den ve (I.7.5) in sol yanına da (x, y) düzlemine dik olan bir vektör mâhiyeti atfederek

$$\frac{d\mathbf{A}'}{dt} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} = \text{sâbit} \quad (I.7.6)$$

ifâdesi bulunur. dA/dt ye *skaler alan hızı*, $d\mathbf{A}'/dt$ ye de *vektörel alan hızı* adı verilir; ve son ifâdeler merkezil hareket söz konusu olduğunda bu türlü tanımlanmış olan alan hızlarının sâbit olduklarını veyâ eşdeğer bir deyişle: merkezil bir harekette noktanın yervektörünün eşit zamanlarda eşit alanlar süpürdüğünü beyân ederler. Bu özellik merkezil hareket için *alanlar kaanûnu* diye anılır.

(I.8) LİNEER HARMONİK HAREKET

Eğer bir P noktası bir doğru üzerinde ve sâbit bir O noktasından itibâren ölçülen x uzaklığı, (A , ω ve γ sâbitler olmak üzere)

$$x = A \cos(\omega t + \gamma) \quad (\text{I.8.1})$$

ifâdesine uygun olacak şekilde hareket ediyorsa böyle bir harekete *lineer harmonik hareket* adı verilir. Bu, aslında, O merkezi etrafında düzgün bir *salınım* hareketidir. x e salınımın *uzanımı* adı verilir; uzanımın $x = \pm A$ maksimal değerlerini haiz olduğuna dikkat edilmelidir. A büyüklüğüne ise *genlik* denir. x in, t nin

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{I.8.2})$$

periyodunu veyâ

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{I.8.3})$$

frekansını haiz periyodik bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. γ ya *faz*, ve ω ya da *dairesel frekans* denir.

(I.8.1) den t ye göre türev alarak hızın da

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \gamma) = A\omega \cos\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{I.8.4})$$

şeklinde aynı ω dairesel frekansını, fakat $A\omega$ genliğini haiz bir harmonik salınımı haiz olduğu görülür.

(I.8.4) ü de t ye göre türeterek ivmenin ifâdesi için de

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \gamma) = -\omega^2 x \quad (\text{I.8.5})$$

bulunur. Bu son ifâdeden lineer harmonik bir harekette ivme ile uzanım arasında

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0} \quad (\text{I.8.6})$$

gibi çok ilginç ve önemli bir bağıntı bulunduğu görülmektedir. Gerçekten de (I.8.6) ikinci dereceden sâbit katsayılı âdî lineer diferansiyel denklemi, lineer harmonik hareketi karakterize eder. Bu denklemin genel çözümünün her zaman (I.8.1) ifâdesi şekline sokulabileceği kolayca gösterilir. Lineer harmonik bir hareket yapan bir noktaya *lineer harmonik osilâtör* adı verilir.

Harmonik bir salınım hareketini simgesel olarak, karmaşık büyüklüklerle ifâde etmek çok kere hesapları kısaltmak bakımından yarar sağlar. $z = x + iy$ vazederek

$$z = \mathcal{A} \cdot e^{i\omega t} = a e^{i\gamma} \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{I.8.7})$$

ifâdesinin gerçel kısmının (I.8.1) hareket denkleminde başka bir şey olmadığı ve (I.8.6) denklemini gerçeklediği kolayca görülür.

(I.9) HAREKETİN HIZ VEYÂ İVME ARACILIĞIYLA GENEL OLARAK BELİRLENMESİ

Bir noktanın hareketi, noktanın yervektörünün t zamanının fonksiyonu olarak saptanması hâlinde belirlenmiş olur. Kinematığın, bu itibarla, ilk görevi ister gözlem isterse teori aracılığıyla saptanmış olan hız veyâ ivmenin ifâdesinden $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ nin yâni, eğer \mathbf{r} yervektörünü bir dik kartezyen referans sistemine nisbet edersek, \mathbf{r} nin $x = x(t)$, $y = y(t)$ ve $z = z(t)$ bileşenlerinin analitik ifâdelerini çıkarmaktır.

Şimdi noktanın $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ hızının ve dolayısıyla bu hızın bileşenlerinin verilmiş olduğunu varsayalım. \mathbf{v} hız vektörü, genellikle, hem \mathbf{r} nin ve hem de t nin fonksiyonu olacaktır:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(y, x, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t) \end{cases} \quad (\text{I.9.1})$$

Bu, aslında, birinci mertebeden üç diferansiyel denklemden oluşmuş bir diferansiyel denklem sistemidir. Bu sistemin çözümü ise tamamen matematiksel bir meseledir.

Eğer hızın bileşenleri sâdece zamanın fonksiyonu iseler bu takdirde (I.9.1) de değişkenler derhâl ayrılır ve sonuç bir tek integral almayla elde edilir.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{f}(t) \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t) \\ \frac{dz}{dt} = f_3(t) \end{cases} \quad (\text{I.9.2})$$

$$x(t) = \int_0^t f_1(t') dt' + C_1; \quad y(t) = \int_0^t f_2(t') dt' + C_2; \quad z(t) = \int_0^t f_3(t') dt' + C_3. \quad (\text{I.9.3})$$

Bu çözüm takımında C_1 , C_2 ve C_3 integrasyon parametrelerini göstermekte olup bunların fiziksel anlamları $t = 0$ yapmakla (I.9.3) ün

$$x(0) = x_0 = C_1 ; y(0) = y_0 = C_2 ; z(0) = z_0 = C_3 \quad (\text{I.9.4})$$

ifâdelerine indirgenmesiyle elde edilir. Nitekim $x(0)$, $y(0)$ ve $z(0)$ başlangıçta, yâni $t = 0$ da, noktanın koordinat eksenleri üzerine izdüşümlerini, yâni bu izdüşümlerin orijine olan uzaklıklarını göstermektedir. Buna göre (I.9.2) nin fiziksel çözümü, (I.9.3) ve (I.9.4) de gözönünde tutularak,

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t f_1(t') dt' = x_0 + F_1(t) \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t f_2(t') dt' = y_0 + F_2(t) \\ z(t) &= z_0 + \int_0^t f_3(t') dt' = z_0 + F_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.9.5})$$

olur. Buradan da görülmektedir ki noktanın hareketinin belirlenmesi için sâdece hız bileşenlerinin analitik ifâdelerinin bilinmiş olması yetmemekte, kezâ noktanın $t = 0$ başlangıç ânındaki yervektörü olan sâbit $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3$ vektörünün de yâni noktanın *başlangıç durumunun* da bilinmesi gerekmektedir. Şu hâlde noktanın hareketi hız vektörüyle başlangıç durumunun (\mathbf{r}_0 in) verilmiş olmasıyla belirlenmektedir. Böylece (I.9.2) nin genel çözümününün noktanın başlangıç durumuyla ilgili üç sâbiti kapsadığını görmüş olmaktadır.

Birçok hâlde noktanın hareketini, ivmesinin verilmiş olan analitik ifâdesinden hareketle belirlemek söz konusu olur. \mathbf{a} ivme vektörü genellikle hem \mathbf{v} hız vektörünün, hem \mathbf{r} yer vektörünün ve hem de t zamanının, yâni yedi bağımsız değişkenin fonksiyonudur:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}; t\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f_1\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = f_2\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = f_3\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t\right) \end{cases} \quad (\text{I.9.6})$$

Bu, aslında, ikinci mertebeden üç diferansiyel denklemden oluşmuş bir diferansiyel denklem sistemidir. Biz gene basit ve sık sık karşılaşılan bir hâl olmak üzere ivmenin bileşenlerinin sâdece zamanın fonksiyonu oldukları hâli göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = f_2(t) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = f_3(t) \end{cases} \quad (\text{I.9.7})$$

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t f_1(t') dt' + C'_1; \quad \frac{dy}{dt} = \int_0^t f_2(t') dt' + C'_2; \quad \frac{dz}{dt} = \int_0^t f_3(t') dt' + C'_3 \quad (\text{I.9.8})$$

bulunur. Bu çözüm takımında da $t = 0$ yapmak sûretiyle C'_1 , C'_2 ve C'_3 integrasyon sâbitlerinin fiziksel anlamlarının $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ hız vektörünün $t = 0$ ânında haiz olduğu v_{01} , v_{02} , v_{03} bileşenleri ile verileceğini görmek kolaydır. $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ vektörüne *başlangıç hızı* adı verilir. Bu takdirde (I.9.8) sistemi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(t) + v_{01} \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(t) + v_{02} \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(t) + v_{03} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.9.9})$$

olur. Bu takdirde (I.9.7) sistemi de önceden incelediğimiz ve çözdüğümüz (I.9.2) sistemine indirgenmiş olur. (I.9.9) u bir kere daha integre ederek

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \Phi_1(t) + v_{01}t + x_0 \\ y(t) &= \Phi_2(t) + v_{02}t + y_0 \\ z(t) &= \Phi_3(t) + v_{03}t + z_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.9.10})$$

çözüm takımını bulmuş oluruz. Buradaki $\Phi(t)$ fonksiyonları kısaca, $\int_0^t F(t') dt'$ şeklindeki integrallerin yerine konmuştur.

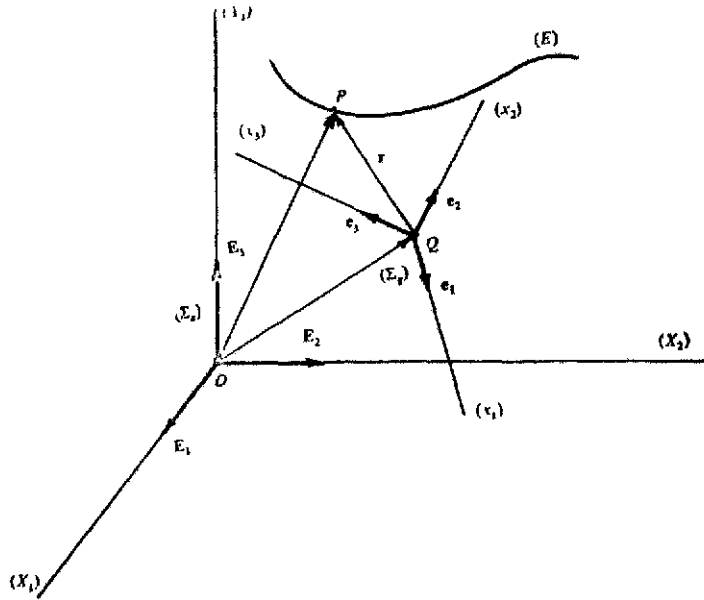
Görüldüğü gibi (I.9.10) çözüm takımı, (I.9.7) sisteminin ifâdesinde bulunmayan altı sâbit kapsamaktadır. Bu hâlde de hareketin belirlenmesi için ivmenin bileşenlerinin analitik ifâdelerinin bilinmesi yetmemekte fakat aynı zamanda noktanın başlangıç ânındaki hızının (\mathbf{v}_0 in) ve konumunun (\mathbf{r}_0 in) da verilmiş olması gerekmektedir. Ancak bu *başlangıç şartlarının* verilmiş olması problemin çözümüne fiziksel bir içerik kazandırmaktadır.

(I.10) GÖREL (İZÂFÎ) HAREKET

Uzayda sürekli bir (E) eğrisini yörünge kabul ederek hareket eden bir P noktasının hareketini, sâbit olduğunu varsaydığımız bir $(\Sigma_s, [X_i; E_i])$ referans sistemi ile, (Σ_g) ye göre herhangi bir hareket yapan bir $(\Sigma_g, [x_i; e_i])$ referans sistemine göre inceleyeceğiz (bk. Şekil : I.13). *Salt* (mutlak) *referans sistemi* diyeceğimiz (Σ_s) nin orijini O ve *görel* (izâfî) *referans sistemi* diyeceğimiz (Σ_g) nin orijini de Q ile göstereceğiz. P noktasının (Σ_g) deki yervektörü olan QP , (Σ_g) deki bir gözlemci için

$$\mathbf{QP} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \cdot \mathbf{e}_i$$

şeklindedir. Buradaki x_i ler, (E) üzerindeki hareketi dolayısıyla, P noktasının t nin fonksiyonu olarak değişen (Σ_g) deki koordinatlarıdır.



Şekil : I.13 — Salt ve görel referans sistemleri arasındaki bağıntı.

P noktasının (Σ_s) deki yervektörü olan OP de, (Σ_s) deki bir gözlemci için

$$\mathbf{OP} = \sum_{i=1}^3 X_i(t) \cdot \mathbf{E}_i$$

şeklindedir.

Gerek (Σ_s) gerekse (Σ_g) referans sistemine bağlı gözlemciler için mütakaabil taban birim vektörleri değişmedikleri için bunlar t ye bağlı olmayacaklardır. Buna karşılık (Σ_s) deki bir gözlemci için (Σ_g) nin taban birim vektörlerinin $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$, şeklinde ve (Σ_g) deki bir gözlemci için de (Σ_s) nin taban

birim vektörlerinin $E_i = E_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$), şeklinde zamanın fonksiyonları olarak değişecekleri âşikârdır. Bunun içindir ki özellikle çeşitli yervektörlerinin t ye göre türevlerini alırken göz önündeki yervektörlerinin hangi referans sistemindeki gözlemci tarafından türetildiğine çok dikkat etmek ve ona göre hareket etmek gereklidir.

(Σ_g) nin Q orijininin (Σ_s) nin O orijinine nazaran haiz olduğu, yâni O daki bir gözlemcinin kendisine nisbetle ölçtüğü Q nun hızına (Σ_g) nin Q orijininin (Σ_s) referans sistemine göre salt (mutlak hızı) denir ve bu

$$v_Q = \left(\frac{d(OQ)}{dt} \right)_s \quad (I.10.1)$$

ile gösterilir. Bu ifâdenin sağ yanındaki parantezin yanına konulmuş olan s indisi, OQ nun (Σ_s) sisteminde ifâde edilip türevin de bu sistemdeki bir gözlemciye göre (yâni E_i birim taban vektörlerinin t ye göre sâbit oldukları şartı altında) alındığına delâlet etmek üzere bulunmaktadır.

(Σ_s) deki bir gözlemci için tanımlanan

$$v_s = \left(\frac{d(OP)}{dt} \right)_s = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} E_i \quad (I.10.2)$$

vektörüne P noktasının (Σ_s) referans sistemine göre salt (mutlak) hızı ; ve (Σ_g) deki bir gözlemci için tanımlanan

$$v_g = \left(\frac{d(QP)}{dt} \right)_g = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} e_i \quad (I.10.3)$$

vektörüne de P noktasının (Σ_g) referans sistemine göre görel (izâfi) hızı adı verilir.

Şimdi $OP = OQ + QP$ vektörel bağıntısını (Σ_s) deki bir gözlemciye göre türetelim :

$$\left(\frac{d(OP)}{dt} \right)_s = \left(\frac{d(OQ)}{dt} \right)_s + \left(\frac{d(QP)}{dt} \right)_s \quad (I.10.4)$$

olur. Bu ifâdenin sol yanı (I.10.2) ve sağ yanındaki ilk terim de (I.10.1) aracılığıyla anlam kazanmaktadır. Sağ yandaki ikinci terim ise QP nin zamana göre türevinin (Σ_s) referans sistemindeki bir gözlemci tarafından hesaplanmasını öngörmektedir. Hâlbuki (Σ_s) deki bir gözlemci için QP nin hem bileşenleri ve hem de (Σ_g) nin e_i birim taban vektörleri zamanın fonksiyonu olarak değişmektedirler:

$$QP = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \cdot e_i(t). \quad (I.10.5)$$

Buna göre ve (I.10.3) ü göz önüne tutarak

$$\left(\frac{d(\mathbf{QP})}{dt}\right)_s = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt} \mathbf{e}_i + x_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right) = \left(\frac{d(\mathbf{QP})}{dt}\right)_g + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \quad (\text{I.10.6})$$

olduğu bulunur. (I.10.1), (I.10.2) ve (I.10.6) eğer (I.10.4) e yerleştirilirse

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_g + \sum_{i=1}^3 x_i(t) \cdot \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \quad (\text{I.10.7})$$

ifâdesi elde edilir. Burada

$$\mathbf{v}_{su} = \mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^3 x_i(t) \cdot \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \quad (\text{I.10.8})$$

vektörüne P noktasının (Σ_s) salt referans sistemine göre *sürüklenme hızı* adı verilir.

Eğer sürüklenme hızının ifâdesindeki türevler sıfırsa yâni (Σ_s) ye nazaran görel bir hareket yapan (Σ_g) nin taban vektörleri zamana göre değişmiyorlarsa bu, \mathbf{e}_i lerin (boylarının zâten sâbit olmaları dolayısıyla) yönlerinin de değişmediği anlamına gelir. Bu takdirde de (Σ_g) nin (Σ_s) ye göre hareketinin, \mathbf{e}_i birim taban vektörleri hep kendi kendilerine paralel kalacak şekilde bir *öteleme hareketi* olduğu söylenir. Buna göre noktanın salt hızı

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_g \quad (\text{I.10.9})$$

den ibâret olur. Söz konusu öteleme hareketi ivmeli veyâ karmakarışık yörüngeli bir hareket de olabilir. Fakat her ne olursa olsun bir öteleme hareketinde (Σ_g) nin eksenlerinin yönleri daima muhafaza olunurlar. Öteleme hareketinde (Σ_g) nin her noktası (Σ_s) ye göre aynı hıza sahiptirler ve bu hız da (Σ_g) nin Q orijinin hızıdır.

(I.11) ĀNĪ DÖNME VEKTÖRÜ

(I.10.8) deki (Σ_g) nin birim taban vektörlerinin zamana göre türevlerinin özdeş olarak sıfır olmalarının (Σ_g) nin yalnızca bir öteleme hareketini içerdiğini görmüş oluyoruz. Bu noktada sezgimiz bize, söz konusu türevlerin özdeş olarak sıfır olmamaları hâlinde (Σ_g) nin (Σ_s) ye nazaran muhakkak bir dönme hareketi yapacağını telkin etmektedir. Bu sezginin doğru olup olmadığını ortaya koyabilmek için meseleyi matematiksel olarak incelememiz gereklidir.

(I.10.8) deki e_i ler birim vektörler olduklarından, meselâ de_1/dt vektörü, e_1 vektörüne dik ve (e_2, e_3) düzlemi içinde bulunacaktır. Benzer sonuçlar tabii e_2 ve e_3 vektörleri için de geçerlidir. Böylece $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere α_{ij} ile e_i lerin t zaman değişkenine göre türevlerinin bileşenlerini gösterirsek bu düşüncelere göre

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dt} &= 0 + \alpha_{12} e_2 + \alpha_{13} e_3 \\ \frac{de_2}{dt} &= \alpha_{21} e_1 + 0 + \alpha_{23} e_3 \\ \frac{de_3}{dt} &= \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 + 0\end{aligned}\quad (\text{I.11.1})$$

yazılabilir. Şimdi $e_1 \cdot e_2 \equiv 0$ özdeşliğinden t ye göre türev alarak

$$e_1 \cdot \frac{de_2}{dt} + \frac{de_1}{dt} \cdot e_2 = 0$$

veyâ (I.11.1) e göre

$$\alpha_{21} + \alpha_{12} = 0 \rightarrow \alpha_{21} = -\alpha_{12}$$

bulunur. Benzer şekilde $e_1 \cdot e_3 \equiv 0$ ve $e_2 \cdot e_3 \equiv 0$ bağıntılarından hareketle ve (I.11.1) denklemlerini daima göz önünde bulundurarak

$$\alpha_{31} = -\alpha_{13} \quad \text{ve} \quad \alpha_{32} = -\alpha_{23}$$

olduğu da tesbit edilir. Buna göre

$$\sum_{i=1}^3 x_i \frac{de_i}{dt} = (-\alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3) e_1 + (\alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3) e_2 + (\alpha_{13} x_1 + \alpha_{23} x_2) e_3$$

olur. Veyâ α_{ij} ler

$$\alpha_{23} = \omega_1, \quad \alpha_{31} = \omega_2, \quad \alpha_{12} = \omega_3$$

olarak yeniden isimlendirilirse

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 x_i \frac{de_i}{dt} &= (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) e_1 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) e_2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) e_3 = \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\end{aligned}\quad (\text{I.11.2})$$

bulunur. Buradaki

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i$$

vektörüne *anı dönme vektörü* (veyâ sâdece: dönme vektörü) adı verilir. Buna binâen (I.10.7) ifâdesi de

$$\boxed{\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad (\text{I.11.3})$$

şekline girmiş olur.

Şimdi eğer

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \left(\frac{d(\mathbf{OP})}{dt} \right)_s, \quad \mathbf{v}_Q = \left(\frac{d(\mathbf{OQ})}{dt} \right)_s, \quad \mathbf{v}_g = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_g \\ \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_Q &= \left(\frac{d(\mathbf{OP} - \mathbf{OQ})}{dt} \right)_s = \left(\frac{d(\mathbf{QP})}{dt} \right)_s = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_s \end{aligned} \quad (\text{I.11.4})$$

olduğunu da göz önünde tutarsak (I.11.3) ü

$$\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_Q = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_s = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{I.11.5})$$

şeklinde yazabiliriz. Bu formül, (Σ_g) görel referans sistemine bağlı bir \mathbf{r} yervektörünün zamana göre türevinin (Σ_s) salt referans sisteminde hesaplanması arzulan-
dığında operasyonel olarak ne yapmak gerektiğini ortaya koymaktadır.

Eğer \mathcal{D}_s ile (Σ_s) salt referans sisteminde ve \mathcal{D}_g ile de (Σ_g) görel referans sisteminde t zaman değişkenine göre türev alma operatörünü gösterirsek (I.11.5) den esinlenerek \mathcal{D}_s ile \mathcal{D}_g diferansiyel operatörleri arasında

$$\mathcal{D}_s \cdot = (\mathcal{D}_g + \boldsymbol{\omega} \times) \cdot \quad (\text{I.11.6})$$

şeklinde bir *operatör bağıntısı* olduğu hemen görülür.

Şimdi P noktasının (Σ_g) görel referans sistemindeki \mathbf{r} yer vektörünün zamana göre ikinci türevini (Σ_s) salt referans sistemine göre hesaplayalım. Bu bize şüphesiz ki P nin salt (mutlak) ivme vektörünü verecektir. (I.11.5) den hareketle ve (I.11.6) yı de göz önünde tutarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_Q)}{dt} \right)_s &= \mathcal{D}_s \cdot (\mathcal{D}_s \cdot \mathbf{r}) = \mathcal{D}_s \cdot (\mathcal{D}_g \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= (\mathcal{D}_g + \boldsymbol{\omega} \times) \cdot (\mathcal{D}_g \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathcal{D}_g \cdot (\mathcal{D}_g \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathcal{D}_g \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\ &= \mathcal{D}_g^2 \cdot \mathbf{r} + \mathcal{D}_g \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathcal{D}_g \cdot \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned}$$

Yâni

$$\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_Q = \mathcal{D}_s^2 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a}_g + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_g + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

veyâhut da

$$\boxed{\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_g + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] + (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_g)} \quad (\text{I.11.7})$$

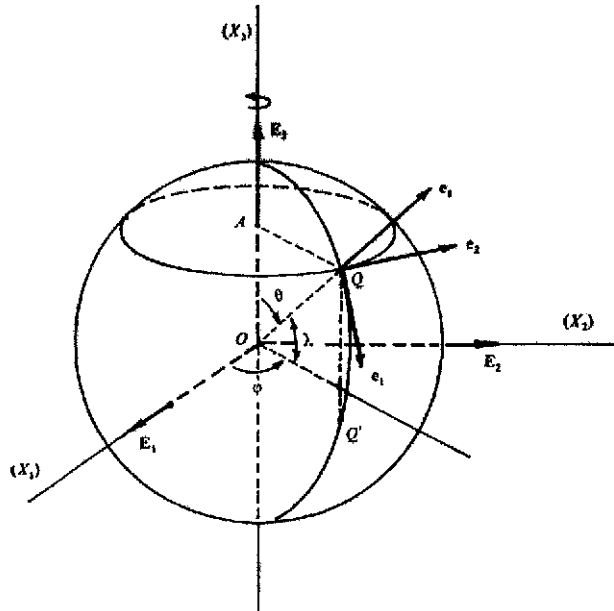
ifâdesi elde edilir.

Uygulamada, çok kere, $\boldsymbol{\omega}$ dönme vektörünün sâbit olduğu hâllerle karşılaşılır. Bu takdirde, tabiidir ki, $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ terimi sıfır olur. (I.11.7) ifâdesindeki $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_g$ terimine *CORİOLİS ivmesi* ve $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ terimine de *merkezcil ivme* adı verilir.

Eğer $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ ise, veyâ $\mathbf{v}_g \equiv 0$ ise, veyâhut da $\boldsymbol{\omega}$ ile \mathbf{v}_g vektörleri birbirlerine paralel iseler CORİOLİS ivmesinin sıfır olacağı anlaşılmaktadır.

(I.12) ARZ ÜZERİNDEKİ BİR NOKTANIN HAREKETİ

Arz, kutuplarından geçen bir eksen etrafında batıdan doğuya doğru, veyâ kuzey kutbu üzerinden Arza bakıldığında pozitif dönme yönünde, günde bir devir yapmaktadır. Eğer uzak yıldızları ilk yaklaşıklıkta sâbit varsayarsak, bunların oluşturdukları, *sâbit* tabii referans sistemine nazaran arzın bu hareketi, şüphesiz, görel bir harekettir.



Şekil : I.14 — Arz üzerinde hareket eden bir Q noktaya bağlı olarak tanımlanan yerel referans sistemi: $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Arzın, ilk bir yaklaşımda, Güneş etrafındaki hareketini ve Güneş sistemiyle birlikte samanyolu içindeki hareketini de ihmâl edelim. Bu takdirde Arzın merkezi de *sâbit yıldızlar referans sistemine* nazaran sâbit olur. Sâbit yıldızlar referans sisteminin orijini Arzın merkeziyle çakışık seçebiliriz. Arzın dönmesini kendisine izâfe ettiğimiz *sâbit yıldızlar referans sisteminin* (X_1, X_2, X_3) eksenleri bir-

birlerine dik E_1 , E_2 ve E_3 birim vektörleriyle belirlenmiş ve özellikle E_3 ün doğrultusu da Arzın kendi etrafında dönme eksenine çakışmış olsun. Arzın üzerinde bulunan bir Q noktasının hareketini bu *sâbit yıldızlar referans sisteminde* incelemek için küresel koordinatlardan yararlanacak fakat θ koordinatı yerine $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ ile belirlenen yeni bir koordinatı göz önüne alacağız. θ zenit açısının $[0, \pi]$ aralığında değerler olmasına karşılık λ *enlemi* $[\pi/2, -\pi/2]$ aralığında değerler alacaktır.

Arzın ω ânî dönme vektörü kutuplar doğrultusunda olup bunun normunun da açısal hızı vereceği bilinmektedir. Oysaki Arzın (X_3) kutuplar eksenine etrafındaki dönüşü ϕ azimüt açısıyla ölçülmekte olduğundan ϕ nin zamana göre türevi açısal hızı verir; buna göre, ω ânî dönme vektörünün

$$\omega = \dot{\phi} E_3 \quad (I.12.1)$$

biçiminde ifâde edileceği anlaşılmaktadır.

Dönme süresince Arz üzerindeki bir Q noktası bir enlem dairesi çizecektir. Öte yandan

$$|\omega| = \omega = \dot{\phi} = \frac{2\pi}{86400} \text{ radyan/saniye} = \text{sâbit} \cong 10^{-4} \text{ rad/san},$$

ve dolayısıyla da $\omega^2 = \dot{\phi}^2 \sim 10^{-8} \text{ rad}^2/\text{san}^2$ mertebesinde dir. Eğer Güneşin, Ayın ve Güneş sistemindeki diğer gezegenlerin Arzın ekseninin doğrultusu üzerindeki etkilerini de ihmâl edilebilir sayarsak, Arzın dönme eksenine de *sâbit yıldızlar referans sisteminde* belirleyen E_3 eksenine sürekli olarak çakışacaktır. Buna göre de $\dot{\omega} = d\omega/dt \cong 0$ alınmalıdır. Kezâ ω^2 nin de, yukarıda verilmiş olan değeri dolayısıyla, ω yanında rahathkla ihmâl edilebileceği açıktır.

Buna göre Q noktasının *sâbit yıldızlar referans sisteminde* göre salt ivmesi

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_g + 2\omega \times \mathbf{v}_g, \quad (\dot{\omega} = 0, \omega^2 \neq 0) \quad (I.12.2)$$

ifâdesine indirgenmiş olur.

Q noktasının görel hareketini incelemek için yararlanacağımız (Σ_g) referans sisteminde de aynı Q noktasını orijin olarak kabul eden ve birbirlerine dik birim taban vektörleri de sırasıyla e_1 vektörü Q den geçen meridyen dairesine kuzey-güney yönünde teğet, e_2 vektörü Q den geçen enlem dairesine batı-doğu yönünde teğet ve e_3 vektörü de radyal yönde olan bir dik üçyüzlü olarak seçeceğiz (bk. Şekil : I.14).

Arzdaki her cismin zahirî bir g ivmesi olduğu ve bu ivmenin de kinematikten çok dinamik bir kökü olduğu bilinmektedir. Arza bağlı bir P noktası için (yük-

seklige bağılı olarak doğal değişmesi şimdilik göz önünde tutulmayacak olursa) aynı sâbit değeri haiz olan bu \mathbf{g} ivmesi kinematik açılarından \mathbf{a}_s salt ivmesiyle noktanın hareketinin incelendiği (Σ_g) referans sisteminin Q orijininin \mathbf{a}_Q salt ivmesi arasındaki fark olarak

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}_s - \mathbf{a}_Q \quad (\text{I.12.3})$$

biçiminde tanımlanır. (I.11.7) ile (I.12.3) ün karşılaştırılması

$$\mathbf{a}_g = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_g - (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) - [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

verir. Ancak, Arz için $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ ve $|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| \sim \omega^2 \sim 0$ olduğundan bu ifade

$$\boxed{\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \quad (\text{I.12.4})$$

şekline girer. Eğer noktanın (Σ_g) deki görel $\mathbf{v}_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ hızı, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{E}_3$ vektörüne paralelse bu takdirde yalnızca

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} \quad (\text{I.12.5})$$

olur.

Şimdi başlangıç hızı sıfır, yâni

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

olan bir cismin Arza düşmesini kinematik görüş açısından inceleyelim. Cismin yörüngesini belirlemek için (I.12.4) diferansiyel denkleminde hareket etmemiz gereklidir.

Bu denklemi çözmek için önce bir kere t ye göre türetelim; bu takdirde

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = -2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -2\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \# -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} = \text{sâbit}$$

ve buradan da integral olarak ($\boldsymbol{\omega}$ ve \mathbf{g} nin sâbit olmalarından dolayı)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t + \mathbf{B} \quad (\text{I.12.6})$$

bulunur. \mathbf{B} vektörü integrasyon sâbitini göstermektedir. Bunun fiziksel anlamını ararsak $t = 0$ için (I.12.6) dan hemen

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{t=0} = \mathbf{B}$$

olması gerektiği görülür. Oysaki (Σ_g) referans sisteminde cismin görel ivmesi zamana bağlı olmaksızın \mathbf{g} ye eşittir. Şu hâlde $\mathbf{B} = \mathbf{g}$ olmalıdır. Buna göre (I.12.6) denklemi

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t + \mathbf{g} \quad (\text{I.12.7})$$

olur. Bu son ifâdeyi de integre edersek, \mathbf{C} yeni bir integrasyon sâbiti olmak üzere,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t^2 + \mathbf{g}t + \mathbf{C} \quad (\text{I.12.8})$$

bulunur. Fakat $t = 0$ için $d\mathbf{r}/dt = 0$, yâni cismin başlangıç hızının sıfır olduğunu kabul etmiş olduğumuzdan bu şart altında (I.12.8) den $\mathbf{C} \equiv 0$ olması gerektiği görülür. Böylece elde edilen ifâdeyi de integre eder ve \mathbf{D} ile yeni bir integrasyon sâbitini gösterirsek yervektörünün ifâdesi olarak

$$\mathbf{r} = \frac{1}{3}(-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t^3 + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{D} \quad (\text{I.12.9})$$

ifâdesi elde edilmiş olur. $t = 0$ için $\mathbf{r} = \mathbf{D} = h\mathbf{e}_3$ vaz edip de

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{D} = h\mathbf{e}_3$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{E}_3$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} = -\omega g\mathbf{E}_3 \times \mathbf{e}_3 = g\omega(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_3) = g\omega \sin \theta \mathbf{e}_2 = (g\omega \cos \lambda) \mathbf{e}_2$$

olduğunu da göz önünde tutarak (I.12.9) u yeniden yazarsak

$$\mathbf{r} = \left(\frac{g\omega}{3} \cos \lambda\right) t^3 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}gt^2 \mathbf{e}_3 + h\mathbf{e}_3 \quad (\text{I.12.10})$$

bulunur.

(Σ_g) görel referans sisteminde \mathbf{e}_2 birim vektörü doğuya yönelik olduğundan ilk hızsız serbest düşüğe bırakılan bir cismin CORIOLİS ivmesinden dolayı düşey doğrultudan doğuya doğru bir miktar sapacağı ve hareketin düşey-doğu düzlemi içinde vukuu bulacağı (I.12.10) hareket denkleminin açıkça görülmektedir.

Eğer (I.12.10) vektörel hareket denkleminin bileşenlerine geçilirse

$$\begin{aligned} \text{Düşey bileşeni : } x_3 &= -\frac{1}{2}gt^2 + h \\ \text{Doğu bileşeni : } x_2 &= \frac{g\omega \cos \lambda}{3}t^3 \end{aligned} \quad (\text{I.12.11})$$

ifâdeleri bulunur. Bu iki ifâde arasında t zaman parametresini yok ederek cismin ilk hızlız serbest düşüşünde doğuya sapışını, yüksekliğinin fonksiyonu olarak belirlemek de mümkündür, ve neticede

$$\boxed{x_2 = \frac{\omega \cos \lambda}{3 \sqrt{g}} \left[2(h - x_3) \right]^{3/2}} \quad (I.12.12)$$

bulunur. Bu formülden, doğuya sapmanın ekvatorunda maksimum, kutuplarda ise sıfır olacağı anlaşılmaktadır. Sapmanın büyüklüğü hakkında bir fikir verebilmek amacıyla ekvatorunda yerden $h = 100$ metre yükseklikten serbest düşüşe bırakılan bir cismin (atmosferin direnci gözönüne alınmadığı takdirde) toprağa ($x_3 = 0$), düşeyden doğuya doğru $x_2 = 2,2$ cm kadar sapsmış olarak varacağını söyleyelim.

(I.13) MERMİLERİN HAREKETİ

Arz üzerindeki bir Q noktasından belirli bir v_0 başlangıç hızıyla fırlatılmış bir mermi olsun. Bunun hareketini de gene bir önceki paragrafta ve Şekil: I.14 de belirlenmiş olan Q orijinli (Σ_g) görel referans sistemine nazaran inceleyeceğiz.

Merminin $t = 0$ ânında ve Q orijininden itibaren belirli bir

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t=0} = (\mathbf{v}_g)_{t=0} = \mathbf{v}_0 = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \text{sâbit}$$

hızıyla fırlatılmış olduğunu varsayalım; buna göre: $(\mathbf{r})_{=0} = \mathbf{r}_0$ olacaktır. Mesele, bir önceki misâlde olduğu gibi

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (I.13.1)$$

denklemini fakat bu sefer

$$(\mathbf{v}_g)_{t=0} = \mathbf{v}_0 = \text{sâbit}$$

$$(\mathbf{r})_{t=0} = \mathbf{r}_0$$

başlangıç şartları altında çözmekten ibarettir. Bunu gerçekleştirebilmek üzere, Arzın sâbit $\boldsymbol{\omega}$ dönme vektörünün uzunluğunun karesinin ihmâl edilebilir mertebede olması özelliğinden yararlanabilmek için, (I.13.1) i t ye göre bir kere türetelim:

$$\frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} = -2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -2\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \# -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} = \text{sâbit}$$

olur. Buradan ise integral almak sûretiyle

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t + \mathbf{a}_0 \quad (\text{I.13.2})$$

bulunur. $t = 0$ için

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{t=0} = \mathbf{a}_0 = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{t=0} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 \quad (\text{I.13.3})$$

olmak hasebiyle \mathbf{a}_0 vektörel integrasyon sâbitinin hem merminin başlangıç ivmesini gösterdiği anlaşılmış ve hem de açık ifâdesi elde edilmiş olur. Buna göre (I.13.2) ve (I.13.3) den

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t + (\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0)$$

bulunur. Buradan bir kere daha integral alarak

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t^2 + (\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0) t + \mathbf{b}$$

bulunur. Öte yandan $t = 0$ için

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{t=0} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{b}$$

olacağından

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t^2 + (\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0) t + \mathbf{v}_0$$

ifâdesi elde edilmiş olur. Ve nihâyet bu son ifâdeyi de integre eder ve integrasyon sâbitini de $t = 0$ için $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ olması özelliğinden yararlanarak belirlersek merminin hareket denklemi olarak

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t^3 + \frac{1}{2} (\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0) t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0} \quad (\text{I.13.4})$$

ifâdesi elde edilmiş olur.

Merminin, Arzda Q daki gözlemcinin bağlı bulunduğu (Σ_g) kartezyen referans sistemine göre hareketinin özelliklerini inceleyebilmek için (I.13.4) hareket denkleminin (Σ_g) nin eksenleri üzerindeki izdüşümlerini göz önüne almak gereklidir.

Şekil : I.14 den

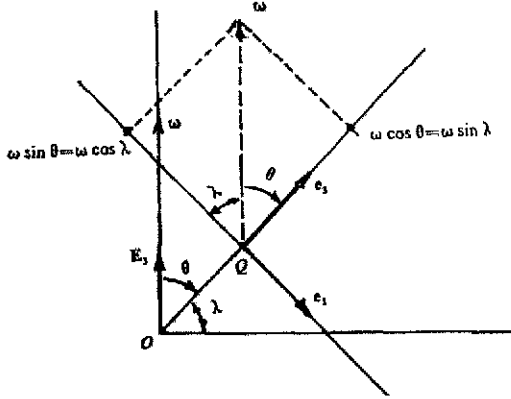
$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3; \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i; \mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i; \mathbf{r}_0 = \sum_{i=1}^3 x_{0i} \mathbf{e}_i; \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{E}_3$$

ve Şekil : I.15 den de

$$E_3 = \cos \theta e_3 - \sin \theta e_1$$

$$\omega = \omega \sin \lambda e_3 - \omega \cos \lambda e_1$$

olduğu görülmektedir.



Şekil : I.15 — ω âni dönme vektörünün zenit bileşeni ile kuzey güney bileşeninin saptanması :

$$\omega_3 = \omega \sin \lambda, \quad \omega_1 = -\omega \cos \lambda.$$

Buna göre :

$$-\omega \times g = -(\omega \sin \lambda e_3 - \omega \cos \lambda e_1) \times (-g e_3) = \omega g \cos \lambda e_2,$$

ve

$$\begin{aligned} -\omega \times v_0 &= -(\omega \sin \lambda e_3 - \omega \cos \lambda e_1) \times (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) \\ &= (\omega u_2 \sin \lambda) e_1 - (\omega u_3 \cos \lambda + \omega u_1 \sin \lambda) e_2 + (\omega u_2 \cos \lambda) e_3 \end{aligned}$$

olacağından (I.13.4) den hareketin bileşenleri olarak :

| | |
|------------------------------------|---|
| Kuzey-güney bileşeni | $: x_1(t) = (\omega u_2 \sin \lambda) t^2 + u_1 t + x_{01}$ |
| Batı-doğu bileşeni | $: x_2(t) = \left(\frac{1}{3} \omega g \cos \lambda \right) t^3 - \omega (u_3 \cos \lambda + u_1 \sin \lambda) t^2 + u_2 t + x_{02}$ |
| Dikey (veyâ zenit) bileşeni | $: x_3(t) = \left(\omega u_2 \cos \lambda - \frac{1}{2} g \right) t^2 + u_3 t + x_{03}$ |

(I.13.5)

ifâdeleri elde edilir.

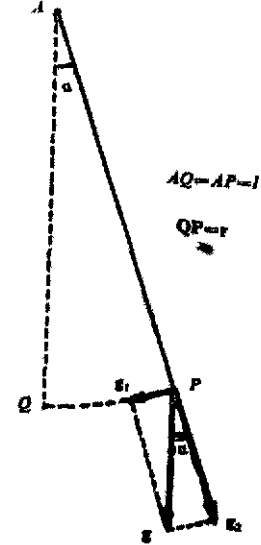
Eğer merminin v_0 ilk hızı meridyen yâni (e_1, e_3) düzlemindeyse $u_2 = 0$ dir; ayrıca bir de merminin atıldığı yer (Σ_g) nin Q orijini ise $r_0 = 0$ dir. Bu takdirde merminin (I.13.5) hareket denklemleri

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= u_1 t \\ x_2(t) &= \left(\frac{1}{2} \omega g \cos \lambda \right) t^3 - \omega (u_3 \cos \lambda + u_1 \sin \lambda) t^2 \\ x_3(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + u_3 t \end{aligned} \right\} \quad (I.13.6)$$

şekline girerler. Bu denklemler bize merminin, Arzın neresinden atılmış olursa olsun (yâni : $-\pi/2 \leq \lambda \leq \pi/2$ için), muhakkak doğu yönünde bir sapmaya uğrayacağını göstermektedir ($x_2 \neq 0$). Bu sapmanın sıfırdan farklı oluşu, aslında Arzın ω dönme hızının sıfırdan farklı oluşuna bağlıdır. Gerçekten de $\omega = 0$ ise doğuya doğru sapışın da sıfır olacağı (I.13.6) nın ikinci denkleminde derhal görülmektedir.

(I.14) FOUCAULT SARKACI

FOUCAULT sarkacı diye sâbit bir A noktası etrafında serbestçe hareket eden ve salınımlarının uzanımları AP uzunluğuna göre çok küçük olan bir tel ile bunun ucundaki bir P noktasının oluşturduğu mekanik sisteme denir (bk. Şekil: I.16).



Şekil : I.16 — FOUCAULT sarkacı :
 $AQ = AP = l, QP = r.$

P noktası üzerindeki g gravitasyon ivmesi g_1 ve g_2 bileşenlerine ayrılabilir. Eğer α açısı küçükse yâni $|r| \ll l$ ise $QP = r$ vektörü de ilk yaklaşıklıkta yatay düzlemedir. Bu itibarla FOUCAULT sarkacının düzlemsel hareketindeki ivmesinin g_1 olduğunu söyleyebiliriz. Öte yandan

$$r = \alpha l \quad \text{ve} \quad \sin \alpha \approx \alpha = \frac{r}{l}$$

olacağından

$$g_1 = g \sin \alpha = \frac{g}{l} r = n^2 r \quad (\text{I.14.1})$$

yazılabilir. n^2 , burada, pozitif bir sayıya delâlet etmektedir.

Sarkacın P ucunun yatay hareketini göz önüne aldığımızda çözmemiz gereken hareket denklemi de, gene Arzın sâbit ω dönme vektörünün karesinin ihmâl

edilebilecek derecede küçük olduğuna dikkat, ve P nin yatay hareketinin ivmesinin de g_1 olduğuna işâret ederek

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}_1 - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

olur. (I.14.1) i de göz önünde bulundurarak

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{g}{l}\mathbf{r} \quad (\text{I.14.2})$$

bulunur. P noktasının Q orijininin \mathbf{r} yervektörünün, ilk bir yaklaşıklıkta, yatay ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) düzleminde düşünülebilmesi dolayısıyla \mathbf{r} nin düşey bileşenini hiç göz önünde bulundurmuyacak ve \mathbf{r} için sâdece

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

yazacağız. Buna göre $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ vektörel çarpımı

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix}$$

şeklinindedir. Düşey doğrultusundaki bileşen ihmâl edildiği takdirde buradan

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -\omega \dot{y} \sin \lambda \mathbf{e}_1 + \omega \dot{x} \sin \lambda \mathbf{e}_2 \quad (\text{I.14.3})$$

bulunur. Bir taraftan $n^2 = g/l$ vaz edip, diğer taraftan da (I.14.3) ü göz önünde tutarsak (I.14.2) hareket denklemi

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} \sin \lambda + n^2 x = 0 : \text{ kuzey-güney bileşeni} \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} \sin \lambda + n^2 y = 0 : \text{ batı-doğu bileşeni} \end{cases} \quad (\text{I.14.4})$$

şeklinde bileşenlerine ayırır.

Şimdi bu birbirine bağlı ikinci mertebeden iki âdi diferansiyel denklemden oluşan sistemi çözmek için \mathbf{r} yervektörünün ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) yatay düzleminde $\zeta = x + iy$ gibi tek bir karmaşık sayı aracılığıyla da gösterilebileceğine dikkati çekelim. Bu husus, \mathbf{r} yi bulmak için batı-doğu bileşenini $i = \sqrt{-1}$ ile çarpıp kuzey-güney bileşenine eklemenin yeterli olacağına da işâret etmektedir. Bu takdirde (I.14.4) denklemlerinin ikincisini i ile çarpıp da birincisine eklersek

$$\ddot{\zeta} + 2\omega \sin \lambda (i\dot{x} - \dot{y}) + n^2 \zeta = 0$$

ve

$$i\dot{x} - \dot{y} \equiv i\dot{\zeta}$$

olmasından ötürü de hareket denklemimiz

$$\ddot{\zeta} + (2\omega i \sin \lambda) \dot{\zeta} + n^2 \zeta = 0 \quad (I.14.5)$$

basit şekline indirgenmiş olur.

Arzın λ dereceli paraleldeki dönme hızı $\omega \sin \lambda$ dır.

Şimdi öyle bir koordinat dönüşümü ele alalım ki yeni koordinatlarda Arzın bu görel dönme hareketi olmasın. Böyle bir koordinat sistemi şüphesiz ki Arzın ω dönme hızına eşit bir hızla ve Arzla birlikte e_3 etrafında dönen bir koordinat sistemi olacaktır. Biz λ dereceli enlem üzerindeki Q noktasıyla ilgilendiğimize göre buradaki, Arzın $\omega \sin \lambda$ ye eşit dönme hızını ifnâ edebilecek bir koordinat dönüşümü gene karmaşık sayılar kullanarak, şüphesiz,

$$\eta = e^{i(\omega \sin \lambda) t} \quad (I.14.6)$$

şeklinde olacaktır. Amacımız (I.14.5) hareket denklemini bu yeni koordinat sisteminde ifâde edebilmektir. (I.14.6) dan hareketle kolayca

$$\dot{\eta} = e^{i(\omega \sin \lambda) t} [\dot{\zeta} + (i\omega \sin \lambda) \zeta] \quad (I.14.7)$$

$$\ddot{\eta} = e^{i(\omega \sin \lambda) t} [\ddot{\zeta} + (2i\omega \sin \lambda) \dot{\zeta} - (\omega^2 \sin^2 \lambda) \zeta] \quad (I.14.8)$$

(I.14.6-8) denklemleri aracıyla, (I.14.5) hareket denkleminin yeni koordinat sistemindeki ifâdesinin

$$\ddot{\eta} + (\omega^2 \sin^2 \lambda + n^2) \eta = 0$$

olacağı bulunur. Fakat Arzın dönme hızının karesi, çok küçük bir büyüklük olmak hesabıyla ihmâl edilebileceğinden bu son ifâde de büyük bir yaklaşıklıkla

$$\ddot{\eta} + n^2 \eta = 0 \quad (I.14.9)$$

şekline indirgenir.

Bu denklemin genel çözümü ise ζ_0 ve ξ_0 iki karmaşık sâbit olmak üzere

$$\eta(t) = \zeta_0 \cos nt + \xi_0 \sin nt$$

şeklinde dir. Bu matematiksel çözümden, göz önüne alınan fiziksel durumu yansıtacak gerçek bir fiziksel çözüme geçebilmek için, bilindiği gibi ζ_0 ve ξ_0 integrasyon sâbitlerinin problemin başlangıç şartlarına uygun bir biçimde belirlenmesi gereklidir.

Eğer göz önüne aldığımız sarkacın $t = 0$ için (*başlangıç*) hızının sıfır olduğunu kabul edersek.

$$0 = (\dot{\eta})_{t=0} = (-n \zeta_0 \sin nt + n \xi_0 \cos nt)_{t=0} = n \xi_0,$$

yâni $\xi_0 = 0$ olması gerektiği bulunur. Buna göre (I.14.9) un fiziksel çözümü, $n^2 = g/l$ olduğunu da göz önünde tutarak,

$$\eta(t) = \zeta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (\text{I.14.10})$$

olur. Bu ifâdeden ζ_0 ın, hareketin, yeni koordinat sistemindeki genliğini gösterdiği anlaşılmaktadır.

Şimdi gene Arza bağlı ve Q orijinli (e_1, e_2) yatay koordinat sistemine dönecek olursak (I.14.6) ve (I.14.10) dan

$$\zeta(t) = (e^{-i(\omega \sin \lambda) t} \zeta_0) \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (\text{I.14.11})$$

denklemini elde edilir. Bu ifâdeyi de, $\zeta_0 = \alpha + i\beta$ vazettikten sonra bileşenlerine ayırarak

$$\begin{aligned} x(t) &= \{ \alpha \cos [\omega (\sin \lambda) t] + \beta \sin [\omega (\sin \lambda) t] \} \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \\ y(t) &= \{ \beta \cos [\omega (\sin \lambda) t] - \alpha \sin [\omega (\sin \lambda) t] \} \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \end{aligned} \quad (\text{I.14.12})$$

denklemleri bulunur. Her iki denklem de kareye kaldırılıp da taraf tarafa toplanacak olursa

$$x^2 + y^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \cos^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (\text{I.14.13})$$

bulunur. Bu denklemin sağ yanının maksimum değeri $(\alpha^2 + \beta^2)$ dir. Eğer $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$ vazedilirse sarkacın ucunun (e_1, e_2) yatay düzlemindeki hareketinin

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

olacak şekilde Q merkezli ve $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ yarıçaplı bir dairenin içinde kaldığı; genliği R olan salınımlar yaparak bu daireyi çizdiği anlaşılır.

Ekvatordeki bir sarkaç için: $\omega \sin \lambda = 0$ olacağından sarkacın ekvatorda yatay (e_1, e_2) düzleminde çizdiği daire üzerindeki hızının sıfır; kutuplardan birine yerleştirilen bir sarkaç için de: $\omega \sin \frac{\pi}{2} = \omega$ olacağından sarkacın oradaki hızının maksimum ve Arzın sâbit yıldızlar referans sistemine göre olan hızına eşit olacağı anlaşılır.

(I.15) GEZEGENLERİN HAREKETİ

Semer kandlı Türk astronomu Sultan ULUĞ BEY (1394-1449) gezegenlerin hareketlerini uzun yıllar gözlemiş ve gökyüzündeki konumlarının değişimlerini de açısal ölçümlerle tesbit ederek bunları cetveller hâlinde toplamıştı. Kendisine intikaal etmiş olan ULUĞ BEY cetvellerini daha hassas ölçü âfetleriyle geliştirmiş olan Danimarkalı astronom TYCHO BRAHE (1546-1601) den sonra Bohemyalı astronom JOHANNES KEPLER (1572-1630) bu geliştirilmiş cetveller üzerindeki incelemeleri ve bunlara dayanarak yaptığı hesaplar sonucu gezegenlerin gökteki hareketlerinin özellikleri hakkında, hâlen kendi adıyla anılmakta olan, tamamen kinematik mâhiyeti haiz şu üç kuralı ortaya koymayı başarmıştı:

- 1) *Gezegenler, odaklarından birinde Güneşin bulunduğu elipsler boyunca hareket ederler.*
- 2) *Güneşi gezegene birleştiren yervektörü eşit zaman aralıklarında eşit alanlar süpürür.*
- 3) *Gezegenlerin Güneş etrafındaki dolanım sürelerinin kareleri yörüngelerinin büyük eksenlerinin üçüncü kuvvetleriyle orantılıdır.*

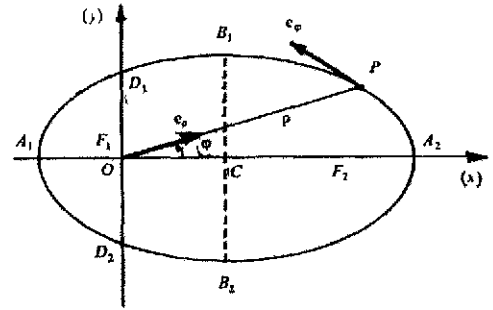
Bunlardan birincisi, aynı zamanda, gezegenin hareketinin bir düzlem içinde bulunduğuna da delâlet etmektedir.

Şekil : I.17 — Gezegenlerin Güneş etrafındaki eliptik yörüngelerinin karakteristik elemanları :

$$\overline{A_1C} = \overline{CA_2} = a; \quad \overline{B_1C} = \overline{CB_2} = b; \quad \overline{F_1P} = \rho;$$

$$\overline{F_1D_1} = \overline{F_1D_2} = p; \quad \overline{F_1C} = \overline{CF_2} = c.$$

a : yarı-büyük eksen; b : yarı-küçük eksen; p : ışınal uzaklık; p : elipsin parametresi; $c/a = e$: elipsin dış-merkezliği.



P gezegeninin yörüngesi olan elipsi (x,y) dik kartezyen koordinatlarda göz önüne alalım ve bu koordinat sistemini o türlü seçelim ki Güneşin bulunduğu F_1 odağı sistemin O orijiniyle çakışsın. Bu takdirde p ve e iki sâbiti göstermek üzere elipsin (ρ, φ) kutupsal koordinat sistemindeki ifâdesinin

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (\text{I.15.1})$$

ifâdesiyle verildiği bilinmektedir. Buradan, derhâl, $\rho(\pi/2) = p$ olduğu görülür ki bu da p parametresinin elips için geometrik olarak neye delâlet ettiğine işâret etmektedir. Öte yandan

$$\rho(0) = \overline{F_1 A_2} = \frac{p}{1-e} \quad \text{ve} \quad \rho(\pi) = \overline{F_1 A_1} = \frac{p}{1+e}$$

olduğundan

$$2a = \overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 F_1} + \overline{F_1 A_2} = \frac{2p}{1-e^2} \quad (\text{I.15.2})$$

dir. Fakat ayrıca

$$\overline{F_1 F_2} = 2(\overline{F_1 A_2} - \overline{C A_2}) = 2(\overline{F_1 A_2} - a) = \frac{2p}{1-e} - 2a = \frac{2pe}{1-e^2} \quad (\text{I.15.3})$$

dir. (I.15.3) ü (I.15.2) ile taraf tarafa bölersek

$$\frac{\overline{F_1 F_2}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{c}{a} = e$$

bulunur. e ye, göz önüne alınmış olan elipsin dışmerkezliği adı verilir. $e = 0$ durumu bir daireye ve $e = \infty$ durumu da bir doğruya delâlet eder; yâni e nin değeri ne kadar büyükse elips de o kadar ince ve uzun olur.

KEPLER'in bulduğu ikinci kurala gelince bu, ρe_p yervektörünün dt zaman aralığı süresince O etrafında $d\varphi$ açısı kadar döndürülmesiyle süpürülen

$$dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi$$

elemanter alanının dt ile orantılı olduğunu, yâni

$$\rho^2 d\varphi = C dt \quad (C = \text{sâbit}) \quad (\text{I.15.4})$$

olduğunu ifâde etmektedir. Bu ise paragraf (I.7) den bildiğimiz gibi bir *merkezil hareketi* nitelendiren en önemli özelliktir. Bilindiği gibi merkezil harekette noktanın ivmesi daima sâbit bir noktaya yönelik bulunur. Gezegenlerin Güneş etrafındaki hareketlerinde de ivmelerinin daima Güneşe yönelik olduğunu göstermek için (I.15.4) ün her iki yanını da önce dt ile bölüp sonra da t ye göre türetelim. Bu takdirde

$$\rho^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\rho \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \rho^2 \ddot{\varphi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} = 0$$

bulunur. Hâlbuki (I.4.11) e göre, bu gezegenin e_p boyunca ivmesinin ρ mislinden başka bir şey değildir. Bunun sıfır olması demek gezegenin yalnızca e_p boyunca bir ivmesi olması, yâni gezegenin ivmesinin Güneşe yönelik olması demektir. Bu ışınsal (radyal) ivmenin büyüklüğünü a_p ile gösterirsek gene (I.4.11) e göre

$$a_p = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \quad (\text{I.15.5})$$

olur. Işınsal ivmenin ifâdesini daha açık bir şekilde hesaplayabilmek için (I.15.1) ve (I.15.4) aracılığıyla (I.15.5) deki ϕ li ifâdeye elemeye çalışalım. (I.15.4) den

$$\frac{1}{dt} = \frac{C}{\rho^2} \frac{1}{d\phi} \quad (\text{I.15.6})$$

ve dolayısıyla

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{C}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\phi} \quad (\text{I.15.7})$$

yazılabilir. Şimdi (I.15.6) göz önünde tutularak (I.15.7) ifâdesi t ye göre türetilen olursa

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{C}{\rho^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{C}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\phi} \right)$$

veyâ

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{C^2}{\rho^4} \frac{d^2\rho}{d\phi^2} - \frac{2C}{\rho^5} \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 \quad (\text{I.15.8})$$

olur. (I.15.4) dolayısıyla

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \dot{\phi}^2 = \frac{C^2}{\rho^4}$$

tür. Buna göre ve (I.15.8) i de dikkate alarak (I.15.5) ışınsal ivme ifâdesi

$$a_p = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{C^2}{\rho^3} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{d\phi^2} - \frac{2}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 - 1 \right]$$

bulunur. (I.15.1) i ϕ ye göre türetmek sûretiyle $d\rho/d\phi$ ve $d^2\rho/d\phi^2$ de kolaylıkla bulunup da bu son ifâdeye yerleştirildiğinde nihâyet

$$a_p = \frac{C^2}{\rho^3} (-\rho e \cos \phi - \rho)$$

olur. Hâlbuki (I.15.1) elips denkleminde göre, bu son ifâdedeki parantezin içerisi $-\rho$ ya eşittir. Şu hâlde a_p ışınsal ivmesi için

$$a_p = -\frac{C^2}{\rho} \frac{1}{\rho^2}$$

veyâ

$$\boxed{a_p = -\frac{C^2}{\rho} \frac{1}{\rho^2} e_p} \quad (\text{I.15.9})$$

bulunur. Buna göre *gezegenin ivmesi Güneşe doğru yönelik olup gezegenle Güneş arasındaki uzaklığın karesiyle ters orantılıdır.*

İvmenin (I.15.9) ile verilmiş olan ifâdesindeki C^2/p sâbiti her bir gezegenin kendi hareket sâbitlerine bağlıdır. Bu itibarla C^2/p sâbitinin her gezegen için, ilk bakışta, ayrı bir değeri haiz olması gerektiği zannedilebilir. Şimdi bunun böyle olmadığını ve, aksine, C^2/p sâbitinin bütün gezegenler için aynı değeri haiz bir *evrensel sâbit* olduğunu göstereceğiz.

KEPLER'in bulmuş olduğu üçüncü kural, T ile gezegenin yörüngesi üzerindeki dolanım süresini göstermek sûretiyle, her gezegen için

$$\frac{a^3}{T^2} = \alpha = \text{sâbit} \quad (\text{I.15.10})$$

olduğunu ifâde etmektedir. Burada α , bütün Güneş sistemi için aynı değeri haiz ortak bir sâbiti göstermektedir. (I.15.4.) bağıntısına göre

$$dt = \frac{2}{C} \left(\frac{1}{2} \rho^2 d\varphi \right) = \frac{2}{C} dS$$

yazılır. Bu, 0 dan T ye kadar integre edilirse

$$\int_0^T dt = T = \frac{2}{C} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi = \frac{2}{C} \int_0^{2\pi} dS = \frac{2}{C} \pi ab$$

olur. Buna göre (I.15.10) aracılığıyla α sâbiti için

$$\alpha = \frac{a^3}{\frac{4\pi^2}{C^2} a^2 b^2} = \frac{C^2 a}{4\pi^2 b^2} \quad (\text{I.15.11})$$

bulunur. Şekil : I.16 dan ve elipsin, sâbit iki noktaya olan uzaklıklarının farkı sâbit olan noktaların geometrik yeri olduğunu da hatırdâ tutarak

$$\overline{F_1 D_1} + \overline{D_1 F_2} = 2a \rightarrow \overline{D_1 F_2} = 2a - p$$

$$\overline{F_1 B_1} + \overline{B_1 F_2} = 2 \overline{F_1 B_1} = 2a \rightarrow \overline{F_1 B_1} = a$$

$$\overline{F_1 C} = \sqrt{(\overline{F_1 B_1})^2 - (\overline{B_1 C})^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$(\overline{F_1 D_1})^2 + (\overline{F_1 F_2})^2 = (\overline{D_1 F_2})^2 \rightarrow p^2 + 4(a^2 - b^2) = 4a^2 - 4ap + p^2$$

veyâ

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (\text{I.15.12})$$

bulunur. p nin (I.15.12) değerinin (I.15.11) e yerleştirilmesi sonucu

$$\alpha = \frac{C^2}{4\pi^2 p} \quad (\text{I.15.13})$$

veyâ

$$\frac{C^2}{p} = 4 \pi^2 \alpha$$

olduğu ortaya çıkar. α bütün Güneş sistemi için evrensel bir sâbit olduğuna göre C^2/p de bütün gezegenler için aynı değeri haizdir demektir. Buna göre Güneş sistemindeki herhangi bir gezegenin a_p ışınsal ivmesinin,

$$\boxed{a_p = -\frac{4 \pi^2 \alpha}{\rho^2} e_p} \quad (\text{I.15.14})$$

şeklinde olduğu anlaşılmış olur.

Böylece KEPLER'in tesbit ettiği kuralların kinematik olarak vaz ettikleri hareket problemi tamamen çözümlenmiş olmaktadır.

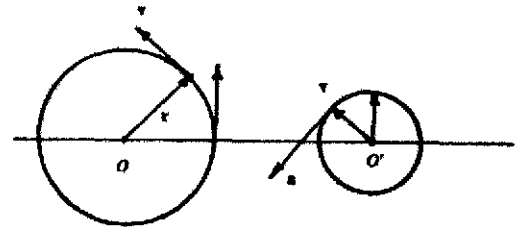
(I.16) HODOGRAFLAR

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ veyâ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ yervektörüyle, hareketi, t zamanının veyâ belirli bir başlangıç noktasından itibaren yörüngesi üzerinde katettiği yay uzunluğunun fonksiyonu olarak belirlenmiş olan bir P noktasını göz önüne alalım. \mathbf{r} yervektörünü O orijinli bir (x_1, x_2, x_3) koordinat sistemine izâfe edersek noktanın bu sistemdeki yörüngesini elde ederiz.

Şimdi, hareketin

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \mathbf{e}_i$$

şeklinde ifâde edilen hız vektörünü göz önüne alır da bunu bir O' orijinli, $(u_1 = \dot{x}_1, u_2 = \dot{x}_2, u_3 = \dot{x}_3)$ gibi bir koordinat sistemine izâfe edersek \mathbf{v} nin ucunun çizeceği yörüngeye P noktasının hareketinin *hodografı* ve O' ye de *hodografın kutbu* adı verilir.



Şekil : I.18 — Dairesel bir hareketin hodografı gene bir dairedir.

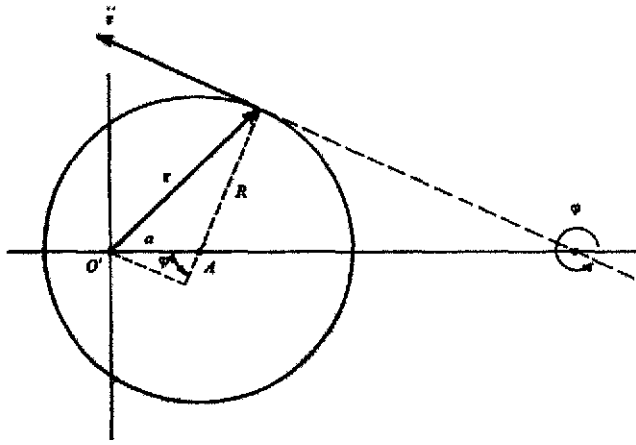
Bir hareketin hodograf eğrisi bilinirse bu eğrinin teğeti tabiidir ki hareketin ivme vektörünü verecektir.

Bir misâl olarak dairesel bir hareketin hodografının da gene bir daireden ibâret olacağını söyleyelim.

Hodograf kavramının kinematiğe uygulanmasına zarif bir misâl vermiş olmak için de, hodografı dışmerkezcil (*eksantrik*) bir daire olan, merkezcil bir hareketin yörüngesinin nasıl olduğunu araştıralım.

Hareketin merkezcil bir hareket olması \mathbf{r} ile $\dot{\mathbf{r}}$ nın aynı doğrultuda bulunmalarını ve yörüngenin kapalı bir eğri olması hâlinde de birbirlerine zıt yönlere yönelik olmalarını içerir.

Hodograf belirli bir yönde katedilecek olursa \mathbf{r} yervektörünün yönü de φ açısı aracılığıyla belirlenecektir (*bk.* Şekil : I.19). Hareketin \mathbf{r} yervektörünün açık ifâdesini hesaplamak için önce $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ hız vektörünün hareket düzleminde biri \mathbf{r} ye



Şekil : I.19 — Hodografı dışmerkezcil bir daire olan bir hareketin yörüngesinin saptanması.

paralel v_{\parallel} , diğeri ise \mathbf{r} ye dik v_{\perp} bileşenlerine ayrıldığını kabul edecek ve merkezcil hareketi karakterize eden *alanlar kaanûnunun* (I.7.3) ile verilmiş olan ifâdesinden yararlanacağız. Buna göre

$$|\mathbf{C}| = C = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = |\mathbf{r} \times (v_{\parallel} \mathbf{e}_r + v_{\perp} \mathbf{e}_{\varphi})| = r \cdot v_{\perp}$$

olur. Öte yandan şekilden de

$$v_{\perp} = R + a \cos \varphi' = R + a \cos \left(\varphi - \frac{3\pi}{2} \right) = R - a \sin \varphi$$

olduğu görülmektedir. Böylece son iki ifâdeden hareketin yörüngesinin kutupsal koordinatlardaki ifâdesi olarak

$$r = \frac{C}{v_{\perp}} = \frac{C}{R - a \sin \varphi}$$

bulunur. Bu ise aranan yörüngenin bir *konik* olduğunu göstermektedir. Bu sonuca dayanarak meseleyi tersinden de ele almak ve *bir gezegenin Güneş etrafındaki hareketinin hodografının dışmerkezcil bir daire olduğunu* ifâde etmek mümkündür.

I.9. Yervektörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_2 &= +3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_3 &= -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

ile verilmiş olan P_1, P_2 ve P_3 noktalarının belirledikleri düzlemin noktalarının yervektörlerinin genel ifâdesini tesis ediniz.

I.10. \mathbf{r}_1 ve \mathbf{r}_2 diye farklı iki yervektörünün arasındaki α açısının küresel koordinatlarda θ_1, φ_1 ve θ_2, φ_2 cinsinden ifâdesini tesis ediniz.

I.11. Bir (E) düzlem eğrisi göz önüne alındığında bunun bir dik kartezyen referans sistemindeki analitik ifâdesini tesis ediniz.

I.12. Sâbit eğriliği ve sâbit burulmayı haiz bir uzay eğrisinin a) normâl birim vektörünün bir harmonik osilâtör denklemini gerçeklediğini, ve b) her noktasındaki eğriliği sıfır olan bir eğriye burulma izâfe edilemeyeceğini gösteriniz.

I.13. $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4t$ parametrik denklemleriyle verilen uzay eğrisinin : a) \mathbf{T} birim teğet vektörünü; b) \mathbf{N} asal normâl vektörünü, κ eğriliğini ve eğrilik yarıçapını; c) \mathbf{B} binormalini, τ burulmasını ve burulma yarıçapını hesaplayınız.

I.14. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ bir (E) uzay eğrisinin yervektörü olduğuna göre

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right) = \frac{\tau}{\rho^2}$$

olduğunu gösteriniz.

I.15. $x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3} t^3$ parametrik denklemleriyle verilen uzay eğrisinin : a) κ eğriliğini, ve b) τ burulmasını hesaplayınız.

I.16. Bir nokta, parametrik denklemleri $x = e^{-t}, y = 2 \cos 3t, z = 2 \sin 3t$ ile verilmiş olan bir uzay eğrisi üzerinde hareket etmektedir.

a) Bu hareketin hız ve ivmesinin açık ifâdelerini hesaplayınız ,

b) $t = 0$ başlangıç ânında hız ve ivmenin büyüklüklerini bulunuz.

I.17. SERRET-FRENET formüllerinin

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$$

şekline indirgenebileceğini gösteriniz ve $\boldsymbol{\omega}$ vektörünü teğet birim vektörüyle binormâl vektörünün fonksiyonu olarak tâyin ediniz.

I.18. v_1 hızıyla giden bir lokomotifin sürücüsü birdenbire d metre önünde aynı yönde $v_2 < v_1$ hızıyla yol almakta olan bir katarın bulunduğunu görmektedir. Çarpışmayı önlemek için gerekli olan a_f frenleme ivmesinin alt sınırını tâyin ediniz.

I.19. Bir nokta

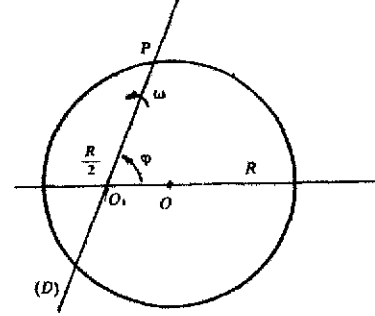
$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = h \varphi$$

dairesel helisi üzerinde

$$\varphi = \omega t$$

bağıntısıyla verilmiş olan bir hareket kaanûnuna uymaktadır. Bu takdirde noktanın hareketini inceleyiniz.

I.20. Bir (D) doğrusu O merkezli ve R yarıçaplı bir dairenin çaplarından biri üzerindeki bir sâbit O_1 noktası ($OO_1 = R/2$) etrafında ω açısal hızıyla dönerken daireyi P ve Q noktalarında kesmektedir. a) P ve Q noktalarının v_P ve v_Q hızlarının birbirine olan oranını; ve b) bu oranın φ açısının hangi değeri için $1/2$ ye eşit olduğunu tesbit ediniz.



Şekil : I.20.

I.21. Bir düzlem içinde hareket eden ve ivmesinin teğetsel ve normâl bileşenleri de sâbit kalan bir noktanın yörüngesini tâyin ediniz.

I.22. Teğetsel ivmesi sâbit, normâl ivmesi de eğrilik yarıçapıyla orantılı olan bir noktanın yörüngesini bulunuz.

I.23. Bir noktanın hareketi silindirik koordinatlarda, ve α bir sâbit olmak üzere,

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad \varphi = \varphi_0 \ln (1 + \alpha t), \quad z = z_0 (1 + \alpha t)$$

parametrik denklemleriyle verilmektedir. Noktanın yörünge üzerindeki hareketinin düzgün bir hareket olduğunu gösteriniz ve hareketin hızı ile ivmesini tâyin ediniz.

I.24. Bir adam bir O noktasından hareket ederek sâbit bir v hızıyla (Oy) eksenini izlerken köpeği de Oy eksenine dik Ox ekseninde bir A noktasından hareket ederek sürekli olarak $2v$ hızıyla efendisine doğru koşuyor. Buna göre köpeğin yörüngesi nedir? Köpek hareketinden ne kadar zaman sonra efendisine yetişmiş olacaktır?

I.25. Bir elektron kaynağı sâniyede n_0 adet elektron yayınlamaktadır. Zamanın $v = v_0 (1 + a \sin \omega t)$ şeklinde bir fonksiyonu olan bir ilk hızla fırlatılan bu elektronlar l uzunluğundaki bir boruyu hiç bir etkiye mâruz kalmaksızın katederler.

Bu takdirde zaman birimi başına tüpten dışarı çıkan elektronların n sayısını hesaplayınız ($a \ll v_0/l\omega \ll 1$ kabul edilecektir).

I.26. Merkezil bir hareket yapan bir noktanın yörüngesi eğer bir konikse, yörünge üzerinde r radyal uzaklığıyla belirlenmiş herhangi bir yerde noktanın hızının

$$v^2 = \frac{C^2}{b} \left(\frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right)$$

ile verildiğini gösteriniz.

I.27. Merkezil bir hareket, k ile bir sâbiti göstermek üzere, k^2/r^3 ivmesini haiz olarak vukuu bulmaktadır. Hareket eden noktanın mümkün yörüngelerini tesbit ediniz.

I.28. Merkezil bir hareket bahis konusu olduğunda, C alanlar sâbiti ve $u = 1/r$ olmak üzere noktanın hızının ve ivmesinin

$$\mathbf{v} = -C \frac{du}{d\varphi} \mathbf{e}_r + Cu \mathbf{e}_\varphi; \mathbf{a} = -Cu^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right) \mathbf{e}_r \quad (\text{BİNİT formülleri})$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

I.29. Sâbit bir O noktasına göre alanlar kaanûnuna uygun olarak hareket etmekte olan bir noktanın, k ile bir sâbiti göstermek üzere, hızının daima $v = kr$ değerini haiz olması şartı altında yörüngesini, hareket kaanûnunu ve ivmesini hesaplayınız.

I.30. Her ân $\mathbf{a} = \frac{r_0 v_0^2}{r^2} \cos^3 \varphi \mathbf{e}_r$ olacak şekilde ve $t = 0$ için $r = r_0$, $\varphi = 0$, $v = v_0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ başlangıç şartları altında $O(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ düzleminde hareket eden bir noktanın yörüngesinin kutupsal denklemini kurunuz.

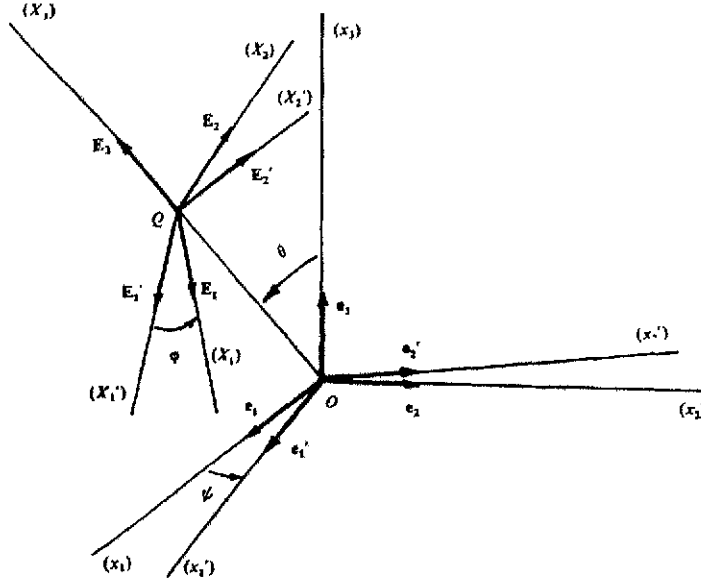
I.31. Başlangıçta Ox eksenine çakışan bir doğru sâbit bir V_0 hızıyla dik bir koordinat sisteminde artan y ler yönünde ötelendiğinde $y^2 = 2px$ parabolünü kestiği P noktası hangi hız ve ivmeyle hareket eder? (Görel hareket kavramından yararlanarak çözünüz).

I.32. Bir otomobil sâbit bir v hızıyla R yarıçaplı bir daire çizmektedir. Otomobilin tekerleklerinden birinin yerden en yüksek noktasındaki ivme vektörünün ifâdesini tesis ediniz.

I.33. Dik bir kartezyen referans sisteminde bulunan bir deneyci O orijininden geçen dik bir eksen etrafında ω sâbit açısal hızıyla dönmekte olan yatay bir düzlem üzerine $t = 0$ ânında görel başlangıç hızı sıfır olan noktasal bir bilyayı O dan r_0 uzaklığında bir noktaya bırakmaktadır. Noktasal bilyanın bu düzlemde sürtünmesiz kaydığını göz önünde tutarak bilyanın bu düzleme bağlı r ve θ kutupsal koordinatlarını t nin fonksiyonları olarak ifâde ediniz.

I.34) $\Sigma(O; e_1, e_2, e_3)$ ile O orijinli ve birim taban vektörleri e_1, e_2, e_3 olan, $\Sigma'(O; e'_1, e'_2, e_3)$ ile de gene O orijinli ve birim taban vektörleri e'_1, e'_2, e_3 olan iki dik kartezyen referans sistemi gösterilmekte ve Σ' nün Σ ya göre hareketi de e_3 etrafında pozitif yönde ölçülen $\psi = (e_1, e'_1)$ açısıyla ifâde edilmektedir.

Şimdi $S(Q; E_1, E_2, E_3)$ ile Q orijinli ve birim taban vektörleri E_1, E_2, E_3 olan öyle bir dik kartezyen referans sistemini gösterelim ki $E_1 \parallel e'_2, E_3 \parallel OQ, |OQ| = 1$ olsun. Ayrıca da $S'(Q; E'_1, E'_2, E_3)$ başka bir dik kartezyen referans sistemi olsun.



Şekil : I.21.

$S(Q; E_1, E_2, E_3)$ ün $\Sigma'(O; e'_1, e'_2, e_3)$ e göre hareketi e'_1 ekseninde pozitif yönde ölçülen $\theta = (e_3, E_3)$ açısıyla ifâde edilsin. Diğer yandan $S'(Q; E'_1, E'_2, E_3)$ ün $\Sigma'(O; e'_1, e'_2, e_3)$ e göre hareketi de E_3 ekseninde pozitif yönde ölçülen $\varphi = (E'_1, E_1)$ açısıyla ifâde edilsin.

Her üç ψ, θ ve φ açısı şüphesiz t zamanının fonksiyonu olacaklardır.

1) \bar{S} ve \bar{S}' ile, S ve S' den ötelemeye elde edilen O orijinli referans sistemlerini göstermek sûretiyle $\Sigma \rightarrow \Sigma', \Sigma' \rightarrow \bar{S}$ ve $\bar{S} \rightarrow \bar{S}'$ koordinat dönüşümlerinin matrislerini ve bunların ters matrislerini yazınız.

2) Q nun Σ ya göre hızını, önce,

a) Q nun hareketini S' nün Σ ya göre bir sürüklenme hareketiyle Σ' ye göre görel bir hareketin bileşkesi olarak göz önünde tutarak; sonra da,

b) OQ yu bir katı cisimmiş gibi düşünerek tesbit ediniz ve sonuçları Σ' ve S sistemlerinde ifâde ediniz.

3) S' deki koordinatları α, β, γ olan bir P noktasının Σ ya göre hızını hesaplayınız. Aynı sonucu, bir kere de, P nin Σ ya göre hareketinin P nin Σ' ye göre hareketi ile Σ' nün Σ ya göre sürüklenmesinin bileşkesi olduğunu yazarak bulunuz. Sonuçları S referans sisteminde ifade ediniz.

4) P noktasının Σ sistemindeki ivmesini bulunuz. Sonucu S sisteminde ifade ediniz.

I.35. $R_0(O; x_0, y_0, z_0)$ ve $R(Q; x, y, z)$ birim taban vektörlü dik kartezyen iki referans sistemi olsunlar ve R sistemi R_0 sistemine göre hareketli olsun. Bu takdirde bir P noktasının R sistemindeki $\mathbf{r} = \mathbf{QP}$ yervektörünün, \mathbf{a} ivmesinin ve R de R_0 a göre $\Omega(R|R_0)$ âni dönme vektörünün bileşenleri de

$$\mathbf{QP} = \mathbf{r}(t) : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}; \quad \mathbf{a}(Q) : \begin{cases} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{cases}; \quad \Omega(R|R_0) : \begin{cases} p(t) \\ q(t) \\ s(t) \end{cases}$$

olsun.

1) \mathbf{OP} nin R deki bileşenleri (u, v, w) olabilir mi?

2) R deki bileşenlerinden hareketle

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_{R_0} \quad \text{ve} \quad \mathbf{a}(P)$$

yi hesaplayınız.

I.36. Havanın direncini ihmal ederek, Arzda $\lambda = 45^\circ$ enleminde yerden 1000 m yükseklikten ilk hızsız bırakılan bir cismin yere vardığında doğuya doğru ne kadar sapmış olacağını bulunuz. ($g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ve $\omega = 2\pi/86400 \text{ rad.s}^{-1}$ alınacaktır).

I.37. Arz üzerinde λ enleminde ve yerden h yükseklikte bir cismin v_0 başlangıç hızıyla düşey yönünde fırlatılması sonucu cismin yere vardığı zaman doğuya doğru

$$\frac{\omega \sin \lambda}{3g^2} (\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0)^2 \cdot (\sqrt{v_0^2 + 2gh} + 2v_0)$$

kadar sapmış olacağını gösteriniz.

I.38. Bir P noktası, a ve $b > 0$ olmak üzere, parametrik denklemleri $x = a \cos \varphi$ ve $y = b \sin \varphi$ ile verilmiş olan bir elips üzerinde

$$\varphi - e \sin \varphi = nt$$

kaanûnu uyarınca hareket etmektedir. (e : elipsin dışmerkezliği; $n = \text{sâbit}$).

1) Hareketin O kutuplu hodografının kartezyen denklemini bulunuz.

2) P nin hareketinin merkezil ivmeli bir hareket olduğunu gösteriniz. Bu hareketin C merkezini tesbit ediniz. İvmeyi \mathbf{CP} cinsinden ifade ediniz.

I.39. Bir P noktası, $(P; \mathbf{a}(P))$ ile belirlenen doğru daima $(O; \mathbf{e}_3)$ e dayanacak şekilde olmak üzere ve $a > 0$ için

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a(1 + \sin \alpha), \quad z = a \operatorname{tg} \alpha$$

parametrik denklemleriyle verilmiştir.

P nin hareket kaanûnunu tesbit edip P nin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ düzlemindeki dik izdüşümü olan p nin hareketini inceleyiniz.

I.40. Bir P noktasının, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ düzlemindeki dik izdüşümü olan p noktası bir $C(\sqrt{2}, 0)$ merkezine göre sâbit bir alan hızını haiz olacak şekilde

$$x = \operatorname{ch} z, \quad y = \operatorname{sh} z$$

uzay eğrisi üzerinde hareket etmektedir. Hareketin kaanûnunu ve orijini kutup olarak kabul eden hodografı tâyin ediniz.

I.41. $p > 0$ olmak üzere, bir M noktası $x^2 + y^2 - 2pz = 0$ yüzeyi üzerinde ve M nin \mathbf{e}_3 üzerindeki dik izdüşümü düzgün bir hareket yapacak, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ düzlemi üzerindeki m dik izdüşümü de O orijinine nisbetle alanlar kaanûnuna uyacak şekilde hareket etmektedir.

- 1) M nin hareket kaanûnunu ve m nin yörüngesini bulunuz.
- 2) Hareketin O kutuplu hodografını bulunuz.

I.42. Bir P noktası hızı daima $v = k/r$ ($k = \text{sâbit}$) olacak şekilde ve O orijinine göre alanlar kaanûnuna uyarak $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ düzleminde hareket etmektedir. P nin yörüngesini, hareket kaanûnunu bulup ivmesini yervektörünün fonksiyonu olarak ifade ediniz.

I.43. Bir gezegenin mâruz kaldığı merkezil ivmeye, ϵ küçük bir kemmiyet olmak üzere, eğer $-(\epsilon/r^3)\mathbf{e}_r$ şeklinde bir ivme daha katkıda bulursa gezegenin hareket kaanûnu ne olur? Gezegenin bu ikinci ivmenin ilâvesiyle bozulmuş olan hareketinin, yörüngesinin büyük ekseninin her tam dolanım sonunda $2\pi/\sqrt{1 - (\epsilon/C^2)}$ radyan kadar dönmüş olmasıyla tezahür cdeceğini gösteriniz.

İKİNCİ KISIM

DİNAMİK



II. BÖLÜM

NOKTANIN DİNAMIĞI

(II.1) DİNAMIĞIN TEMEL İLKELERİ VE ELEŞTİRİSİ

ISAAC NEWTON'un (1642-1726) klâsik dinamiğin kurucusu olduğu bilinmektedir. 1687 de yayınladığı "*Doğal Felsefenin Matematik İlkeleri*" isimli eserinde NEWTON bütün mekaniği iki aksiyom ve üç ilke üzerine kurmuştur:

1. AKSİYOM — Salt (*mutlak*) bir uzay vardır. Bu salt uzay, içerdiği anlam gereğince, hiç bir etkene bağlı olmaksızın daima kendi kendinin aynı ve hareketsizdir.
2. AKSİYOM — Salt bir zaman vardır. Bu salt zaman, içerdiği anlam gereğince, hiç bir etkene bağlı olmaksızın daima düzgün bir biçimde akadurur.

Bu aksiyomların geçerliliği şartı altında NEWTON'un, kendinden önce yapılmış deneylerin sonuçlarından esinlenerek vaz etmiş olduğu ve çoğu kere yanlış bir isimlendirmeye *NEWTON kaanunları* diye bilinen, dinamiğin üç temel ilkesi de şunlardır :

1. İLKE : Üzerine uygulanan kuvvetlerin bileşkesi sıfır olan bir maddi nokta ya sükûnet hâlinindedir, ya da düzgün doğrusal bir hareket yapar. (Eylemsizlik-atalet-ilkesi).
2. İLKE : Maddî bir noktanın haiz olduğu ivme, üzerine uygulanan kuvvetle orantılı ve onunla aynı yöndedir :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \alpha \mathbf{K} , (\alpha \cong 0).$$

$m = 1/\alpha$ olmak üzere, m ile, göz önüne alınan maddî nokta için tanımlanan pozitif bir sâbiti gösterirsek bu ikinci ilkenin matematiksel ifâdesi

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{K}$$

(II.1.1.)

şekline girer. Göz önüne alınan cismin, bir kuvvetin etkisi altında kazanacağı ivmenin büyüklüğünü tâyin ettiğinden dolayı m sâbitine maddî noktanın harekete karşı gösterdiği direncin bir ççsit ölçüsü gözüyle de bakılabilir. Bu itibarla m sâbitine göz önüne alınmış olan maddî noktanın *eylemsizlik* (ya da atâlet) *kütlesi* adı verilir.

3. İLKE : İki maddî noktanın birbirleri üzerindeki etkileri daima eşit fakat zıt yöndedirler.

1 ve 2 indisleriyle iki farklı noktayı ve K_{12} ile 1. noktanın 2. nokta üzerindeki, K_{21} ile de 2. noktanın 1. nokta üzerindeki etkisini gösterelim. Üçüncü ilke bu takdirde, sâdece, her zaman

$$\boxed{K_{12} = -K_{21}} \quad (II.1.2)$$

olacağını ifâde etmektedir.

Şimdi bu aksiyomların ve ilkelerin fizik bakımından neleri içerdiklerini ve geçerlilik sınırlarının kısa bir incelemesini sunmak istiyoruz.

Salt, yâni her etkenden bağımsız bir uzayın varlığını kabul etmek bütün görel hareketlerin bu salt uzayı somutlaştıran ve temsil eden mutlak sükûnet hâlindeki salt bir referans sistemine izâfe edilerek incelenebileceklerini ve bunların salt hız ve ivmelerinin tâyin edilebileceklerini kabul etmeğe eşdeğerdir.

Fakat, acaba, salt uzayın varlığına kanıt olabilecek bir salt referans sistemini fiziksel olarak tanımlamak, gerçekten de var olduğunu yâni *ontolojik* bir niteliği haiz olduğunu ortaya koymak mümkün müdür? Yoksa salt uzay fiziksel bir varlığı olmayan, fiziksel bir gerçeğe tekaabül etmeyen sâdece matematiksel bir ideal veyâ bir hayâl midir ?

NEWTON ilkelerinin geçerlilikleri salt uzayı somutlaştıran salt bir referans sisteminin yâni hiç bir etkene bağlı olmaksızın daima sükûnette olan bir referans sisteminin ve salt zamanın yâni uzayda (meselâ gözlemci, ölçü âletleri, görel referans sistemleri v.s. gibi) hiç bir etkene bağlı olmaksızın her yerde aynı düzgünlükte akıp giden ve fiziksel olarak tek bir şekilde ölçülebilen bir zamanın varlığına bağlı olduğundan, gerek salt uzay gerekse salt zaman kavramının fiziksel birer gerçek oldukları, yâni bu iki kavramı da ölçümlere uygun bir biçimde somutlaştıran fiziksel sistemleri gerçekleştirmenin mümkün olduğu gösterilebilmelidir.

Güneşe göre hareket etmekte olan Arzın salt uzayı somutlaştıracak bir referans sistemi sayılamayacağı açıktır. Güneş de civarındaki bütün yıldızlarla birlikte içinde bulunduğu Samanyolunun (*Galaksi*'nin) genel dönme hareketine katıldığından ve üstelik kendisi de kendi eksenini etrafında bir dönme hareketi yapmakta olduğundan salt referans sistemi olarak düşünülemez. Bu itibarla, boyutları

$10^5 \times 2.10^4 \times 10^4$ İY (ışık yılı) olan Samanyolunu oluşturan ve Gökyüzünde sâbit imişler gibi görünen fakat aslında hem öz hareketleri ve hem de Samanyolunun topluca (*global*) hareketi dolayısıyla ayrı bir hareketleri olan milyarlarca yıldız aslında ne sâbittirler ve dolayısıyla ne de salt referans sistemini somutlaştırabilirler.

Öte yandan, bizden yaklaşık olarak üç milyon ışık yılı uzaklıktaki *Andromeda* nebula ve *Macellan Bulutları*yla birlikte Samanyolumuzun oluşturdukları *Yerel (Lokâl) Küme* içinde de Samanyolumuzun ayrı bir öz hareketi vardır. Bundan başka Yerel Kümenin gerek yakınındaki gerekse uzağındaki bütün nebula da 1926 da HUBBLE ve HUMASON tarafından keşfedilmiş olan ve *d*, Arzdan itibâren megaparsek (1 Mpsc = $3,26.10^6$ İY) olarak ifâde edilmiş ışımsal uzaklık ve *v* de km/s cinsinden hız olmak üzere

$$v \approx 80 d$$

(II.1.3)

formülü uyarınca bir Arzdan uzaklaşma hızıyla "*Evrenin Genişlemesi*" diye bilinen topluca bir evrensel harekete uyarlar. Bu itibarla da görülmektedir ki tüm Evrende de, gök cisimleri aracılığıyla, salt uzayı somutlaştıracak biçimde bir referans sistemi saptamak olanağı yoktur; çünkü Evrendeki her cisim bütün diğer cisimlere nisbetle gerçekten de çok karmaşık bir görel hareket yapmaktadır.

1866 da JAMES CLARK MAXWELL'in kurmuş olduğu elektromagnetik teori, elektrik ve magnetik alanların uzayda ışık hızına eşit bir hızla ve dalgasal bir biçimde yayılacaklarını öngörmüş ve bu tür *elektromagnetik dalgaların* varlığı da 1887 de HEINRICH HERTZ tarafından denel olarak ortaya konmuş, dalgasallıkları yanında diğer fiziksel özellikleri de (dalga boyları, genlikleri, yansımaları, kırılmaları, kırınımları, girişimleri, enerjileri ilh...) incelenmişti. Ancak, nasıl ki su yüzündeki dalgalar su var olmazsa, nasıl ki bir katı cisim içindeki akustik dalgalar bu katı cisim var olmazsa oluşamazlarsa, fizikçiler 19. asrın sonlarında buna benzer bir düşünceyle, elektromagnetik dalgaların varlığının da bunlara yataklık edecek sürekli bir maddî ortamın varlığına bağlı olduğuna inanmışlardı. Son derece seyrelmiş bir gaz gibi ve atomların içine kadar nüfûz ederek bütün Evreni homogen bir biçimde doldurduğu varsayılan bu ortama *esîr* (ya da *eter*) adı verildi. Böylece bütün Evreni dolduran esîrin, aynı zamanda, NEWTON anlamındaki salt uzayı somutlaştıran ortamı oluşturduğuna da inanılmaya başlanmıştı. Ancak, esîrin gerçekten de salt uzayı somutlaştırdığını gösterebilmek için herşeyden önce bunun fiziksel olarak, yâni üzerinde objektif ölçümler yapabilecek biçimde, gerçekten de var olduğunu ispatlamak gerekiyordu.

Bunun olanaksız olduğu kısa zamanda anlaşıldı. Önce, esîr varsayımından hareket ederek bunun fiziksel özelliklerinin neler olabileceğini teorik olarak araştıranlar esîr kavramının çelişik sonuçlara yol açtığını tesbit ettiler; şöyle ki, eğer

esir var ise bunun son derece seyrelmiş bir ortam olmakla beraber aynı zamanda da içinde hareket eden cisimlere sonsuz bir direnç gösteren sonsuz katı (rijid) bir cisim olması gerektiği ispatlandı. Ayrıca, içinde oluşan ve yayılan elektromagnetik dalgaların, esâsında, kendi esnek deformasyonlarının ürünü olduğu esirin asla sıkıştırılamayan bir ortam olması gerektiği de gösterildi.

Öte yandan, salt mantık açısından da, esir kavramının hiç de sağlıklı bir kavram olmadığı gözükmektedir. Gerçekten de esir kavramı, mantıkta, ispatlanması gereken öneriyi ispat için delil olarak göstermek hatâsı olarak bilinen *savı kanıt-samaya* (*prensip petisyonuna*) mükemmel bir örnek teşkil eder; şöyle ki: esirin gerçek varlığı hakkında elimizde elektromagnetik dalgaların varlığından başka delil yoktur; oysa ki esirin varlığı zâten, sırf, elektromagnetik dalgaların varlığını izah edebilmek için ileri sürülmüş bulunmaktadır.

Bütün bunlara rağmen, esirin gerçekten de objektif fiziksel bir varlığı olduğu eğer ispatlanabilseydi bu kavram belki gene de tutunabilirdi. Bunu sağlayabilmek için fizikiler dolaylı bir ispat yolu seçtiler ve bunun için Arzın esire nazaran salt hızını tâyin etmeğe çalıştılar. Arzın boşluktaki hızı, ilk yaklaşıklıkta, en az Güneş etrafındaki dolanım hızına eşit olup bu da iyi bir şekilde ölçülmüş bulunmaktadır; bu, 30 km/s mertebesindedir. Arzın esire göre salt hızının da en az bu mertebeden olması gerektiği âşikârdır. Ancak MICHELSON'un ilk defa 1881 de yaptığı, günümüze kadar gitgide mükemmelleştirilmiş olan bir deneyler dizisi esirin fiziksel bir gerçek olduğunu kanıtlayabilecek hiç bir sonuç vermemiştir. Esir varsayımına dayanarak Arzın esire göre salt hızını ölçmek için yapılmış olan bütün deneyler bu hızı hep sıfır olarak vermişlerdir ki bu sonuç Arzın salt sükûnet hâlinde bulunması demek olurdu; hâlbuki Arzın uzayda Güneş etrafında hiç değilse 30 km/s lik bir hızla dolanmakta olduğu bilinmektedir.

Bütün bu sonuçlar NEWTON'un *salt uzay* (ya da *salt referans sistemi*) kavramının somut bir fiziksel gerçekliği bulunmayan bir ideal, olsa olsa matematiksel bir hayâl olduğunu telkîn etmektedirler.

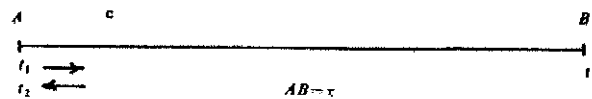
Durum böyle olunca, tamâmen salt uzayda (ya da ileride değineceğimiz gibi salt uzaya nisbetle düzgün doğrusal bir hareket yapan bir referans sisteminde) geçerli olan NEWTON ilkeleri ve özellikle *NEWTON'un hareket kaanûnu* diye bilinen ikincisinin geçerlilik sınırları acaba ne olacaktır?

Hemen söyleyelim ki bizden yüzlerce, binlerce, onbinlerce ışık yılı (1 IY = = 365 gün × 24 saat × 3600 saniye × 300 000 km/s # 10¹³ km) uzaklıktaki yıldızların oluşturdukları referans sistemi, bu sistemin boyutlarının azameti karşısında yıldızların hareketlerinin büyüklüklerinin rahatlıkla ihmâl edilebilir olması dolayısıyla büyük *bir yaklaşıklıkla* ve çok uzun bir zaman aralığı için geçerli olmak üzere salt bir sistem olarak kabûl edilebilir; ve hareket kaanûnu da bu sistemde ya da buna nisbetle düzgün doğrusal bir hareket yapan referans sistemlerinde

rahatlıkla uygulanabilir. Özellikle Güneş sistemi ve yapay uydu dinamiği problemlerinde bu kazanın çok üstün bir yaklaşıklık ve hassaslıkla uygulanabilmektedir.

Diğer taraftan salt zaman kavramına dönülürse eninde sonunda bunun varlığının da fiziksel gerçeklikten yoksun matematiksel bir hayâle dayanmakta olduğu görülür. Bunu daha yakından anlamak için salt zamanın, uzayın herhangi iki farklı noktasında bulunan saat çiftlerinin her zaman aynı ortak zamanı işâret etmeleri demek olduğuna ve bunun da kullanılan araçlardan bağımsız olması gerektiğine dikkati çekelim. Oysa uzayın herhangi iki noktasındaki iki ayrı saatin aynı ortak zamanı göstermeleri ne demektir ve bu durum acaba operasyonel (işlemsel) olarak nasıl gerçekleştirilebilir? Bu, tabiidir ki, o iki noktadaki gözlemcilerin saatlerinin eşzaman (*senkron*) olarak işlemekte olduklarını tesbit etmeleri demektir. Fakat bundan önce de her iki gözlemcinin, aynı cins saatleri aynı ânı işâret edecek şekilde âyârlanmış olmaları gereklidir. Bu ise iki şekilde olabilir. Birinci yöntemde bir A gözlemcisi H_A saatini yanına alarak B gözlemcisinin H_B saatiyle âyârlamak üzere B nin yanına gider ve gerekli âyârı yapıp her iki saatin de eşzaman bir biçimde çalıştıklarını tesbit ettikten sonra eski yerine döner. Fakat bu işlemin geçerli olabilmesi için en az iki şart vardır; bunlardan birincisi A gözlemcisinin B gözlemcisinin yanına gidip dönebilme imkânına gerçekten de sâhip olması (eğer A Arzda, B de Andromeda nebulasında ise bu işlemin gerçekleşme olanağı olmayacağı açıktır; bu da bize bu çeşit bir işlemle Evrende salt zamanı gerçekleştirmenin olanaksız olduğunu gösterir); ikincisi de gözlemcinin uzayda yer değiştirmesinin H_A saatinin işleyişini ister doğrudan doğruya isterse dolaylı olarak gerçekten de etkilememiş olmasıdır. Özellikle sonuncu husus hiç emin olunamayacak bir husustur; zirâ bir saatin Evrende yaptığı bir yolculukta gerek hızının, gerek ivmesinin, gerekse içinden geçtiği gravitasyon alanlarının ve diğer alanların saatin işleyişini girift bir biçimde etkileyeceği *Rölativite Teorisinden* bilinmektedir. Ancak bu etkinin büyüklüğünü *kesin* olarak ölçmek çok zor olduğundan bu yöntemle Evrendeki saatleri âyârlayarak salt zaman kavramına fiziksel bir gerçeklik kazandırmanın olanaksız olduğu bir kere daha anlaşılmaktadır.

Şekil : II.1. — A ve B noktalarındaki gözlemcilerin yalnızca ışık aracılığıyla saatlerini âyârlamaları hakkında.



Bir başka saatleri âyârlama yöntemi de şudur: A daki gözlemci kendi H_A saatinin gösterdiği bir t_A ânında, B deki gözlemciye B nin H_B saatinin t_B ânında erişen bir sinyal gönderir. Eğer bu sinyal sonsuz bir yayılma hızına sâhip olsaydı şüphesiz ki A dan B ye ânında erişecek ve $t_A = t_B$ olacak şekilde saatleri âyârlamak olanağı olacaktı. Bu takdirde Evrendeki bütün gözlemciler saatlerinin her ân aynı ortak sayıyı işâret etmelerini mümkün kılacaklar ve böylece salt zaman fiziksel bir biçimde tesbit edilmiş olacaktı. Ancak Evrende hiç bir sinyalin sonsuz

bir hızla yayılmadığı da bir gerçektir. Evrende en hızlı araç $c = 299774$ km/s lik hızıyla ışıktır; ve ışık aracılığıyla da evrende farklı iki noktadaki gözlemcilerin saatlerini ortak biçimde âyârlayabilmelerini operasyonel kılmak da hiç değilse ideal bir şekilde mümkündür.

Şimdi A daki gözlemcinin t_1 ânında B ye bir ışık sinyali gönderdiğini ve bu sinyalin de, A nın saatine göre, t ânında B ye erişip orada yansdıktan sonra gene A ya, ve gene A nın saatine göre, t_2 ânında döndüğünü farzedelim.

c ışık hızı sâbit ise (ki c nin sâbit olmadığı hallere ileride değineceğiz) ve $AB = x$ olduğuna göre kolayca

$$t_1 = t - \frac{x}{c} \quad \text{ve} \quad t_2 = t + \frac{x}{c}$$

olması gerektiği tesbit edilir. Bunlardan da

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \\ x &= \frac{c}{2} (t_2 - t_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1.4})$$

bağıntıları çıkarılır. Şu hâlde sâdece sinyalin A dan hareket ânıyla A ya avdet ânını tesbit etmekle hem A daki gözlemcinin saatine göre sinyalin bir B noktasına ne zaman erişmiş olduğunu ve hem de AB uzaklığını belirlemek ve böylece tek bir A noktasından itibâren bütün Evren için geçerli bir saat âyârlaması yâni A dan farklı herhangi bir noktadaki saati tesbit etme yöntemi uygulamak mümkün olur. Bu işlemin hem A ve hem de B tarafından yapılması da A nın elindeki saatin gösterdiği zamanın B ye intikal ettirilip onun da kendi saatini ayarlayabilmesi için uygun bir yöntem teşkil eder.

Ancak Evrende her nokta çifti arasında bu işlemin yapılabilmesi: 1) göz önüne alınan noktalarda bu yöntemi uygulayacak bilinçli gözlemcilerin var olmasına, 2) AB uzaklığının sâbit olmasına, 3) her gözlemcinin ömrünün söz konusu işlemi uyguladığı uzaklığın ışık hızıyla (gidiş-dönüş) iki kere katedilmesi için geçen zamandan daha uzun olmasıyla mümkündür.

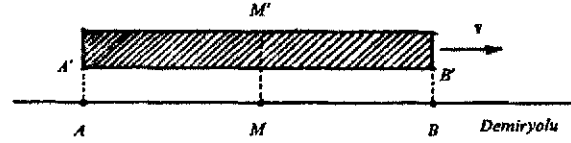
Her üç şartın da Evrende gerçekte sağlanamayacak şartlar olması hesabıyla bu yöntemin de Evrende salt zamanın tanımı ve tesbiti için olumlu bir sonuç almaya elverişli olmadığı âşikârdır. Bundan başka dördüncü bir mahzur da ışığın, Evrende gravitasyon alanlarını katederken, Genel Rölâtivite Teorisinin ortaya koyduğu gibi, hem dümdüz yayılmaması ve hem de hızının, boşlukta haiz olduğu hıza nisbetle azalmasıdır. Bundan ötürü, zâten, (II.1.4) formülleri de gerek t ânının gerekse x uzaklığının tâyini bakımından yanlış sonuçlar vereceklerdir.

Bu durum Evrende salt bir zamanın tanımlanabilmesinin tamâmen olanaksız olduğunu telkin etmektedir.

Ayrıca ALBERT EİNSTEİN'in, 1905 de, eşzamanlık kavramı üzerine yapmış olduğu bir eleştiri de değil evrensel bir zaman tanımlamanın hattâ birbirlerine çok yakın iki ayrı referans sistemindeki gözlemciler için bile zamanın ortak bir değerlendirmesi üzerinde oybirliği sağlamanın dahi olanaksız olduğunu göstermiştir.

EİNSTEİN (1879-1955) eleştirisine, hareket hâlindeki bir referans sistemi olarak sayılabilecek bir trenin içindeki yolcularla demiryolu kenarında duran gözlemcileri ele alıp demiryolunun oluşturduğu sükûnetteki referans sistemine bağlı gözlemciler için bu sistemde eşzaman olarak vukuu bulan iki olayın (meselâ Şekil : II.2 deki A ve B noktalarında çakan iki sinyalin) trendekiler için de eşzaman sayılıp sayılmayacağını sormakla başlamıştır.

Şekil : II.2 — Eşzamanlığın göreliliği hakkında.



A ve B noktalarında çakan iki sinyalin demiryoluna göre eşzaman olmaları demek A ve B den çıkan ışınların demiryolu üzerindeki AB uzaklığının tam ortası olan M noktasında karşılaşmaları demektir. Demiryolunda vukuu bulan A ve B olaylarına ise hareket hâlindeki trende A' ve B' noktaları tekaabül etmektedir. M' de hareket halindeki trende $A'B'$ doğru parçasının tam ortası olsun. Bu M' noktası demiryolunda A ve B de sinyaller çaktığı ân demiryoluna bağlı bir gözlemci için M noktasıyla çakışır. Bununla beraber M' noktası v hızıyla AB yönünde hareket etmektedir. Trende M' de bulunan bir gözlemci, trenle birlikte bu hızla sürüklenmemiş olsaydı sürekli olarak aynı zamanda M de de bulunmuş olacağından A dan ve B den çıkan ışınlar ona eşzaman olarak erişeceklerdi. Hâlbuki M' deki gözlemci demiryolundan bakıldığında B den gelen ışına doğru yaklaşırken A dan gelenden de uzaklaşmaktadır. Bu nedenle de trendeki bu gözlemci B den gelen ışını A dan gelenden daha önce görecektir. Bunun sonucu hareket hâlindeki treni referans sistemi olarak kullanan gözlemciler B deki sinyalin A dakinden daha önce çakmış olduğunu tesbit edecek ve düşüneceklerdir. Şu hâlde demiryolundaki bir gözlemci için eşzaman olarak tesbit edilen iki olay, demiryoluna nisbetle hareket hâlindeki bir referans sistemi olan trendeki bir gözlemci için eşzaman olarak tesbit edilemeyecektir.

Bu misâl eşzamanlık kavramının salt olmayıp görel bir vasfı haiz olduğunu ve bütün uzay için değil *ancak belirli bir referans sistemi için objektif* bir mâhiyeti olabileceğini açıkça göstermektedir.

Böylece zamanın mutlak anlamda salt olmadığını ve ifâde edildiği referans sistemine bağlı olması gerektiğini görmüş bulunuyoruz.

Tıpkı salt uzayın, mekanik kaanunlarının geçerliliğini sağlamak üzere yerel ve yaklaşık bir biçimde tanımlanabilmesi gibi salt zaman kavramı da ancak yerel (meselâ sâdece Güneş Sistemi için) ve yaklaşık bir biçimde tanımlanabilecektir. 1905 de A. EİNSTEİN tarafından kurulan *Özel Rölâtivite Teorisi* birbirlerine göre düzgün doğrusal hareketler yapan referans sistemlerinin görel hızlarının c ışık hızına nisbetle çok küçük olmaları hâlinde NEWTON dinamiği ilkelerinin sanki salt uzay ve salt zaman gerçekten de varmış gibi çok büyük bir yaklaşıklıkla geçerli olacağını tesbit etmiştir. Bu konu "Teorik Fizik Dersleri: Kısım VI/Cild 1: *Özel Rölâtivite Teorisi*" kitabımızda enine boyuna anlatılmıştır.

(II.2) NOKTA DİNAMIĞININ TEMEL PROBLEMİ

Belirli bir $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ kuvvetinin etkisi altında m eylemsizlik kütleli bir noktanın hareketinin incelenmesi ve yörüngesinin belirlenmesi problemine nokta dinamiğinin temel problemi denir.

Şimdi herhangi bir t ânında noktanın $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}$ ve $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ yer ve hız vektörlerinin bilindiğini farzedelim. t den sonsuz küçük bir dt süresi sonraki $t + dt$ ânı için, bu takdirde,

$$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t) dt + \mathcal{O}(2) = \mathbf{R} + \mathbf{v} dt + \mathcal{O}(2) \quad (\text{II.2.1})$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t + dt) = \dot{\mathbf{r}}(t) + \ddot{\mathbf{r}}(t) dt + \mathcal{O}(2) = \mathbf{v} + \frac{1}{m} \mathbf{K}(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) dt + \mathcal{O}(2)$$

yazılabilir. İkinci mertebeden $\mathcal{O}(2)$ terimleri ihmâl edilebilecek kadar küçüktürler.

Mekaniğin temel hareket denklemi olan

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (\text{II.2.2})$$

ifâdesinde verilmiş olan \mathbf{K} kuvvetinin t ânındaki değeri ile aynı anda verilmiş olan \mathbf{R} yer ve \mathbf{v} hız vektörleri aracılığıyla (II.2.1) deki seriye açınımların sağ yanları tamamen belirlenmiş olur. Bu ise, bu ifâdelerin sol yanlarındaki yer ve hız vektörlerinin $t + dt$ ânındaki değerlerinin de bilinmesi demektir. Buradan hareketle aynı yöntem uyarınca \mathbf{r} ve $\dot{\mathbf{r}}$ vektörlerinin $t + 2dt = (t + dt) + dt$ ânındaki değerlerini belirlemek mümkün olur. Bu yöntem peşpeşe birçok kere uygulanırsa, bu iterasyon sonucu gerek \mathbf{r} gerekse $\dot{\mathbf{r}}$ nın belirli bir sonlu zaman aralığı içinde alacakları bütün değerler, sırasıyla \mathbf{r} ve $\dot{\mathbf{r}}$ nın yalnızca t ânındaki değerlerini bilmekle elde edilmiş olacaktır. Bunun açık anlamı şudur: \mathbf{r} ve $\dot{\mathbf{r}}$ nın herhangi bir t_0 başlangıç ânındaki değerlerinin bilinmesi, bütün müteakip (veyâ önceki) anlar için, noktanın hem yörüngesinin ve hem de hodografının tek bir şekilde belirlenmesine yol açar.

Eğer noktanın $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ile belirlenen hareket denklemi

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0) \dot{\mathbf{r}}(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} \ddot{\mathbf{r}}(t_0) + \dots \quad (\text{II.2.3})$$

şeklinde bir TAYLOR serisine açındırılıbiliyorsa $\mathbf{r}(t_0)$ ve $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ tamâmen keyfi bir şekilde önceden verilmiş olmak üzere bu açılımın diğer katsayılarını (II.2.2) den ve (II.2.2) nin türevlerinden hareketle tâyin etmek kaabildir. Böylelikle noktanın hareket denkleminin çözümü de bilinen verilmiş başlangıç şartları altında tek bir şekilde tâyin edilmiş olur. Bu (II.2.3) çözümü, verilmiş olan başlangıç şartları altında (II.2.2) diferansiyel denkleminin seri hâlindeki çözümünü teşkil eder. Eğer $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ kuvvet fonksiyonunun şekli uygun ise, çoğu kere zahmetli bir işlem olan bu, TAYLOR serisine açındırarak hareket denklemini çözme yerine (II.2.2) diferansiyel denklemini verilmiş olan şartlar altında çözüme yönelik standart yöntemler uygulanabilir.

ÖRNEK : 1 — 2 gramlık bir eylemsizlik kütlelerini haiz maddesel bir noktanın üzerine etkiyen kuvvet $K = -32x$ olsun. Bu takdirde genliği 10 cm ve faz açısı da $\pi/6$ olan hareketi tesbit ediniz.

Çözüm — Hareket denklemi

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} = -32x$$

veyâ

$$\ddot{x}(t) + 16x(t) = 0$$

şeklinde lineer bir harmonik osilâtör denklemi olup bunun genel çözümü de

$$x(t) = A \cos 4t + B \sin 4t$$

şeklindedir. Bu çözüm

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos 4t + B \sin 4t = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos 4t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin 4t \right) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \Phi \cos 4t + \sin \Phi \sin 4t) = C \cos (4t - \Phi) \end{aligned}$$

şeklinde de yazılır. Buna göre ve verilmiş olan fiziksel şartların ışığı altında aranan hareket kaanûnunun

$$x(t) = 10 \cos \left(4t - \frac{\pi}{6} \right)$$

şeklinde olduğu anlaşılabilir.

ÖRNEK : 2 — m eylemsizlik kütlelerini haiz bir mermi $t = 0$ ânında O orijininde \mathbf{v}_0 ilk hızıyla ateşlenmektedir. Mermi üzerine etkiyen hava direncinin $\mathbf{K}_H = -k\dot{\mathbf{r}}$

şeklinde merminin ânt hız vektörüyle orantılı olduğu bilindiğinde, Arzın kendi eksenini etrafında dönmesinin etkilerini ihmâl ederek, merminin hareket kaanûnunu tesbit ediniz.

Çözüm — Merminin yervektörü $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ olsun. Arzın kendi eksenini etrafındaki dönmesinin etkileri ihmâl edildiğinden *CORİOLİS* kuvveti sıfır kabul ediliyor ve merminin hareketi de Arz yüzeyine dik bir düzlemde vukuu buluyor demektir. Şu hâlde mermiye etkiyen kuvvetler kendi ağırlığı olan $\mathbf{K}_A = -m\mathbf{g}$ ile havanın direnci olan $\mathbf{K}_H = -k\dot{\mathbf{r}}$ dir. ($k = \text{sâbit}$). \mathbf{K}_A ağırlık kuvveti yalnız düşey bileşenini haizdir. Merminin hareket denklemi

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -k\dot{\mathbf{r}}(t) - m\mathbf{g}$$

veyâ, $\alpha = k/m$ vazederek,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \alpha\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{g} = 0$$

olur. Buradan t ye göre bir kere integral alarak ve \mathbf{b} ile integrasyon sâbiti vektörü göstererek

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{g}t - \alpha\mathbf{r}(t) + \mathbf{b}$$

olur. $t = 0$ için $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$ ve $\mathbf{r}(0) \equiv 0$ olduğundan

$$\dot{\mathbf{r}}(t) + \alpha\mathbf{r}(t) = -\mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$$

olur. Bir değişken dönüşümü yapar da $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t)e^{\alpha t}$ vazederek buradan türev alarak

$$\dot{\mathbf{r}}(t) + \alpha\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t)e^{-\alpha t}$$

olduğu görülür. Buna göre hareket denklemi yeni değişken cinsinden

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = (-\mathbf{g}t + \mathbf{v}_0) \cdot e^{\alpha t}$$

veyâ buradan gene t ye göre integral alır da \mathbf{h} ile yeni bir integrasyon sâbiti vektörü gösterirsek

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t)e^{\alpha t} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{v}_0 \cdot e^{\alpha t} - \frac{(\alpha t - 1)}{\alpha^2}\mathbf{g}e^{\alpha t} + \mathbf{h}$$

ve $t = 0$ için $\mathbf{r}(0) = 0$ olması nedeniyle de

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{\alpha}\mathbf{v}_0 - \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{g}$$

bulunur. Şu hâlde \mathbf{h} nın bu değerini bir üstteki ifâdeye yerleştirirsek, sonunda, aranan çözüm olarak

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{g} \right) (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{1}{\alpha} \mathbf{g} t$$

ifâdesi bulunur.

Noktanın hareketinin tesbât edilmesine dayanak olan (II.2.2) genel hareket denklemi eninde sonunda bir diferansiyel denklem olduğundan bu denklemin *bir çözümü haiz olması* ve üstelik bu *çözümün tekliği* diferansiyel denklemler teorisinin öngördüğü bir takım şartlara bağlıdır. Eğer hareket denkleminin çözümünün varlığı şartları sağlanıyor fakat çözümün tekliğini temin eden LİPSCHITZ süreklilik şartları sağlanmıyorsa bu takdirde birçok hareket mümkün olabileceğinden bir hareket belirsizliği ile karşı karşıya kalınır. Böyle bir durumda başlangıç şartları hareketi tek bir şekilde belirlemeye yetmezler.

Bir örnek olarak bir doğru üzerinde, meselâ,

$$\ddot{x} = 6 \sqrt[3]{x}$$

denklemine uygun hareket eden bir noktanın hareketini $t = 0$ için $x = 0$ ve $\dot{x} = 0$ başlangıç şartları altında aramaya kalkarsak bunun $x = 0$ (denge durumu) ve $x(t) = -t^3$ ile $x(t) = +t^3$ gibi üç farklı harekete tekaabül ettiğini görürüz.

Eğer hareket denkleminin çözümünün mevcûd olması için gerekli şartlar gerçekleşmezse bu takdirde çok daha vahim durumlarla karşı karşıya gelinebilir.

(II.3) KLÂSİK MEKANİĞİN BELİRLİLİK İLKESİ

Maddesel noktanın hareketinin, belirli başlangıç şartlarının verilmesiyle, sâdece (II.2.2) denkleminde hareketle ve bütün mümkün zaman aralıkları için geçerli tek bir şekilde belirlenebilmesi olanağı klâsik mekaniğin *belirlilik ilkesini* oluşturur.

Eğer Evrene, eninde sonunda, sonlu sayıda bir takım maddesel noktalar topluluğu gözü ile bakılacak olursa ve *bütün Evrenin her bir noktası için aynı bir t_0 ânında* her maddesel noktanın $\mathbf{r}_i(t_0)$ ve $\dot{\mathbf{r}}_i(t_0) = \mathbf{v}_i(t_0)$ yer ve hız vektörleri ile her bir nokta üzerine etkileyen

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, t) = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (\text{II.3.1})$$

kuvvetleri biliniyorsa verilmiş olan başlangıç şartları altında (II.3.1) diferansiyel denklem sisteminin çözümü, teorik olarak, Evreni oluşturan bütün maddî noktaların $]-\infty, t_0]$ veyâ $[t_0, +\infty[$ aralıklarında herhangi bir ândaki durumlarını ve hâllerini verecektir. Bu, bütün Evrenin tüm kaderinin, herhangi bir ândaki durum ve hâli aracılığıyla kesin olarak belirlenebilmesi demektir.

Özellikle 19. asrın başında, Fransız matematikçisi PIERRE SİMON DE LAPLACE'ın (1749-1827) çalışmalarıyla ortaya konmuş olan ve kıra zamanda da felsefî bir ümde ve bir dünya görüşü olarak kuvvet kazanan bu *belirlilik ilkesi* (determinizm prensibi), aslında, ilk bakışta görüldüğü kadar inandırıcı değildir.

Her şeyden önce, bütün fiziksel olayları mekaniğe dayanan bir şema içine oturtabilmek olanaksızdır. Özellikle modern *Kuantum Mekaniği*, (II.3.1) hareket denklemlerinin ancak belirli bir yaklaşıklık mertebesiyle ve makroskopik alanda geçerli olabildiklerini öğretmektedir. Mikroskopik alanda, özellikle temel tânciklerin hareketleri bahis konusu olduğunda, bu denklemler ancak istatistiksel anlamda geçerli olmaktadır. (*Tek tâncik hâli için bk. A.Y.ÖZEMRE: Çağdaş Fizikçe Giriş İ.T.Ü. Yayınları No. 809, s. 155-160; 1970*).

Modern Kuantum Mekaniğine göre bir temel tânciğin konumu ve hızı aynı anda kesinlikle ölçülebilen büyüklükler değildir. Durum böyle olunca Kuantum Mekaniği çerçevesi içinde klâsik anlamda kesin bir yörüngeden bahsetmek de olanaksızdır. Bu itibarla da bir sistemin gelecekteki durumu ve hâli ancak olasılık diliyle belirtilebilmektedir.

Kuantum Mekaniğinde m kütleli, E enerjili, ve bir $U = U(\mathbf{r})$ potansiyelinden türeyen bir kuvvet alanındaki bir maddesel noktaya

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(\mathbf{r})] \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.3.2})$$

SCHRÖDİNGER denklemleri aracılığıyla bir *olasılık dalgası* (!) tekaabül ettirilir. İkinci mertebeden *kısmî türevli* bir diferansiyel denklem olan SCHRÖDİNGER denkleminin uygun vaz edilmiş bir takım *sınır şartlarını* gerçekleyen çözümü olan $\psi(\mathbf{r})$ ile bunun karmaşık eşleniği olan $\psi^*(\mathbf{r})$ fonksiyonları alınır da $\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ ifâdesi oluşturulursa bu, göz önüne alınmış olan noktanın, \mathbf{r} yervektörünü çevreleyen üç boyutlu $d^3\mathbf{r}$ hacim elemanında bulunması olasılığını gösterir. Sonlu bir V hacmi içinde bu tânciğin bulunma olasılığı da, tabiidir ki,

$$I = \iiint_V \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{II.3.3})$$

integralinden ibârettir.

(II.3.3) integralinin değerinin sıfır olması demek göz önüne alınan tânciğin V de kesinlikle bulunmamasına; bunun 1 e eşit olması tânciğin V de kesinlikle bulunmasına delâlet eder. $0 < I < 1$ de tancığın V de bulunması olasılığının değeridir.

Buna göre, genellikle, bir tânciğin şu ya da bu noktada bulunması değil de ancak filân noktada bulunması olasılığının falan noktada bulunması olasılığından daha düşük ya da daha yüksek olması söz konusu edilebilir. Bu itibarla da Kuan-

tum Mekanîği çerçevesi içinde tek bir tâneciğin geleceği Klâsik Mekanikte olduğu gibi kesinlikle belirlenemez: *Kuantum Mekanîği maddesel noktaların hareketlerinde, kullanılan ölçü âletlerinin yetersizliği dolayısıyla değil de problemin içeriğinin gereği olarak, temelli bir belirsizliğin bulunduğunu önerir.*

Bütün bu düşünceler ve veriler Klâsik Mekanîğin temel hareket denklemlerinin ilk bakışta telkîn etmekte oldukları evrensel belirlilik ilkesinin, ancak, makroskopik cisimler için, ve *yaklaşık olarak geçerli* bir salt zamanın tanımlanabildiği bir uzay bölgesinde yaklaşık olarak geçerli olabileceğini göstermektedir.

(II.4) EYLEMSİZLİK SİSTEMLERİ, İNVARYANS ÖZELLİKLERİ

Mekanîğin temel kaanûnunun salt uzayda, yâni her şeyden bağımsız ve her ân sükûnette olduğu sayılan salt referans sisteminde geçerli olduğunu ifâde etmiştik. Eğer bir noktanın üzerine etkiyen kuvvetlerin bileşkesi sıfırsa, bu takdirde de *eylemsizlik ilkesinin geçerliliğinden söz etmiştik.*

Şimdi, "*Eylemsizlik ilkesinin geçerli olduğu yegâne referans sistemi sâdece salt referans sistemi midir? Yoksa bu ilkenin geçerli olacağı başka referans sistemleri de var mıdır? Varsa bu referans sistemlerinin özellikleri nelerdir?*" sorularına cevap vermeğe çalışacağız.

Eğer eylemsizlik ilkesinin yâni $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ denkleminin geçerli olduğu, salt referans sisteminden başka bir G referans sistemi varsa, bu sistemdeki yervektörünü \mathbf{r}_G ile göstermek sûretiyle

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_G(t) = 0$$

olmalıdır. Buradan bir kere integral alır ve \mathbf{v}_0 ile de t ye göre vektörel sâbit bir integrasyon parametresini gösterirsek

$$\dot{\mathbf{r}}_G(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{v}_0, \quad (\text{II.4.1})$$

ve $-\mathbf{r}_0$ ile gene t ye göre sâbit bir başka integrasyon parametresini gösterirsek, (II.4.1) in integralini almak sûretiyle de

$$\mathbf{r}_G(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{r}_0 \quad (\text{II.4.2})$$

bulunur.

G referans sisteminin orijini $\mathbf{r}_G = 0$ dadır. Bu orijin G sisteminde sükûnet hâlinde olduğundan $\dot{\mathbf{r}}_G = 0$ dır. Bu ise (II.4.1) e binâen, G nin orijininin salt referans sisteminde

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 = \text{sâbit}$$

hızıyla ve \mathbf{v}_0 doğrultusunda hareket ettiğini göstermektedir; yâni G referans sis-

temi salt referans sistemine göre v_0 hızıyla ve v_0 yönünde düzgün doğrusal bir hareket yapmaktadır. O_G orijini (II.4.2) den de anlaşıldığına göre $t = 0$ ânında $r = r_0$ da bulunmaktadır.

Böylelikle eylemsizlik ilkesinin geçerli olduğu ve zamana göre sâbit v_0 vektörel parametresinin alacağı değerlere binâen ∞^3 adet referans sistemi tanımlanabileceği ve bunların her birinin de salt referans sistemine nazaran v_0 -sâbit hızıyla düzgün doğrusal bir hareket yapan bir referans sistemi olduğu gösterilmiş olmaktadır.

Eylemsizlik ilkesinin geçerli olduğu bu çeşit, yâni birbirlerine göre düzgün doğrusal hareket yapan referans sistemlerine *eylemsizlik sistemleri* veyâ *GALİLE referans sistemleri* adı verilir.

GALİLE referans sistemlerinde mekanik kaanunları korunurlar; yâni bir GALİLE sisteminden bir diğerine geçildiğinde mekanik kaanunlarının şekli *invariant kalır*: değişmez!

Gerçekten de bir eylemsizlik sisteminden bir diğerine dönüşüm formüllerinin, (II.4.2) ye binâen,

$$\boxed{r(t) = r_G(t) + v_0 t + r_0} \quad (II.4.3)$$

şeklinde olduğu açıktır. Buna bir de, her iki sistem için de, salt zamanın korunmasının yâni

$$\boxed{t = t_G} \quad (II.4.4)$$

olduğunun eklenmesi gerekir. Öte yandan kütlelen, *Klâsik Mekanik açısından*, bir skaler olmakla koordinat dönüşümlerinde değerini değiştirmeyeceğini de göz önünde bulundurursak, bir GALİLE sisteminde geçerli olan mekaniğin

$$m \ddot{r}(t) = K(r, \dot{r}, t) \quad (II.4.5)$$

şeklindeki temel denkleminin (II.4.3) dönüşüm bağıntısı dolayısıyla

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left[r_G(t) + v_0 t + r_0 \right] = K(r_G(t) + v_0 t + r_0, \dot{r}_G(t) + v_0; t) \quad (II.4.6)$$

yâni

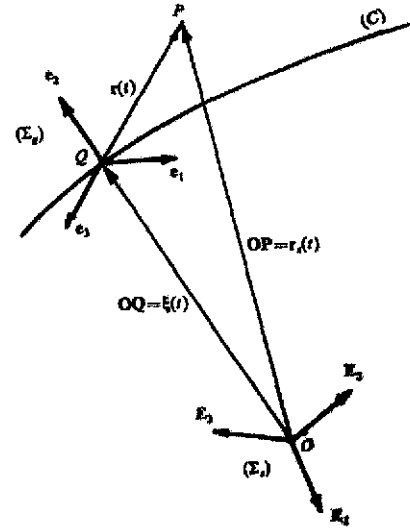
$$\boxed{m \ddot{r}_G(t) = K(r_G, \dot{r}_G; t)} \quad (II.4.7)$$

şekline girdiği; yâni (II.4.5) ile karşılaştırıldığında şeklini korumuş olduğu; ifâdenin sol yanının gene *kütle* \times *ivme*, sağ yanının ise G de ifâde edilmiş gene *kuvvet* şeklinde olduğu saptanmış olur.

Mekanğin temel kaanûnundan hareketle elde edilen her bağıntının da (II.4.3) *GALİLE dönüşüm takımına* göre invaryant kaldığı gösterilebilir. Bu itibarla: *Mekanik kaanûnları GALİLE dönüşüm grubuna göre invaryant kalırlar.*

(II.5) EYLEMSİZLİK (ATÂLET) KUVVETLERİ

Doğrudan farklı bir (C) uzay eğrisi üzerinde ve bir $\Sigma_s(O; E_1, E_2, E_3)$ eylemsizlik sistemine göre bir *öteleme hareketi* yapan yâni (C) boyunca kayarken eksenlerinin yönleri sâbit kalan, bir $\Sigma_g(Q; e_1, e_2, e_3)$ referans sistemi ve uzaydaki



Şekil: II.3 — Birbirlerine nazaran düzgün doğrusal hareket yapmayan hareketli iki referans sistemi eylemsizlik kuvvetlerinin zuhuruna yol açar.

bir P noktası üzerine etkiyen ve Σ_s de ölçüldüğünde K_s olan bir kuvvet verilmiş olsun. Σ_g nin Q orijininin üzerinde kaydığı (C) eğrisinin Σ_s ye göre yervektörü de $\xi(t)$ ile verilsin. $r(t)$ vektörü P noktasının Σ_g deki ve $r_s(t)$ de Σ_s deki yervektörleri olsunlar (bk. Şekil: II.3). Bu takdirde Σ_g den Σ_s ye koordinat dönüşümü

$$\boxed{r(t) = r_s(t) - \xi(t)} \quad (II.5.1)$$

şeklinde olacaktır. Bu ifâde t ye göre iki kere türetilecek olursa

$$\ddot{r}(t) = \ddot{r}_s(t) - \ddot{\xi}(t) \quad (II.5.2)$$

olur. Bu ifâdenin her iki yanı da, gerek Σ_s gerekse Σ_g de aynı değeri haiz olan, P nin m eylemsizlik kütlesiyle çarpılır ve Σ_s de

$$m\ddot{r}_s(t) = K, \quad (II.5.3)$$

olduğu da göz önünde tutulursa (II.5.2) ve (II.5.3) den

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{K}_s - m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_E} \quad (\text{II.5.4})$$

bulunur.

Bu ifade aracılığıyla, Σ_s eylemsizlik sisteminde (II.5.3) ile verilmiş olan NEWTON hareket kaanûnunun, Σ_g referans sistemine (II.5.1) koordinat dönüşümüyle geçildiği zaman *biçim bakımından artık invariant kalmadığını*; sırf (II.5.1) koordinat dönüşümü dolayısıyla, boyutları bir kuvvetin boyutlarına eşit olan bir terimin ortaya çıkarak NEWTON hareket kaanûnunun invariant kalmamasına sebep olduğunu; bu itibarla da Σ_s de geçerli olan *eylemsizlik ilkesinin* artık Σ_g de geçerli olamayacağını yâni, kısacası, Σ_g nin bu şartlar altında bir GALİLE referans sistemi teşkil etmediğini görmekteyiz.

NEWTON hareket kaanûnunun (II.5.1) koordinat dönüşümü dolayısıyla Σ_g de şeklinin korunmamış, yâni Σ_g den bakıldığında P üzerine etkiyen kuvvetin: *kütle \times ivme* şeklinde kalmayıp buna bir de boyutları gene bir kuvvetin boyutları olan \mathbf{K}_E gibi bir terimin eklenmiş olduğuna özellikle dikkat edilmelidir.

$\mathbf{K}_E = -m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ terimi, eksi işaretiyle, P nin m eylemsizlik kütlesiyle Q nun O ya göre yervektörünün ikinci türevinin yâni Σ_g nin orijininin Σ_s ye göre ivmesinin çarpımından ibârettir; fakat her ne kadar bir kuvvetin boyutlarını haiz ise de kuvvetin tanımına uymamaktadır [çünkü $\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ ivmesi, Σ_g nin Q orijinine bağlı olmaksızın hareket eden, bir P noktasının m eylemsizlik kütlesiyle çarpılmaktadır; dolayısıyla $\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ ivmesi m kütesinin ivmesi değildir]. Bu itibarla \mathbf{K}_E gerçek değil ancak *görünümsel* (zahiri) bir kuvvettir.

Klâsik Teorik Mekanik ivmeli hareket yapan bir referans sistemine geçildiğinde ortaya çıkan bu gibi görünümsel kuvvetlerin varlığına kanıt olarak yalnızca koordinat dönüşümünü gösterebilmekte ve bu çeşit görünümsel kuvvetlerin fiziksel bir açıklamasını yapamamaktadır.

Böylece bir GALİLE sisteminden, yâni NEWTON hareket kaanûnunun geçerli olduğu bir sistemden, bu sisteme nazaran ivmeli bir hareket yapan bir sisteme geçerken ortaya çıkan bu \mathbf{K}_E görünümsel kuvvetlerine *eylemsizlik kuvvetleri* adı verilir.

Bir Σ_s GALİLE sistemine göre, dönme de dâhil, genel bir ivmeli hareket yapan bir Σ_g referans sistemindeki bir P noktasının Σ_s de ölçülen ivmesinin (I.10.5) formülüyle

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_g + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] + (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_g) \quad (\text{II.5.5})$$

şeklinde olduğunu bilmekteyiz. Buradan, her iki tarafı da P nin m eylemsizlik kütlesiyle çarpımak sûretiyle, Σ_g de P ye etkiyen kuvvet olarak

$$\boxed{m \mathbf{a}_g = m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{K}_s - [m \mathbf{a}_Q + m (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] + 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_g]} \quad (\text{II.5.6})$$

$$= \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_E$$

ifâdesi elde edilmiş olur.

(II.6) EYLEMSİZLİK KUVVETLERİNİN FİZİKSEL KÖKENİ: MACH İLKESİ

Yukarıda, eylemsizlik kuvvetlerinin eylemsizlik sistemlerinden ivmeli referans sistemlerine geçildiğinde ortaya çıktıklarını görmüş bulunuyoruz. NEWTON mekaniği çerçevesi içinde bu kuvvetler, sâdece, söz konusu koordinat dönüşümüne bağlı geometrik bir kökeni haiz görünümsele kuvvetler olarak karşımıza çıkmaktadırlar. Bunların görünümsele (*zâhiri*) olmaları, ivmeli sistemden eylemsizlik sistemine geçişi sağlayan ters koordinat dönüşümünde ortadan tamamen kaybolmaları yüzündendir.

Bir kuvvet genellikle iki cismin veyâ iki alanın, veyâhut da bir cisimle bir alanın kendi aralarında etkileşmeleri sonucu ortaya çıkar. Meselâ bir taşın Arz üzerine düşmesi taş ile Arz (veyâ daha doğrusu Arzın çekim alanı) arasındaki etkileşme sonucu ortaya çıkan taşın ağırlığı dolayısıyla. Bu görüş açısından bakıldığında, eylemsizlik kuvvetlerinin dışındaki her kuvvetin bu çerçeve içinde fiziksel bir kökeni olduğunu tesbit etmek kolaydır. Ancak, eylemsizlik kuvvetlerinin Klâsik Mekanik çerçevesi içinde kendileri için geometrik bir kökenden başka bir köken tesbit edilememesi yüzünden bir ayrıcalıkları vardır. Fakat acaba bu ayrıcalık gerçek ve kesin midir, yoksa bir görünümünden mi ibârettir? Yâni, başka bir deyimle, eylemsizlik kuvvetlerine acaba gerçekten de fiziksel bir köken bulmak mümkün müdür? *Eylemsizliğin kökeni* problemi NEWTON'dan bu yana fizikçileri epeyi uğraştırmış olan ve bugün bile her yönüyle tatmin edici bir teorisi yapılamamış olan bir konudur.

Şimdi bu önemli problemi, özel bir misâli göz önünde tutarak, incelemeğe çalışalım. Bunun için tavana takılı bir ipin ucunda asılı boş bir kova göz önüne alacağız. Bu kovayı kendi bakışım (*simetri*) eksenini etrafında döndürmek sûretiyle asılı bulunduğu ipi iyice buralım ve kovayı sâbit tutup suyla doldurduktan sonra da serbest bırakalım. Bunu izleyen olayların açıklanması eylemsizliğin kökeninin ortaya konmasında ışık tutucu olacaktır.

Kovayı serbest bırakmadan önce kovadaki suyun yüzeyi düzlemseldir. Kova serbest bırakıldığı zaman, burulmuş olan ipi, burulmanın ters yönünde ve gitgide artan bir dönme hızıyla kovayı döndürür. İp sağıldıkça hız artarak bir maksimuma erişir ve sonra da, bir süre, gitgide sönen bir takım burulmalı salınımlardan sonra kova tekrar sükûnet hâline döner. Bütün bu safhalar süresince kovadaki su da kovanın hareketiyle sürüklenerek yüzeyi bir dönел paraboloid dönüşür ve maksimum bir derinliğe eriştikten sonra da, en sonunda, suyun sükûnete erişmesiyle düzlemsel olur.

Suyun yüzeyinin, suyun *kovaya göre* haiz olduğu ve başlangıçta büyük iken kovanın gitgide artan dönme hızının sonunda suyun bütününün kovayla birlikte sürüklenmesi sonucu sifıra indirgenen Ω görel dönme hızına tâbî olmadığı açıktır; zirâ kova en hızlı döndüğünde suyu da tümüyle kendisiyle birlikte sürüklediği zaman bu Ω görel dönme hızı, sıfır olmaktadır. Bu hız, kezâ, gerek kovanın gerekse suyun beraberce sükûnette oldukları zaman da sıfırdır.

Öte yandan suyun Arza nazarın açısal hızı da su yüzeyinin dönel bir paraboloid hâlini almasında kesinlikle etken olan bir büyüklük değildir. Çünkü aynı deney Arzın kutuplarında da yapılacak olsa, bu noktalarda hem kovanın ve hem de kovadaki suyun Arzın eksenine göre açısal hızlarının sıfır olmalarına rağmen su yüzeyinin hafifçe gene bir dönel paraboloid olduğu tesbit edilir. Kutupta kovadaki suyun yüzeyi eğer düzlemsel olsaydı bu, ya Arzın dönmediğine ya da bütün kovanın (suyla birlikte), FOUCAULT sarkacının düşey bir sâbit düzlemde salındığı bir referans sistemine göre sükûnette olmasına kanıt olacaktı. Buna göre su yüzeyinin şeklini belirleyen etkenin, suyun söz konusu referans sistemine göre haiz olduğu açısal hız olduğu sezilmektedir.

NEWTON da aynı örnek üzerinde yürüttüğü düşünceler sonunda aynı kamuya erişmiştir. NEWTON'a göre kovadaki suyun yüzeyinin şekli suyun, salt uzaya göre haiz olduğu açısal hızın değeri tarafından belirlenmektedir. NEWTON kovadaki su yüzeyi çöküntüsünü kovanın salt uzaya göre dönmesinin varlığı için bir kıstas olarak kabul etmiştir.

NEWTON'un bu yorumunu ilk defa BERKELEY (1685-1753) eleştirmiştir. BERKELEY salt uzaya göre bir hareketin fiziksel bakımdan anlamsız olduğunu savunmuş ve yukarıda sözü edilmiş olan su dolu kova deneyinde esas göz önünde bulundurulması gereken hususun kovanın Evrene ve özellikle sâbit yıldızlar takımına göre dönmesi olduğu fikrinde diretmiştir. BERKELEY bir cismin ancak, başka cisimlere karşı görel hareketinin fiziksel bir anlamı olabileceğini savunmuştur.

Bu düşünceler daha sonra ERNST MACH (1838-1916) tarafından işlenerek eylemsizliğin kökeninin araştırılması ve incelenmesinde yararlı olmuşlardır.

MACH'ın bu konudaki inceleme'leri de onu, bir eylemsizlik sistemini sâbit yıldızlar takımına göre düzgün doğrusal bir hareket yapan bir sistem olarak tanımlamasına yol açmıştır. MACH Evrenin yukarıdaki misâlde söz konusu edilmiş olan kova ile suyun dışındaki her şeyle birlikte bir anda yok olması hâlinde hiç bir eylemsizlik olayının da olamayacağını, yâni Evrendeki maddenin tümünün NEWTON mekaniğinde görünümsel kuvvetler aracılığıyla tasvir olunan eylemsizlik olaylarının tek sorumlusu olduğunu savunmuştur.

Bir cismin eylemsizliğinin Evrendeki bütün cisimlerin fonksiyonu olarak belirlenmekte olduğunu ifâde eden ilkeye *MACH ilkesi* adı verilir. Bu ilkeye göre, yukarıda söz konusu etmiş olduğumuz su dolu kova örneğinde su yüzeyinin dönel

bir paraboloid şeklini kazanması, kovanın salt uzaya göre dönmesi sonucu olarak değil de su ile, geri kalan bütün Evren arasındaki bir çeşit gravitasyon etkileşmesinin sonucudur. Ve bu, suyun çok uzağındaki tüm kütlelerin bu etkileşmeye katkılarının suyun civarındakilerin katkısından çok daha yoğun bir biçimde ortaya çıktığı bir etkileşme olarak düşünülmektedir.

Eylemsizliği (ve dolayısıyla eylemsizlik kuvvetlerini) fiziksel bir kökene yâni bildiğimiz kuvvetler gibi cisimler ve/veyâ alanlar arasındaki etkileşmelere atfeden MACH'ın bu yorumu, niteliksel olarak tatmin edici olabilmekle beraber, bunu matematiksel bir teorinin çerçevesi içine uygun ve tümüyle tatmin edici bir biçimde oturtmak bugüne kadar mümkün olmamıştır.

A. EİNSTEİN Genel Rölâtivite Teorisini kurarken (1913-1916) MACH'ın bu düşüncelerinden çok etkilenmiş ve teorisi de MACH ilkesini *kısmen kapsayan* bir teori olmuştur. Genel Rölâtivite Teorisinin eylemsizliğin kökeni problemini matematiksel bir biçimde formüle edilmesinde küçümsenemeyecek olumlu katkıları olmuştur. Bu çerçeve içinde, meselâ, bir cismin büyük kütleli başka cisimlere yaklaştığında kendi eylemsizliğinin de artacağı; cismin Evrendeki diğer bütün cisimlerden iyice uzaklaştırılması hâlinde de eylemsizliğinin gitgide azalacağı; yâni içinde tek bir cisim bulunan bir Evrende hem hareketten ve hem de eylemsizlikten bahsetmenin abes olacağı sonuçları çıkarılmıştır.

Genel Rölâtivite Teorisi, gene eylemsizlik konusunda, iki önemli sonuç daha vermektedir. Bu teoriye dayanarak, bir cismin civarındaki diğer cisimler eğer ivmeli bir hareket yaparlarsa bunun sonucu cismin kendisinin de ivmeli bir hareket yapacağı gösterilmiştir. Meselâ uzayda maddesel bir küresel kabuk içinde bir cisim düşünelim. Eğer bu maddesel kabuk eksenlerinden biri etrafında birdenbire dönmeğe başlarsa bu hareketin cisim üzerinde, tıpkı bir cismin bütün gök cisimlerine nazaran bir dönme hareketi yapmasında olduğu gibi, bir eylemsizlik kuvveti doğmasına yol açarak kabuk içinde ışınsal (radyal) bir merkezkaç alanı ile bir CORIOLİS alanının ortaya çıkmasına; ve bunun sonucu olarak da kabuk içindeki cisimlerin kabuğa göre yapacakları hareketlerde kabuğun dönme yönünde genel bir sapmaya uğramalarına sebep olacağı teorik olarak gösterilmiştir.

(II.7) DİNAMİĞİN TEMEL DENKLEMİNİN ÖTELEME VE DÖNME DÖNÜŞÜMLERİNE GÖRE BAKIŞIM ÖZELLİKLERİ

Şimdi dinamiğin temel denkleminin genel anlamdaki öteleme ve dönme dönüşümlerine göre invaryant olduğunu ispat edip bunun, fiziksel olaylara yataklık eden üç boyutlu öklitsel metrik uzay için neyi kanıtladığını yorumlamak istiyoruz. Yalnız, önce, matematikte önemli bir yer tutan *grup* kavramını ithâl etmek uygun olacaktır.

$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ diye isimlendireceğimiz bir takım elemanlardan oluşan bir \mathcal{D} cümlesinde herhangi

$$\mathcal{D}_i \in \mathcal{D} \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_j \in \mathcal{D}$$

gibi iki elemanın, tanımı yapılmış bir $*$ işlemine göre *terkibi* de

$$\mathcal{D}_i * \mathcal{D}_j \in \mathcal{D}$$

şeklinde \mathcal{D} nin bir elemanı ise ve ayrıca $*$ işlemi :

1) Ortaklaştırıcılık (asosyatiflik) özelliğini haiz ise, yâni

$$\mathcal{D}_1 * (\mathcal{D}_2 * \mathcal{D}_3) = (\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2) * \mathcal{D}_3$$

ise,

2) \mathcal{D} cümlesi, $\mathcal{D}_i * I - I * \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i$ diye tanımlanan bir I özdeş elemanı kapsıyorsa,

3) $\forall \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{D}_i^{-1} * \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i * \mathcal{D}_i^{-1} = I$ eşitlikleriyle tanımlanan bir \mathcal{D}_i *ters elemanı* varsa bu takdirde \mathcal{D} cümlesinin bir *grup* oluşturduğu söylenir.

Buna göre belirli bir özelliği haiz koordinat dönüşümlerinin, uygun süreklilik şartlarının sağlanması hâlinde bir grup meydana getirdiklerini görmek kolaydır. Somut bir misâl olarak

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}_0) : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

şeklinde belirlenen koordinat dönüşümlerini göz önüne alalım. $\mathcal{D}(\mathbf{r}_0)$ dönüşümlerine \mathbf{r}_0 vektörlü *öteleme dönüşümleri* adı verilir. Gerçekten de bu dönüşüm bir koordinat sisteminin orijininin \mathbf{r}_0 vektörü kadar ötelenmesine eşdeğerdir.

$\mathcal{D}(\mathbf{r}_0) : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ve $\mathcal{D}(\mathbf{r}_0') : \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0'$ gibi iki öteleme dönüşümü ele alınacak olursa bunların terkibi olan

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}_0') * \mathcal{D}(\mathbf{r}_0) = \mathcal{D}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0') : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0' = \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0')$$

dönüşümü de, âşikâr olarak, tanımı gereği bir başka öteleme dönüşümüdür. Ayrıca $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'' = \mathbf{r}'$ dönüşümü *özdeş öteleme dönüşümünden* başka bir şey değildir. Ve kezâ eğer $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$ öteleme dönüşümü göz önüne alınırsa bununla $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ öteleme dönüşümünün peşpeşe terkibi

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}_0) * \mathcal{D}(-\mathbf{r}_0) = \mathcal{D}(0) : \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'$$

bağıntısına binâen özdeş öteleme dönüşümü demek olduğundan $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ öteleme dönüşümünün ters dönüşümünün $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$ öteleme dönüşümü olduğu anlaşılmış olur.

Bütün bu dönüşümler $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ şeklinde \mathbf{r}_0 sâbit vektörüyle karakterize edilen bütün öteleme dönüşümlerinin bir grup teşkil ettiklerini göstermektedir. Bu gruba *uzayın ötelemeler grubu* adı verilir.

Uzayın öteleme grubuna göre NEWTON hareket kaanûnunun invaryant olduğunu görmek çok kolaydır. Bir Σ eylemsizlik sisteminde geçerli olan

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (\text{II.7.1})$$

hareket denklemi

$$\mathcal{D}(+ \mathbf{r}_0) : \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0, (\mathbf{r}_0 = \text{sâbit}) \quad (\text{II.7.2})$$

şeklinde bir öteleme sonucu dönüşülmüş olan bir Σ' referans sisteminde

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0) = \mathbf{K} \left(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0, \frac{d(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0)}{dt}, t \right)$$

yâni

$$m \ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{K}(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) \quad (\text{II.7.3})$$

şekline girer ki bu, (II.7.1) in (II.7.2) ötelemesi sonucu şeklen invaryant kalmış olduğunu, yâni hareket kaanûnunun bu dönüşümde değişmemiş olduğunu göstermektedir.

Bu sonuca göre, içinde ifâde edilmiş olduğu referans sisteminin orijini bir ötelemeyle uzayın neresine kaydırılırsa kaydırılsın (II.7.1) hareket kaanûnunun, şeklini daima koruyacağı anlaşılmaktadır. Bu durum, salt bir orijinden söz konusu etmenin abes olduğu ve dinamiğin temel kaanûnunun ifâdesi için uzayın bütün noktalarının orijin olmak bakımından eşdeğer oldukları şeklinde de yorumlanabilir. Bu husus, aynı zamanda, üç boyutlu öklitsel metrikli uzayın dinamiğin temel kaanûnunun ifâdesi bakımından *homogen* olduğunu da gösterir. Bir başka ve eşdeğer bir deyimle de uzayın, dinamiğin temel denkleminin ifâdesi bakımından, ötelemeler grubuna nazaran bir *bakışımı* (simetriyi) haiz olduğu söylenir.

Dinamiğin temel denkleminin ifâdesi koordinat eksenlerinin sonlu bir dönmesi için de invaryanttır. Yâni bir Σ eylemsizlik sisteminde geçerli olan bu denklem, sistemin eksenlerini sonlu bir dönmeye tekaabül eden bir şekilde yeniden seçecek olursak gene invaryant kalır. Bu ise, bir eylemsizlik sistemindeki koordinat eksenlerinin yönü nasıl seçilirse seçilsin mekaniğin temel denkleminin şeklini muhafazaya devâm edeceğinin ifâdesinden başka bir şey değildir. Bu özellik, mekaniğin temel kaanûnunun ifâdesi bakımından, üç boyutlu öklitsel metrik uzayın *eş-yönsel* (izotrop) bir yapıya mâlik olduğuna delâlet eder.

Şu hâlde (II.7.1) denkleminin üç boyutlu öklitsel metrikli *uzayın sonlu dönmeler grubuna* göre de invaryant kaldığını göstermemiz gerekmektedir.

Gene Σ ile bir GALİLE sistemini, \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) ile bunun eksenlerini belirleyen birim taban vektörlerini; Σ' ile orijini sâbit kalmak şartıyla, bu eksenlerin yeniden düzenlenmesiyle ortaya çıkan yeni koordinat sistemini, \mathbf{e}'_j ile de Σ' nün

birim taban vektörlerini gösterelim. Üzerine, Σ da, bir $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 K_i \mathbf{e}_i$ kuvveti tesir eden bir P noktasının Σ daki yervektörü

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

ve Σ' deki yervektörü de

$$\mathbf{r}' = \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j$$

olsun.

Öte yandan Σ nın i -ninci akseniyle Σ' nün j -ninci akseni arasındaki açının a_{ij} kosinüsü de tabiidir ki

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j \quad (\text{II.7.4})$$

olacaktır. P noktasının her iki koordinat sistemindeki koordinatları arasında ve \mathbf{r} nin uzunluğunun değişmemiş olması varsayımı altında

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j \quad (\text{II.7.5})$$

bağıntısı vardır. Bu ifâdeyi \mathbf{e}'_i ile çarpıp $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ olduğunu da göz önünde tutarak

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{II.7.6})$$

bulunur. Böyle bir dönmede eylemsizlik ilkesinin geçerli olabilmesi için iki nokta arasındaki uzaklığın invaryant kalması gereklidir. Aksi hâlde, yâni böyle bir dönmede herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın sâbit kalmaması hâlinde bu, iki noktanın arasını açıp uzatan (veyâ daraltan) bir germe (veyâ sıkıştırma) kuvvetinin sırf sonlu dönme dolayısıyla ortaya çıkmakta olduğunu kanıtlayacaktı. Bu çeşit görünümsel (zahiri) bir takım kuvvetlerin ortaya çıkmalarını önlemek yâni mekaniğin temel denkleminin yeni koordinat sisteminde invaryant kalmasını sağlamak için $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ koordinat dönüşümünde iki nokta arasındaki uzaklığın invaryant kalması gerektiği de böylece anlaşılmış olmaktadır. Şu hâlde

$$\sum_{j=1}^3 (x'_j)^2 = \sum_{j=1}^3 (x_j)^2 \quad (\text{II.7.7})$$

ve (II.7.6) bağıntısını göz önünde tutarak da buradan

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_j a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^3 (x_k)^2$$

ya da

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} - \delta_{jk} \right\} x_j x_k = 0 \quad (\text{II.7.8})$$

yazılır. Bu eşitliğin gerçekleşmesi için katsayıların özdeş olarak sıfır olmaları gerektiği aşikârdır. Buna göre, (II.7.6) dönüşümünün katsayılarının

$$\boxed{\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}} \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (\text{II.7.9})$$

şeklinde bir takım bağıntıları gerçeklemek zorunda oldukları tesbît edilmiş olur.

Eğer (II.7.6) koordinat dönüşümünün a_{ij} katsayılarının matrisi \mathfrak{A} ve bunun transpoze matrisi de katsayıları a_{ji} olan $\tilde{\mathfrak{A}}$ ile gösterilirse (II.7.9) un matrisel yazılışı

$$\tilde{\mathfrak{A}}\mathfrak{A} = \mathbf{I} \quad (\text{II.7.10})$$

olacaktır. Bilindiği gibi

$$|\mathfrak{A}| = |\tilde{\mathfrak{A}}|$$

dir. Buna göre (II.7.10) dan

$$|\mathfrak{A}|^2 = 1$$

veyâhut da

$$|\mathfrak{A}| = \pm 1$$

sonucu çıkar. Eğer (II.7.6) dönüşümünün \mathfrak{A} katsayılar matrisinin $|\mathfrak{A}|$ determinantı $+1$ e eşitse göz önüne alınan dönme dönüşümüne *has dönüşüm*, ve $|\mathfrak{A}| = -1$ olması hâlinde de buna *has olmayan dönüşüm* ya da, kısaca, *yakışksız dönüşüm* adı verilir. Yakışksız dönüşüme bir örnek, orijine göre yansımayı ifade eden

$$x_i = -x_i', \quad (i = 1, 2, 3)$$

dönüşümüdür.

Bileşenleri (II.7.4) bağıntılarıyla belirlenen mümkün bütün \mathfrak{A} dönüşüm matrislerinin, $|\mathfrak{A}| = +1$ yan şartı altında, *dönme grubunu* oluşturdukları kolayca gösterilir.

Şimdi

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = K_j, \quad (j = 1, 2, 3)$$

denklemlerini göz önüne alalım. Bu ifâdenin her iki yanını a_{ij} lerle çarpıp da j indisi üzerinden toplam yaparsak

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} K_j \quad (\text{II.7.11})$$

olur. (II.7.6) yı göz önünde tutup, ayrıca

$$K_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} K_j$$

vaz ederek (II.7.11) ifâdesinin

$$m \frac{d^2 x_i'}{dt^2} = K_i'$$

veyâ vektörel olarak.

$$m \ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{K}'$$

yazılabileceği, yâni mekaniğin temel kaanûnunun \mathfrak{A} matrisi ile belirlenmiş olan sonlu dönme grubuna göre invaryant kaldığı böylece tesbit edilmiş olur.

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

II.1. Üzerine $\mathbf{K} = (6t - 8)\mathbf{e}_1 - 60t^3 \mathbf{e}_2 + (20t^3 + 36t^2)\mathbf{e}_3$ şeklinde bir kuvvetin etkidiği m eylemsizlik kütleli bir nokta $t = 0$ ânında $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_3$ de bulunmakta olup hızı da $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$ dir. Bu başlangıç şartları altında noktanın yer ve hız vektörlerini zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

II.2. Eylemsizlik kütlesi $m = 40$ kg olan bir maddesel noktayı 20 saniye içinde $4\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ hızından $8\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$ hızına hızlandıran sâbit \mathbf{K} kuvvetini bulup bunun şiddetini belirleyiniz.

II.3. Bir m kütlesi üzerine etkiyen kuvvet, a ve b iki sâbit olmak üzere

$$\mathbf{K} = (a \cos \omega t) \mathbf{e}_1 + (b \sin \omega t) \mathbf{e}_2$$

ile verilmiştir. Eğer m kütlesi başlangıçta orijinde sükûnet hâlinde bulunuyorsa herhangi bir $t > 0$ ânı için söz konusu kütlelinin yer ve hız vektörünü tesbit ediniz.

II.4. m kütleli bir nokta

$$K_1 = -kx, \quad K_2 = K_0 t \quad \text{ve} \quad K_3 = -2m \mu \dot{x}$$

kısmî kuvvetlerinin ortak etkisi altında hareket etmektedir. Noktanın hareket denklemini $x(0)$ ve $\dot{x}(0)$ başlangıç değerlerinin fonksiyonu olarak ifade ediniz.

II.5. $\mathbf{A}' = ma \mathbf{e}_1$, $\mathbf{B}' = mb \mathbf{e}_3$ (a ve b sâbit) olmak üzere m eylemsizlik kütleli bir nokta üzerine etkiyen kuvvetin

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}' + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}')$$

şeklinde olduğu varsayılmaktadır. Hareketin periyodik bir hareket olduğu bilindiğinden faz açısının $\psi \equiv 0$ olması ve diğer başlangıç şartlarının da

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \frac{2a}{b^2} \mathbf{e}_1$$

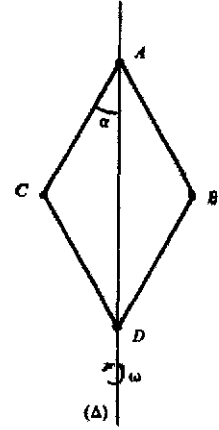
$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 = -\frac{2a}{b} \mathbf{e}_2$$

şeklinde ifade edilmeleri hâlinde hareket denklemlerini ve yörüngeyi t parametresi cinsinden belirleyiniz.

II.6. Kütleleri ihmâl edilen ve her biri l uzunluğunu haiz dört adet AB, BD, DC, CA çubuğu Şekil : II.4 deki gibi bir baklava oluşturmaktadırlar. (Δ) eksenini etrafında ω açısal hızıyla dönen bu sistemin A noktası (Δ) üzerinde sâbit olup B, C ve D mafsallarında da her biri m kütleli üç maddesel nokta bulunmakta ve D de (Δ) üzerinde sürtünmesiz kayabilmektedir.

α açısını, bu verilere dayanarak, ω açısal hızının fonksiyonu olarak tesbit ediniz.

II.7. v_0 hızıyla yol alan bir otomobil gazını kestikten sonra hızıyla orantılı bir sürtünme kuvvetine mâruz kalıyor. Acaba otomobilin hızı zamanın fonksiyonu olarak nasıl değişir? Otomobilin apsisini de zamanın fonksiyonu olarak belirleyiniz.



Şekil : II.4

II.8. m kütleli bir nokta sâbit bir O noktası tarafından buna olan uzaklığıyla orantılı olarak çekilmektedir. Noktanın hareketini, $t = 0$ için $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ bilindiği takdirde üç boyutlu uzayda inceleyiniz.

II.9. Düşey bir eksene tutturulmuş, yatay bir çubuğa geçirilmiş olan ihmâl edilebilir boyutlu bir m kütlesi, bu çubuğun düşey eksen etrafında sâbit bir ω hızıyla dönmesi sonucu çubuk üzerinde sürtünmesiz kayabilmektedir.

Başlangıçta sükûnette olduğunu kabul ederek kütlenin hareketini inceleyiniz ve çubuk üzerindeki tepkisini hesaplayınız.

II.10. Arzın dönmesinden ileri gelen merkezkaç eylemsizlik kuvvetini de hesaba katarak g çekim ivmesinin enlemle nasıl değişeceğini inceleyiniz.

II.11. m kütleli silindirik bir cisim ρ hacimsal kütleli bir sıvıda yüzmektedir. Cismin düşey salınımlarının periyodunu hesaplayınız.

II.12. Çapı $D = 6$ mm olan içi boş bir bilyanın hacimsal kütlesi suyunkine eşittir. Bu bilyanın, suya $t = 0$ ânında $v = V = 0,5$ m/s lik bir hızla girdiğini ve suyun da bu harekete, k ile suyun ağırlık (viskoz'luk) katsayısını göstererek, $K = 3\pi k Dv$ ye eşit bir direnç gösterdiğini göz önünde tutarak su içindeki hareketini inceleyiniz. ($k = 10^{-3}$).

II.13. $m = 9000$ tonluk bir gemi saatte 15 millik bir hızla seyrederken bir limanın girişinden x mil uzakta makinelerini stop etmektedir. Bu andan itibaren gemi üzerine etkiyen yegâne kuvvet suyun $K = kv^2$ şeklindeki direncidir. x uzaklığı mil, m kütlesi ton ve zaman da saat cinsinden ifâde edildiğinde $k = 18.000$ dir.

1) Geminin liman girişine 2 mil/saat lik bir hızla varabilmesi için x uzaklığını ve makinelerin stop ettiği ândan itibaren geçecek olan τ zamanını hesaplayınız.

2) Limanın girişinden yarım mil uzaktaki rıhtıma eriştiğinde geminin hızının ne olacağını bulunuz.

II.14. Havadaki serbest düşüş sınır hızı $V = 1$ m/s olan noktasal bir cisim $v_0 = 0,5$ m/s lik bir ilk hızla aşağıdan yukarıya doğru fırlatılmaktadır. Havanın cisme gösterdiği direnç $K = -kmv$ şeklinde olduğuna göre

1) Cismin hareketini inceleyiniz.

2) Hava direnci ihmâl edildiği vakit, boşluktaki hareketin sonuçlarının elde edildiğini gösteriniz.

3) Cismin erişeceği en büyük yüksekliği ve buraya erişmek için geçecek zamanı hesaplayınız.

II.15. m eylemsizlik kütleli bir cisim bir v_0 hızıyla yukarıdan aşağıya fırlatılmaktadır. Havanın direnci $K = -kmv^2$ dir. Cismin sınır hızı da V dir.

1) Hızın ve katedilen yolun ifâdelerini zamanın fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

2) Elde edilen formüllerin, küçük hızlar söz konusu olduğunda, cisimlerin boşlukta düşüş kaanûnlarını ifâde ettiklerini gösteriniz.

3) t nin yeterli derecede büyük değerleri için aynı formüllerin, hareketin düzgün doğrusal bir hareket olmaya eğilimli olduğunu ifâde ettiklerini gösteriniz.

II.16. Bir helyum atomunun her bir yarısı $m = \frac{2}{3} \cdot 10^{-26}$ kg lık bir kütleyi ve $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb'luk aynı bir yükü haizdir. Her iki helyum yarısı $t = 0$ ânında birbirlerinden 10^{-12} cm uzakta iken aralarındaki uzaklık $x = 1$ cm ye erişinceye kadar ne kadar zaman geçecektir? Bu andaki hızlarını hesaplayınız.

II.17. $\mathbf{A}' = m(a_1\mathbf{e}_1 + a_3\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{B}' = mb_3\mathbf{e}_3$, (a_1, a_3, b_3 : sâbit) olmak üzere m cylemsizlik kütlesini haiz bir nokta üzerine etkiyen kuvvetin

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}' + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}')$$

şeklinde olduğu varsayılmaktadır.

$$t = 0 \text{ için } \mathbf{r} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \frac{1}{b_3} (-u_2\mathbf{e}_1 + u_1\mathbf{e}_2)$$

ve $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0 = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ başlangıç şartları altında hareketin yörüngeşinin, düzlemi (Oz) eksenine paralel bir parabolü eksen olarak kabul eden bir *helis* olduğunu gösteriniz.

II.18. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$K(-x_i, -\dot{x}_i; t) = -K(x_i, \dot{x}_i; t)$$

$$K(x_i, -\dot{x}_i; t) = K(x_i, \dot{x}_i; t)$$

$$K(-x_i, \dot{x}_i; -t) = K(x_i, \dot{x}_i; t)$$

bağıntılarının geçerli olduklarını gösteriniz ve bunları yorumlayınız.

II.19. A bir sâbit olmak üzere $x \rightarrow Ax$ dönüşümünün dinamiğin temel denklemini invaryant bırakması için K kuvveti ne gibi bir özelliği haiz olmalıdır; bir örnek veriniz.

II.20. α bir sâbit olmak üzere $t \rightarrow \alpha t$ dönüşümünün dinamiğin temel denklemini invaryant bırakması için K kuvveti ne gibi bir özelliği haiz olmalıdır?

III. BÖLÜM

DİNAMIĞIN GENEL TEOREMLERİ

(III.1) İMPULS

Bir noktanın $\dot{\mathbf{r}}$ hızı ile m kütlelerinin

$$m \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} \quad (\text{III.1.1})$$

şeklindeki çarpımına noktanın haiz olduğu *impuls* (veyâ *lineer moment*, yâhut da *momentum*) adı verilir. Bu tanıma göre NEWTON hareket kaanûnu

$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{K}} \quad (\text{III.1.2})$$

şeklinde de yazılabilir. Aslında, hareket kaanûnunun en uygun ve özellikle kütle'nin zamana bağı olduğu halleri de göz önüne alan en doğru şekli budur. m nin sâbit olması hâlinde

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}$$

yazılabilmesi (III.1.2) nin sâdece özel bir hâlidir.

(III.1.2) denklemini eğer t_1 ve $t_2 > t_1$ ânları arasında integre edilirse

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{P} = \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K} dt \quad (\text{III.1.3})$$

ifâdesi bulunur. Bunun sağ yanındaki integrale *kuvvet çarpması* adı verilmektedir.

Tanıma gereği, \mathbf{K} nin $[t_1, t_2]$ aralığındaki ortalama değeri

$$\langle \mathbf{K} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K} dt \quad (\text{III.1.4})$$

dir. $t_2 - t_1 = \Delta t$ ve $\mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \Delta \mathbf{P}$ vaz edilirse (III.1.4),

$$\boxed{\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \langle \mathbf{K} \rangle} \quad (\text{III.1.5})$$

şekline girer. Bu, $\Delta \mathbf{P}$ nin bilindiği hâller için $\langle \mathbf{K} \rangle$ yı tesbit etmeğe yarar.

Eğer noktanın üzerine etkiyen kuvvetlerin bileşkesi sıfırsa (III.1.3) den

$$\mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}(t_2) \quad (\text{III.1.6})$$

bulunur ki bu şartlar altında impuls, zamandan bağımsız olarak, hep aynı değeri muhafaza edecek demektir. Bu özellik *impuls korunum kaanûnu* diye bilinmektedir.

İmpuls korunum kaanûnu kütlelenin sâbit olması şartı altında GALİLE dönüşümlerine göre, yâni bir eylemsizlik sistemini bir başka eylemsizlik sistemine dönüştüren

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t \quad (\text{III.1.7})$$

şeklindeki dönüşümlere göre invaryanttır. (III.1.7) GALİLE dönüşümü aslında bir referans sisteminin diğerine göre \mathbf{V} sâbit hızıyla düzgün doğrusal bir öteleme hareketi yapmasının matematiksel ifâdesinden başka bir şey değildir. Şimdi (III.1.6) yı, (III.1.7) yı göz önünde tutarak yazarsak

$$m \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{r}' + \mathbf{V}t) \right]_{t_1} = \left[m \frac{d}{dt} (\mathbf{r}' + \mathbf{V}t) \right]_{t_2}$$

veyâ

$$(m\dot{\mathbf{r}}')_{t_1} + m\mathbf{V} = (m\dot{\mathbf{r}}')_{t_2} + m\mathbf{V}$$

âyni

$$\mathbf{P}'(t_1) = \mathbf{P}'(t_2)$$

bulunur ki bu da *kütlelenin sâbit olması şartı altında impuls korunumu kaanûnunun GALİLE dönüşümlerine göre invaryant olduğunu göstermektedir.*

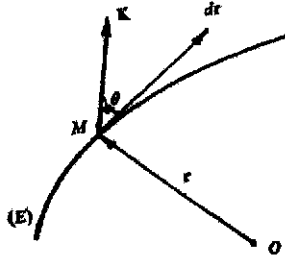
(III.2) İŞ, KİNETİK ENERJİ, POTANSİYEL ENERJİ

Bir (E) yörüngesi üzerinde hareket eden bir M noktasına etkiyen kuvvet eğer M deki teğet ile θ kadar bir açı yapıyorsa \mathbf{K} nın uygulama noktasının (E) üzerinde dr kadar yer değiştirmesi hâlinde

$$\boxed{dW = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = K \cos \theta dr} \quad (\text{III.2.1})$$

skaler büyüklüğüne \mathbf{K} kuvvetinin dr boyunca yaptığı iş adı verilir. Buna göre mad-

desel noktanın bir K kuvvetinin etkisi altında (E) eğrisi üzerinde bir M noktadan bir başka N noktasına gitmesiyle yapılmış olan iş



Şekil : III.1 — M noktası üzerine etkiyen K kuvvetinin yaptığı işin tanımı.

$$W = \int_{r_M}^{r_N} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{III.2.2})$$

olur.

Hareket denkleminin her iki yanını da $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt$ ile skaler olarak çarparsak

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$$

veyâ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) dt = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{III.2.3})$$

olur. (III.2.3) ün sol yanında parantez içindeki ifâdeye noktanın *kinetik enerjisi* denir ve

$$\frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} mv^2 = T \quad (\text{III.2.4})$$

vazedilir. Buna göre (III.2.3) yeniden düzenlenecek olursa

$$dT = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = dW$$

yazılır. Bu ifâde r_M ile r_N arasında integre edilecek olursa

$$W_{MN} = T(r_N) - T(r_M) = \int_{r_M}^{r_N} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{III.2.5})$$

ifâdesi elde edilmiş olur.

Buna göre, maddesel noktanın üzerinde hareket ettiği (E) eğrisi boyunca r_M ve r_N gibi iki nokta arasında üzerine uygulanmış olan K kuvvetinin yapmış ol-

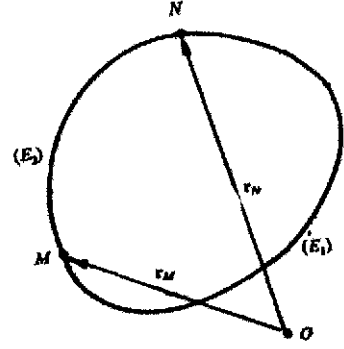
duğu işin maddesel noktanın M ve N deki kinetik enerjilerinin farkına eşit olduğu anlaşılmaktadır. (*Kinetik enerji veyâ zinde kuvvetler teoremi*).

(III.2.5) ifâdesinden bu işin :1) ya $\mathbf{K} = 0$ ise, 2) ya \mathbf{K} kuvveti $d\mathbf{r}$ ye dik ise, veyâhut da 3) bu iki hâlin vâki olmamalarına rağmen eğer sağdaki integral sıfır ise, sıfır olacağı görülmektedir.

Son şıkkın, ancak, $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$ nin bir tam diferansiyel olması ve integrasyon yolunun da kapalı bir eğri olması hâlinde ($\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_N$) gerçekleşebileceği Matematiksel Analiz'den bilinmektedir (*bk. A. Y. ÖZEMRE : Fizikte Matematik Metotlar, s. 128-133*).

Şekil : III.2 — Korunumlu kuvvet alanlarında iki nokta arasında yapılan iş yola bağlı değildir:

$$\oint_{(E)} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = 0$$



Şimdi yalnızca \mathbf{r} yervektörüne bağlı bir $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r})$ kuvvet alanı, yâni uzayın her \mathbf{r} noktasına $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r})$ şeklinde bir kuvvetin \mathbf{r} nin fonksiyonu olarak tekaabül ettiği bir alan göz önüne alalım. Böyle bir kuvvet alanında kapalı bir $(E) = (E_1) + (E_2)$ eğrisi boyunca eğer $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ kuvveti

$$\oint_{(E)} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{III.2.6})$$

şartını gerçekleştiriyorsa böyle bir alana *korunumlu* (konservatif) kuvvet alanı adı verilir. Şekil : III.2 den (III.2.6) şartı

$$\oint_{E_1+E_2} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{E_1} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{E_2} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_M}^{\mathbf{r}_N} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_N}^{\mathbf{r}_M} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

şeklinde yazılabilir; ve buradan da

$$\int_{E_1} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{E_2} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

bulunur; yâni *korunumlu bir kuvvet alanında bir kuvvetin iki nokta arasında yapmış olduğu iş yola bağlı değildir*.

Şimdi (III.2.6) bağıntısına STOKES teoremini uygularsak

$$\oint_{E_1 + E_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{III.2.7})$$

olur. Burada S ile kapalı $(E_1 + E_2)$ eğrisinin alanı ve $d\mathbf{S}$ ile de vektörel alan elemanı gösterilmiş bulunmaktadır. (III.2.7) ifâdesinin sol yanının sıfır olabilmesi için yüzey integralinin integrantının özdeş olarak sıfır olması kâfidir.

$$\text{rot } \mathbf{K} \equiv 0.$$

Hâlbuki bu ifâdenin özdeş olarak sıfır olmasının, $\mathbf{K} \equiv 0$ besbelli şartından başka yegâne şartı \mathbf{K} kuvvet vektörününün $U = U(\mathbf{r})$ gibi \mathbf{r} yervektörünün skaler bir-fonksiyonunun *gradyenti* şeklinde ifâde edilebilmesidir; çünkü bu takdirde

$$\text{rot } \mathbf{K} = - \text{rot grad } U(\mathbf{r}) = - \nabla \times \nabla U(\mathbf{r}) \equiv 0$$

olur. Buradaki eksi işareti genellikle \mathbf{K} kuvveti

$$\boxed{\mathbf{K}(\mathbf{r}) = - \text{grad } U(\mathbf{r})} \quad (\text{III.2.8})$$

şeklinde tanımlandığı içindir. $U(\mathbf{r})$ ye *potansiyel fonksiyonu* veyâ *potansiyel enerji* adı verilir.

\mathbf{r}_M ve \mathbf{r}_N noktaları göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_M}^{\mathbf{r}_N} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\mathbf{r}_M}^{\mathbf{r}_N} [\text{grad } U(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_M}^{\mathbf{r}_N} \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial s} ds \\ &= U(\mathbf{r}_M) - U(\mathbf{r}_N) \end{aligned} \quad (\text{III.2.9})$$

bulunur. Bu sonucu (III.2.5) ile karşılaştırsak

$$\boxed{T(\mathbf{r}_M) + U(\mathbf{r}_M) = T(\mathbf{r}_N) + U(\mathbf{r}_N)} \quad (\text{III.2.10})$$

bulunur ki bu, korunumlu bir kuvvet alanında bulunan bir maddesel noktanın belirli bir uzay noktasındaki kinetik enerjisiyle potansiyel enerjisinin toplamının (yâni *toplam mekanik enerjisinin*) herhangi başka bir uzay noktasındaki kinetik enerjisiyle potansiyel enerjisinin toplamına eşit olduğunu göstermektedir. Bu ise, korunumlu kuvvet alanlarında *toplam mekanik enerjinin korunumu ilkesinin* ifâdesinden başka bir şey değildir.

(III.3) DÖNME İMPULSU VE DÖNME MOMENTİ

m eylemsizlik kütesini haiz bir maddesel noktanın L *dönme* (ya da *açısal*) *impulsu*, \mathbf{r} ile noktanın yervektörünü ve \mathbf{P} ile de lineer momentini göstererek

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}} \quad (\text{III.3.1})$$

ifâdesiyle tanımlanır. Dönme impulsunun zamana göre türevine de *dönme momenti* (veyâ *açılal moment*, ya da *kuvvet momenti*) denir :

$$\boxed{\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}} \quad (\text{III.3.2})$$

Şimdi NEWTON hareket kaanûnunu göz önüne alır da her iki yanını da vektörel olarak soldan \mathbf{r} ile çarpar

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{K} \quad (\text{III.3.3})$$

ve bir de

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \left(\frac{\mathbf{P}}{m} \times \mathbf{P} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

olduğunu göz önüne alırsak (III.3.3) ifâdesi (III.3.1) ve (III.3.2) nin ışığı altında

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{K}} \quad (\text{III.3.4})$$

şekline girmiş olur.

\mathbf{N} dönme momentinin özdeş olarak sıfır olduğu hâller çok önemlidir. Çünkü bu hallerde (III.3.2) bağıntısı gereğince \mathbf{L} dönme impulsu zamana bağlı olmaksızın sâbit kalacak, yâni korunacaktır. (*Dönme impulsunun korunumu* teoremi). (III.3.4) den, \mathbf{N} dönme momentinin özdeş olarak sıfır olduğu hâllerin \mathbf{r} yervektörünün \mathbf{K} kuvvet vektörüne paralel olduğu hallere inhisar ettiği besbellidir. Bu takdirde, $2C$ ile bir integrasyon sâbitini göstererek

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0 \rightarrow \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2C dt$$

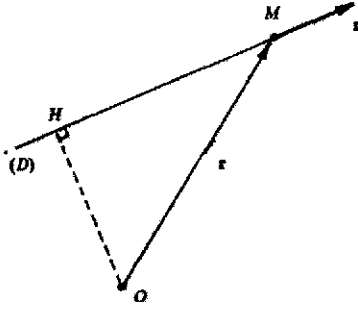
ya da

$$\boxed{\frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = C \cdot dt} \quad (\text{III.3.5})$$

bulunur ki bu, (I.7.6) ifâdesiyle karşılaştırıldığında söz konusu özelliği haiz kuvvetin bir *merkezil kuvvet* olduğunu ve dolayısıyla da yervektörünün eşit zaman aralıklarında süpürdüğü alanların birbirlerine eşit olacağını kanıtlamaktadır.

Sıfırdan farklı bir dönme impulsunun varlığının özellikle bir dönme hareketinin varlığına bağlı olduğu sanılmamalıdır. Nitekim Şekil: III.3 deki gibi, \dot{r} hızıyla ve O orijininininden geçmeyen bir (D) doğrusu üzerinde hareket eden bir M noktası için L dönme impulsu

$$|L| = |r \times m\dot{r}| = m\dot{r} \cdot \overline{OH} \neq 0$$



Şekil: III.3.— Sıfırdan farklı bir dönme impulsunun varlığının her zaman bir dönme hareketinin varlığına bağlı olmadığına misâl:

$$|L| = |r \times m\dot{r}| = m\dot{r} \cdot \overline{OH} \neq 0$$

olup bu, besbelli, sıfırdan farklıdır.

(III.4) VİRİYEL

Hareket kaanûnunun ifâdesini r yervektörüyle skaler olarak çarpalım:

$$m\ddot{r} \cdot r = K \cdot r \quad (III.4.1)$$

olur. Bunun sol yanına dikkat edersek, (III.4.1)

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r} \cdot r) - m\dot{r}^2 = K \cdot r \quad (III.4.2)$$

şeklinde de yazılabilir. τ ile gözlenen hareketin süresi gösterilirse (III.4.2) nin ortalaması

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt *$$

integral operatörü aracılığıyla alınır. Eğer gözlenen olay periyodik bir olay ise, yâni sonlu ve sâbit bir τ_0 zaman aralığı sonunda tekrarlanıyorsa bu takdirde $\tau = \tau_0$ vaz edilir. Fakat eğer olayın zamana bağlılığı herhangi bir başka biçimde ise bu takdirde gözlenen olayın süresi olarak $\tau \rightarrow \infty$ sınır hâlini göz önüne alacağız.

Şimdi hareketin sonlu bir bölgede ve periyodik olmadan vukuu bulduğunu kabul ederek (III.4.2) ifâdesinin ortalama değeri için

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} d(m\dot{r} \cdot r) - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} m\dot{r}^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} K \cdot r dt \quad (III.4.3)$$

yazılır. Buradaki birinci integralin değeri

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} d(m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{\tau} \left[m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \right]_0^{\tau} = \frac{1}{\tau} \left[m\dot{\mathbf{r}}(\tau) \cdot \mathbf{r}(\tau) - m\dot{\mathbf{r}}(0) \cdot \mathbf{r}(0) \right] \quad (\text{III.4.4})$$

olur. $\tau \rightarrow \infty$ sınırı için, hareketin sonlu bir bölgede vukuu bulması nedeniyle gerek \mathbf{r} , gerekse $\dot{\mathbf{r}}$ değişkenin herhangi bir değeri için sonlu kalacaklarından (III.4.4) sifıra gidecektir. Buna binâen (III.4.3) den derhâl

$$\left\langle \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 \right\rangle = \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} \rangle \quad (\text{III.4.5})$$

olacağı görülür. Bu ifâde *viriyel teoreminin* ifâdesi olup $\langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} \rangle$ ye de göz önüne alınan *hareketin viriyeli* adı verilir.

Noktanın dinamiğinde kuvvetin, α ve n birer sâbit olmak üzere $U(r) = \alpha r^n$ şeklindeki bir potansiyelden türemesi hâlinde viriyel teoreminin ifâdesi ilginç bir görünüş kazanır. Gerçekten de bu şartlar altında

$$\mathbf{K} = -\text{grad } U(r) = -\alpha n r^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{n}{r} U(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

olacağından hareketin viriyelinin şekli de

$$\langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} \rangle = -\langle nU \rangle$$

olur. Bu takdirde sonlu bir bölgede oluşan bir hareket için viriyel teoremi

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \langle nU \rangle$$

olacağına işâret eder.

$K = -\alpha x$ gibi esnek bir merkezil kuvvet söz konusu olduğunda $U(x) = \alpha x^2/2$ olacağından viriyel teoremine göre

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle \quad (\text{III.4.6})$$

ve bir gravitasyon alanında da $K \sim r^{-2}$ olması dolayısıyla $U \sim -r^{-1}$ olacağından viriyel teoremine göre

$$\langle U \rangle = -2\langle T \rangle \quad (\text{III.4.7})$$

olacağı kolaylıkla görülür.

Bu sonuncu hâlde potansiyel enerjinin negatif olduğunu belirgin kılmak için eksi işâreti aslında pozitif bir büyüklük olduğu bilinen T nin bulunduğu tarafa geçirilmiş bulunmaktadır.

(III.5) NOKTA SİSTEMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bir *nokta sistemi* ya da *tâneçik sistemi* diye: 1) uzayda farklı yerlerde bulunan, 2) ikişer ikişer göz önüne alındıklarında aralarında NEWTON'un üçüncü ilkesine uygun bir etkileşme bulunan, 3) birden fazla nokta (ya da tâneçiğin) oluşturduğu ve bir bütün gibi tasarımılanan sisteme denir.

Böyle bir sistemde her bir noktanın, kendisini diğer bütün noktalardan ayır-dedebilecek biçimde işaretlenmiş olduğunu varsayalım ve bunlardan i -ninci noktayı göz önüne alalım. Bu nokta üzerine iki türlü kuvvet etkiyecektir: 1) sistemin dışından bu i -ninci noktaya uygulanan $K_i^{(d)}$ kuvveti ile, 2) n , sistemi oluşturan noktaların sayısı ve $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ olmak üzere bu i -ninci nokta ile sistemin diğer bütün noktaları arasındaki karşılıklı etkileşme sonucu ortaya çıkan K_{ij} kuvvetlerinin bileşkesi.

Buna göre sistemdeki i -ninci noktanın hareket denklemi, p_i ile ilgili noktanın impuls vektörünü göstererek,

$$\dot{p}_i = \frac{d(m_i \dot{r}_i)}{dt} = K_i^{(d)} + \sum_{j=1}^n K_{ij} \quad (\text{III.5.1})$$

şeklinde olacaktır. Bu ifâdenin bütün noktalar üzerinden vektörel toplamı ise

$$\sum_{i=1}^n \dot{p}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right) = \sum_{i=1}^n K_i^{(d)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \quad (\text{III.5.2})$$

dir. Bu ifâdenin sağındaki ilk terim sisteme dışarıdan uygulanan kuvvetlerin $K^{(d)}$ bileşkesini verir. Öte yandan, sağdaki ikinci terime dikkatle bakarsak buradaki çift toplamdan ötürü ortaya çıkan her $K_{ij} + K_{ji}$ kısmî toplamı, maddesel nokta sisteminin tanımı gereği her nokta çifti arasında geçerli olan NEWTON'un üçüncü ilkesi dolayısıyla

$$K_{ij} = -K_{ji} \quad (\text{III.5.3})$$

olması gereği karşısında sıfır olacağından bu ikinci terim de kendiliğinden sıfırdır. Şu hâlde (III.5.2) ifâdesi

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right) = K^{(d)} \quad (\text{III.5.4})$$

şekline bürünür.

Eğer bütün noktaların yervektörlerinin noktaların kütlelerine göre ortalamasını göz önüne alırsak bu, tanımı gereği ve M ile sistemin toplam kütlelerini göstererek,

$$\langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (\text{III.5.5})$$

ifâdesiyle verilecek ve buna dayanarak da (III.5.4) ifâdesi

$$\boxed{M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{K}^{(d)}} \quad (\text{III.5.6})$$

şekline bürünecektir.

(III.5.5) ile tanımlanan \mathbf{R} vektörüne göz önüne alınmış olan nokta sisteminin *kütle merkezinin yervektörü* adı verilir. (III.5.6) bağıntısı, (bütün kütlesi kütle merkezinde toplanmış gibi tasarımlanabilecek olan) nokta sisteminin kütle merkezinin, dış kuvvetlerin bileşkesinin etkisi altındaki hareketini belirleyen denklemini göstermektedir. Böylece bütün sistem tek bir noktaya, kütle merkezine indirgenmiş olmaktadır. Görüldüğü gibi *bir nokta sisteminin kütle merkezinin hareketi noktalar arasındaki etkileşme kuvvetlerinden bağımsızdır.*

Sistemin toplam impulsunun

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (\text{III.5.7})$$

ile verileceği besbellidir. (III.5.6) yı (III.5.7) nin ışığında

$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{K}^{(d)}} \quad (\text{III.5.8})$$

şeklinde de yazmak mümkündür. Eğer bir nokta sistemine etkiyen dış kuvvetlerin bileşkesi sıfırsa, bu takdirde (III.5.8) den derhâl sistemin toplam impulsunun sâbit olduğu yâni sistemin toplam impulsunun korunduğu sonucu elde edilir (*Toplam impulsun korunumu teoremi*).

Böyle bir nokta sisteminin *toplam dönme impulsunu* da hesaplamak kolaydır. Bunun için her noktanın $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ dönme impulsu üzerinden i indisine göre toplam yapılır. Şu hâlde önce (III.5.1) ifâdesini soldan \mathbf{r}_i ile vektörel olarak çarpalım ve sonra bütün i ler üzerinden toplam yapalım:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \dot{\mathbf{L}} = \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_i^{(d)}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{III.5.9})$$

Bu ifâdenin sağdaki en son terimini oluşturan çifte toplamın, $K_{ij} = -K_{ji}$ olduğu da göz önünde bulundurulursa,

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_{ij}) + (\mathbf{r}_j \times \mathbf{K}_{ji}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{K}_{ij} \quad (\text{III.5.10})$$

şeklindeki terimlerin toplamından ibâret olduğu görülmektedir. Hâlbuki $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{ij}$ vektörü i -ninci noktadan j -ninci noktaya yönelmiş bir vektör olmakla \mathbf{K}_{ij} vektörüne paralel olmaktadır. İki paralel vektörün vektörel çarpımının özdeş olarak sıfır olması nedeniyle (III.5.10) ifâdelerinin ve bunlardan oluşan, (III.5.9) un en sağdaki teriminin de özdeş olarak sıfır olacağı besbellidir. Buna göre (III.5.9) ifâdesi de

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(d)}} \quad (\text{III.5.11})$$

şekline girmiş olur. Bu ise sistemin toplam dönme impulsunun zamana göre türevinin sisteme dışarıdan etkiyen kuvvetlerin toplam dönme momentine eşit olduğunu ifâde etmektedir. Eğer sisteme uygulanmış olan dış kuvvetlerin $\mathbf{N}^{(d)}$ toplam dönme momenti sıfırsa (III.5.11) bağıntısı bize, bu takdirde, sistemin toplam dönme impulsunun sâbit olacağını göstermektedir (*Toplam dönme impulsunun korunumu teoremi*).

Sağ yanları sıfır olduklarında her biri bir *korunum kaanûnuna* yol açan gerek (III.5.8), gerekse (III.5.11) ifâdeleri vektörel ifâdeler olduklarından, her bir bileşen için ayrı bir korunum kaanûnu ifâde etmek mümkündür. Meselâ (III.5.11) i dik bir kartezyen koordinat sisteminde eksenlere dik izdüşürerek bileşenlerine ayırmış olalım. Eğer $\mathbf{N}^{(d)}$ toplam dönme momentinin x ve y bileşenleri sıfırdan farklı da meselâ z bileşeni sıfır ise, bu takdirde

$$\frac{dL_x}{dt} = N_x^{(d)}; \quad \frac{dL_y}{dt} = N_y^{(d)}; \quad \frac{dL_z}{dt} = 0 \quad (\text{III.5.12})$$

olacağından sistemin L toplam dönme impulsu sâdece z bileşeni için bir korunum kaanûnuna yol açacaktır.

Şimdi, gene, nokta sisteminin L toplam dönme impulsunu göz önüne alalım. O ile sistemin izâfe edildiği (Σ) referans sisteminin crijinini; \mathbf{R} ile sistemin (KM) kütle merkezinin yervektörünü; \mathbf{r}_i ile i -ninci noktanın O ya göre, ve \mathbf{r}'_i ile de aynı noktanın (KM) kütle merkezine göre yervektörlerini gösterelim (*bk. Şekil: III.4*).

Buna göre ve

$$\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt, \quad \mathbf{v}'_i = d\mathbf{r}'_i/dt$$

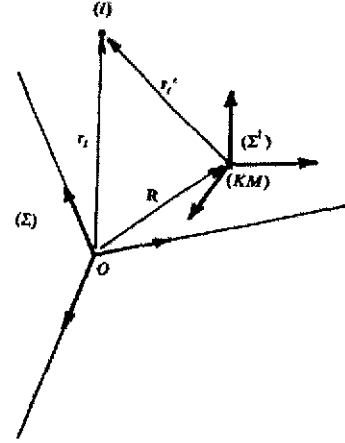
vaz ederek

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i; \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i \quad (\text{III.5.13})$$

olur. Buna göre sistemin L toplam dönme impulsunun ifâdesi için

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^n [(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i(\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)] = \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbf{R} \times m_i \mathbf{V}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) + \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} + \\
&+ \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) = \left(\mathbf{R} \times \mathbf{V} \sum_{i=1}^n m_i \right) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i) + \\
&+ \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \sum_{i=1}^n m_i \right) \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \sum_{i=1}^n m_i \right) \quad (\text{III.5.14})
\end{aligned}$$

yazılır.



Şekil : III.4 — Esas referans sistemi ile (KM) kütle merkezine bağlı referans sistemi arasındaki ilişki.

(III.5.14) ün son iki teriminde parantez içindeki ortak ifade (III.5.5) ile verilmiş olan kütle merkezi tanımına göre özdeş olarak sıfır olduğundan, sistemin \mathbf{L} toplam dönme impulsunun ifadesi, sonunda,

$$\boxed{\mathbf{L} = (\mathbf{R} \times \mathbf{M}\mathbf{V}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i)} \quad (\text{III.5.15})$$

olur. Bu ifade bir nokta sisteminin toplam dönme impulsunun, kütle merkezine indirgenmiş sistemin dönme impulsu ile kütle merkezinin etrafındaki hareketinin toplam dönme impulsunun bileşkesi olarak da yorumlanabileceğini göstermektedir.

Hem Şekil : III.4 den sezgisel olarak ve hem de (III.5.15) den doğrudan doğruya görülebileceği gibi, nokta sisteminin \mathbf{L} toplam dönme impulsuna seçilen orijine bağlı olduğu besbellidir.

Kinetik enerji toplamacıl (*aditif*) bir büyüklüktür. Bu itibarla besbellidir ki bir nokta sisteminin toplam kinetik enerjisi sistemi oluşturan noktaların teker teker kinetik enerjilerinin toplamından ibâret olacaktır :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (\text{III.5.16})$$

Eğer (III.5.13) ile ortaya koymuş olduğumuz değişken dönüşümünü bu ifadeye de uygulayacak olursak

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_i' + \dot{\mathbf{R}})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i'^2 + V^2) + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i' \cdot \dot{\mathbf{R}} \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 + \dot{\mathbf{R}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \mathbf{r}_i')}{dt} \end{aligned}$$

olur. Hâlbuki son terim, kütle merkezinin (III.5.5) tanımına göre

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \mathbf{r}_i')}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - M \mathbf{R} \right\} = 0$$

olması dolayısıyla sıfırdır. Buna göre bir nokta sisteminin toplam kinetik enerjisi

$$T = T_{(KM)} + T' = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 \quad (\text{III.5.17})$$

olur; yâni bir nokta sisteminin kinetik enerjisi, sistemin bütün kütlesi kütle merkezinde toplansaydı bunun haiz olacağı kinetik enerjiyle her bir noktanın kütle merkezine nisbetle hareketi dolayısıyla haiz olacağı kinetik enerjilerin toplamına eşittir.

Bir nokta sistemine etkiyen hem iç kuvvetler ve hem de dış kuvvetler korunumlu kuvvetler ise, bu takdirde nokta sisteminin toplam enerjisinin korunduğu, yâni zamana bağlı olmaksızın sâbit kaldığı gösterilebilir. (*Sistemin toplam enerjisinin korunumu kaanûnu*). Bunu göstermek üzere, gene, sistemdeki *i*-ninci noktanın (III.5.1) ile verilmiş olan hareket denkleminde dönüp bunun her iki yanını da $\dot{\mathbf{r}}_i dt$ ile skaler olarak çarptıktan sonra bütün noktalar üzerinden toplam yapalım; buna göre;

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \cdot d(m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} d(m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) \quad (\text{III.5.18})$$

ifâdesi elde edilmiş olur. Bu ifâde kısaca 1 ve 2 ile göstereceğimiz iki nokta arasında integre edilirse, $\dot{\mathbf{r}}_i dt = dt(d\mathbf{r}/dt) = d\mathbf{r}$ olması hasebiyle

$$\begin{aligned}
W_{12} &= \sum_{i=1}^n \int_1^2 \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \frac{1}{2} d(m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right]_1^2 = T(2) - T(1) \quad (\text{III.5.19})
\end{aligned}$$

olduğu tesbit edilmiş olur. Bu ise zinde kuvvetler teoreminin nokta sistemlerine genelleştirilmiş şeklinden başka bir şey değildir.

Şimdi, yukarıda kabul ettiğimiz gibi, eğer sisteme uygulanan dış kuvvetler korunumlu iseler bunların skaler bir fonksiyondan türeyecekleri hususundaki genel sonuca bir kere daha dikkati çekelim.

Buna göre $U_i^{(d)}$ ile $\mathbf{K}_i^{(d)}$ yi türeten bir potansiyel fonksiyonunu gösterirsek

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n [-U_i^{(d)}(2) + U_i^{(d)}(1)] = U^{(d)}(1) - U^{(d)}(2) \quad (\text{III.5.20})$$

yazılabilir. Öte yandan, eğer sistemde noktalar arasındaki \mathbf{K}_{ij} iç kuvvetleri

$$r_{ij} = r_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (\text{III.5.21})$$

olmak üzere

$$U_{ij}(r_{ij}) = U_{ij}(r_{ji}) \quad (\text{III.5.22})$$

bakışım (simetri) özelliğini haiz bir potansiyelden türüyorlarsa

$$\mathbf{K}_{ij} = -\text{grad}_i U_{ij}, \quad \mathbf{K}_{ji} = -\text{grad}_j U_{ij} = -\mathbf{K}_{ij} \quad (\text{III.5.23})$$

olacaktır. Burada grad_i ile bu gradyent operatörünün yalnızca i indisli değişkenleri etkilediği anlatılmaktadır. $\mathbf{K}_{ij} = -\mathbf{K}_{ji}$ bağıntıları da, nokta sisteminin tanımına göre, i -ninci ve j -ninci noktalar arasındaki etkileşmenin NEWTON'un 3. kaanûnuna uygun olmasının sonucudur. (III.5.20-22) ye dayanarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ii} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{K}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j &= \left\{ -\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_i} dy_i - \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_i} dz_i - \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} dx_j - \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_j} dy_j \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_j} dz_j \right\} = -dU_{ij}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna göre noktalar arasındaki etkileşmede iç kuvvetlerin yaptıkları iş

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_1^2 \mathbf{K}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_1^2 dU_{ij} = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}(2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}(1) \quad (\text{III.5.24})
\end{aligned}$$

olur. Bu ifâdedeki $1/2$ katsayısı (III.5.22) simetri özelliği dolayısıyla çift toplamdaki terimlerin iki misli sayılmış olmalarının önüne geçmek için zorunlu bir tedbir olarak ithâl edilmiş bulunmaktadır.

(III.5.20) ve (III.5.24) ü (III.5.19) da yerlerine yerleştirecek olursak

$$\begin{aligned} W_{12} &= \mathcal{U}^{(d)}(1) - U^{(d)}(2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n U_{ij}(1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}(2) \\ &= T(2) - T(1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifâdeyi yeniden düzenleyerek de, söz konusu şartlar altında bir nokta sisteminin toplam enerjisinin korunacağını ifâdesi olan

$$\boxed{T(1) + \left\{ U^{(d)}(1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}(1) \right\} = T(2) + \left\{ U^{(d)}(2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}(2) \right\}} \quad (\text{III.5.25})$$

bağıntısı elde edilmiş olur.

Bütün bu mülâhazalardan, bir nokta sistemi için ayrıca bir de

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^n U_i^{(d)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}} \quad (\text{III.5.26})$$

şeklinde bir toplam potansiyel enerji tanımlamanın mümkün olduğu anlaşılmaktadır. (III.5.26) ifâdesinin sağdaki ikinci terimine *sistemin iç potansiyel enerjisi* adı verilir. Bu iç potansiyel enerji genellikle, sıfırdan farklı ve zamana bağlı olarak değişen bir büyüklüktür. Sistemi teşkil eden noktalar arasındaki r_{ij} uzaklıklarının zamandan bağımsız oldukları *katı cisimler* için iç potansiyel enerji de sâbit olur; zirâ bir katı cisimde dr_{ij} vektörleri (r_{ij} nin zamana bağlı olmaması sebebiyle) ancak, r_{ij} vektörlerine ve dolayısıyla da r_{ij} lerin doğrultusunda bulunan K_{ij} etkileşme kuvvetlerine dik olabilirler; bu itibarla katı cisim hâlinde, bir nokta sisteminin iç (etkileşme) kuvvetlerinin yapacakları iş sıfır ve dolayısıyla da iç potansiyel enerji de bir sâbitten ibâret olmuş olur.

Bir potansiyelin, tanım bağıntısı göz önünde tutulduğunda, daimâ bir sâbit yaklaşıklığıyla belirlenebilmesi dolayısıyla bir katı cisim söz konusu olduğunda bunu oluşturan noktaların arasındaki etkileşmelerin türediği sâbit potansiyel daimâ sıfır seçilebilir. Bunə göre bir katı cismin iç potansiyel enerjisinin sıfır olduğu kabul edilecektir.

(III.6) NOKTA SİSTEMLERİ İÇİN VİRİYEL TEOREMİ

Bir nokta sistemi için viriyel teoremini tesis etmek üzere, gene i -ninci noktanın (III.5.1) ile verilen hareket denklemini ele alıp bunu her iki yanından \mathbf{r}_i yervektörüyle skaler olarak çarptıktan sonra elde edilen ifâdenin

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i$$

olacağını görmek kolaydır. Buradan, her iki yanı $-1/2$ ile çarpıp i ler üzerinden de toplam yapılırsa

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i$$

olur. Şimdi noktaların hareketlerinin sonlu bir uzay bölgesinde vukuu bulduklarını varsayarak bu ifâdenin zamana göre ve belli bir τ süresi için ortalamasını alalım :

$$-\frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \sum_{i=1}^n d(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T dt = -\frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i \right\} dt$$

Buradan

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n [m_i \dot{\mathbf{r}}_i(\tau) \cdot \mathbf{r}_i(\tau) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i(0) \cdot \mathbf{r}_i(0)] \right\} + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T dt = \\ & = -\frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i \right\} dt \end{aligned} \quad (\text{III.6.1})$$

yazılır. Solda birinci terim, eğer hareket τ periyodunu haiz ise, özdeş olarak sıfırdır; yok eğer hareket periyodik değilse hareketin sonlu bir bölgede vukuu bulunması sebebiyle buradaki terimler, τ kâfi derecede geniş bir zaman aralığı olarak seçilerek (III.6.1) in diğer terimleri yanında ihmâl edilecek kadar küçük kılınabilir.

Buna göre

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(d)} \cdot \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle} \quad (\text{III.6.2})$$

olur. Hareketin viriyeli bu ifâdenin sağında, ortalama değer parantezi içindeki terimdir. (III.6.2) nin (III.4.5) i özel hâl olarak kabul ettiği gözden kaçmamalıdır.

Şimdi bunun önemli bir uygulaması olarak üzerilerine dışardan hiç bir kuvvetin etkemediği fakat kendi aralarındaki etkileşmenin, $C_{ij} = C_{ji}$ olmak şartıyla,

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{C_{ij}}{r_{ij}^2} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}}$$

şeklinde ve dolayısıyla da

$$U_{ij} = \frac{C_{ij}}{r_{ij}}$$

şeklinde bir potansiyelden türemekte olduğu nokta sistemi hâlini göz önüne alalım. Buna göre ve $\mathbf{K}_i^d \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olması sebebiyle (III.6.2) nin sağ yanını hesaplamak için

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{C_{ij}}{r_{ij}^2} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_i}{r_{ij}} \quad (\text{III.6.3})$$

yi göz önüne almak kâfidir. (III.6.3) de i ve j indisleri sessiz indisler olmak hasebiyle bunları herhangi başka sembollerle yeniden isimlendirecek olsak ifâdenin değeri ve anlamı değişmez. Buna göre (III.6.3) ün sağında i yerine j ve j yerine de i yazarsak, $C_{ij} = C_{ji}$ ve $r_{ij} = r_{ji}$ olması sebebiyle bu

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{C_{ij}}{r_{ij}^2} \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{r}_j}{r_{ij}} \quad (\text{III.6.4})$$

olur. (III.6.3) ün sağ yanının yarısı (III.6.4) ün yarısına eklenir ve $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = r_{ij}^2$ olduğuna dikkat edilirse (III.6.3), U ile toplam potansiyel enerjiyi göstererek,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{C_{ij}}{r_{ij}} = U \quad (\text{III.6.5})$$

şekline girer. Bu ifâdenin toplam potansiyel enerji olduğu besbellidir; çünkü $C_{ij} = C_{ji}$ ve $r_{ij} = r_{ji}$ bakışım özelliği ve çifte toplam dolayısıyla C_{ij}/r_{ij} ler hep iki kere sayılmakta ve bundan ötürü de sonucu 2 ye bölmek zorunlu olmaktadır.

(III.6.5) in ışığı altında ve (III.6.2) ye göre bu özel hâl için viriyel teoreminin

$$\langle U \rangle = -2 \langle T \rangle \quad (\text{III.6.6})$$

şeklinde olacağı anlaşılmış olur. Bu sonuç (III.4.7) ile karşılaştırılmalıdır.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

III.1. Uygulandığı nokta bir daire yayı çizerken kendisi bu yayı her an teğet kalan bir \mathbf{K} kuvvetinin, bu yayı orijinden itibaren belirleyen α açısının fonksiyonu olarak yaptığı işi bulunuz.

III.2. Bir yükü yukarı kaldırmak için bir işçi, bir çukruğun kolunu sâbit bir 10 kg lık kuvvetle çevirmektedir. Kolun yarıçapının 0,3 m olduğu bilindiğine göre kolun 10 kere döndürülmesiyle yapılan iş ne olacaktır ?

III.3. $OA = d$ uzunluğunda ve kütlesi ihmâl edilebilen bir çubuk O dan geçen bir (Δ) eksenli etrafında sâbit bir ω açısal hızıyla dönmektedir, Çubuğun A ucunda m kütleli bir maddesel nokta bulunmaktadır. ω açısal hızı ile $(\Delta, OA) = \theta$ arasındaki bağıntıyı tesis ediniz.

III.4. Yağmurlu bir havada yatay bir yolda ilerlerken m_0 kütleli bir vagonun kütlesi, içine düşen yağmurun birikimi dolayısıyla zaman birimi başına düzgün bir biçimde k kadar artmaktadır. Vagonun başlangıç hızı v_0 ve tekerleklerinin yola sürtünmesi dolayısıyla vagona etkiyen sürtünme direnci de ağırlığının ($c < 1$ olmak üzere) c misline eşit ise vagon duruncaya kadar geçecek olan zamanı hesaplayınız.

III.5. L uzunluğunda ve uzunluk birimi başına kütlesi m_0 olan bir zincirin ucuna bir M kütlesi bağlıdır. Acaba bu M kütlesini ne gibi bir V_0 hızıyla yukarı fırlatmalıdır ki, havanın direnci göz önünde tutulmadığında, eriştiği en büyük yükseklik zincirin uzunluğuna eşit olsun?

III.6. Yatay eksenli bir makara üzerinden geçen bir ipin bir ucu yatay bir düzlemdeki ağır ve homogen bir zincire bağlı olup, diğer ucunda da kütlesi M olan bir cisim bulunmaktadır. Zincirin z metre kadarının yükselebilmesi için M kütlesinin $v(z)$ hızı ne olmalıdır? Bütün zincirin yatay düzlemi terketmesi ânında $v(L)$ ne olacaktır?

III.7. m_0 başlangıç kütleli bir füze her saniye yakıtından μ kg kadarını yakmaktadır. Yanmış yakıtın gazları füzeyi u hızıyla terketmektedirler. Füzenin düşey doğrultusunda yükseldiği ve g nin de değişmediği kabul edilmektedir.

1) Füzenin t ânındaki a ivmesini hesaplayınız.

2) Yakıtın kütlesinin $M = 0,9 m_0$, füzenin başlangıç ivmesinin $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ve $u = 4000 \text{ m/s}$ olduğunu göz önünde tutarak yanma süresini hesaplayınız.

III.8. Hiç bir esnekliği olmayan iki küre aynı yarıçapı ve sırasıyla m_1 ve m_2 kütlelerini haiz olarak v_1 ve v_2 hızlarıyla aynı bir doğrultuda hareket ederlerken karşılaşmaktadırlar. Esnek olmayışları, çarpışmadan sonra her ikisinin de beraberce hareket etmelerine sebep olmaktadır.

1) Çarpışmadan sonraki ortak v hızını hesaplayınız.

2) Çarpışmadaki kinetik enerji kaybını hesaplayınız ve

a) $m_1 = m_2$, $v_2 = -v_1$

b) $m_1 = m_2$, $v_2 = 0$

özel hâllerini inceleyiniz.

III.9. Aynı yarıçapı ve sırasıyla m_1 ve m_2 kütleleriyle v_1 ve v_2 hızlarını haiz iki esnek top karşılaşılıyorlar. Tamâmen esnek olduğu varsayılan çarpışmadan sonra hızları sırasıyla v_1' ve v_2' değerlerini alıyor.

1) v_1' ve v_2' yü v_1, v_2, m_1 ve m_2 nin fonksiyonu olarak hesaplayınız.

2) Şu özel hâlleri inceleyiniz :

a) $v_1 = -v_2, m_1 = m_2$;

b) $v_2 = 0, m_1 = m_2$;

c) $v_2 = 0, m_2 \gg m_1$;

d) $v_1 = 2v_2, m_2 = 2m_1$.

III.10. 1) m kütleli ve v hızlı bir bilya düzlemsel sâbit bir duvara çarpmaktadır. Çarpışmanın tamâmen esnek bir çarpışma olduğu ve hiç bir sürtünmenin vukuu bulmadığı kabul edilmektedir. Bu takdirde bilyanın çarpışma sonrası yönü ne olacaktır ?

2) Aynı bir doğrultuda duvarın üstüne saniyede n adet özdeş bilya çarparsa bunların duvar üzerinde yaptıkları basınç ne olur ?

3) Bilyaların her yönden geldikleri ve ortalama hızlarının v olduğu kabul edilirse, bu takdirde duvar üzerindeki basınçları ne olur ?

III.11. Bir bilyanın yerde sıçradığı zaman, $K = \text{sâbit} < 1$ olmak üzere, yere çarpmadan önceki kinetik enerjisinin K^2 kesri kadarını muhafaza ettiği kabul edilmektedir. Buna göre

1) Bilya ilk hızsız olarak bir h_0 yüksekliğinden bırakıldığında n -ninci sıçramadan sonra acaba hangi yüksekliğe erişir ?

2) n -ninci sıçrama hangi t ânında vukuu bulur ?

3) Ne kadarlık bir zaman süresi sonunda bilyanın artık hareketsiz kalacağı ön görülebilir ?

III.12. Sâbit bir m kütleli nokta, x -ekseni boyunca, $U(x)$ potansiyelinden türeyen korunumlu bir kuvvet alanı içinde hareket etmektedir. Eğer nokta x_1 ve x_2 noktalarında sırasıyla t_1 ve t_2 ânlarında bulunuyorsa x_1 den x_2 ye gidinceye kadar geçen zamanı hesaplayınız.

III.13. $\mathbf{K} = (y^2z^3 - 6xz^2) \mathbf{e}_1 + 2xyz^3 \mathbf{e}_2 + (3xy^2z^2 - 6x^2z) \mathbf{e}_3$ kuvvetinin korunumlu bir kuvvet alanını temsil ettiğini gösteriniz.

III.14. m kütleli bir nokta (x, y) düzleminde yer vektörü

$$\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{e}_1 + b \cos \omega t \mathbf{e}_2$$

olacak şekilde hareket etmektedir. (a ve b : sâbit; t : zaman değişkeni)

- 1) Yörüngenin bir elips olduğunu gösteriniz.
- 2) Noktaya etkiyen kuvvetin merkezil bir kuvvet olduğunu gösteriniz.
- 3) Bu kuvvetin korunumlu bir kuvvet alanını temsil ettiğini gösteriniz.
- 4) Noktanın potansiyel enerjisinin ifâdesini tesis ediniz.
- 5) Noktanın toplam enerjisinin sâbit olduğunu gösteriniz.
- 6) Noktanın orijine göre kuvvet momentini ve dönme momentini hesaplayınız.

III.15. $\mathbf{K} = 24t^2 \mathbf{e}_1 + (36t - 16)\mathbf{e}_2 - 12t \mathbf{e}_3$ kuvvetinin etkisi altında $\mathbf{r}_0 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{v}_0 = 6\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3$ başlangıç şartlarıyla hareket eden m kütleli bir noktanın orijine göre kuvvet momentini ve açısal momentini hesaplayınız.

III.16. $\mathbf{K} = x^2yz \mathbf{e}_1 - xyz^2\mathbf{e}_3$ kuvvetinin oluşturduğu kuvvet alanının korunumlu olmadığını gösteriniz.

III.17. Bir kuvvet alanı, k pozitif bir sayı olmak üzere

$$\mathbf{K} = -\text{grad } U(r), \quad U(r) = \frac{k}{r},$$

bağıntılarıyla belirlenmiş bulunmaktadır. Bu takdirde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U = 0$$

olduğunu gösteriniz.

III.18. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olmak üzere bir

$$U = \frac{1 + z^2}{r}$$

potansiyel fonksiyonundan türeyen \mathbf{K} kuvvetinin bileşenlerini ve Oz eksenine göre momentini hesaplayınız.

III.19. Bileşenleri

$$K_x = \frac{3x^2 - y^2}{x^2} \quad \text{ve} \quad K_y = \frac{2y}{x}$$

ile verilen bir kuvvet alanının türediği U potansiyelini bulup kuvvet çizgilerinin denklemlerini tesis ediniz.

III.20. $\mathbf{K} = (x^2 + y^2)(x - y) \mathbf{e}_1 + (x^2 + y^2)(x + y) \mathbf{e}_2 + z^2\mathbf{e}_3$ kuvvet alanının kuvvet çizgilerinin denklemlerini silindirik koordinat sisteminde (r, φ, z) cinsinden yazınız.

III.21. Bileşenleri

$$K_x = -\frac{xz^2}{r^3}, \quad K_y = -\frac{yz^2}{r^3}, \quad K_z = \frac{2z(x^2 + y^2) + z^2}{r^3}$$

ile verilmiş bir kuvvet alanının bir potansiyelden türediğini gösterip bu potansiyeli tesbit ediniz.

III.22. Bir P noktasının yörüngesi parametrik olarak

$$xy = 1, \quad x^2 - y^2 = -2t \quad (t : \text{zaman değişkeni})$$

bağıntılarıyla verilmiş bulunmaktadır.

1) P nin ivme vektörünü tesbit ediniz.

2) İvmenin x ve y bileşenlerini $OP = r$ ve $(\widehat{Ox, OP}) = \varphi$ cinsinden ifade ediniz.

3) P noktasına bu ivmeyi veren kuvvetin bir potansiyel fonksiyonundan türeyip türemediğini tesbit ediniz.

III.23. m kütleli bir nokta R yarıçaplı bir kürenin bir meridyen dairesi boyunca sürtünmesiz kaymakta olup hareketine, ilk hızı $z_0 = R \cos \theta_0$ noktasından başlamış bulunmaktadır. Küre yüzeyinin noktaya gösterdiği D direncinin daima küre yüzeyine dik kaldığı kabul edilmektedir.

a) Enerjinin korunduğunun ifadesini yazıp sebebini açıklayınız.

b) Dinamiğin temel denklemini yazıp bundan D yi θ ve θ_0 in (veyâ z ve z_0 m) fonksiyonu olarak tesbit ediniz.

c) Göz önüne alınan nokta belirli bir $z_1 = R \cos \theta_1$ değeri için küre yüzeyini terkedecektir. Bu noktayı bulunuz.

III.24. Şekil : III.5 deki gibi bir araba R yarıçaplı halka biçiminde bir kısımla son bulan bir yol üzerinde sürtünmesiz olarak hareket etmektedir. Bu araba z_0 yüksekliğindeki M_0 noktasından ilk hızı z_0 bırakılmaktadır. Bu takdirde:



Şekil : III.5.

a) Halkanın z yüksekliğindeki noktasında arabanın hızını ve halkanın arabaya direncini hesaplayınız;

b) Arabanın düşmemesi için z_0 en az hangi değeri haiz olmalıdır?

III.25. Sabit bir O noktasına yönelik bir merkezil kuvvetin etkisi altında bir tâncik O dan geçen bir dairesel yörüngeyi haiz olursa buna etkiyen kuvvetin ve bu kuvvetin türediği potansiyelin ifadelerini tesis ediniz.

III.26. m kütleli bir P noktası α yarı tepe açılı, O tepeli ve Oz eksenli dönel bir koninin iç yüzeyinde sürtünmesiz olarak Arzın çekim alanında hareket etmektedir.

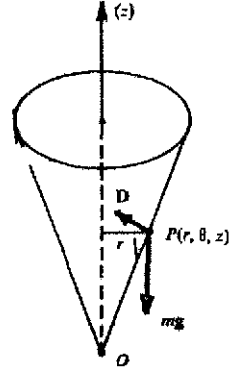
1) P nin hareketinin birbirlerinden bağımsız iki integralini bulunuz.

2) P nin $t = 0$ için z_0 kotu ile θ_0 açısal hızının sıfırdan farklı olduğu varsayılıyor. Bu takdirde acaba P noktası O tepesine erişebilir mi?

3) P nin hareketi sırasında z kotunun daima sonlu kalacağını gösteriniz.

4) Oz eksenli dairesel yörüngelerin varlığını gösteriniz.

III.27. Maddesel bir nokta gibi kabul edilebilen m kütleli bir M bilyası r yarıçaplı dikey bir çemberin içinde sürtünmesiz olarak hareket etmektedir. Bu çember dikey çapı etrafında sâbit bir ω açısal hızıyla döndüğünde M bilyasının çembere göre denge durumlarını tâyin edip kararlılıklarını inceleyiniz.



Şekil : III.6.

III.28. Yalnızca kendi ağırlığının etkisiyle bir eğriye bağlı olarak hareket eden m kütleli bir nokta göz önüne alınmaktadır. Hareketin, frekansı genliğinden bağımsız bir hareket olması için bu eğrinin parametrik denklemleri ne olmalıdır? (Totokron hareket).

III.29. Sâbit bir O noktasına tesbit edilmiş sâbit bir l uzunluğundaki bir ip ile bir m kütlelerinin oluşturduğu küresel sarkacın hareketini inceleyiniz.

III.30. O orijinli dik bir kartezyen referans sisteminde orijinden d_1, d_2, \dots, d_n uzaklıklarında sırasıyla m_1, m_2, \dots, m_n kütleli n tânecikten oluşan bir nokta sistemi göz önüne alınıyor.

Bu sistemin U potansiyel enerjisi eğer $(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_n)$ koordinatlarının k -nıncı dereceden homogen bir fonksiyonu ise sistemin E toplam mekanik enerjisinin

$$E = \frac{1}{4} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \right) + \frac{k+2}{2} U$$

şeklinde ifâde edilebileceğini gösteriniz.

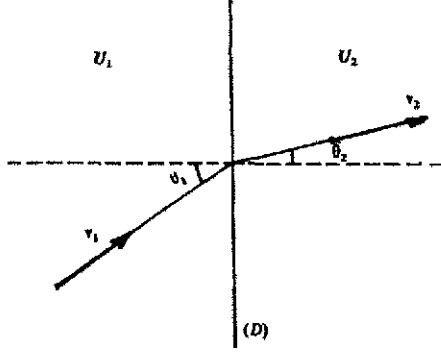
III.31. m kütleli bir tânecik bir $U = U(r)$ potansiyelinden türeyen bir merkezî kuvvet alanında bulunsun. Bu takdirde:

1) t zaman değişkenini sâdece r değişkenine, E mekanik enerjisine, m kütlelerine ve açısal impulsun C değerine bağlı bir integral aracılığıyla ifâde ediniz.

2) θ kutup açısını da r, E, m ve C nin fonksiyonu olarak ifâde ediniz.

3) r nin $r_1 \leq r \leq r_2$ olmak şartıyla yalnız r_1 ve r_2 gibi iki değer arasında değişmesi hâlinde yörüngenin kendi üstüne kapanabilmesi şartını ifâde ediniz.

III.32. m kütleli ve v_1 hızlı bir tanecek potansiyel enerjisinin sâbit bir U_1 değerine eşit olduğu bir yarım uzaydan potansiyel enerjisinin gene sâbit fakat bir $U_2 \neq U_1$ değerine eşit olduğu bir yarı uzaya geçmektedir.



Şekil : III.7.

Bu takdirde taneceğin değişen yönünü hesaplayınız.

III.33. m kütleli bir P noktası sâbit bir O noktası tarafından

$$K = -k \cdot \overline{OP} = -kx = -m\omega^2x$$

kuvvetiyle çekilmektedir.

- 1) P nin hareket denklemini tesbit ediniz.
- 2) K nin türediği U potansiyelini bulunuz.

3) $t = 0$ ânında P noktasının $\overline{OP}_0 = x_0$ olmak üzere bir P_0 noktasında ve hızının da v_0 olduğu başlangıç şartları altında,

- a) P nin mekanik enerjisinin ve potansiyel enerjisinin ifâdelerini bulunuz,
- b) Yörüngenin $\overline{OA} = \lambda$ olmak üzere bir A noktasında P nin hızı sıfır ise U nun ifâdesinin ne olduğunu tesbit ediniz.
- c) P nin hareket denklemini bu verilerle yeniden tesis ediniz.

III.34. Aynı bir v_0 hızını haiz bir nötron demeti (sükûnette buldukları varsayılan) önce hidrojen çekirdekleri, sonra da azot çekirdekleri üzerine yönlendiriliyor. Fırlayan protonların ve azotların maksimum hızlarının, sırasıyla, V_P ve V_A ve $V_P/V_A \neq 7$ olduğu tesbit ediliyor. Bu takdirde nötronların yaklaşık kütlelerini tâyin ediniz.

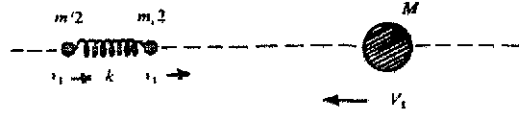
III.35. M kütleli ve V_0 hızlı ağır bir tanecek sükûnetteki hafif bir m kütleli taneceğe çarptığında mâruz kalacağı maksimum sapma ne olabilir?

III.36. M ve m kütleli iki tanecek aynı bir doğru üzerinde sırasıyla V_1 ve v_1 hızlarıyla hareket ediyorlar. Bunların çarpışmaları ve çarpışmadan sonra gene aynı doğru üzerinde hareketlerine devam etmeleri şartı altında haiz olacakları V_2 ve v_2 hızlarını tâyin edip durumu tartışınız.

III.37. M kütleli tek atomlu bir molekül ile herbiri $m/2$ kütleli iki atomdan oluşan m kütleli çift atomlu bir molekülün çarpışması göz önüne alınıyor. Çift atomlu moleküldeki kimyasal bağın k sâbitli bir yayla temsil edilebileceği kabul edilmektedir.

Meseleyi basitleştirmek için şu varsayımlar yapılmaktadır :

a) Göz önüne alınan her üç kütle için hareketi de aynı bir doğrusal yörünge üzerinde vukuu bulmaktadır (hızlar, yönlendirilmiş doğru üzerinde cebirsel olarak değerlendirileceklerdir).



Şekil : III.8.

b) V_1 ve v_1 ile çarpışmadan önce, sırasıyla, tek atomlu ve çift atomlu moleküllerin hızını göstermek üzere seçilecek referans sistemi her iki molekülün kütle merkezini (KM) orijin olarak kabul eden sistem olacaktır.

Bu takdirde

1) Tek atomlu molekülün çift atomlu molekülün atomlarından biriyle çarpışması esnasında kimyasal bağın etkisinin ihmâl edilebileceğini kabul ederek her üç kütle için de çarpışma sonrası hızlarını hesaplayınız.

2) Bir molekülden diğerine iletilen impuls ve enerjisi hesaplayıp, bununla esnek çarpışma arasındaki farkı belirtiniz.

3) Çift atomlu molekülün enerjisinin mâhiyetini açıklayınız.

III.38. $m_1 = 3$ gramlık bir kütle $(1, 0, -1)$, $m_2 = 5$ gramlık bir kütle $(-2, 1, 3)$ ve $m_3 = 2$ gramlık bir kütle de $(3, -1, 1)$ noktalarında bulunmaktadır. Bu üç kütle için oluşturduğunuz sistemin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

III.39. Birbirlerine nazaran v hızıyla hareket eden m_1 ve m_2 kütlelerini haiz iki taneceğin kütle merkezlerinin hızı V dir. Sistemin toplam kinetik enerjisinin, $M = m_1 + m_2$ toplam kütle ve $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ de indirgenmiş kütle olmak üzere,

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

ile ifade edilebileceğini gösteriniz.

III.40. $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ ve $m_3 = 3$ kütlelerini haiz üç taneceğin yervektörleri sırasıyla $\mathbf{r}_1 = 5t \mathbf{e}_1 - 2t^2 \mathbf{e}_2 + (3t - 2) \mathbf{e}_3$, $\mathbf{r}_2 = (2t - 3) \mathbf{e}_1 + (12 - 5t^2) \mathbf{e}_2 + (4 + 6t - 3t^3) \mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{r}_3 = (2t - 1) \mathbf{e}_1 + (t^2 + 2) \mathbf{e}_2 - t^3 \mathbf{e}_3$ ile verilmiş olup t ile de zaman değişkeni gösterilmektedir. Bu takdirde $t = 1$ ânında sistemin kütle merkezinin hızını ve toplam impulsunu tâyin ediniz.

IV. BÖLÜM

EVRENSEL ÇEKİM (GRAVİTASYON)

(IV.1) GEZEĞENLERİN HAREKETLERİNİN DİNAMİK ÖZELLİKLERİ

KEPLER'in gezegenlerin Güneş etrafındaki hareketleriyle ilgili üç kinematik kuralından, bir gezegenin ivmesinin

$$\mathbf{a} = -\frac{4\pi^2\alpha}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho \quad (\text{I.15.14})$$

şeklinde olduğunu (I.15) alt-bölümünde çıkarmıştık. α nın bütün gezegenler için aynı değeri haiz bir sâbiti temsil ettiği bu ifâde, gezegenin ivmesinin merkezî bir ivme olduğunu ve daima Güneşe yönelik bulunduğunu göstermektedir.

İçinde oluşan termonükleer tepkimeler aracılığıyla her an civarındaki uzaya saldırdığı enerji ve kütle miktarının kendi toplam kütlesi yanında ihmâl edilecek kadar küçük olduğunu varsayarak, çok uzun bir zaman süresi içinde olmak üzere ve çok büyük bir yaklaşıklıkla, Güneşin kütlesinin sâbit olduğu kabul edilebilir. Buna göre ve M_\odot ile de Güneşin kütlesini göstererek

$$4\pi^2\alpha = GM_\odot \quad (\text{IV.1.1})$$

vaz etmek sûretiyle ve bütün gezegenler için geçerli bir G sâbiti tanımlanabilir. Böylelikle gezegenin ivmesi için de

$$\mathbf{a} = -\frac{GM_\odot}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho \quad (\text{IV.1.2})$$

yazılır.

Kütlesi m olan bir gezegen göz önüne alındığında buna (IV.1.2) ivmesini veren kuvvetin de

$$\mathbf{K}(\rho) = -\frac{GM_\odot m}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho \quad (\text{IV.1.3})$$

dan ibâret ve daima Güneşe yönelik merkezî bir kuvvet olduğu besbellidir. Bu kuvvet, ifâdesinde, hem Güneşin ve hem de göz önüne alınan gezegenin kütlelerini simetrik bir biçimde içerdiği için Güneşin gezegene uyguladığı bir *çekim kuvveti* olarak yorumlanabileceği gibi kezâ gezegenin Güneşe uyguladığı bir *çekim kuvveti* olarak da yorumlanabilir. En doğrusu, (IV.1.3) ün, Güneş ile gezegen arasındaki *etkileşmeyi* gösteren kuvvet olduğunu söylemektir. Bu etkileşme *karşılıklı bir çekim (gravitasyon)* görünümündedir.

Şimdi, kuvvet bilindiğine göre, bunun etkisi altında gezegenin potansiyel enerjisi ne olacaktır, onu hesaplayalım. Önce (IV.1.3) ile ifâde olunan kuvvetin gerçekten de korunumlu bir kuvvet alanı oluşturduğunun ortaya konması gerekir. Bilindiği gibi bir \mathbf{K} kuvvetinin korunumlu bir kuvvet alanı oluşturmasının şartı $\text{rot } \mathbf{K} \equiv 0$ olmasıdır. Silindirik koordinatlarda, gerçekten de,

$$\text{rot } \mathbf{K} = \nabla \times \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{GM_\odot m}{\rho^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

dır. Buna göre (IV.1.3) ün oluşturduğu alan korunumlu bir kuvvet alanıdır, ve

$$\mathbf{K}(\rho) = -\text{grad } U(\rho)$$

olacak şekilde bir $U(\rho)$ potansiyel fonksiyonu var demektir. (Hatırlatma: $\nabla \times \mathbf{K} = 0$ ise, $\nabla \times \nabla U = 0$ olmasından $\mathbf{K} = \nabla U$ yazılabilir).

Son ifâdenin her iki yanını skaler olarak \mathbf{e}_ρ ile çarpılırsa

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_\rho = -(\text{grad } U) \cdot \mathbf{e}_\rho \rightarrow K(\rho) = -\frac{dU}{d\rho}$$

ve buradan da

$$U(\rho) = \int \frac{GM_\odot m}{\rho^2} d\rho = -\frac{GM_\odot m}{\rho} + \beta$$

bulunur. Potansiyel fonksiyonunun daima bir sâbit yaklaşıklığıyla belirlenebileceği burada somut olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak bu özel hâlde $\rho \rightarrow \infty$ için $U(\rho) \rightarrow 0$ vaz ederek potansiyel fonksiyonunu normalize etmek mümkündür. Bu şartın uygulanması integrasyon sâbitinin sıfır olmasını sağlar. Buna göre bir gezegenin potansiyel enerjisi

$$\boxed{U(\rho) = -\frac{GM_\odot m}{\rho}} \quad (\text{IV.1.4})$$

dur.

Gezegen noktasal olarak kabul edilirse yörüngesi üzerinde haiz olduğu kinetik enerji, kutupsal koordinatlarda hız ifâdesinin (I.4.9) ile verilmiş olduğunu da göz önünde tutarak,

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$$

olacaktır. Gezegenin korunumlu bir kuvvet alanının etkisi altında bulunması dolayısıyla mekanik enerjisi korunacak, yâni

$$T + U = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{GM_{\odot} m}{\rho} = E = \text{sâbit} \quad (\text{IV.1.5})$$

olacaktır. Şimdi, gezegenin E mekanik enerjisinin gerçekten de sâbit olduğunu göstereceğiz.

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

yazılabileceğinden (IV.1.5)

$$E = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right] - \frac{GM_{\odot} m}{\rho} \quad (\text{IV.1.6})$$

yazılabilir. Hâlbuki KEPLER'in alanlar kaanûnuna göre bir gezegen için, ve (I.15.13) ile (IV.1.1) i de göz önünde tutarak,

$$\rho^2 \dot{\varphi} = C \quad \text{veyâ} \quad C^2 = 4\pi^2 \alpha p = GM_{\odot} p = \rho^4 \dot{\varphi}^2 \quad (\text{IV.1.7})$$

dir. Buna göre (IV.1.6)

$$E = \frac{1}{2} GM_{\odot} m p \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right] - \frac{GM_{\odot} m}{\rho} \quad (\text{IV.1.8})$$

şekline girer. Öte yandan bir gezegenin yörüngesinin kutupsal koordinatlardaki ifâdesi (I.15.1) ile verilmiştir :

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (\text{I.15.1})$$

Buradan, kolaylıkla,

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} &= -e \sin \varphi, \quad \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{e^2}{p^2} \sin^2 \varphi \\ \frac{1}{\rho^2} &= \frac{1}{p^2} - \frac{2e}{p^2} \cos \varphi + \frac{e^2}{p^2} \cos^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.1.9})$$

olduğu hesaplanır. (I.15.1) ve (IV.1.9) formülleri yardımıyla (IV.1.8) ifâdesi; e dışmerkezliği, p parametresi ve elipsin a büyük eksenini arasındaki bağıntıyı veren (I.15.2) formülünü de göz önünde tutarak

$$E = -\frac{GM_{\odot}m}{2a} \quad (IV.1.10)$$

şeklini alır. Belirli bir gezegen için m ve a sâbit olduklarından ve ayrıca G ve M_{\odot} de bütün gezegenler için sâbit olduklarından gezegenin mekanik enerjisinin gerçekten de korunduğu böylece bilfiil ortaya konulmuş olmaktadır.

(IV.1.10) sonucu bir gezegenin toplam enerjisinin, yalnızca, gezegenin elipsel yörüngesinin büyük ekseninin bir fonksiyonu olduğunu ortaya koymaktadır. Fakat bilindiği gibi aynı bir a değerini büyük eksen olarak kabul eden, ve bunların arasında a yarıçaplı dairenin de bulunduğu, (ve herbiri p parametresiyle e dışmerkezliğinin farklı değerleriyle birbirlerinden farkedilen) ∞^2 adet mümkün elips var olduğundan bunların her biri için demek ki gezegenin toplam enerjisi aynı bir sâbit E değerini haiz olacaktır. Bu sonuç klâsik atom mekânîğinde pekçok hesapları kolaylaştıran bir husus olmuştur.

(IV.1.10) ifâdesindeki negatif işâret potansiyel enerjinin, sonsuzda sıfıra gitmesine karşılık, sonlu uzaklıklar için kinetik enerjiden mutlak değerce daha büyük olmasından doğmaktadır.

(IV.2) GEZEGENLERİN HAREKETLERİNİN KİNEMATİK ÖZELLİKLERİ: MÜMKÜN YÖRÜNGELER.

Şimdi (IV.1.3) kuvvetinin etkisi altında Güneşin civarındaki bir gezegenin veyâ Güneş sistemine bağlı bir başka gök cisminin yegâne mümkün yörüngelerinin elipsler mi olduğunu araştıracağız. Bunun için, göz önüne alacağımız gök cisminin kütesini gene m ile göstermekte devam edeceğiz.

Göz önüne alınan gök cisminin belirli bir ândaki (meselâ keyfî olarak seçilen zaman orijininde yâni $t = 0$ daki) hızı v_0 ve Güneşe olan uzaklığı da ρ_0 olsun. Bu takdirde (IV.1.3) kuvvetinin oluşturduğu korunumlu kuvvet alanı için toplam enerjisinin korunmakta olduğunu yazarsak

$$T(t) + U(t) = T(0) + U(0)$$

veyâ (IV.1.5) i de göz önünde tutarak bu

$$\frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) - \frac{GM_{\odot}m}{\rho} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_{\odot}m}{\rho_0}$$

olur. (IV.1.7) bağıntıları göz önünde tutularak bu ifâde

$$\frac{1}{2} GM_{\odot} m p \left[\left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 \frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right] - \frac{GM_{\odot}m}{\rho} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_{\odot}m}{\rho_0}$$

şekline sokulur; buradan da kolaylıkla

$$d\varphi = \frac{\sqrt{GM_{\odot} p} \frac{dp}{\rho^2}}{\sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2GM_{\odot}}{\rho_0}\right) + \frac{2GM_{\odot}}{\rho} - \frac{GM_{\odot} p}{\rho^2}}}$$

olduğu bulunur. Bu ifâdenin integrasyonunu kolaylaştırmak için $u=1/\rho$ vaz edelim; buna göre $du = -d\rho/\rho^2$ olur; ve

$$d\varphi = -\sqrt{GM_{\odot} p} \frac{du}{\sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2GM_{\odot}}{\rho_0}\right) + (2GM_{\odot})u - (GM_{\odot} p) u^2}} \quad (\text{IV.2.1})$$

yazılır. Öte yandan

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}} = + \frac{1}{\sqrt{c}} \arccos \frac{b - cx}{\sqrt{b^2 + ac}}$$

olduğu kolayca tahkik edildiğinden, ve φ_0 ile bir integrasyon sâbitini göstererek, (IV.2.1) den

$$\varphi + \varphi_0 = \arccos \frac{1 - \frac{p}{\rho}}{\sqrt{1 + \frac{p}{GM_{\odot}} \left(v_0^2 - \frac{2GM_{\odot}}{\rho_0}\right)}} = \arccos \frac{1 - \frac{p}{\rho}}{e} \quad (\text{IV.2.2})$$

veyâ

$$\boxed{\rho(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi + \varphi_0)}} \quad (\text{IV.2.3})$$

bulunmuş olur. Bu ifâde kutupsal koordinatlarda p parametresini ve e dışmerkezliğini haiz bir koniği temsil eder.

Eğer e dışmerkezliği 1 den küçükse bu konik bir elipstir :

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{GM_{\odot}} \left(v_0^2 - \frac{2GM_{\odot}}{\rho_0}\right)} < 1.$$

Bu eşitsizlikten, derhâl,

$$v_0^2 < \frac{2GM_{\odot}}{\rho_0}$$

bulunur; veyâ bu son eşitsizliğin her iki yanını da gök cisminin m kütesinin yarısıyla çarparak,

$$\frac{1}{2} mv_0^2 < \frac{GM_\odot m}{\rho_0}$$

eşitsizliği gerçekleştiği vakit, yâni gök cisminin belirli bir ândaki kinetik enerjisi o ândaki potansiyel enerjisinden küçük ise yörüngesinin, odaklarından birinde Güneşin bulunduğu bir elips olacağı anlaşılır.

$e = 1$ yörüngesinin bir parabol ve $e > 1$ de yörüngesinin bir hiperbol olduğuna delâlet eder. Böylece sonuçları özetlersek

| | |
|---|----------|
| ELİPS : $e < 1 \rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 < \frac{GM_\odot m}{\rho_0}$ | (IV.2.4) |
| PARABOL : $e = 1 \rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{GM_\odot m}{\rho_0}$ | |
| HİPERBOL : $e > 1 \rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 > \frac{GM_\odot m}{\rho_0}$ | |

olur. Kısacası eğer Güneşin civarındaki bir gök cisminin belirli bir ândaki kinetik enerjisi potansiyel enerjisinden küçükse cismin yörüngesi bir elips; eşitse bir parabol ve eğer büyükse bir hiperbol olur demektir.

Burada, kısaca, parabolik yörüngesinin bu üç cins yörünge arasında kararsız olduğu husûsuna dikkati çekmek gerekir. Nitekim Güneşin civarında bir gök cisminin belirli bir anda, parabolik bir yörüngesinin şartı olan $mv_0^2/2 = GM_\odot m/\rho_0$ bağıntısını gerçekleştirmiş olduğunu düşünsek bile gök cismi üzerinde civardaki gezegenlerin veyâ başka gök cisimlerinin en ufak bir pertürbasyonu dahi bu eşitliğin ya kinetik enerji ya da potansiyel enerji lehine derhâl bozulmasına ve sonuç olarak da yörüngesinin ya bir hiperbole, ya da bir elipse dönüşmesine yol açacaktır.

(IV.3) EVRENSEL ÇEKİM KANUNU

Güneşin etrafında dolanan gezegenlerin hareketlerinin kinematik bir takım özelliklerini ifade eden KEPLER kanunlarının Güneşin yakınlığında nasıl bir ivme alanı tanımlanmasına yok açtıklarını (I.15) alt bölümünde inceledik. (IV.1.2) ile verilen bu ivme alanınının m kütleli bir gezegen için de (IV.1.3) şeklinde bir kuvvet alanı gibi yorumlanacağını ve bu yorumun içerdiği dinamik özelliklere de (IV.1 ve 2) alt bölümlerinde değinmiş bulunmaktayız.

Özellikle (IV.1.3) formülünün hem Güneşin ve hem de göz önüne alınan gezegenin kütlelerini simetrik bir biçimde içermiş olmasıyla *sanki* Güneşin gezegene uyguladığı bir çekim kuvvetini temsil ediyormuş gibi yorumlanabildiği kadar, aynı zamanda, *sanki* gezegenin de Güneşe uyguladığı çekim kuvveti imiş gibi yorumlanabilmesinin de mümkün olduğu keyfiyetine dikkati çekmiştik.

Evrendeki sayılamıyacak kadar kalabalık olan gök cisimlerinden eninde sonunda ancak biri olan Güneşin yukarıda kısaca özetlemiş olduğumuz sonuçların tekeline sâhip olamayacağını ilk algıyan 1666 da NEWTON olmuştur. NEWTON bu sonuçların yalnızca Güneş ve gezegenler için değil fakat evrendeki kütleli bütün cisimler için de geçerli olduğunu ve, artık G ile sâdece Güneş sistemi için değil fakat Güneş sistemi de dâhil bütün Evren için geçerli bir *evrensel sâbiti* göstererek, m_1 ve m_2 kütlelerini haiz r_1 ve r_2 yervektörlü noktasal iki cisim arasında

$$\mathbf{K} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (\text{IV.4.1})$$

şeklinde; yâni her cismin kütlesiyle düz ve aralarındaki uzaklığın karesiyle de ters orantılı bir *çekim kuvvetinin* var olduğunu önermiştir.

H.CAVENDISH'in (1731-1810) G evrensel sâbitinin değerini tâyin etmek üzere lâboratuvarda gerçekleştirmiş olduğu deneyler hem, sonradan *evrensel çekim kaanûnu* adını alan, NEWTON'un bu önerisinin geçerliliğini ortaya koymuş ve hem de G nin değerini temin etmiştir :

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

(Cavendish deneyi için bk., meselâ, K.ZUBER: Denel Fizik).

(IV.4.1) ile ifâdesini bulmuş olan evrensel çekim kaanûnu Arzın, gezegenlerin, doğal ve yapay uyduların, kuyruklu yıldızların hareketlerinin ve gelgit olayının izahını temin etmiş; incelenmelerine yol açmış olup ayrıca Neptün ve Plüton gezegenlerinin gözlenmeden önce kâğıt üzerinde hesap sonucu keşfedilmeleri de gene bu evrensel çekim kaanûnu sâyesinde olmuştur. Evrensel çekim kaanûnu yıldızların oluşma teorisinde, galaksilerin dinamiğinde ve *gravitasyon dalgalarının* araştırılmasında büyük bir rol oynamağa devam etmektedir.

(IV.5) STATİK ÇEKİM ALANI (POTANSİYEL TEORİSİNE GİRİŞ)

Sonlu yaygınlığı haiz sükûnetteki cisimlerin oluşturdukları çekim alanlarına statik çekim alanları adı verilir. Böyle bir alanın uzayın belirli bir noktasındaki değerini belirlemek üzere o noktada $m = 1$ gram kütleli sükûnetteki bir *test tâneciği* üzerine uyguladığı kuvvet ölçülür.

Uzayda belirli bir O orijinine göre test tâneciğinin yervektörünü \mathbf{r} , cismin noktalarının değişken yervektörünü \mathbf{r}' ; cismin yoğunluğunu $\mu = \mu(\mathbf{r}')$, hacmini V ile gösterelim. Cismin bir sonsuz küçük $d^3\mathbf{r}'$ hacim elemanındaki $dm(\mathbf{r}') = \mu(\mathbf{r}') \cdot d^3\mathbf{r}'$ kütlelerinin evrensel çekim kaanununa göre test parçacığı üzerine icrâ edeceği çekim kuvveti

$$dg = - \frac{G dm(r') \cdot 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

dir. Cismin r deki test parçacığı üzerindeki tüm etkisi, şüphesiz ki, cismi oluşturan bütün kütle elemanlarının ortak katkısıyla ortaya çıkacaktır. Buna göre:

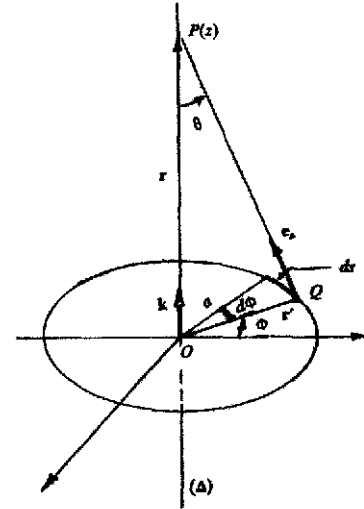
$$\mathbf{g} = - \iiint_V G \frac{\mu(r') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

veyâ $\mathbf{e}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ vaz ederek

$$\boxed{\mathbf{g} = -G \iiint_V \frac{\mathbf{e}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mu(r') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}} \quad (\text{IV.5.1})$$

bulunur.

Önce, bir misâl olarak Şekil : IV.1 deki gibi, a yarıçaplı ve M toplam kütleli ince bir tel çemberin, eksenini üzerindeki bir P noktasında, çemberin oluşturduğu çekim alanının şiddetini hesaplayalım.



Şekil : IV.1. — a yarıçaplı ve M kütleli ince bir çemberin, eksenini üzerindeki bir P noktasında oluşturduğu çekim alanı şiddetinin hesaplanması.

$$OP = r, OQ = r', OQ = a, OP = z,$$

Uzunluk birimi başına telin kütlesi

$$\mu = \frac{M}{2\pi a},$$

ve sonsuz küçük bir ds yay elemanına tekaabül eden kütle de

$$dm = \mu ds = \mu a d\Phi = \frac{M}{2\pi} d\Phi$$

dir. Ayrıca problemin arzettiği simetri dolayısıyla \mathbf{g} nin P noktasında (Δ) eksenine dik bileşeni olmayacaktır.

Diğer yandan $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \mathbf{e}_p$ nun \mathbf{r} üzerindeki bileşeni $\cos \theta$ dır. Buna göre P noktasındaki çekim kuvveti

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = a^2 + z^2 \quad \text{ve} \quad \cos \theta = z/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

olduğunu da göz önünde tutarak

$$\mathbf{g} = -\mathbf{k} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{GM \cos \theta}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\Phi = -\mathbf{k} \frac{GMz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{IV.5.2})$$

bulunur. Burada z , Şekil: IV.1 den de apaçık anlaşıldığı gibi, çemberin merkeziyle P noktası arasındaki uzaklıktır.

Şimdi, bir S dışyüzeyinin sınırladığı bir V hacmini haiz dolu bir cisim göz önüne alalım. $U = U(\mathbf{r})$, çekim alanını

$$\mathbf{g} = -\nabla U \quad (\text{IV.5.3})$$

şeklinde türeten potansiyel fonksiyonu olmak üzere \mathbf{g} alan vektörüne GAUSS teoremini uygulayalım:

$$\iint_S \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{r}) dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV = - \iiint_V \Delta U(\mathbf{r}) dV \quad (\text{IV.5.4})$$

olur. (IV.5.1) ve (IV.5.4) den

$$- \iiint_V \Delta U(\mathbf{r}) dV = \iint_S \left\{ -G \iiint_V \frac{\mathbf{e}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \right\} \mathbf{N}(\mathbf{r}) dS$$

yazılır. Bu ifâdenin sağ yanındaki integraller hem üssüz ve hem de üslü büyüklükler üzerinden alınmaktadırlar; ve neticede de bu ifâdenin her iki yanı da aynı bir sayıyı verecektir. Şu hâlde bu integraller bizim integrasyon değişkenlerine taktığımız isimlere veyâ onları göstermek için seçtiğimiz sembollere bağlı değildirler. Buna göre son bağıntıyı bir kere daha ve bu sefer uygun bir biçimde yeniden düzenleyerek yazarsak

$$- \iiint_V \Delta U(\mathbf{r}) dV = \iiint_V -G \mu(\mathbf{r}) \left\{ \iint_S \frac{\mathbf{e}_p(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} dS' \right\} dV \quad (\text{IV.5.5})$$

olur. Bu ifâdede sağ yanda parantez içindeki ifâdenin integrantı, tanımı gereği, $d\Omega$ katı açısından başka bir şey değildir; buna göre bütün S kapalı yüzeyi üzerinden integrali de 4π verir. Şu hâlde sonuç olarak (IV.5.5) den

$$\boxed{\Delta U(\mathbf{r}) = 4\pi G \mu(\mathbf{r})}$$

(IV.5.6)

ifâdesi bulunur. *POISSON* denklemi denilen bu ikinci mertebeden kısmî türevli diferansiyel denklem uzaydaki $\mu(\mathbf{r})$ kütle dağılımının kendi tanım bölgesi içinde doğurduğu $U = U(\mathbf{r})$ çekim potansiyelini tâyin etmeğe yarar. Bilindiği gibi Δ , dik kartezyen koordinatlar cinsinden,

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ile verilen *LAPLACE operatörüdür*.

Eğer göz önüne alınan V hacimli cismin dışındaki çekim alanı hesaplanmak istenirse, V nin dışında $\mu(\mathbf{r}) \equiv 0$ olacağından bu alan da

$$\boxed{\Delta U(\mathbf{r}) = 0} \quad (IV.5.7)$$

şeklindeki bir *LAPLACE* denkleminin çözümü olacaktır.

(IV.5.6) ve (IV.5.7) denklemlerinin fiziksel durumlara uygun çözümleri ancak uygun *sınır şartlarının* önceden verilmiş olması ve bu denklemlerin çözümleri arasından bu sınır şartlarını gerçekleyenlerin tesbit edilmesiyle bulunur.

Belirli bir $\mu(\mathbf{r})$ dağılımı sebebiyle oluşan çekim potansiyelinin tesbitine yarayan matematiksel yöntemlerin tümü "*potansiyel teorisi*"nin uğraşdır. Potansiyel teorisinde $U(\mathbf{r})$ potansiyel fonksiyonu

1) bütün uzayda kendisi de birinci mertebeden türevleri de tek değerli, sonlu ve sürekli olacak, ve

2) sonsuzda, A ve B sonlu veyâ sıfır olan iki sayı olmak üzere,

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} U(\mathbf{r}) = A \quad \text{ve} \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} r^2 \frac{dU}{dr} = B$$

şartlarını gerçekleyecek şekilde belirlenir.

Aslında, sınır şartlarını göz önünde bulundurarak (IV.5.6) veyâ (IV.5.7) denklemlerinin fiziksel olarak kabul edilebilir çözümlerini tesbit etme işlemi, kolay birkaç hâlin dışında, matematiksel güçlükler arzeder. Biz bu güçlükleri burada değinmekten kaçınarak basit bir örnek aracılığıyla özel bir hâl için *POISSON* denkleminin çözümünü elde edecek ve daha girift hallerin incelenmesini ve potansiyel teorisinin bazı ilginç özelliklerini "*Klâsik Teorik Mekanik: Çözümlü Problem Kitabı*" isimli eserimizde somut örneklerle ele alacağız.

ÖRNEK : $\mu =$ sâbit yoğunluklu, M kütleli ve R yarıçaplı içi dolu bir kürenin dışındaki ve içindeki çekim potansiyeli alanının bulunması.

Kürenin dışında $r > R$ olmak üzere *keyfî* bir $P(r)$ noktasındaki alan, (IV.5.7) *LAPLACE* denklemiyle belirlenmektedir. Küre simetrik ve homogen bir cisim

olduğundan çözümünün de yalnızca r radyal uzaklığına bağlı olacağı açıktır. Küresel koordinatlarda (IV.5.7) denklemi bu şartlarda

$$\Delta U_d(r) = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_d}{dr} \right) = 0$$

şeklinde. Bu denklemin integrasyonu, α ve β ile iki integrasyon sâbitini göstererek,

$$U_d(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta, \quad (r > R)$$

şeklinde. Gravitasyon potansiyelinin sonsuzda sıfır olacağını bildiğimizden $\beta = 0$ olması gerektiği besbellidir. Ayrıca kürenin yüzeyi için de, bilindiği üzere,

$$U_d(R) = -\frac{GM}{R}$$

olacağından

$$U_d(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (r > R) \quad (\text{IV.5.8})$$

olduğu anlaşılabilir olur.

Şimdi, dolu kürenin $r < R$ gibi bir iç noktasındaki gravitasyon potansiyeli ise

$$\Delta U_i(r) = 4\pi G \mu \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_i}{dr} \right) = 4\pi G \mu$$

şeklindeki POISSON denkleminin çözümlerinden biriyle belirlenecektir. Gene α ve β iki integrasyon sâbiti olmak üzere, bu denklem derhâl integre edilerek genel çözüm olarak

$$U_i(r) = \frac{2\pi G \mu}{3} r^2 - \frac{\alpha}{r} + \beta, \quad (r < R) \quad (\text{IV.5.9})$$

bulunur. Bu ∞^2 çözüm arasından bizi ilgilendiren fiziksel durumu yansıtanı tesbit etmek için sınır şartlarını uygulayacağız. Burada sınır, kürenin sınırıdır: $r = R$.

Yukarıda belirlenmiş genel sınır şartlarından birincisi uyarınca $r = R$ de hem $U_i(r)$ nin ve hem de dU_i/dr nin sürekli olmaları; yâni $r = R$ de

$$\left. \begin{aligned} U_d(R) &= U_i(R) \\ \left(\frac{dU_d}{dr} \right)_{r=R} &= \left(\frac{dU_i}{dr} \right)_{r=R} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.5.10})$$

bağıntılarının gerçekleşmiş olması gereklidir. (IV.5.8) ve (IV.5.9) aracılığıyla (IV.5.10) denklem sistemini çözersek

$$M = \frac{4\pi\mu R^3}{3}$$

olduğunu da göz önünde tutarak

$$\alpha \equiv 0 \quad \text{ve} \quad \beta = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R}$$

olduğu tesbit edilmiş olur. ($\alpha \equiv 0$ olduğu zâten $U_d(r)$ nin $r = 0$ da sonlu kalması şartından da derhâl görülebilirdi.) Buna göre $r < R$ için aradığımız çözüm de

$$U_i(r) = -\frac{GM}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (r < R) \quad (\text{IV.5.11})$$

nihaî şeklini almış olur.

(IV.6.) POISSON DENKLEMİNİN FORMEL ÇÖZÜMÜ

\mathcal{O} ile bir diferansiyel operatörü gösterelim; ve

$$\mathcal{O} f(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.6.1})$$

de sağ yanlı bir diferansiyel denklem olsun. Eğer $h(\mathbf{r})$ ile (IV.6.1) e tekaabül eden sağ yansız homogen denklemin çözümü gösterilirse

$$\mathcal{O} h(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{IV.6.2})$$

ve $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ile de sağ yanlı $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ şeklinde bir DİRAC distribüsyonu olan

$$\mathcal{O} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{IV.6.3})$$

denkleminin çözümü gösterilirse (IV.6.1) sağ yanlı diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$f(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}) + \iiint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') k(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (\text{IV.6.4})$$

şeklinde olacağını görmek kolaydır. Nitekim (IV.6.4) ün her iki yanına da \mathcal{O} diferansiyel operatörünü uyguladığımızda

$$\mathcal{O} f(\mathbf{r}) = \mathcal{O} h(\mathbf{r}) + \iiint k(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{O} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

veyâ

$$k(\mathbf{r}) = 0 + \iiint k(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = k(\mathbf{r})$$

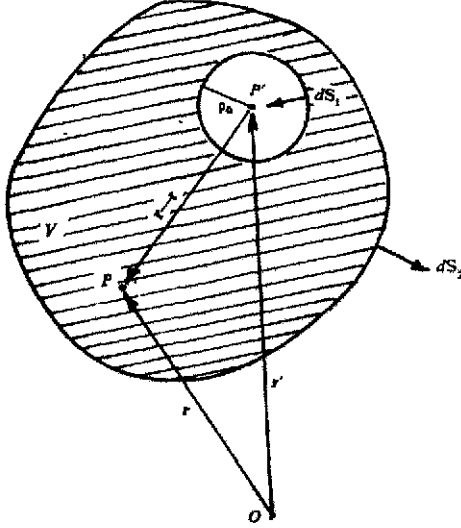
bulunur.

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ fonksiyonuna GREEN fonksiyonu adı verilir. (GREEN fonksiyonu hakkında fazla bilgi için bk. A. Y. ÖZEMRE: *Fizikte Matematik Metotlar*, s. 349, İTÜ Yayınları No. 826; 1971).

POISSON denklemi de (IV.6.1) şeklinde olup burada

$$\mathcal{C} = \Delta = \nabla^2$$

dir. (IV.6.1) in genel çözümünü formel olarak yazabilmek için bu denkleme tekaabül eden GREEN denkleminin çözümünü bulmak gereklidir; ya da başka bir deyimle (IV.6.1) in özel bir çözümünü bulmak gereklidir.



Şekil : IV.2. — POISSON denkleminin GREEN formülü aracılığıyla çözülmesi hakkında.

Bunu için uzayda, içinde ρ_0 yarıçaplı küresel bir kovuk bulunan ve dışarıdan S_2 , içeriden S_1 yüzeyleriyle sınırlı bir V hacmini göz önüne alalım (bk. Şekil: IV.2). ρ_0 yarıçaplı küresel kovuğun merkezi olan P' noktasının yervektörünü r' ve V hacmindeki bir P noktasının yervektörünü de r ile gösterip

$$\Phi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{IV.6.5})$$

vazedelim. Bu ifâdenin $\Delta\Phi = 0$ LAPLACE denklemini gerçekleyen bir *harmonik fonksiyon* olduğu kolayca tahkik edilir.

Şimdi Φ ve ψ sürekli, ve sürekli türevleri olan iki fonksiyon olmak üzere bilindiği gibi *GREEN teoremi* bunlar arasında

$$\iiint_V (\Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi) dV = \iint_S (\Phi \nabla \psi - \psi \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{IV.6.6})$$

şeklinde bir bağıntı olduğunu ifâde etmektedir. Burada S ile V hacmini sınırlandıran kapalı yüzey gösterilmektedir.

Şimdi (IV.6.5) ile tanımlanmış olan Φ fonksiyonunun LAPLACE denklemini gerçeklediğini de göz önünde tutmak ve ψ yerine de

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi G \mu(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.6.7})$$

POISSON denklemini gerçekleyen $U = U(\mathbf{r})$ potansiyel fonksiyonunu vazetmek sûretiyle (IV.6.6) GREEN formülü

$$\iiint_V \frac{\nabla^2 U(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV = 4\pi G \iiint_V \frac{\mu(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \iint_S \left[\frac{\nabla U(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - U(\mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{IV.6.8})$$

şekline girer. Şekil: IV.2 göz önüne alınacak olursa bu ifâdenin sağ yanının, biri S_1 diğeri ise S_2 üzerinden alınmış olmak üzere iki integralden ibâret olması gerektiği kolayca görülür. Önce S_1 üzerinden alınan integrali göz önüne alıp $\rho_0 \rightarrow 0$ limitine geçelim :

$$I_1 = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \left\{ \iint_{S_1} \frac{\nabla U}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}_1 - \iint_{S_1} U \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot d\mathbf{S}_1 \right\}. \quad (\text{IV.6.9})$$

Apaçıktır ki $\rho_0 \rightarrow 0$ için $(\nabla \cdot U) \cdot d\mathbf{S}_1 \rightarrow (-\partial U/\partial r)_{P'} \cdot d\mathbf{S}_1$ olur; buradaki eksi işareti $d\mathbf{S}_1$ vektörel yüzey elemanının ρ_0 yarıçaplı kürenin içine yönelik olması sebebiyle bulunmaktadır. Buna göre (IV.6.9) un ilk terimi için, U nun P' deki türevi sonlu olmak şartıyla,

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \iint_{S_1} \frac{\nabla U}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}_1 \rightarrow \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{P'} \cdot \frac{1}{\rho_0} (4\pi \rho_0^2) = 0$$

olacaktır. Öte yandan (IV.6.9) in ikinci terimi de

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \left\{ -\iint_{S_1} U \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot d\mathbf{S}_1 \right\} \rightarrow \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \left\{ -[U]_{P'} \left(-\frac{1}{\rho_0^2} \right) 4\pi \rho_0^2 \right\} = -4\pi U(\mathbf{r}')$$

olacağından (IV.6.8) ifâdesi artık

$$4\pi G \iiint_V \frac{\mu(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi U(\mathbf{r}') + \iint_{S_2} \left[\frac{\nabla U(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - U(\mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{IV.6.10})$$

şekline girmiş olur. Şimdi (IV.6.10) un sağ yanındaki integrali hesaplayabilmek için $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ yapalım. Bu takdirde, potansiyel fonksiyonu ile türevlerinin sonsuzda sifıra gitmeleri şartından ötürü bu integralin sifıra gideceği görülür. Şu hâlde geriye kalan

$$U(\mathbf{r}') = -G \iiint \frac{\mu(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r} \quad (\text{IV.6.11})$$

ifâdesi (IV.6.7) POİSSON denkleminin özel bir çözümünü teşkil eder.

Bilindiği gibi sağ yanlı bir diferansiyel denklemin genel çözümü buna tekaabül eden sağ yansız denklemin genel çözümüne sağ yanlı denklemin bir özel çözümünü eklemekle elde edilir. (IV.6.8) ifâdesine bakıldığında bu açıkça görülmektedir. (IV.6.8) ile (IV.6.11) i bu anlayışla karşılaştırırsak, POİSSON denkleminin bütün uzay için GREEN fonksiyonunun

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

olduğu anlaşılmaktadır. Şu hâlde POİSSON denkleminin genel çözümü

$$U(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}) - G \iiint \frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (\text{VI.6.12})$$

şeklindedir; $h(\mathbf{r})$, burada, $\nabla^2 h(\mathbf{r}) = 0$ denkleminin genel çözümünü göstermektedir.

(IV.7) ÜÇ AYRI KÜTLE KAVRAMI

Bir cismi hareket ettiren (meselâ gerilmiş bir yaydaki gerilim gibi) bir kuvvet verildiğinde bu, cisme kütleyle *ters orantılı* bir a ivmesi kazandırır: Bu kütleyle *eylemsizlik kütlesi* adı verilir.

$$a = \frac{K}{M^{\text{eyl}}} \quad (\text{IV.7.1})$$

Aynı bir kuvvetinin iki ayrı cisme kazandırdığı ivmeler de bunların herbirinin eylemsizlik kütlesiyle ters orantılı olur. Nitekim $K = M_1^{\text{eyl}} a_1$ ve $K = M_2^{\text{eyl}} a_2$ den

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{M_1^{\text{eyl}}}{M_2^{\text{eyl}}} \quad (\text{IV.7.2})$$

olur.

Bir gravitasyon alanında bir cismin üzerine alanın etkidiği kuvvet ise kütle ile *doğrudan doğruya orantılıdır*. Bu kütleyle ise *edilgen gravitasyon kütlesi* adı verilir. Böylece iki cisim üzerine etkiyen kuvvetler, \mathbf{g} ile gravitasyon alanının şiddetini göstererek

$$\mathbf{K}_1 = M_1^{\text{edil grav}} \mathbf{g} = -M_1^{\text{edil grav}} \nabla U$$

$$\mathbf{K}_2 = M_2^{\text{edil grav}} \mathbf{g} = -M_2^{\text{edil grav}} \nabla U$$

bağıntılarından

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{M_1^{\text{edil grav}}}{M_2^{\text{edil grav}}} \quad (\text{IV.7.3})$$

olur.

Üçüncü tür kütleye gelince buna da *etken gravitasyon kütlesi* adı verilir ve bu, bir cisim tarafından oluşturulan bir gravitasyon potansiyeli ile alan şiddetinin niceliğini tâyin eder. NEWTON'un gravitasyon kaanûnuna göre bir gravitasyon alanının potansiyeli

$$U = - \frac{GM^{\text{etk grav}}}{r} \quad (\text{IV.7.4})$$

ve bundan türeyen kuvvet alanının şiddeti de

$$\mathbf{g} = - \nabla U = - \frac{GM^{\text{etk grav}}}{r^2} \quad (\text{IV.7.5})$$

dir.

Şimdi eğer $M_1^{\text{etk grav}}$ ve $M_2^{\text{etk grav}}$ kütleli iki cisim $M^{\text{edil grav}}$ kütleli bir başka cisimden aynı bir uzaklıkta bulunuyorlarsa bunların sonuncu cisim üzerindeki gravitasyon kuvvetleri arasında

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{M_1^{\text{etk grav}}}{M_2^{\text{etk grav}}} \quad (\text{IV.7.6})$$

şeklinde bir oran bulunacağı apaçıktır.

Bu üç türlü kütlelerin her birinin gerek kökeninin gerekse içerdiği anlamın diğerlerinininkilerinden ayrı olduğu besbellidir. *Eylemsizlik kütlesi* cismin ivmelenmeye karşı direcinin bir çeşit ölçüsüdür. *Edilgen gravitasyon kütlesi* bir gravitasyon alanında cismin üzerine alanın uyguladığı kuvvetin bir çeşit ölçüsüdür. *Etken gravitasyon kütlesi* ise bir cismin, civarında oluşturduğu gravitasyon alanının bir çeşit ölçüsü durumundadır.

Bu üç kütlelerin tanım bağıntıları olan (IV.7.2), (IV.7.3) ve (IV.7.6) denklemleri iyice tanımlanmış temel bazı deneylerle, bu üç türlü kütlelerin her biri için bir kütle ölçüğü tâyin etmeyi mümkün kılarlar. Böylece tesbit edilecek olan üç kütle ölçüğünün her biri için bir *birim kütle* seçtikten sonra gerek M^{eyl} , gerek $M^{\text{edil grav}}$ ve gerek $M^{\text{etk grav}}$ için tümüyle operasyonel (işlemsel) tanım elde edilmiş olur.

NEWTON'un etkinin tepkiye eşit olduğunu bildiren üçüncü kaanûnu iki cisim arasındaki gravitasyon kuvvetine uygulanacak olursa

$$G \frac{M_1^{\text{etk grav}} M_2^{\text{edil grav}}}{r_{12}^2} = G \frac{M_2^{\text{etk grav}} M_1^{\text{edil grav}}}{r_{21}^2} \quad (\text{IV.7.7})$$

eşitliği yazılır. Eğer kütle ölçeklerimizde $M_1^{\text{etk grav}}$, etken gravitasyon kütleleri için *birim* olarak seçilirse ve kezâ $M_1^{\text{edil grav}}$ da edilgen gravitasyon kütleleri için *birim* olarak seçilirse, bunların yerine (IV.7.7) de 1 vazetmek sûretiyle ve $r_{12} = r_{21}$ olması dolayısıyla: $M_2^{\text{etk grav}} = M_2^{\text{edil grav}}$ bulunur. Sonuç olarak demek ki hangi cisim söz konusu olursa olsun

$$\boxed{M_{\text{grav}}^{\text{etk}} = M_{\text{grav}}^{\text{edil}}} \quad (\text{IV.7.8})$$

olarak karşımıza çıkmaktadır. (IV.7.8) eğer geçerli ise artık, mâhiyetleri bakımından aralarında fark olsa bile seçtiğimiz ölçek dolayısıyla sayısal değerleri yönünden aralarında fark olmayan bu her iki kütleyi yalnızca M^{grav} ile gösterebiliriz.

NEWTON'un gravitasyon teorisi çerçevesi içinde kalındığı sürece (IV.7.8)'in geçerli olacağı besbellidir. Eğer, meselâ Genel Rölâtivite Teorisi gibi, çok daha genel bir teoriyi göz önüne alacak olursak (IV.7.8) in geçerliliği de bu teorinin NEVTONsal yaklaşımının geçerlilik bölgesiyle sınırlanacaktır. Böylelikle (IV.7.8) meselâ Genel Rölâtivite Teorisinde yalnızca *yemel* (lokâl) olarak geçerli olacaktır. Noktasal kütleler göz önüne alındığında Genel Rölâtivite Teorisinde dahi (IV.7.8) in geçerli olmasına karşılık bu teoride (IV.7.8) in uzaysal yaygınlığı haiz kütlere de teşmili apaçık değildir.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

IV.1. γ/r^3 ile $-\alpha/r$ şeklindeki bir potansiyelin mâruz kaldığı küçük bir pertürbasyonu göstermek üzere,

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\gamma}{r^3}$$

potansiyel alanındaki bir tâneciğin hareket denklemini ve yörüngesini bulunuz.

IV.2. $2a$ uzunluğundaki ince ve homogen bir çubuğun ortadikeyi üzerinde b uzaklığında m kütleli bir nokta üzerinde icrâ ettiği gravitasyon kuvvetini hesaplayınız.

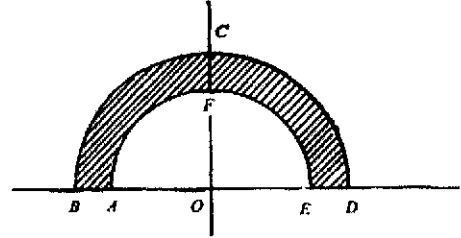
IV.3. R yarıçaplı ince ve homogen bir levhanın, yüzeyine dik ve merkezinden geçen eksenini üzerinde levhaya H uzaklıktaki m kütleli bir nokta üzerinde icrâ ettiği gravitasyon kuvvetini hesaplayınız.

IV.4. İnce ve homogen bir levha Şekil: IV.3 deki gibi iç ve dış yarıçapı sırasıyla ρ ve R olan iki yarım daire ile sınırlanmıştır. Bu levhanın O merkezindeki m kütleli bir noktada icrâ ettiği gravitasyon kuvvetini hesaplayınız.

IV.5. İnce ve homogen R yarıçaplı küresel bir kabuğun, merkezinden a) $r > R$ ve b) $r < R$ uzaklığında bulunan m kütleli bir nokta üzerinde icrâ ettiği gravitasyon kuvvetlerini hesaplayınız.

IV.6. Havanın direncini ihmâl ederek Arzdan dikey olarak v_0 ilk hızıyla yukarı fırlatılan bir cismin: a) Arz yüzeyinden H kadar bir uzaklıkta haiz olacağı hızı ile b) Arza hiç dönmemesi için gerekli en küçük fırlatılma hızını hesaplayınız.

IV.7. İster kapalı ister açık herhangi bir yüzey tabakasının doğurduğu potansiyeli bulunuz ve bu yüzey üzerinde potansiyelin normal yönündeki türevinin sürekli olmadığını gösteriniz.



Şekil : IV.3.

IV.8. Birbirlerinden d uzaklığında bulunan eşit kütleli iki noktanın (bir *dipol*'ün) doğrudukları potansiyel alanını inceleyiniz.

IV.9. Paralel iki yüzey parçasının oluşturdukları *çift tabaka potansiyelini* inceleyiniz.

IV.10. S kapalı bir yüzey ve U da S nin çevrelediği V hacminde her yerde türetilen ve $\nabla^2 U = 0$ LAPLACE denklemini gerçekleyen fakat S sınır yüzeyi üzerinde sıfır olan bir fonksiyon ise U nun bütün V de özdeş olarak sıfır olacağını gösteriniz.

IV.11. S kapalı bir yüzey ve U da S üzerindeki değeri önceden verilmiş ve S nin çevrelediği V hacminde $\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi\mu(\mathbf{r})$ POISSON denklemini gerçekleyen bir fonksiyon ise $U(\mathbf{r})$ nin V de tek bir şekilde belirleneceğini gösteriniz.

IV.12. S kapalı bir yüzey, V bunun çevrelediği hacim ve $U(\mathbf{r})$ de S üzerinde sâbit bir değer alan türetilbilir herhangi bir fonksiyon olduklarında

$$\iiint_V [\text{grad } U(\mathbf{r})]^2 d^3\mathbf{r} = 0$$

ise $U(\mathbf{r})$ nin V de $\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 0$ LAPLACE denkleminin bir çözümü olacağını gösteriniz.

IV.13. $p(r)$ bir yıldızın iç basıncı ve $U(r)$ de, $\mu(r)$ kütle yoğunluğunun oluşturduğu potansiyel olmak üzere ikisi arasında

$$dp = -\mu(r) dU$$

bağıntısının varlığını gösteriniz.

IV.14. a) Herbiri m_i kütlelerini haiz N adet maddî noktadan oluşan sistemin gravitasyon öz enerjisinin

$$U = -\frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

olduğunu gösteriniz. ($r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$: m_i ve m_j arasındaki uzaklık).

b) Samanyolunda yaklaşık olarak $1,6 \cdot 10^{11}$ yıldız bulunduğunu ve lâlettâyin iki yıldız arasındaki uzaklığın ortalama 10^{23} cm olduğunu ve her bir yıldızın da ortalama olarak Güneş kadar kütleli ($m = 2 \cdot 10^{33}$ gram) olduğunu varsayarak Samanyolunun gravitasyon öz enerjisinin mertebesinin ne olacağını bulunuz.

IV.15. A_0 ağırlığında bir füze Arz yüzeyine dik olarak ateşlenmektedir. Füzenin yakıtının yanmasıyla oluşan gazlar füzeye göre sâbit bir w hızıyla füzeyi terketmekte olup bütün yanma süresinde füzenin ivmesi de Arzın ivmesinin sâbit bir α katına eşit tutulmaktadır. Hava direncini ihmâl ederek yanmanın başlangıcından t zamanı sonra füzenin ağırlığının başlangıç A_0 ağırlığının hangi kesrine indirgenmiş olacağını hesaplayınız.

V. BÖLÜM

KATI CİSMİN MEKANİĞİNE GİRİŞ

(V.1) KATI CİSMİN SONLU DÖNMELERİ

Katı cisim, tanımı gereği, kendisini oluşturan noktaların arasındaki uzaklıkların sâbit kaldığı bir sistemdir. Tabiatdaki katı cisimlerin ancak çok sınırlı bir azınlığı sonlu sayıda noktadan oluşmuş addedilebilir. Diğerleri ise, katı cismi oluşturan noktaların *tıkız* (kompakt) ve sürekli bir topolojik yapı meydana getirdikleri sistemlerdir. Bu gibi sistemlerde, sistemi nitelendiren büyüklüklerin yervektörüne bağlı olarak sürekli bir biçimde değiştikleri varsayılır. Bu itibarla meselâ bir katı cismin kütle merkezinin yervektörü hesaplanmak istenirse bu, katı cismi oluşturan sonsuz küçük kütle elemanlarına nisbetle o elemanlara tekaabül eden yervektörlerinin

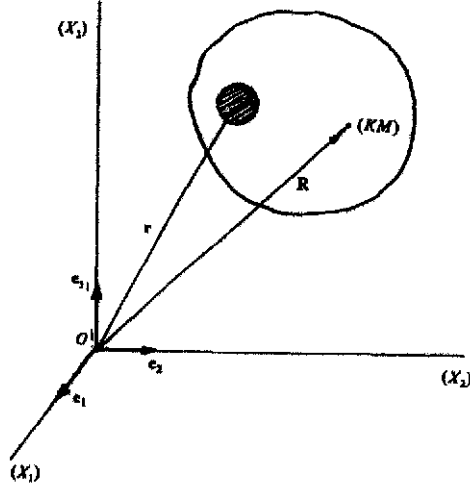
$$\mathbf{R} = \frac{\iiint_{V_k} \mu(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} d^3\mathbf{r}}{\iiint_{V_k} \mu(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}} = \frac{1}{M} \iiint_{V_k} \mu(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (\text{V.1.1})$$

şeklindeki ortalamasıyla belirlenecektir. Burada M ile katı cismin kütlesi ve V_k ile de hacmi gösterilmektedir. Katı cismin yapısındaki bu süreklilik (III.5.5) deki süreksiz değişkenler üzerinden toplam yapma işlemi yerine (V.1.1) de sürekli yer değişkeni üzerinden integral alma işleminin ikaame edilmiş olmasıyla da belirlenmektedir.

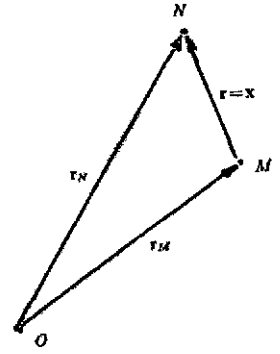
İspatını vermeyeceğimiz ve CHASLES teoremi diye anılan çok önemli bir teorem dolayısıyla: *uzaydaki en genel hareket sonlu bir dönme hareketi ile bir öteleme hareketinin bileşkesidir.*

Buna göre, katı cismin M ve N gibi herhangi iki noktasına tekaabül eden yervektörleri \mathbf{r}_M ve \mathbf{r}_N olsun. Bu takdirde, \mathfrak{A} matrisi O orijinli (S) referans sis-

teminin sonlu bir dönmesine ve \mathbf{p} vektörü de O nun bir öteleme hareketine teka-bül etsinler. Böylece dönüşülen yeni (S') referans sisteminde dönüşmüş yervek-törleri



Şekil : V.1.— Katı cismin kütle merke-zinin yervektörü.



Şekil : V.2.

$$\mathbf{r}'_M = \mathfrak{A}\mathbf{r}_M + \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r}'_N = \mathfrak{A}\mathbf{r}_N + \mathbf{p}$$

olacaktır. Bu ifâdeleri taraf tarafa çıkartırsak, $\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M = \mathbf{x}$ ve $\mathbf{r}'_M - \mathbf{r}'_N = \mathbf{x}'$ vaz ederek,

$$\mathbf{x}' = \mathfrak{A} \mathbf{x} \quad (\text{V.1.2})$$

bulunur. $\mathbf{x} = \mathbf{MN}$ vektörü, M ve N noktalarını birleştiren vektördür (Şekil: V.2)

Bir katı cisim bahis konusu olduğundan, katı cismin tanımı gereği, böyle bir dönüşümde bu keyfi seçilmiş M ve N noktaları arasındaki uzaklığın değişmemesi yâni \mathbf{x} vektörünün uzunluğunun sâbit kalması, veyâ

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}' \cdot \mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{V.1.3})$$

olması gereklidir.

(V.1.2) ifâdesinin transpozesi $\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{x}} \mathfrak{A}$ olduğuna göre bu ifâdeyi (V.1.2) ile sağdan matrisel olarak çarpalım. (V.1.3)ü de göz önünde tutarak

$$\tilde{\mathbf{x}}' \cdot \mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}} \mathfrak{A} \mathfrak{A} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}$$

olur. Bu eşitliğin özdeşlik olarak sağlanabilmesi için, I ile birim matris gösterilmek üzere,

$$\tilde{\mathfrak{A}}\mathfrak{A} = \mathbf{I} , \quad (\text{V.1.4})$$

yâni

$$\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}^{-1} \quad \text{veya} \quad \tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^{-1} \quad (\text{V.1.5})$$

olması gerektiği görülmektedir. Böylelikle uzayda uzaklıkların korunduğu sonlu dönme dönüşümlerinin, transpozeleri terslerine eşit olan matrisler aracılığıyla temsil edildiklerini görmüş olmaktadır. Bu özelliği haiz matrislere *dik matrisler* ve dik matrislerin temsil ettikleri dönüşümlere de *dik dönüşümler* adı verilmektedir. (bk. A.Y. ÖZEMRE: *Fizikte Matematik Metotlar*, İ.T.Ü. Yayınları No. 826, I. Bölüm; 1971).

Şimdi

$$\mathfrak{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.6})$$

matrisleriyle belirlenen ve (X_3) eksenini etrafında sonlu α açısı kadar dönmeye tekaabül eden dönüşümün bu özellikleri haiz olduğu kolaylıkla tahkik olunur. \mathfrak{A}_α aracılığıyla x vektörünün ifade edilmiş olduğu S sistemi bir (S') sistemine dönüşmüş olur. (S') de (X_1') etrafında sonlu bir β açısı kadar dönmeye tekaabül eden

$$\mathfrak{A}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.7})$$

matrisi x' yü x'' ye, (S') yü de (S'') ye dönüştürür. Ve nihayet (S'') yü (X_3'') etrafında sonlu bir γ açısı kadar döndürmek sûretiyle bir (S''') koordinat sistemine döndüren

$$\mathfrak{A}_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.8})$$

dönüşüm matrisi göz önüne alınırsa bu dönüşümde x'' vektörü de bir x''' vektörüne dönüşmüş olur. Böylece belirlenen bu α, β, γ açılarının uygun seçilerek bu üç dik dönüşümün peşpeşe uygulanmasıyla x vektörünü uzayda önceden verilmiş bir x''' yönüne dönüştürmek mümkündür. Böylelikle tanımlanan nihai x''' vektörü x e

$$x''' = (\mathfrak{A}_\gamma \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{A}_\alpha) x = \mathfrak{A} x \quad (\text{V.1.9})$$

bağıntısıyla bağlı olur. Bileşke dönüşümü temsil eden $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\gamma \mathfrak{A}_\beta \mathfrak{A}_\alpha$ matrisinin de dik bir matris olduğu kolaylıkla tahkik olunur. Matris çarpımının genellikle

komütatif olmaması sebebiyle (V.1.9) dönüşümündeki sıra önemlidir. Nitekim doğrudan doğruya hesap yapmak sûretiyle, meselâ,

$$\mathfrak{T}_\beta \mathfrak{T}_\alpha \neq \mathfrak{T}_\alpha \mathfrak{T}_\beta$$

olduğu hemen görülür. \mathfrak{T}_α , \mathfrak{T}_β , \mathfrak{T}_γ dönüşümleriyle tanımlanmış olan α , β , γ açılarına *EULER açıları* adı verilir.

Böylelikle, katı cismin sonlu dönmelerinin genellikle tek bir vektör aracılığıyla değil de daha girift bir geometrik büyüklük olan bir matris aracılığıyla temsil edilebildiğini de görmüş olmaktadır. Fakat eğer katı cismin *sonsuz küçük dönmeleri* söz konusu olursa, ancak bu türden dönmelerin özel bir vektör aracılığıyla temsil edilebilecekleri gösterilebilir.

Gerçekten de bir x vektörü ile bunun dönüşmüşü arasındaki fark, ϵ_{ij} ler birinci mertebeden yüksek kuvvetleri rahatlıkla ihmâl edilebilen sonsuz küçük büyüklükler olmak üzere, eğer

$$x'_i - x_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_j \quad (\text{V.1.10})$$

şeklindeyse buradan

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + \epsilon_{ij}) x_j$$

yazılabilir; ve bu da matris notasyonuyla

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \mathbf{x}$$

şeklinde yazılabilir. \mathbf{E} nin sonsuz küçük elemanlardan oluşması hasebiyle

$$\mathfrak{T} = \mathbf{I} + \mathbf{E}$$

dönüşümü hemen hemen \mathbf{I} özdeşlik dönüşümü gibi bir dönüşümdür. Eğer \mathbf{E}_1 ve \mathbf{E}_2 gene her biri sonsuz küçük elemanlardan oluşuyorlarsa $\mathfrak{T}_1 = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1$ ve $\mathfrak{T}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{E}_2$ dönüşümleri, yukarıda söz konusu edilmiş olan ve katı cismin belirli eksenler etrafında α ve β sonlu açıları kadar dönmüş olmasını temsil eden \mathfrak{T}_α ve \mathfrak{T}_β dönüşümlerinin aksine, komütatifdirler. Yâni \mathfrak{T}_1 ve \mathfrak{T}_2 nin peşpeşe uygulanmalarında sıra önemli değildir; zirâ

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{T}_2 &= (\mathbf{I} + \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{E}_2) = \mathbf{I}^2 + \mathbf{I}\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1\mathbf{I} + \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \\ &\neq \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \end{aligned}$$

olup $\mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1$ için ise burada sâdece \mathbf{E}_1 ile \mathbf{E}_2 değiş tokuş edeceklerdir ki matrislerin toplamı ise her zaman komütatif olduğundan, bunun, sonuca hiç bir etkisi olmayacaktır.

Sonsuz küçük bir dönüşümün tersi de kolaylıkla elde edilir. Eğer $\mathfrak{A} = \mathbf{I} + \mathbf{E}$ böyle bir dönüşümse, $\mathfrak{A}^{-1} = \mathbf{I}$ olması gerektiğinden,

$$\mathfrak{A}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{E}$$

olması gerekeceği besbellidir; çünkü

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}) = \mathbf{I}^2 - \mathbf{IE} + \mathbf{EI} - \mathbf{E}^2 \# \mathbf{I}$$

dir. Şimdi böyle bir sonsuz küçük dönüşümdeki $\mathfrak{A} = \mathbf{I} + \mathbf{E}$ dönüşüm matrisini açıkça yazmaya çalışalım. Bunun için, meselâ, (X_3) eksenini etrafında sonlu bir α açısı kadar dönmeye tekaabül eden ve (V.1.6) ile verilmiş olan \mathfrak{A}_α dönüşüm matrisinin t_{ij} matris elemanlarında sonlu dönmeyi sonsuz küçük $d\alpha$ kemmiyetiyle ikaame edip $\cos d\alpha$ ve $\sin d\alpha$ yı seriye açarak $d\alpha$ ya göre birinci mertebeden daha yüksek olan terimleri de ihmâl edelim. Buna göre

$$\begin{aligned} \lim_{t_{ij} \rightarrow \mathcal{O}(dx)} \mathfrak{A}_\alpha &= \lim_{t_{ij} \rightarrow \mathcal{O}(dx)} \begin{pmatrix} \cos d\alpha & \sin d\alpha & 0 \\ -\sin d\alpha & \cos d\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \# \\ \# \begin{pmatrix} 1 & d\alpha & 0 \\ -d\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d\alpha & 0 \\ -d\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{E} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre sonsuz küçük \mathbf{E} matrisinin

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\alpha$$

dan ibâret olduğu anlaşılmaktadır. Bunun asimetrik bir matris olduğu da görülmektedir.

\mathfrak{A} nin tersi $\mathfrak{A}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{E}$ dur. Dik bir dönüşüm söz konusu olduğunda $\mathfrak{A}^{-1} = \tilde{\mathfrak{A}}$ olması gerektiğinden ve $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{E}}$ olduğundan

$$\mathbf{E} = -\tilde{\mathbf{E}}$$

veyâ bileşenler cinsinden

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$$

olacağı anlaşılmaktadır. Bu ise yukarıda göz önüne alınmış olan özel matris için

değil fakat bütün sonsuz küçük dik dönüşümler için de \mathbf{E} nin antisimetrik bir matris olduğunu göstermektedir. En genel hâlde 3×3 lük bir antisimetrik matris

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.11})$$

şeklinde yazılabildiği cihetle bu matrisin birbirlerinden bağımsız üç bileşeni bulunmaktadır. Bu özellik ise üç boyutlu bir uzayda bir vektörü nitelendiren bir özellikten başka bir şey değildir. Şu hâlde bir antisimetrik matrisi daima bir vektörle temsil etmek mümkündür.

(V.1.10) a binâen bir vektörün sonsuz küçük bir dönüşümdeki değişimi

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = d\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x} \quad (\text{V.1.12})$$

şeklinde olacaktır. (V.1.11) in ışığı altında (V.1.12) nin bileşenlerinin

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.1.13})$$

şeklinde yazılacağı kolaylıkla görülür. Bu denklemlerin sağ yanlarının ise \mathbf{x} vektörü ile $d\boldsymbol{\Omega} = d\Omega_1 \mathbf{e}_1 + d\Omega_2 \mathbf{e}_2 + d\Omega_3 \mathbf{e}_3$ vektörünün vektörel çarpımının bileşenleri olarak anlaşılabilceği besbellidir. Buna binâen

$$\boxed{d\mathbf{x} = \mathbf{x} \times d\boldsymbol{\Omega}} \quad (\text{V.1.14})$$

şeklindedir.

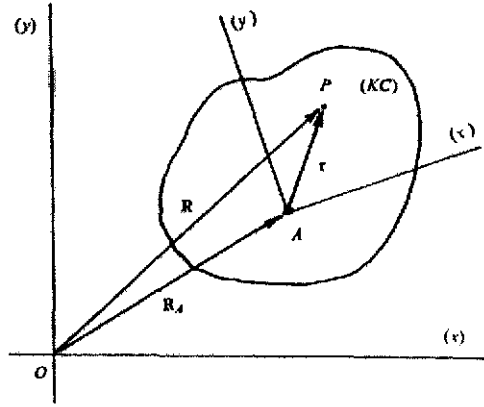
(V.2) KATI CİSMİN DÜZLEMSEL HAREKETİNDE ÂNİ DÖNME EKSENİ

Eğer bir katı cismin kütle merkezi belirli bir düzleme paralel kalırsa katı cismin düzlemsel bir hareket yapmakta olduğu söylenir.

Şimdi bir (KC) katı cisminin belirli sâbit bir düzleme paralel bir biçimde hareket etmekte olduğunu varsayalım. $[x', y']$ katı cisme bağlı bir dik koordinat sistemi olsun (*bk.* Şekil : V.3).

Katı cisim hareket ederken her t ânında $[x', y']$ düzleminin $[x, y]$ ye nisbetle bir ân sükûnetinde olduğu bir P noktası vardır. Katı cismin içinde olmayabilen bu noktaya katı cismin *âni dönme merkezi* ve düzleme dik ve âni dönme merkezinden geçen doğruya da katı cismin *âni dönme eksen*i adı verilir.

Katı cisim hareket ettikçe âni dönme merkezinin de değişeceği besbellidir. $[x, y]$ koordinat sistemine göre P nin yervektörünü \mathbf{R} ve A nınkini de \mathbf{R}_A ile gösterelim. P nin $[x', y']$ ye göre yervektörü de \mathbf{r} olsun. Eğer \mathbf{v} ve \mathbf{v}_A ile sırasıyla P



Şekil : V.3 — Katı cisminin âni dönme merkezi ve ekseninin belirlenmesi hakkında.

nin ve A nın $[x, y]$ ye nazaran görel hızlarını gösterecek olursak (I.10.12) ye göre

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) \quad (\text{V.2.1})$$

yazılır. Ancak P , âni dönme merkezi olarak seçilmiş olduğundan o andaki hızı sıfırdır: $\mathbf{v} = 0$. Şu hâlde (V.2.1) den

$$-\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)$$

olur. Bu ifâdenin her iki yanını da soldan $\boldsymbol{\omega}$ ile vektörel olarak çarparsak

$$-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)] = \boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)] - (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

olur. Fakat $\boldsymbol{\omega} \perp (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)$ olduğundan, buradan da P âni dönme merkezinin, sâbit $[x, y]$ koordinat sistemine göre, \mathbf{R} yervektörünün ifâdesi olarak

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}} \quad (\text{V.2.2})$$

bulunur.

(V.3) BİR NOKTA ETRAFINDAKİ HAREKETTE DÖNME İMPULSU

Bir katı cisim eğer bir noktası sâbit kalmak şartıyla hareket ederse, bu nokta etrafındaki toplam dönme impulsu, katı cisimdeki madde dağılımının sürekli olması dolayısıyla

$$\mathbf{L} = \iiint_V \mu(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{V.3.1})$$

ile verilecektir. Burada $\mu(\mathbf{r})$, kütle yoğunluk fonksiyonudur; ayrıca \mathbf{r} yervektörü ile \mathbf{v} de katı cismin sâbit olduğu varsayılan noktasına göre tanımlanmaktadır. \mathbf{v} hızı bu sâbit nokta etrafındaki hareketin doğurduğu hızdır, ve katı cismin her noktası için değişir. Bunun yerine katı cismin her noktası için aynı değeri haiz olan $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızını göz önünde tutarsak $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ olmasından ötürü (V.3.1) de

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \iiint_V \mu(\mathbf{r}) [\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] d^3\mathbf{r} \\ &= \iiint_V \mu(\mathbf{r}) [r^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})] d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{V.3.2})$$

şekline girer. Bu denklem bileşenlerine ayrılacak olursa $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ olmak üzere

$$L_1 = \omega_1 \iiint_V \mu(r) (x_2^2 + x_3^2) dV - \omega_2 \iiint_V \mu(r) x_1 x_2 dV - \omega_3 \iiint_V \mu(r) x_1 x_3 dV \quad (\text{V.3.3})$$

$$L_2 = -\omega_1 \iiint_V \mu(r) x_2 x_1 dV + \omega_2 \iiint_V \mu(r) (x_3^2 + x_1^2) dV - \omega_3 \iiint_V \mu(r) x_2 x_3 dV \quad (\text{V.3.4})$$

$$L_3 = -\omega_1 \iiint_V \mu(r) x_3 x_1 dV - \omega_2 \iiint_V \mu(r) x_3 x_2 dV + \omega_3 \iiint_V \mu(r) (x_1^2 + x_2^2) dV \quad (\text{V.3.5})$$

yazılır. Eğer şimdi

$$\Theta_{ii} = \iiint_V \mu(r) (r^2 - x_i^2) dV, \quad \Theta_{ij} = - \iiint_V \mu(r) x_i x_j dV, \quad (\text{V.3.6})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{V.3.7})$$

vazedilirse (V.3.3-5) denklemlerini kısaca

$$\boxed{\mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}} \quad (\text{V.3.8})$$

matris denklemi şeklinde yazmak mümkün olur. Bu önemli bağıntı, katı cismin \mathbf{L} toplam dönme impulsu vektörünün $\boldsymbol{\omega}$ ânî dönme vektörüne lineer olarak bağlı olduğunu, yâni \mathbf{L} ile $\boldsymbol{\omega}$ nın yönlerinin genellikle paralel olmadıklarını göstermektedir.

(V.3.6) tanım bağıntılarından $\boldsymbol{\Theta}$ matrisinin bakışlımlı (simetrik) bir matris olduğu görülmektedir. İkinci mertebeden bir tansör gibi de düşünülebilecek olan bu matrisin bileşenlerine *eylemsizlik katsayıları momentleri* ve $\boldsymbol{\Theta}$ ya da *eylemsizlik tansörü* adı verilir.

(V.4) KATI CİSMİN KİNETİK ENERJİSİ

Katı cismin sâbit bir O noktası etrafındaki hareketi göz önüne alınırsa ve v ile de O ya nisbetle r noktasının haiz olduğu görel hız gösterilirse, O etrafındaki hareketin kinetik enerjisi

$$T_{\text{dön}} = \frac{1}{2} \int \int \int_V \mu(\mathbf{r}) v^2 d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \int \int_V \mu(\mathbf{r}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{V.4.1})$$

dir. Bu ifâde

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

yazılabilmesi nedeniyle

$$\begin{aligned} T_{\text{dön}} &= \frac{1}{2} \int \int \int_V \mu(\mathbf{r}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \int \int_V \mu(\mathbf{r}) [\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] d^3\mathbf{r} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot \int \int \int_V \mu(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{V.4.2})$$

şekline girer. Burada vektörel kutu çarpımının çarpanlarının permütasyon özelliklerinden ve $\boldsymbol{\omega}$ nın r den bağımsız olması niteliğinden yararlanılmış bulunmaktadır.

(V.3.1) ve (V.3.8) bağıntıları göz önünde tutulduğunda $T_{\text{dön}}$ dönme kinetik enerjisinin (V.4.2) ye binâen

$$\boxed{T_{\text{dön}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \Theta \boldsymbol{\omega}} \quad (\text{V.4.3})$$

şeklinde ifâde edileceği anlaşılmış olur.

Şimdi \mathbf{n} ile $\boldsymbol{\omega}$ yönündeki bir birim vektör gösterilirse, $\boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \cdot \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}$ olmasından hareketle

$$T_{\text{dön}} = \frac{\omega^2}{2} \left(\tilde{\mathbf{n}} \Theta \mathbf{n} \right) \quad (\text{V.4.4})$$

yazılabilir. Öte yandan (V.3.2) ve (V.3.8) e göre de

$$\Theta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} = \int \int \int_V \mu(\mathbf{r}) [r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})] d^3\mathbf{r}$$

olduğundan $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ vaz'ı aracılığıyla buradan

$$\Theta \omega = \omega \Theta \mathbf{n} = \mathbf{L} = \omega \iiint_V \mu(\mathbf{r}) [r^2 \mathbf{n} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})] d^3\mathbf{r}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \Theta \omega &= \omega^2 (\bar{\mathbf{n}} \Theta \mathbf{n}) = \omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = \omega \Lambda = \\ &= \omega^2 \left\{ \iiint_V \mu(\mathbf{r}) [r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2] d^3\mathbf{r} \right\} = \omega^2 J \end{aligned} \quad (\text{V.4.5})$$

olur. Bu ifâdeyle tanımlanmış olan

$$J = \iiint_V \mu(\mathbf{r}) [r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2] d^3\mathbf{r} \quad (\text{V.4.6})$$

skaler büyüklüğüne *dönme eksenini etrafındaki eylemsizlik momenti* adı verilir. Böylece, sâbit bir noktası bulunan bir katı cismin dönme kinetik enerjisinin

$$\boxed{T_{\text{dön}} = \frac{1}{2} J \omega^2} \quad (\text{V.4.7})$$

olduğu anlaşılmış olur.

Öte yandan \mathbf{L} dönme impuls vektörünün uzunluğunun da

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = \Lambda = J \omega} \quad (\text{V.4.8})$$

olduğu gene (V.4.5) den derhâl görülmektedir.

Hem dönen ve hem de ötelenen bir katı cismin toplam kinetik enerjisi de bellidir ki ötelemeye tekaabül eden kinetik enerji ile dönmeye tekaabül eden kinetik enerjisinin toplamından ibâret olacaktır:

$$T_{\text{top}} = T_{\text{öt}} + T_{\text{dön}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (\text{V.4.9})$$

(V.5) EYLEMSİZLİK MOMENTİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Genel bir dönme hareketinde ω nın doğrultusu genellikle t zamanının fonksiyonudur. Bu da, $\mathbf{n} \parallel \omega$ alınmış olduğu için, (V.4.6) ya göre J eylemsizlik momentinin zamanın fonksiyonu olarak telâkki edilmesini gerektirir. Ancak, eğer katı cisim sâbit bir eksen etrafında dönmeğe zorlanmış bulunuyorsa \mathbf{n} nin yönü de artık sâbit olacağından eylemsizlik momenti de zamandan bağımsız olur.

Ayrıca, eylemsizlik momentinin \mathbf{r} yervektörüne bağlılığı bunun seçilen referans sisteminin orijinine de bağlı olmasını zorunlu kılar. Bununla beraber bir katı cismin bir eksene nisbetle haiz olduğu eylemsizlik momenti, katı cismin kütle merkezinden geçen ve göz önüne alınmış eksene paralel olan eksene nisbetle haiz olacağı eylemsizlik momentine bağlı olarak her zaman ifâde edilebilir.

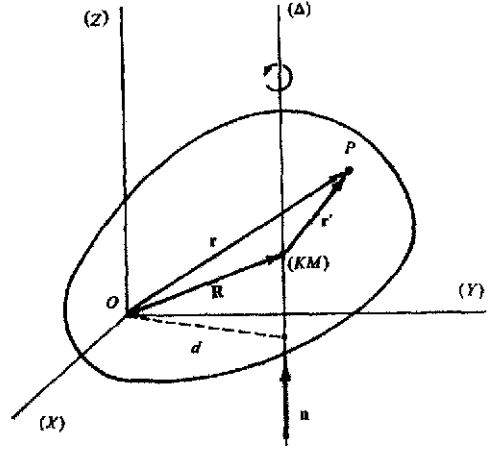
Bunun için Şekil : V.4. den

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \quad (\text{V.5.1})$$

yazılabileceğine ve kezâ (V.4.6) daki integrantta

$$r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = r^2 - [r \cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})]^2 = r^2 \sin^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{n})^2$$

yazılabileceğine ve dolayısıyla da



Şekil : V.4 — STEİNER teoremi: $J_{(Z)} = J_{(d)} + Md^2$.

$$J = \iiint_V \mu(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \mathbf{n})^2 d^3\mathbf{r} \quad (\text{V.5.2})$$

olduğuna dikkati çektikten sonra (V.5.2) ye (V.5.1) i yerleştirelim. Buna göre:

$$\begin{aligned} J_{(Z)} &= \iiint_V \mu(\mathbf{r}') [(\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times \mathbf{n}]^2 d^3\mathbf{r}' = \iiint_V \mu(\mathbf{r}') (\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 d^3\mathbf{r}' + \\ &+ \iiint_V \mu(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \times \mathbf{n})^2 d^3\mathbf{r}' + 2 \iiint_V \mu(\mathbf{r}') (\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{n}) d^3\mathbf{r}' \quad (\text{V.5.3}) \end{aligned}$$

olur. Buradaki son terim, \mathbf{R} ve \mathbf{n} nin \mathbf{r}' ye bağlı olmamaları dolayısıyla

$$2 \iiint_V \mu(\mathbf{r}') (\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{n}) d^3\mathbf{r}' = -2 (\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot \left\{ \mathbf{n} \times \iiint_V \mu(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' \right\}$$

şeklinde yazılır. Hâlbuki buradaki integral özdeş olarak sıfırdır; zirâ eğer kütle merkezinin tanımına döner de bunda (V.5.1) değişken dönüşümü yapacak olursak

$$\mathbf{R} = \frac{\iiint_V \mu(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}}{\iiint_V \mu(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}} = \frac{1}{M} \iiint_V \mu(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' + \mathbf{R}) d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{M} \iiint_V \mu(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' + \mathbf{R}$$

bulunur ki bu son bağıntı

$$\iiint_V \mu(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' \equiv 0$$

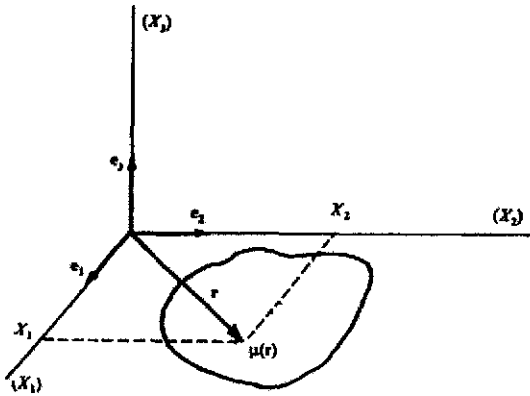
olduğunu göstermektedir. Bu sonuca göre (V.5.3) ifadesi (V.5.2) de göz önünde tutularak

$$\begin{aligned} J_{(Z)} &= \iiint_V \mu(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \times \mathbf{n})^2 d^3\mathbf{r}' + (\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 \iiint_V \mu(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= J_{(\Delta)} + M (\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 \end{aligned} \quad (\text{V.5.4})$$

şekline girer. Buradaki $|\mathbf{R} \times \mathbf{n}|$ in, kütle merkezinden geçen (Δ) ekseninin O dan geçen (Z) eksenine uzaklığından başka bir şey olmadığına da dikkati çekelim. Buna göre $|\mathbf{R} \times \mathbf{n}| = d$ vaz ederek

$$\boxed{J_{(Z)} = J_{(\Delta)} + Md^2} \quad (\text{V.5.5})$$

olur. Bu itibarla: *bir katı cismin verilmiş bir eksene nisbetle eylemsizlik momenti bunun, kütle merkezinden geçen ve berikine paralel olan bir eksene nisbetle eylemsizlik momenti ile, cismin sanki kütle merkezinde yoğunlaşmış bir nokta gibi orijinal eksene nisbetle haiz olacağı eylemsizlik momentinin toplamına eşittir (STEİNER teoremi).*



Şekil : V.5 — Düzlemsel bir kütle dağılımının özelliklerinden biri : $J_{(x_3)} = J_{(x_1)} + J_{(x_2)}$.

Eylemsizlik momentinin hesaplanmasında yararlanılabilecek özelliklerden biri de dik kartezyen bir referans sistemindeki koordinat düzlemlerinden birinde bulunan bir kütle dağılımının söz konusu düzleme dik eksene nisbetle eylemsizlik momentinin, diğer iki eksene nisbetle haiz olduğu eylemsizlik momentlerinin toplamına eşit olduğu keyfiyetidir.

Gerçekten de meselâ Şekil : V.5 deki gibi

$$\mathbf{r} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2$$

ise

$$J_{(X_2)} = \iint_S \mu(r) |\mathbf{r}|^2 dS = \iint_S \mu(X_1, X_2) [X_1^2 + X_2^2] dS = \iint_S \mu(X_1, X_2) X_1^2 dS + \iint_S \mu(X_1, X_2) X_2^2 dS = J_{(X_1)} + J_{(X_2)} \quad (\text{V.5.6})$$

olur.

(V.6) EYLEMSİZLİK TANSÖRÜ

Şimdi tek bir noktası sâbit kalmak sûretiyle bir dönme hareketi yapan bir katı cismin (V.4.3) ile verilmiş olan dönme kinetik enerjisini açık bir şekilde yazalım :

$$\begin{aligned} T_{\text{dön}} &= \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \omega_i \theta_{1i} \\ \sum_{i=1}^3 \omega_i \theta_{2i} \\ \sum_{i=1}^3 \omega_i \theta_{3i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \omega_1 \omega_i \theta_{1i} + \sum_{i=1}^3 \omega_2 \omega_i \theta_{2i} + \sum_{i=1}^3 \omega_3 \omega_i \theta_{3i} \right\}. \end{aligned}$$

Buna göre

$$\boxed{T_{\text{dön}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \theta_{ij} \omega_i \omega_j} \quad (\text{V.6.1})$$

olur. Bu ifâdenin *homogen kuadratik* bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Bu takdirde EULER'in homogen fonksiyonlar hakkındaki teoremine göre

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \omega_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \omega_1 + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \omega_2 + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \omega_3 = 2T \quad (\text{V.6.2})$$

dir. Gerçekten de (V.6.2) bağıntısının geçerli olduğu, (V.6.1) den hareketle (V.6.2) nin sol tarafını teşkil etmek ve bunun $2T$ ye eşit olduğunu görmekte kolayca tesbit edilebilir.

Öte yandan ise (V.4.3) uyarınca

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i L_i = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 = 2T_{\text{dön}} \quad (\text{V.6.3})$$

dir. (V.6.3) ile (V.6.2) nin karşılaştırılmasından derhâl

$$L_i = \frac{\partial T_{\text{dön}}}{\partial \omega_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

veyâ

$$\boxed{\mathbf{L} = \text{grad}_{\omega} T_{\text{dön}}(\omega)} \quad (\text{V.6.4})$$

olduğu görülür.

\mathbf{L} toplam dönme impulsu vektörünün genellikle ω ânî dönme vektörü doğrultusunda bulunamayacağı (V.3.8) matris denkleminde bellidir. Fakat acaba \mathbf{L} nin ω doğrultusunda olduğu özel haller ne gibi özellikleri haizdirler?

Bunları tesbit etmek için, λ bir sâbit olmak üzere, gerçekten de

$$\Theta \omega = \mathbf{L} = \lambda \omega \quad (\text{V.6.5})$$

olduğunu varsayalım. Bu matris denklemi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ cinsinden üç bilinmeyenli üç homogen cebirsel denklemden oluşmuş bir denklem sistemini temsil etmektedir. Bu sistemin $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ besbelli çözümünden farklı çözümleri olabilmesi için, bilindiği gibi, katsayılar determinantının sıfır olması gereklidir:

$$|\Theta - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \theta_{11} - \lambda & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} - \lambda & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{V.6.6})$$

Bu ise λ cinsinden kübik bir cebirsel denklemdir. Bu *karakteristik denklemin* kökleri olan, Θ matrisinin özdeğerleri: J_1, J_2 ve J_3 olsunlar. Bu özdeğerlere tekaabül eden $\omega_{(i)}$, ($i = 1, 2, 3$), özvektörleri, Θ matrisinin bakışımı bir matris olması dolayısıyla, birbirlerine dik bir üçyüzlü oluştururlar. Bu özvektörler aracılığıyla katı cismin her noktasında eylemsizlik tansörünü yalnızca özdeğerlerinden oluşmuş bir köşegeni haiz eşdeğer bir tansöre, yâni

$$\Theta = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (\text{V.6.7})$$

tansörüne indirgenecek şekilde bir *köşegenleştirme dönüşümü* inşa etmek kaabil olmaktadır. Θ nın böyle bir dik üçyüzlüyü belirleyen özvektörlerine *asal eylemsizlik eksenleri* adı verilir. Bu şartlar altında ve (V.6.1) e binâen

$$T_{\text{dön}} = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) \quad (\text{V.6.8})$$

de yazılabilir.

Eğer katı cisim hem dönme ve hem de öteleme hareketi yapıyorsa V ile kütle merkezinin hızını göstermek üzere

$$T = T_{\text{dön}} + \frac{1}{2} M V^2 \quad (\text{V.6.9})$$

olacaktır.

(V.7) KATI CİSMİN HAREKET DENKLEMLERİ (EULER DENKLEMLERİ)

Toplam dönme impulsu ile dönme momenti arasında

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (\text{V.7.1})$$

bağıntısının bulunduğunu bilmekteyiz. Bu bağıntı tanım gereği yalnızca GALİLE referans sistemleri için geçerli olduğundan buradaki zamana göre türev alma işlemi besbellidir ki katı cismin dışında bir referans sistemine izâfe edilmiştir. Zamana göre türev almanın (Σ_s) mutlak referans sistemiyle ona nazaran görel bir hareket yapan bir (Σ_g) referans sistemindeki ifâdelerinin (I.11.6) e göre

$$\mathcal{D}_s . = (\mathcal{D}_g . + \boldsymbol{\omega} \times .) \quad (\text{I.11.6})$$

diferansiyel operatörü aracılığıyla birbirlerine bağlı olduklarını görmüştük. Şimdi bu operatörü \mathbf{L} toplam dönme impulsu vektörüne uygulayalım. Bu takdirde

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_s = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (\text{V.7.2})$$

olur. Bu denklemin bileşenlere ayrışımı sonucu (V.7.1) i de göz önünde tutarak

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} + \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 &= N_1 \\ \frac{dL_2}{dt} + \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 &= N_2 \\ \frac{dL_3}{dt} + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 &= N_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.7.3})$$

bulunur. Fakat eğer esas eylemsizlik eksenleri göz önünde tutulacak olursa

$$\mathbf{L} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \text{ve} \quad \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \lambda \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{V.7.4})$$

olacaktır. λ nın Θ eylemsizlik tansörünün özdeğerleri olan J_1, J_2 ve J_3 değerlerini aldığı düşünülürse (V.7.3) denklem sistemi

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= N_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1) &= N_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= N_3 \end{aligned}} \quad (\text{V.7.5})$$

şekline girer.

Bir noktası sâbit olan katı cismin hareket denklemleri olan bu ifâdelere *EU-LER denklemleri* adı verilir. Burada N_i ($i = 1, 2, 3$) büyüklükleri katı cisme bağlı eksenlere nisbetle alınmış olan dönme momentinin bileşenleridir.

(V.7.5) EULER denklemlerinin uygulanmasına ilginç bir örnek verebilmiş olmak için bir eksene göre bakışlı bir yapı arzeden ve bu eksen üzerinde sâbit bir noktası olan bir katı cismin üzerine hiç bir dış kuvvetin tesir etmediği zamanki dönme hareketini incelemek istiyoruz.

Bunun için cismin bakışım (simetri) eksenini katı cismin esas eylemsizlik eksenlerinden biriyle çakışacak şekilde seçelim. Buna binâen katı cismin diğer iki eylemsizlik momenti, meselâ J_1 ve J_2 , birbirlerine eşit olacak ve (V.7.5) denklemleri de bu hâl için

$$\left. \begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_1 - J_3) &= 0 \\ J_1 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1) &= 0 \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.7.6})$$

şekline indirgenmiş olacaklardır.

Bu denklemlerin sonucundan derhâl

$$\omega_3 = \text{sâbit} = \alpha \quad (\text{V.7.7})$$

olduğu görülür. Buna göre diğerleri de

$$\dot{\omega}_1 + \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \right) \alpha \omega_2 = 0 \quad \text{veyâ} \quad \dot{\omega}_1 = \left(\frac{J_1 - J_3}{J_1} \right) \alpha \omega_2 \quad (\text{V.7.8})$$

$$\dot{\omega}_2 + \left(\frac{J_1 - J_3}{J_1} \right) \alpha \omega_1 = 0 \quad (\text{V.7.9})$$

şekline indirgenmiş olurlar. Şimdi eğer (V.7.9) ifadesi t ye göre bir kere türetilir, ve (V.7.8) de göz önünde bulundurulursa,

$$\ddot{\omega}_2 + \left(\frac{J_1 - J_3}{J_1} \right)^2 \alpha^2 \omega_2 = 0 \quad (\text{V.7.10})$$

şeklinde bir harmonik osilâtör denklemi elde edilir. Öte yandan

$$\frac{|J_1 - J_3|}{2\pi J_1} \alpha = \nu \quad (\text{V.7.11})$$

vazederek (V.7.10) un genel çözümü olarak, A ve B iki sâbit olmak üzere,

$$\omega_2(t) = A \sin 2\pi \nu t + B \cos 2\pi \nu t$$

bulunur.

Zaman ölçeği eğer $t = 0$ için $\omega_2(t) = 0$ olacak şekilde seçilirse bu, $B = 0$ olmasını içerir ve neticede $\omega_2(t)$ için

$$\omega_2(t) = A \sin 2\pi \nu t \quad (\text{V.7.12})$$

bulunur. (V.7.12) aracılığıyla da (V.7.9) dan

$$\omega_1(t) = A \cos 2\pi \nu t \quad (\text{V.7.13})$$

olduğu bulunur. Buna göre, ve (V.7.7), (V.7.12) ve (V.7.13) den, âni dönme vektörünün analitik ifâdesi olarak

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i = (A \cos 2\pi \nu t) \mathbf{e}_1 + (A \sin 2\pi \nu t) \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{e}_3 \quad (\text{V.7.14})$$

bulunur. Bu sonuç $\boldsymbol{\omega}(t)$ âni dönme vektörünün $|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{A^2 + \alpha^2}$ uzunluğunun sâbit kalarak \mathbf{e}_3 birim vektörü, yâni katı cismin bakışım eksenini etrafında (V.7.11) ile belirlenen ν frekansıyla bir salınım yapacağını göstermektedir.

$\boldsymbol{\omega}(t)$ âni dönme vektörünün (V.7.14) ile belirlenen hareketine *presesyon* adı verilir.

Göz önüne alınan katı cismin dönme kinetik enerjisi ile dönme impulsu

$$T_{\text{dön}} = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} (J_1 A^2 + J_3 \alpha^2) \quad (\text{V.7.15})$$

$$\mathbf{L} = J_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + J_3 \omega_3 \mathbf{e}_3$$

veyâ

$$L^2 = J_1^2 A^2 + J_3^2 \alpha^2 \quad (\text{V.7.16})$$

dir. $T_{\text{dön}}$ ile L^2 bilindiğinde (V.7.15) ve (V.7.16) dan A ve α yı tesbit etmek mümkün olur. Böylelikle presesyonun (V.7.11) ile verilmiş olan frekansı da tesbit edilmiş olur. ν frekansının sıfırdan farklı olması $\alpha = \omega_3 \neq 0$ ve $J_1 \neq J_3$ olmasına bağlıdır.

Bu sonuçların pratik bir uygulaması için Arz misâlini göz önüne alalım. Arza tesir eden dış kuvvetlerin N dönme momentleri o kadar küçüktür ki ilk yaklaşıklıkta Arzın dönme hareketinin dış kuvvetlere bağlı olmadığı kabul edilebilir. Öte yandan Arz, kutuplarda hafif bir basıklığı haiz olduğu cihetle $J_1 \neq J_3$ olup $|J_1 - J_3|/J_1 = 0,00328$ olduğu hesaplanmıştır. Kutuplarından geçen eksen etrafında Arzın dönme hızı ise $\omega_3 = \alpha = 2\pi$ radyan/gün olduğundan

$$\nu = \left(\frac{0,00328}{2\pi} \right) \cdot (2\pi) = 0,00328 \text{ radyan/gün}$$

bulunur. Şu hâlde presesyon periyodu olarak da

$$P = \frac{1}{\nu} = 305 \text{ gün}$$

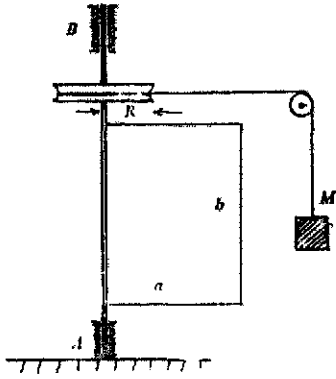
bulunur. Buna göre Arzdaki bir gözlemcinin Arzın dönme ekseninin Kuzey Kutbu etrafında yaklaşık olarak 10 ayda bir kere dolandığını gözlemesi gerekir. Fakat Arzın tamâmen katı bir cisim olmaması ve bir takım esneklik özelliklerine sâhip olması dolayısıyla bu periyot gerçekte 430 gün kadardır.

Arzın ekseninin, herhangi bir dış kuvvetin etkisi altında olmadan ve sırf kutuplardaki basıklığı ile kendi eksenini etrafında dönmesi keyfiyetinin sonucu olarak mârûz kaldığı bu presesyonun Arzın, ekliptiğin normali etrafında yaptığı presesyonla karıştırılmaması gerekir. Gündönümü noktalarının bu *astronomik presesyonu*, aslında, Ayın ve Güneşin Arza etkileyen gravitasyon kuvvetlerinin oluşturdukları dönme momentlerinden ileri gelmektedir. Ancak bu momentler o kadar küçüktürler ki bunların ortaya koydukları astronomik presesyonun periyodu yaklaşık olarak 26000 sene olup bu periyot Arzın ekseninin herhangi bir dış kuvvetin etkisi altında olmadığı varsayımı altında elde edilmiş olan yaklaşık bir yıllık periyoda nisbetle fevkalâde uzun bir periyot olup yapılmış olan varsayımın ilk bir yaklaşıklık sınırları içindeki geçerliliğini doğrulayıcı niteliktedir.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

- V.1. Dolu bir dairesel dik silindirin, eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.
- V.2. Cidarlarının kalınlığı ihmâl edilebilen boş bir dairesel dik silindirin, eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.
- V.3. Dolu, ve, cidarlarının kalınlığı ihmâl edilebilen boş kürenin çaplarına göre eylemsizlik momentlerini hesaplayınız.
- V.4. Bir dikdörtgen levhanın, kütle merkezinden geçen ve kendisine dik olan bir eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.
- V.5. Kütle merkezinden geçen ve kendisine dik olan bir eksene göre ince bir çubuğun haiz olduğu eylemsizlik momentini hesaplayınız.
- V.6. Dik bir dairesel koninin, eksenine göre haiz olduğu eylemsizlik momentini hesaplayınız.
- V.7. Dönel bir silindir üzerine çizilmiş olan bir helis yayının kütle merkezini tespit ediniz.
- V.8. $2\alpha_0$ radyan tepe açıklığı olan dairesel bir kesimin kütle merkezini bulunuz.
- V.9. İlk bir yaklaşıklıkta havanın eşsılı dengede bulunduğu varsayıldığında atmosferde dikey bir hava sütununun kütle merkezini tâyin ediniz.
- V.10. Elips şeklindeki bir levhanın, φ kutup açısı ve elipsin merkezine olan d uzaklığıyla belirlenen bir (D) doğrusuna göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.
- V.11. $O(x, y)$ dik kartezyen koordinat sisteminde öyle bir $y = f(x)$ şeklinde bir eğri bulunuz ki bu eğri ile $x = 0$, $x = x_0$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan alanın kütle merkezi $\xi = \varphi(x_0)$ gibi x_0 in önceden verilmiş bir fonksiyonu olsun. $\varphi(x_0) = 3x/4$ için $y = f(x)$ i bulunuz.
- V.12. Bir (E) uzay eğrisi üzerinde bir P noktası hareket etmekte olup Q da sâbit bir noktadır. Homogen olduğu varsayılan \widehat{QP} yayının kütle merkezinin yervektörü \mathbf{R} olsun. Kütle merkezinin ivmesi P noktasının hızına paralel olması için P nin hareket kaanûnu ne olmalıdır ? Bulunuz.
- V.13. $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ olmak üzere $x = a(\varphi - \sin \varphi)$ ve $y = (1 - \cos \varphi)$ parametrik denklemleriyle belirlenen yayını kavsini homogen varsayarak kütle merkezini tâyin ediniz.
- V.14. Kalınlığı ihmâl edilebilen R yarıçaplı bir disk, merkezinden geçen dikey bir eksen etrafında $\omega_0 = \text{sâbit}$ açısal hızıyla harekete geçirilmektedir. Diskin her yüzey elemanı hızın karesiyle orantılı olarak hava direncine mâruz kalırsa acaba diskin başlangıç açısal hızı ne kadar zaman sonra yarı değerine düşmüş olur?

V.15. Şekil : V.6 da görüldüğü gibi a ve b boyutlarını haiz ince bir levha bir AB eksenine tutturulmuş olup bir M kütlesi aracılığıyla ve AB eksenine tutturulmuş R yarıçaplı bir makara yardımıyla döndürülmektedir. Levhanın her yüzey elemanının o noktadaki hızın karesiyle orantılı bir hava direncine mâruz kalması hâlinde levhanın erişeceği ω_s sınır açısal hızı; bu hızın %1 kadar eksigiine erişmesi için geçen zamanı ve bu zaman zarfında M kütlesinin ne kadar aşağıya inmiş olacağını hesaplayınız.

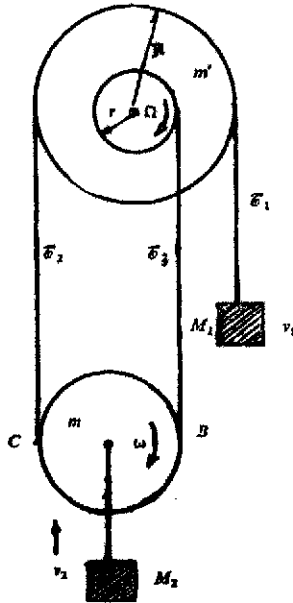


Şekil : V.6.

V.16. R yarıçaplı ve kütlesi çevresine toplanmış M kütleli bir tekerleğin üstüne her bir ucunda ($m_1 > m_2$ olmak üzere) m_1 ve m_2 kütleleri bulunan uzamasız ve kütesiz bir ip sarılı bulunmaktadır. m_1 ve m_2 aynı yükseklikte iken sistem serbest harekete terkedildiğinde ve hareket de hızla orantılı bir direncin doğmasına sebep olan bir ortamda vukuu bulunduğu m_1 kütlesinin t zamanı zarfında ne kadar aşağıya indiğini hesaplayınız.

İpin tekerlek üzerinde kaymadan hareket ettiğini kabul ederek dikey kısımlarındaki gerilim kuvvetlerini hesaplayınız.

V.17. Şekil : 7 deki gibi bir çıkırıktaki M_1 ve M_2 kütlelerinin ivmelerini tâyin ediniz. Ayrıca, tekerleklerin üzerinden geçen iplerin kaymadıklarını ve burulmadıklarını varsayarak da iplerin dikey kısımlarındaki \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 ve \mathcal{T}_3 gerilimlerini hesaplayınız.



Şekil : V.7.

V.18. Sâbit tutulan G kütle merkezinden geçen ve kendi düzlemi içinde bulunan bir (Δ) eksenine etrafında döndürülen bir levhanın n normali ile ω dönme vektörünün oluşturdukları (π) düzleminin levhaya göre bir salınım hareketi yaptığını gösterip salınım periyodunu tesbit ediniz.

V.19. Arzın, kutuplarından geçen eksenine etrafındaki hareketinde, L dönme impuls vektörünün sâbit kaldığını; ω ânî dönme vektörünün, Arz dışından bakıldığında L yi eksen kabul eden bir koni ve Arzdan bakıldığında da bu koninin dışında bir başka koni çizdiğini gösterip her iki koniyi de geometrik olarak belirleyiniz.

V.20. EULER denklemlerinden yararlanarak a ve b boyutlarını haiz ince bir dikdörtgen levhanın köşegenlerinden biri etrafında sâbit ω hızıyla döndürülebilmesi için uygulanması gerekli N açısal momentum vektörü ne olmalıdır?

ÜÇÜNCÜ KISIM

ANALİTİK MEKANİK

VI. BÖLÜM

ANALİTİK MEKANİĞE GİRİŞ

(VI.1) GENELLEŞTİRİLMİŞ KOORDİNATLAR

Bütün güçlerine rağmen, şimdiye kadar görmüş olduğumuz vektörel yöntemler aracılığıyla mekaniğin çözülebilecek problemlerinin sayısı maalesef sınırlıdır. Daha girift mekanik problemlerinin çözümünde vektörel mekaniğin geometrik yöntemlerinin uygulanması çok kere uygun düşmemektedir. Bu tür problemler için geliştirilmiş olan çok genel yöntemler Analitik Mekaniğin temelini teşkil ederler. Analitik Mekanik bütünüyle matematiksel bir bilim olup bunda en genel anlamıyla, *koordinat* kavramı çok merkezî bir rol oynar.

Analitik Mekanik aslında fiziksel olayları uygun matematiksel bağıntılar aracılığıyla bir nevi tercüme etmekten başka bir şey değildir. Ancak, fiziksel olayların böyle bir matematiksel dile aktarılması *koordinatlar* aracılığıyla olur. Koordinatlar fiziksel evrenin noktalarıyla sayılar arasında *bire-bir* bir tekaabüliyet gerçekleştirirler. Bu tekaabüliyeti gerçekleştirdikten sonra, fiziksel anlamlarını veyâ yorumlarını hiç göz önünde tutmaksızın, koordinatlara sâdece cebirsel büyüklüklermiş gözü ile bakıp hesapları yapmak ve elde edilen hesap sonuçlarını genel fiziksel gerçekler uzayına aktararak yorumlamak mümkündür.

Böyle bir programı gerçekleştirmeğe aracı olan koordinatlardan, en genel anlamlarıyla, ne anlaşılması gerektiğini yakından inceleyelim.

Dik bir kartezyen koordinat sisteminde uzaydaki bir P noktasını (x_1, x_2, x_3) diye üç sayı aracılığıyla temsil edebilmekteyiz. Bu üç sayının içerdikleri anlamı yorumlarsak bunlar aslında P noktasının koordinat düzlemlerine uzaklıklarını göstermekte olup her biri *uzunluk boyutunu* haizdir. Buna karşılık aynı P noktasının uzaydaki yerini küresel koordinatlarda (r, θ, φ) sayıları ile de pek âlâ temsil edebiliriz. Bu üç küresel koordinattan yalnızca r nin boyutu bir uzunluk olup diğerleri boyutsuz büyüklüklerdir; ve nasıl ölçülmeleri gerektiği iyice saptanmış olan açılardır. Böylelikle bir noktanın yerini belirlemek üzere kullanılacak

koordinatların çeşitli, ve mâhiyetlerinin dahi farklı olabilmesi olanağı bulunduğu da anlaşılmış olmaktadır.

Analitik Mekanikte belirli bir fiziksel durumu soyut bir matematiksel kalıba dökmeğe aracılık eden koordinatlara, bunların mâhiyetlerini açıkça belirtmeğe gerek görülmez, sâdece sayılar gözüyle bakılır. Bu, Analitik Mekanikğin en belirgin özelliklerinden biridir.

Şimdi hiç bir kinematik şarta bağlı olmayan N adet serbest tânecikten oluşmuş bir mekanik sistem göz önüne alalım. Bunların dik bir kartezyen koordinat sistemindeki koordinatları da

$$(x_i, y_i, z_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

olsun. Eğer noktaların bir kısmı veyâ hepsi hareket hâlinde iseler şüphesiz ki bu koordinatlar t zamanının fonksiyonu olacaklardır.

Çoğu kere, hareket problemini çözmek için böyle bir dik kartezyen koordinat sisteminden işe başlamak hiç de uygun bir yöntem teşkil etmeyebilir. Meselâ Güneşin etrafında dolanan bir gezegenin hareketi problemini çözmek üzere, bu problem için sağladığı büyük kolaylık bakımından, kutupsal koordinat sistemi çok daha uygun bir yöntem teşkil eder. Çünkü kutupsal koordinat sistemi, kendi yapısının gereği olarak haiz olduğu geometrik simetri (bakışım) özellikleri aracılığıyla söz konusu fiziksel problemin haiz olduğu fiziksel simetriyi geometrik olarak en iyi ve en basit matematiksel biçimde yansıtabilecek ve ifade edecek niteliktedir. Buna karşılık, dik bir kartezyen koordinat sisteminin haiz olduğu geometrik simetri özellikleri söz konusu hareket probleminin haiz olduğu fiziksel simetriyi matematiksel bir kalıba dökülebilmek yönünden uygun ve yeterli değildir.

Bu itibarla, verilen bir probleme tekaabül eden koordinatları uygun bir biçimde seçebilmemizin problemin çözümü üzerinde olağanüstü bir etkisi olacaktır. Böylelikle uygun yeni koordinatlar seçip de eski koordinatları bunlar cinsinden ifade edersek karşımıza çıkacak olan yeni problemi eskisine nisbetle çok daha kolay bir şekilde çözebilmemiz de mümkün olabilecektir. Bu ise problemi daha basit bir biçimde ele alabilmek üzere önce uygun bir koordinat dönüşümü yapmanın gerekliliğini telkin etmektedir.

Göz önüne aldığımız mekanik sistemde N adet serbest tânecik bulunduğuna göre, sistemi belirlemek için, şu hâlde, $3N$ adet bağımsız değişken gerekmektedir. Buna göre, söz konusu koordinat dönüşümü

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ y_1 &= f_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ z_1 &= f_3(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ &\vdots \\ z_N &= f_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \end{aligned} \right\} \quad (VI.1.1)$$

şeklinde olacaktır. Buradaki f_1, f_2, \dots, f_{3N} fonksiyonlarını problemin çözümünü kolaylaştırmaları için ne şekilde olmaları gerekirse öyle seçebiliriz. Böylece (x_i, y_i, z_i) koordinatlarını t nin fonksiyonları olarak belirlemek problemi de q_1, q_2, \dots, q_{3N} nin t nin fonksiyonları olarak belirlenmesi problemine dönüşmüş olur. Böylece tanımlanmış olan q_j ($j = 1, 2, \dots, 3N$) koordinatlarına da *genelleştirilmiş koordinatlar* adı verilir.

Genelleştirilmiş koordinatların avantajı, bilhassa, bir takım kinematik şartlara bağlı sistemler göz önüne alındığında ortaya çıkar. Bu gibi şartlar, aslında, koordinatlar arasındaki bir takım matematik bağıntılardan ibârettirler. Meselâ aralarındaki d uzaklığı sâbit kalacak şekilde bir molekül oluşturan iki atom göz önüne alınırsa bu durum, dik kartezyen koordinatlarda,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d^2 \quad (\text{VI.1.2})$$

şartının sağlanmasını zorunlu kılar. Bu şart altında bu iki atomun 6 koordinatını keyfi olarak vermek imkânı yoktur. Bunların 5 tânesine keyfi değerler verildi miydi altıncısı da (VI.1.2) şartıyla kendiliğinden belirlenmiş olur. Fakat esasına bakılırsa (VI.1.2) bağıntısı bütün koordinatlara nisbetle simetrik bir bağıntı olduğundan, bu 6 koordinattan birisini bağımlı değişken olarak almak hiç de uygun değildir. Burada problemin simetrisi bakımından sistemin kütle merkezinin 3 dik kartezyen koordinatı ile bu iki atomlu molekülün eksenini karakterize eden iki açıyı genelleştirilmiş koordinatlar olarak almak çok daha uygun olacaktır. Söz konusu 6 adet $x_1, y_1, z_1, \dots, y_3, z_3$ koordinatını bu yeni 5 parametre cinsinden ifade etmek mümkündür.

Bir başka misâl olarak da pekçok sayıda tânecikten oluşmuş bir katı cismi göz önüne alalım. Fakat sistemi oluşturan tâneciklerin sayısı ne olursa olsun, katı cismin kütle merkezinin haiz olduğu 3 koordinat ile katı cismin kendi kütle merkezine göre durumunu belirleyecek olan 3 açıyı vermekle de katı cismin yeri ve durumu tamâmen belirlenmiş olur. Bu durumda katı cismi oluşturan her bir tâneciğin koordinatlarını da bu 6 parametrenin fonksiyonu olarak belirlemek mümkündür.

Genellikle eğer bir sistem N adet tânecikten oluşmuşsa ve sisteme uygulanan kinematik şartların sayısı da eğer m ise bu sistemin konfigürasyonunu q_1, q_2, \dots, q_n gibi yalnızca

$$n = 3N - m$$

adet bağımsız parametre aracılığıyla belirlemek mümkün olur; ve bu takdirde de bu tâneciklerin dik kartezyen koordinatları da bu q_1, q_2, \dots, q_n genelleştirilmiş koordinatlarının fonksiyonları olarak

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ z_N = f_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{array} \right\} \quad (\text{VI.1.3})$$

şeklinde yazılabilir.

n , verilmiş olan mekanik sistemin karakteristik bir sâbitidir; yâni, başka bir deyimle, n den daha az sayıda parametre aracılığıyla sistemin durumunu eksiksiz bir biçimde belirlemek mümkün olmaz. n adet parametrenin mekanik bir sistemin durumunu tek bir şekilde belirlemenin gerek ve yeter şartı olması keyfiyeti sistemin serbestlik derecesinin n olduğunu ifâde etmekle eşanımlıdır. Bu n adet q_1, q_2, \dots, q_n parametrelerine göz önüne alınan sistemin *genelleştirilmiş koordinatları* adı verilir.

Aşağı yukarı inip çıkan bir piston, sâbit bir eksen etrafında dönen bir katı cisim tek bir serbestlik derecesini haiz olan mekanik sistemlere misâllerdir. Belirli bir yüzey üzerinde hareket eden bir noktanın ancak iki serbestlik derecesi vardır. Üç boyutlu uzayda hareket eden bir maddî nokta veyâ sâbit bir noktası etrafında dönme hareketi yapan bir katı cisim ise serbestlik dereceleri 3 olan sistemlerdir. Aynı bir düzlem içinde bulunan bir çift yıldız sistemi, besbelli, 4 serbestlik derecesini; uzayda, aralarındaki uzaklık sâbit kalmak şartıyla hareket eden iki maddî noktanın oluşturdukları sistem de 5 serbestlik derecesini haizdirler. Üç boyutlu uzayda serbestçe ve hiç bir şarta bağlı olmaksızın hareket eden bir katı cismin serbestlik derecesi de 6 dır.

Söz konusu q_1, q_2, \dots, q_n genelleştirilmiş koordinatları geometrik anlamı haiz olabilirler de, olmayabilirler de! Buna karşılık, (VI.1.3) *dönüşümlerinin sonlu, tek değerli, sürekli, türetilebilen dönüşümler olmaları ve n adet fonksiyonun hiç değilse bir kombinezonunun jakobyeninin özdeş olarak sıfır olması gereklidir*. Bu şartlar sonlu sayıda nokta için gerçekleşmeyebilir; bu gibi tekil (*sengüler*) noktaların göz önüne alınmamaları gereklidir. Meselâ

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

ile verilen dönüşümün, $r = 0$ ve $\theta = 0$ değerleri için jakobyeni sıfırdır. Gerçekten de

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

ifâdesinin $r = \theta = 0$ için sıfır olacağı görülmektedir.

Bir problemin bütün kinematik şartlarını uygun genelleştirilmiş koordinatlar ithâl etmek sûretiyle ortadan kaldırmak her zaman doğru olmaz. Bazen bu ki-

nematik şartların sâdece bir kısmı böylece ortadan kaldırılır ve diğerleri de gene kısıtlayıcı şartlar olarak bırakılır. Bu takdirde göz önüne alınan mekanik sistem matematik olarak (VI.1.3) denklemleri ve bunlara ilâveten de

$$\Phi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{IV.1.4})$$

şeklindeki m adet *bağ şartı* aracılığıyla belirlenir, ve sistemin serbestlik derecesi de tabiidir ki artık

$$n' = n - m$$

olur.

(VI.2) KONFIGÜRASYON UZAYI

Analitik Mekaniğin en önemli kavramlarından biri *konfigürasyon uzayı* kavramıdır. Nasıl ki (x, y, z) gibi üç sayıya üç boyutlu bir uzayın dik kartezyen koordinatlara izâfe edilmiş bir P noktasını tekaabül ettiriyor ve bunun yervektörünü de

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; i, j = 1, 2, 3)$$

ile gösteriyorsak bir mekanik sistemi tamâmen belirlemek için gerekli olan q_1, q_2, \dots, q_n gibi n adet parametreye de n boyutlu bir uzaydaki bir noktanın dik kartezyen eksenlere göre koordinatlarıymış gibi bakabilir ve $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ ile

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VI.2.1})$$

diklik bağıntılarını sağlayan n adet birim taban vektörünü göstermek sûretiyle

$$\mathbf{r} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + \dots + q_n\mathbf{e}_n$$

yervektörünün bu noktayı temsil ettiğini söyleyebiliriz. Gene, nasıl ki

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

denklemleri üç boyutlu uzayda bir noktanın zamana bağlı olarak çizdiği *uzay eğrisinin* parametrik bir gösterilişini oluştururlarsa, aynı şekilde

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_n = q_n(t) \quad (\text{VI.2.2})$$

denklemleri de göz önüne alınan bu n boyutlu uzayda mekanik sistemimizin durumunu temsil eden noktanın üzerinde kaydığı uzay eğrisinin parametrik bir gösterilişini oluştururlar. (VI.2.2) denklemleri, aslında bir dinamik probleminin çözümünden başka bir şey değildir.

Bu anlayışa göre, kaç maddî noktadan oluşmuş olduğuna ve noktaları arasındaki bağların mâhiyetine bakılmaksızın, mekanik bir sistemin *tümünü* çok boyutlu bir uzayın tek bir noktası ile temsil etmek mümkün olmaktadır. İşte bu imkânı sağlayan çok boyutlu uzaya *konfigürasyon uzayı* adı verilir.

Somut bir misâl vermek gerekirse, sayılamıyacak kadar çok maddî noktadan oluşan herhangi bir katı cismin genel hareketini belirlemek için 6 parametre yeterli olduğundan bu mekanik sistem, 6 boyutlu bir kartezyen (dolayısıyla öklitsel) uzayın bir noktası ile temsil edilebilecektir. Katı cismin (VI.2.2) denklemleriyle belirlenen her bir durumuna bu 6 boyutlu konfigürasyon uzayının bir noktası ve, tersine, bu 6 boyutlu konfigürasyon uzayının her noktasına da katı cismin başka bir durumu tekaabül eder.

Mekanik bir sistem verildiğinde, problemin mâhiyetinin gerektirdiği sayıda boyutu haiz soyut bir konfigürasyon uzayının noktaları ile sistemin durumu arasında kurulan bire-bir tekaabüliyet, problemi, geometrik bir dil çerçevesi içinde çok basite indirgemektedir.

(VI.3) BAĞLAR

Şimdi, gene, bir maddî sistemi oluşturan maddî noktalar arasında $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere

$$\Phi_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) = 0 \quad (\text{VI.3.1})$$

şeklinde bir takım bağıntılar bulunduğunu varsayalım. (VI.3.1) ile verilmiş olan bu ifâdeler göz önüne alınmış olan sistemin *yan şartlarını* veyâ *bağ şartlarını* meydana getirirler.

(VI.3.1) in tam diferansiyeli

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} dq_j = 0 \quad (\text{VI.3.2})$$

olur. (VI.3.1) veyâ (VI.3.2) şekliyle ifâde olunabildiklerinde bağ şartlarına *holonom şartlar* ve sisteme de *holonom sistem* adı verilir. t zamanının (VI.3.2) nin ifâdesinde *açıkça* bulunması hâlinde bunlara *holonom-reonom bağ şartları*; t nin bu ifâdelerde *açıkça* bulunmaması hâlinde ise bunlara *holonom-skleronom bağ şartları* adı verilir.

Çoğu kere de bağ şartları

$$A_{i0} dt + \sum_{j=1}^n A_{ij} dq_j = 0 \quad (\text{VI.3.3})$$

şeklinde verilirler ama ne A_{i0} katsayısı ve ne de A_{ij} katsayıları Φ_i gibi bir fonksiyonun kısmî türevlerine indirgenemeyebilirler. Bu takdirde, bir fonksiyonun

tam diferansiyeli gibi ifade olunamayan bu (VI.3.3) bağ şartlarına da *holonom olmayan bağ şartları* adı verilir.

Ayrıca meselâ (VI.3.2) ve (VI.3.3) gibi eşitlik bağıntılarıyla ifade edilen bağlara *çift taraflı bağlar*; buna karşılık, meselâ

$$\boxed{A_{i0} dt + \sum_{j=1}^n A_{ij} dq_j \geq 0} \quad (\text{VI.3.3})$$

gibi bir eşitsizlik ile ifade edilen bağlara da *tek taraflı bağlar* adı verilir. Meselâ, maddî bir nokta eğer bir yüzey üzerinde kalarak hareket ediyorsa bu, holonom bir bağ teşkil eder. Eğer nokta belirli bir yerde (meselâ büyük bir kürenin üzerine bırakılan bir bilyanın yuvarlanarak belirli bir noktada küre yüzeyini terkedip yere düşmesi gibi) yüzeyi terk ediyorsa bu da tek taraflı bir bağ teşkil eder.

Holonom olan ve holonom olmayan bağlar arasındaki fark *sistemin başlangıç şartlarını* göz önüne alarak daha da belirginleştirilebilir. Gerçekten de, holonom bağların bahis konusu olması hâlinde, göz önüne alınmış olan sistemin başlangıç şartları, yâni peşinen verilen

$$t = 0 \text{ için } \begin{cases} q_j = q_j(0) \\ \dot{q}_j = \left(\frac{dq_j}{dt} \right)_0 = \dot{q}_j(0) \end{cases} \quad (\text{VI.3.4})$$

değerleri keyfî olarak seçilemezler. Bu başlangıç şartları bilâkis (VI.3.1) ve (VI.3.2) bağıntıları dolayısıyla

$$\Phi_i(q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0); 0) = 0 \quad (\text{VI.3.5})$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right)_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} \right)_0 \dot{q}_j(0) = 0 \quad (\text{VI.3.6})$$

bağıntılarını gerçeklemek zorundadırlar.

Buna karşılık, holonom olmayan bağlar bahis konusu olduğunda, başlangıç şartları keyfî olarak seçilebilirler; ancak bunlar (VI.3.3) dolayısıyla

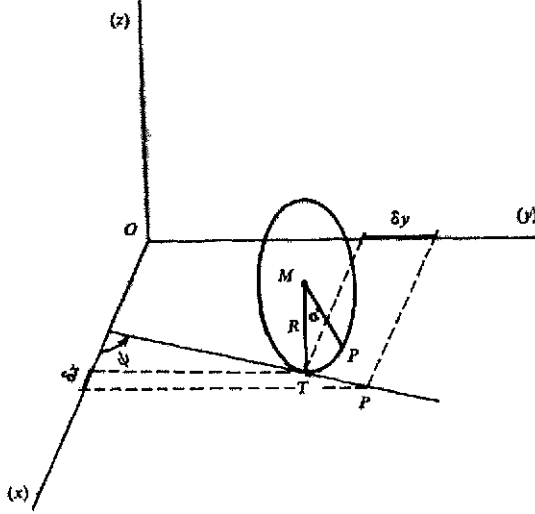
$$A_{i0}(0) + \sum_{j=1}^n A_{ij}(0) \dot{q}_j(0) = 0 \quad (\text{VI.3.7})$$

şartlarını gerçeklemekle yükümlüdürler.

Holonom olmayan bağlara misâl. — Holonom olmayan bağlara somut bir misâl vermek için (x, y) düzlemi üzerinde, ve düzleme dik olarak, kaymadan yu-

varlanan sonsuz ince bir tekerleğin sonsuz küçük yer değiştirmelerini göz önüne alalım (bk. Şekil : VI.1).

Tekerleğin (x, y) düzleminde temas ettiği noktanın koordinatları $T(x, y)$, bu noktadaki teğetin x -ekseniyle yaptığı açı ψ , tekerleğin belirli bir MP yarıçapı ve T temas noktasına tekaabül eden yarıçapı arasındaki açı α olsun. Böylece,



Şekil : VI.1 — Holonom olmayan bağlara bir misâl.

sistemi karakterize eden değişkenlerin sonlu değerleri göz önüne alındığında, sistemin 4 serbestlik derecesini haiz olduğu anlaşılmaktadır. Hâlbuki eğer değişkenlerin sonsuz küçük değerleri göz önüne alınacak olursa, teğet doğrultusu üzerinde teğet noktasının δs sonsuz küçük kayması ile tekerleğin M merkezi etrafında $\delta \alpha$ sonsuz küçük dönmesi dolayısıyla

$$\delta s = R \delta \alpha \quad (\text{VI.3.8})$$

olacağından sistem sâdece 2 serbestlik derecesine sâhip olacaktır; zirâ (VI.3.8) yerine ona eşdeğer olan

$$\begin{aligned} \delta x &= R \delta \alpha \cos \psi \\ \delta y &= R \delta \alpha \sin \psi \end{aligned} \quad (\text{VI.3.9})$$

bağ şartlarını ikaame etmek kaabıldır. Eğer (VI.3.9) bağıntılarının temsil ettikleri bağ şartları

$$\Phi_i(x, y, \alpha, \psi) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{VI.3.10})$$

şeklinde ifâde edilebilselerdi bunların tam diferansiyelleri

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \psi} \delta \psi = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{VI.3.11})$$

şeklinde olacaktır. Eğer göz önüne almış olduğumuz mekanik sistem holonom ise bu takdirde (VI.3.9) bağıntılarının (VI.3.11) denklemleriyle bağdaşmaları, yâni

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} = -R \cos \psi, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} = -R \sin \psi, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \psi} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{VI.3.12})$$

olması gereklidir. Hâlbuki (VI.3.12) denklemlerinden (VI.3.10) şeklinde Φ_1 ve Φ_2 fonksiyonlarını bulmak imkânsızdır; yâni bu sistem integrale edilebilen bir sistem değildir. Bu sonuç ise göz önüne almış olduğumuz sistemin *holonom olmayan* bir sistem olduğunun açık delilidir.

(VI.4) SANAL İŞLER İLKESİ

Mekanik bir sistemin sonsuz küçük *sanal ötelenmesi*, sisteme uygulanmış olan kuvvetler ve bağlarla bağdaşmak şartıyla, sistemi karakterize eden r , yervektörlerindeki sonsuz küçük mümkün δr , değişimlerinin sonucu olarak ortaya çıkan yeni durumdur.

Sisteme uygulanmış bulunan kuvvetlerin de bağların da değişebileceği bir dt aralığı içinde sistemin *gerçekten* de mâruz kalabileceği sonsuz küçük bir ötelenmeye de *gerçek ötelenme* adı verilir.

Göz önüne alınan mekanik sistemin *dengede* bulunduğunu, yâni sistemi teşkil eden her bir nokta üzerine etki yapan K_i^* kuvvetinin sıfır olduğunu farzedelim : $K_i^* = 0$. Bu durumda δr , sanal ötelenmesiyle K_i^* nin skaler çarpımı demek olan

$$dW_i = K_i^* \cdot \delta r,$$

sanal işinin de sıfır olacağı âşikârdır. Sistemin bütün noktaları için toplam işin de, buna dayanarak, sıfır olacağı besbellidir :

$$\boxed{\sum_i K_i^* \cdot \delta r_i = 0.} \quad (\text{VI.4.1})$$

Şimdi her bir noktaya etki yapan K_i^* kuvvetini, bu noktaya uygulanmış olan K , kuvvetiyle bu noktaya etki yapan bağlardan ileri gelen bir k kuvvetinin bileşkesi olarak yazarsak (VI.4.1)

$$\sum_i K_i \cdot \delta r_i + \sum_i k_i \cdot \delta r_i = 0$$

şekline girer. Bundan böyle yalnızca bağ kuvvetlerinin sanal işlerinin sıfır olduğu mekanik sistemleri göz önünde bulunduracağız. Bu keyfiyetin özellikle katı cisim için gerçekten de geçerli olduğunu daha önce görmüştük. Fakat bu, daha bir hayli başka bağ kuvvetleri için de geçerlidir. Meselâ bir yüzeye bağlı olarak hareket eden bir nokta göz önüne aldığımızda noktanın sebep olduğu bağ kuvveti yüzeye dik olan direnç kuvveti olacak; buna karşılık bu bağ ile bağdaşan sonsuz küçük sanal ötelenme ancak yüzeyin teğeti doğrultusunda olacak, ve dolayısıyla da bu sonsuz küçük sanal ötelenme dolayısıyla bağ kuvvetinin yapacağı sanal iş de gene sıfır olmuş olacaktır. Yalnız burada şuna hemen işaret edelim ki eğer işin içine *sürtünme kuvvetleri* girecek olursa artık bu doğru olmaz; zirâ sürtünme noktasal değil, makroskopik bir olaydır.

Bağlardan ileri gelen kuvvetlere *reaksiyon kuvvetleri* (veyâ *direnç kuvvetleri*) diyeceğiz.

Sonuç olarak, bir sistemin denge şartını sisteme uygulanmış olan kuvvetlerin sanal işinin sıfır olmasıyla verildiğini ifâde edebiliriz. Eğer r_i yervektörlerini, konfigürasyon uzayında,

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

şeklinde genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden ifâde edersek

$$\boxed{\sum_i K_i \cdot \delta r_i = \sum_i \sum_j K_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0} \quad (\text{VI.4.2})$$

olur. Bu son ifâde *sanal işler ilkesinin* matematiksel şeklini vermektedir. Ayrıca

$$\boxed{\sum_i K_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = Q_j} \quad (\text{VI.4.3})$$

ifâdesine de *genelleştirilmiş kuvvetin j-ninci bileşeni* denir. (VI.4.2) deki δr_i lerin katsayılarının artık genellikle sıfırdan farklı olduklarına dikkati çekmek gerekir.

ÖRNEK — *a uzunluğundaki M kütleli bir iner-kalkar köprü Şekil: VI.2 deki gibi bir (E) eğrisi üzerinde sürtünmesiz kayan bir m kütleli ağırlıkla dengede tutulmak istenmektedir. Bu denge durumunun sağlanabilmesi için (E) eğrisinin şekli ne olmalıdır?*

* *Denge durumunda m kütleli kütle merkezinin sanal bir ötelenmede (E) eğrisi üzerinde δz_2 kadar aşağıya inmesine karşılık M kütleli köprünün G kütle*

merkezinin δz_1 kadar yükseleceğine dikkati çektikten sonra sisteme etkileyen Mg ve mg ağırlık kuvvetlerinin bu sanal ötelenmelerde yapmış olacakları toplam işin sıfır olacağını yazalım :

$$Mg \delta z_1 - mg \delta z_2 = 0.$$

Bu bağıntıyı integre ederek

$$Mg z_1 - mg z_2 = C = \text{sabit}$$

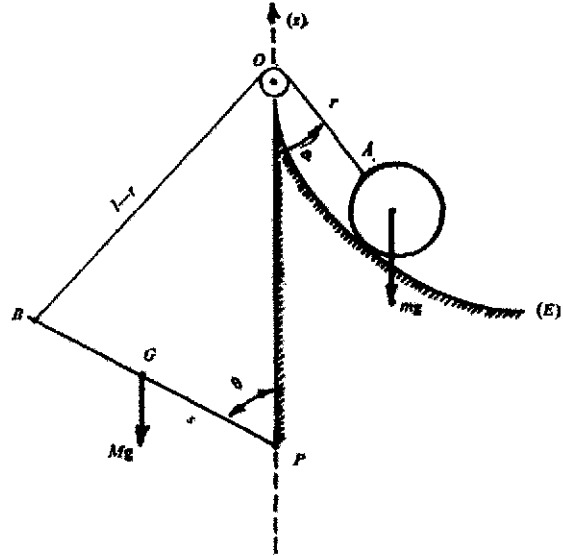
bulunur. Diğer taraftan ise

$$z_2 = r \cos \varphi \quad \text{ve} \quad z_1 = s \cos \theta = s \frac{a^2 + h^2 - (l-r)^2}{2ah}$$

dir. Buna göre

$$Ms \frac{a^2 + h^2 - (l-r)^2}{2ah} - mr \cos \varphi = C$$

olacaktır. Bu bağıntı r ve φ nin bütün değerleri ve dolayısıyla $r = \varphi = 0$ için de



Şekil : VI.2.

$$OP = h, PG = s, PB = a$$

$$OA = r, OB = l - r$$

geçerli olduğundan

$$C = Ms \frac{a^2 + h^2 - l^2}{2ah}$$

bulunur. Bu, diğer bir önceki bağıntıya taşınır ve ayrıca da $2ah/sM = b$ vazeliirse aranılan (E) eğrisinin kutupsal koordinatlardaki denklemi olarak

$$r = 2l - b \cos \varphi$$

ifâdesi bulunmuş olur.

(VI.5) D'ALEMBERT İLKESİ

Mekanik bir sistemin denge durumu söz konusu olduğunda *sanal işler ilkesi*-nin bu gibi problemleri çözmeye yeterli olduğunu görmüş bulunuyoruz. Şimdi ise dinamiğin temel kaanûnunun bir sistemdeki *i*-ninci nokta için

$$\mathbf{K}_i^* = \dot{\mathbf{p}}_i \quad (\text{VI.5.1})$$

den ibâret olduğunu hatırlattıktan sonra bunun

$$\mathbf{K}_i^* - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad (\text{VI.5.2})$$

şeklinde de yazılabileceğine işâret edelim. Bu sonuncu yazılış şekli, sistemdeki noktaların, üzerilerine tesir eden kuvvetlere eşit bir kuvvet ile *eksi işâretli etken bir* $\dot{\mathbf{p}}_i$ *kuvveti* altında dengede bulunacaklarını telkin etmektedir. Böylece bir dinamik problemini, bu görüş açısından, bir denge (bir statik) problemiymiş gibi telâkkî etmek, ve bu hâl için sanal işler ilkesini uygulamak olanağı doğmaktadır. Buna göre ve (VI.4.1) e binâen derhâl

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i^* - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{VI.5.3})$$

yazılır. Burada \mathbf{K}_i ile, gene, uygulanan kuvvetlere ve \mathbf{k}_i ile de gene bağ (ya da reaksiyon) kuvvetlerine işâret edilmiş bulunmaktadır.

Dikkatimizi gene, sâdece, bağlardan doğan reaksiyon kuvvetlerinin sanal işlerinin sıfır olduğu hallere yoğunlaştıracak olursak

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0} \quad (\text{VI.5.4})$$

olur. Bu ifâde de, dinamiğin bir statik (bir denge) problemine indirgenmesini sağlayan *D'ALEMBERT* (Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783) *ilkesini* oluşturmaktadır.

ÖRNEK — M_1 ve M_2 kütleleri uzamayan bir iple bağlı olarak çifte bir eğik düzlem üzerinde sürtünmesiz hareket etmektedir. Sistemin hareketini inceleyiniz (bk. Şekil : VI.3).

* *Sisteme D'ALEMBERT ilkesini uygulayacak olursak*

$$(M_1 \mathbf{g} - M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot \delta \mathbf{r}_1 + (M_2 \mathbf{g} - M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2) \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0$$

olur. Bu ifâde, $\delta \mathbf{r}_1$ ve $\delta \mathbf{r}_2$ nin bağlara uygun sanal ötelenmeler oldukları da göz önünde tutulursa,

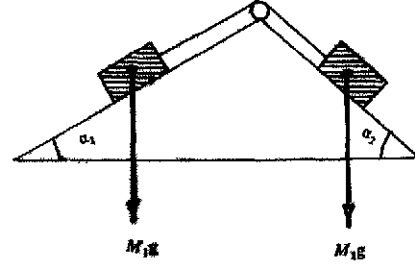
$$(M_1 g \sin \alpha_1 - M_1 \ddot{r}_1) \cdot \delta r_1 + (M_2 g \sin \alpha_2 - M_2 \ddot{r}_2) \cdot \delta r_2 = 0 \quad (\text{VI.5.5})$$

şeklinde de yazılabilir. İpin uzamaz olması hasebiyle $r_1 + r_2 = \text{sâbit}$ olduğundan

$$\delta r_1 + \delta r_2 = 0 \quad \text{ve} \quad \ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = 0$$

veyâ

$$\delta r_2 = -\delta r_1 \quad \text{ve} \quad \ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1$$



Şekil : VI.3. Çifte eğik düzlem üzerinde sürtünmesiz kayan iki kütleli hareketi hakkında.

dir. Buna göre (VI.5.5) i $\delta r_1 \neq 0$ ile bölerek

$$M_1 g \sin \alpha_1 - M_1 \ddot{r}_1 - M_2 g \sin \alpha_2 - M_2 \ddot{r}_1 = 0$$

veyâhut da

$$\ddot{r}_1 = \frac{1}{(M_1 + M_2)} (M_1 g \sin \alpha_1 - M_2 g \sin \alpha_2)$$

bulunur. Bu sonuçlara göre M_1 kütleli

$$M_1 g \sin \alpha_1 > M_2 g \sin \alpha_2$$

veyâ

$$M_1 g \sin \alpha_1 < M_2 g \sin \alpha_2$$

olmasına göre sâbit bir ivmeyle eğik düzlemde, sırasıyla, aşağıya veyâ yukarıya doğru hareket edeceği; ve M_2 kütleli de aynı şartlarda, sırasıyla, yukarıya veyâ aşağıya doğru hareket edeceği anlaşılmaktadır.

(VI.6) LAGRANGE DENKLEMLERİ

Şimdi, tekrar, (VI.5.4) ifâdesine dönelim :

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (\text{VI.5.4})$$

Eğer \mathbf{r}_i yi genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden ifâde edersek

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \quad (\text{VI.6.1})$$

ve buradan da $\delta \mathbf{r}_i$ yi q_j ler cinsinden

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

şeklinde ifade eder de (VI.5.4) ün birinci terimini bunların ışığında tekrar yazarsak

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (\text{VI.6.2})$$

yazılabilir. (VI.4.3) bağıntıları dolayısıyla Q_j büyüklüklerine *genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri* denildiğini biliyoruz. (VI.5.4) deki ikinci terim ise

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (\text{VI.6.3})$$

yazılabilir. Şimdi bu ifadenin sağındaki parantezi daha açık olarak hesaplayalım:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \quad (\text{VI.6.4})$$

yazılabilir. Diğer taraftan (VI.6.1) den hareketle de

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (\text{VI.6.5})$$

ve kezâ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \end{aligned} \quad (\text{VI.6.6})$$

yazılabilir. Kezâ eğer (VI.6.5) den hareketle $\partial \mathbf{v}_i / \partial q_j$ teşkil edilirse (VI.6.6) da göz önünde tutularak

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (\text{VI.6.7})$$

olduğu görülür. Öte yandan gene (VI.6.5) den

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (\text{VI.6.8})$$

olduğu sonucu çıkmaktadır.

Şimdi (VI.6.7) ve (VI.6.8) i (VI.6.4) ifâdesine yerleştirirsek

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\} \quad (\text{VI.6.9})$$

olur ve buna göre de (VI.6.3) ifâdesi

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j \quad (\text{VI.6.10})$$

şekline girer. Hâlbuki

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = T \quad (\text{VI.6.11})$$

dir ; yâni bu, N adet maddî noktadan oluşan sistemin toplam kinetik enerjisi-
dir. Bu itibarla (VI.5.4) D'ALEMBERT ilkesi (VI.6.2), (VI.6.10) ve (VI.6.11) ba-
ğıntılarının ışığı altında

$$\sum_{j=1}^n \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (\text{VI.6.12})$$

şekline girer. Göz önüne almış olduğumuz sistemin holonom olduğunu kabul etmiş
olduğumuza göre q_j genelleştirilmiş koordinatları birbirlerinden bağımsızdırlar;
ve dolayısıyla δq_j sanal ötelenmeleri de birbirlerinden bağımsız olurlar. Bu
şartlar altında (VI.6.12) nin gerçekleşebilmesi için bunun katsayılarının özdeş
olarak sıfır olmaları, yâni

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \quad (\text{VI.6.13})$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

olması gereklidir.

Eğer göz önüne alınan sistem korunumlu bir sistem ise bu takdirde sisteme
uygulanan kuvvetler skaler bir U potansiyelinden türetilbilirler, ve:

$$\mathbf{K}_i = -\text{grad}_i U = -\nabla_i U$$

olur. Buradaki *nabla* operatöründeki *i* indisi bu diferansiyel operatörün sâdece *i*-ninci noktanın koordinatlarını etkileyeceğine işâret etmektedir. *U* fonksiyonuna sistemin potansiyel enerjisi denildiğini önceden görmüştük.

Bu şartlar altında, genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri için

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N (\nabla_i U) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

yazılabilir. Hâlbuki bu son ifâdenin sağ yanı tıpatıp

$$- U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

nin q_j ye göre kısmî türevinden başka bir şey değildir. Şu hâlde

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (\text{VI.6.14})$$

olur. Buna göre ve *U* nun yalnızca koordinatların fonksiyonu olup genelleştirilmiş \dot{q}_k hızlarından bağımsız olduğu da göz önünde tutularak,

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) = T - U \quad (\text{VI.6.15})$$

vazetmek sûretiyle (VI.6.13) denklemleri

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad (\text{VI.6.16})$$

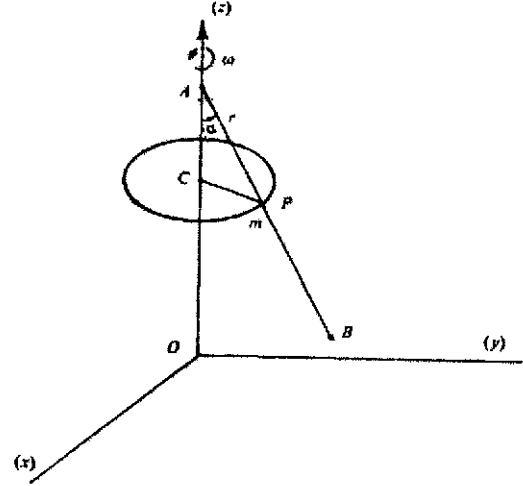
($j = 1, 2, \dots, n$)

şekline girer. (VI.6.15) ile tanımlanan *L* büyüklüğüne bunu ilk tanımlayan Fransız matematikçisi Josephe Louis de LAGRANGE'ın (1736-1813) adına izâfeten *LAGRANGE fonksiyonu* ve (VI.6.16) denklemlerine de *ikinci cins LAGRANGE denklemleri* adı verilir.

LAGRANGE denklemleri aracılığıyla bir mekanik probleminin nasıl çözülebileceğini göstermek için iki örnek veriyoruz :

1. ÖRNEK — Şekil : VI.4 deki gibi $AB = l$ uzunluğundaki bir tel *A* da *Oz* eksenine tesbit edilmiş olup *Oz* etrafında sâbit bir ω açısal hızıyla dönmektedir. *m* kütleli bir *P* boncuğu da *AB* üzerinde sürtünmesiz kayabilmektedir. $t = 0$ için boncuğun *A* da bulunduğunu ve o anda hiç hızı olmadığını varsayarak, boncuğun hareket kaanûnunu tesis ediniz.

* Boncuğun sâbit A noktasına t ânındaki uzaklığı r , ve A nın da yere olan yüksekliği h olsun. Bu takdirde P boncuğunun dik kartezyen koordinatları



Şekil : VI.4. $OA = h$, $AB = l$,
 $AP = r$, $CP = r \sin \alpha$.

$$x = r \sin \alpha \cos \omega t$$

$$y = r \sin \alpha \sin \omega t$$

$$z = h - r \cos \alpha$$

olurlar. Burada basitliği korumak için $t = 0$ da AB telinin (x, z) düzleminde olduğu kabul edilmiş bulunmaktadır.

Boncuğun kinetik enerjisi

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m \{ (\dot{r} \sin \alpha \cos \omega t - \omega r \sin \alpha \sin \omega t)^2 + \\ &\quad + (\dot{r} \sin \alpha \sin \omega t + \omega r \sin \alpha \cos \omega t)^2 + (-\dot{r} \cos \alpha)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

dır. Boncuğun potansiyel enerjisine gelince; (x, y) düzlemini referans düzlemi, yâni potansiyel enerjinin sıfır olduğu düzlem olarak seçersek

$$U = mgz = mg(h - r \cos \alpha)$$

olur. Buna göre sistemin LAGRANGE fonksiyonu da

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha) - mg(h - r \cos \alpha)$$

olur. Problemin tek bir serbestlik derecesini haiz olduğu görülmektedir. Buna göre

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha$$

ve LAGRANGE denklemi de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

veyâ

$$m\ddot{r} - (m\omega^2 r \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha) = 0$$

yâni

$$\boxed{\ddot{r} - (\omega^2 \sin^2 \alpha) r = g \cos \alpha}$$

bulunur. Bu, 2. dereceden sağ yanlı âdi bir diferansiyel denklemdir. Buna tekaabül eden sağ yansız denklemin genel çözümü, C_1 ve C_2 iki integrasyon parametresi olmak üzere

$$C_1 e^{(\omega \sin \alpha) t} + C_2 e^{-(\omega \sin \alpha) t}$$

dir. Sağ yanlı denklemin özel bir çözümünün de

$$-\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

olduğu kolaylıkla tahkik olunur. Buna göre denklemin genel çözümü

$$r = r(t) = C_1 e^{(\omega \sin \alpha) t} + C_2 e^{-(\omega \sin \alpha) t} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

olur. Başlangıç şartlarından

$$r(0) = 0 \rightarrow 0 = C_1 + C_2 - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\dot{r}(0) = 0 \rightarrow 0 = C_1 - C_2$$

ve dolayısıyla

$$C_1 = C_2 = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

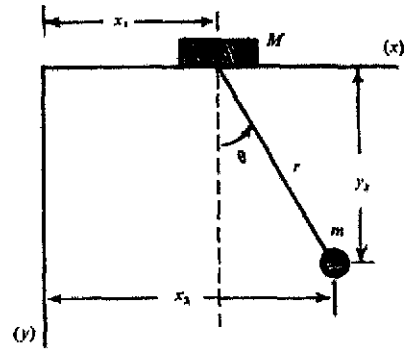
bulunur. Bu sonuçlara göre boncuğun hareket kaanûnunun

$$\boxed{r = r(t) = \frac{2g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \left[\cosh(\omega \sin \alpha) t - \frac{1}{2} \right]}$$

şeklinde olduğu anlaşılmış olur.

2. ÖRNEK : — *Sâbit, r uzunluğundaki bir çubuğun ucundaki bir m kütlesi bir sarkaç gibi salınırken çubuğun diğer ucuna bağlı bir M kütlesi de yatay bir eksen üzerinde sürtünmesiz kayabilmektedir. Hareketin yalnızca (x, y) düzleminde vukuu bulunduğunu kabul ederek ve $t = 0$ için $x_1 = x_0, \dot{x}_1 = \dot{x}_0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ başlangıç şartları altında küçük salınımlar için hareket denklemlerini tesis ediniz (bk. Şekil : VI.5).*

* *Problemin 2 serbestlik derecesine sâhip olduğu açıktır. Buna göre sistemin durumunu belirlemek üzere, meselâ, yalnızca x_1 ve θ bağımsız değişkenlerini almak*



Şekil : VI.5. Yatay eksen üzerinde sürtünmesiz kayabilen M kütlesine bağlı m kütleli sarkacın küçük salınımlarının incelenmesi hakkında

yetecektir. Fakat Şekil: VI.5 deki dik kartezyen koordinatlar cinsinden T kinetik enerjisini hesaplamak daha kolay olduğundan T yi önce x_1, x_2, y_2 cinsinden hesaplayacak ve sonra da

$$x_2 = x_1 + r \sin \theta \quad \text{ve} \quad y_2 = r \cos \theta$$

olduğunu göz önünde tutarak kinetik enerjii $T = T(x_1, \theta)$ cinsinden ifâde edeceğiz:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + 2r \dot{x}_1 \dot{\theta} \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2)$$

olur. Bundan başka sistemin haiz olduğu potansiyel enerjinin yalnızca m kütesinden ileri geldiği ve bunun

$$U = -mgy_2 = -mg r \cos \theta$$

ile verileceği bellidir. Buna göre sistemin LAGRANGE fonksiyonu

$$L = T - U = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + 2r \dot{x}_1 \dot{\theta} \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$$

dur. Şu hâlde sistemin hareket denklemleri de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow (m + M) \ddot{x}_1 + mr \ddot{\theta} \cos \theta - mr \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow r \ddot{x}_1 \cos \theta + r^2 \ddot{\theta} + gr \sin \theta = 0$$

olurlar. Hareketin küçük salınımlar için denklemleri sorulduğundan $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$ alınabilir. Buna göre çözümlenmesi gerekli denklemler

$$(m + M) \ddot{x}_1 + mr \ddot{\theta} = 0$$

$$r \ddot{x}_1 + r^2 \ddot{\theta} = -gr \theta$$

olurlar. Bu denklemler kolaylıkla integre edilebilirler. Neticede ve C_1 , C_2 , A ve δ ile dört integrasyon parametresini göstererek

$$x_1 + \frac{mr \theta}{m + M} = C_1 t + C_2, \quad \theta = A \sin(\omega t + \delta)$$

bulunur. Burada

$$\omega = \sqrt{\frac{m + M}{rM} g}$$

vazedilmiştir. Başlangıç şartları da göz önünde tutulursa integrasyon parametrelerinin değerleri için de

$$C_1 = \dot{x}_0 + \frac{mr}{m + M} \dot{\theta}_0, \quad C_2 = x_0 + \frac{mr}{m + M} \theta_0, \quad A = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2}},$$

$$\delta = \arctg \frac{\theta_0 \omega}{\dot{\theta}_0}$$

bulunur.

(VI.7) HOLONOM OLMAYAN HALLER; LAGRANGE ÇARPANLARI YÖNTEMİ

(VI.6.13) ve dolayısıyla (VI.6.16) LAGRANGE hareket denklemlerini tesis ederken göz önüne alınan sistemin holonom yâni q_j genelleştirilmiş koordinatlarının birbirlerinden bağımsız olduklarını varsaymıştık. Şimdi holonom olmayan yan şartların varlığı hâlinde LAGRANGE denklemlerinin nasıl yazılabileceklerini göstermek istiyoruz.

Şimdi

$$A_0 dt + \sum_{j=1}^n A_j dq_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (\text{VI.7.1})$$

ile m adet holonom olmayan, yâni katsayıları bir fonksiyonun kısmî türevleri şeklinde ifâde edilemeyen şartları gösterelim. Buna göre artık q_j ler birbirlerinden bağımsız olmadıklarından

$$\sum_{j=1}^n \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (\text{VI.6.12})$$

ifâdesinden köşeli parantezlerin içlerinin özdeş olarak sıfır olmaları gerektiğini, yâni

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{VI.6.13})$$

olacağını söyleyemeyiz.

Öte yandan âni sanal ötelenmeler söz konusu olduğunda ($dt = 0$), (VI.7.1) bağ şartlarından δq_j sanal ötelenmelerinin bu bağ şartlarına uygun olarak

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0 \quad (\text{VI.7.2})$$

bağıntılarını gerçeklemeleri gerektiği açıktır.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ile m adet *şimdilik* belirsiz çarpanları göstermek üzere, (VI.7.2) dolayısıyla

$$\lambda_i \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0$$

bağıntılarının da geçerli olacakları besbellidir. Buradan, kezâ

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \delta q_j = 0 \quad (\text{VI.7.3})$$

olacaktır. (VI.6.12) ile (VI.7.3) den de

$$\sum_{j=1}^n \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0 \quad (\text{VI.7.4})$$

yazılabilir. Şimdi (VI.7.2) bağıntıları dolayısıyla (VI.7.4) ifâdesindeki δq_j sanal ötelenmelerinden m tânesini, meselâ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$ yi diğerlerinin yâni $\delta q_{m+1}, \delta q_{m+2}, \dots, \delta q_n$ nin fonksiyonu olarak belirleyebiliriz; ve böylece de $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$ sanal ötelenmelerine bağımlı ve $\delta q_{m+1}, \delta q_{m+2}, \dots, \delta q_n$ sanal ötelenmelerine de bağımsız gözüyle bakmak mümkün olur.

(VI. 7.4) ifâdesindeki bağımlı $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$ sanal ötelenmelerinin katsayılarının ifâdelerindeki λ_i keyfî çarpanlarını o türlü seçelim ki bu katsayılar sıfır olsunlar :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \\ (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.7.5})$$

Buna binâen (VI.7.4) ifâdesinde geri kalan terimlerdeki $j = m + 1, m + 2, \dots, n$ olmak üzere bütün δq_j ler artık bağımsız sanal ötelenmeler olduklarından, geriye kalan

$$\sum_{j=m+1}^n \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0$$

ifâdesinin gerçekleşmesi için δq_j lerin katsayılarının özdeş olarak sıfır olmaları gerekir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \\ j = m + 1, m + 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.7.6})$$

Ayrıca eğer Q_j ler bir U potansiyel fonksiyonundan türetilabiliyorlarsa, (VI.7.5) ile (VI.7.6) yı birlikte göz önünde tutarak

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \\ (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}} \quad (\text{VI.7.7})$$

bulunur.

(VI.7.7) denklemlerine *holonom olmayan sistemler için LAGRANGE denklemleri* adı verilir.

Yalnız burada dikkat edilecek bir husus vardır. Problem, artık, n adet q_j koordinatı ve m adet de λ_i çarpanı ihtivâ ettiğiinden $n + m$ bilinmeyi haiz bulunmaktadır. Hâlbuki (VI.7.7) bunlardan ancak n tânesini belirlemeye yetecektir. Diğer m tânesini belirleyebilmek için de ihtiyacımız olan m adet denklem (VI.7.1) bağ şartlarından hareketle elde edilecek olan

$$A_{i0} + \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j = 0 \quad (VI.7.8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

diferansiyel denklemleri olacaktır.

Eğer holonom bağ şartları göz önüne alırsak bunları evvelce görmüş olduğumuz gibi (VI.3.1) şeklinde ifade edebileceğimizden bu şartları (VI.3.2) deki gibi

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} dq_j = 0 \quad (VI.3.2)$$

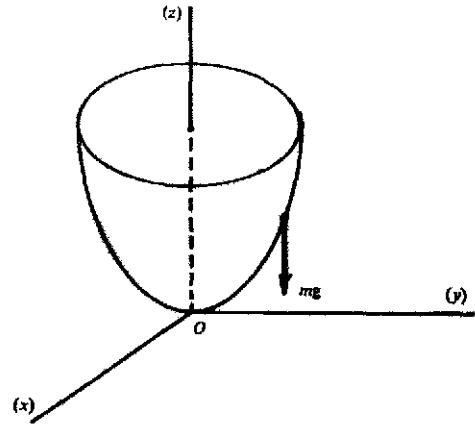
şeklinde de ifade edebiliriz. Bu ise

$$A_{i0} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad \text{ve} \quad A_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}$$

olmak şartıyla (VI.7.1) ile özdeş olur. Bu durum, bu alt-bölümde açıklamış olduğumuz LAGRANGE çarpanları yönteminin holonom bağ şartları için dahi uygulanabileceğini göstermektedir. LAGRANGE çarpanları yöntemi: 1) eğer bütün q değişkenlerini bağımsız koordinatlara indirmek uygun değilse, veyâ 2) eğer bağ kuvvetlerini elde etmek istiyorsak holonom sistemler için de uygulanır. (VI.7.7) denklemlerine *birinci cins LAGRANGE denklemleri* de denir.

LAGRANGE çarpanları yöntemini iki örnekle aydınlatmak istiyoruz:

1. ÖRNEK : — m kütleli bir tanecek ağırlığının etkisi altında sürtünmesiz



Şekil : VI.6. Kendi ağırlığının etkisiyle $x^2 + y^2 = az$ paraboloidinin iç yüzeyinde sürtünmesiz hareket eden m kütleli maddi nokta hakkında.

olarak $x^2 + y^2 = az$ paraboloidinin iç yüzeyinde hareket etmektedir. Taneceğin hareket denklemlerini tesis ediniz.

* Tâneciğin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

ve potansiyel enerjisi de

$$U = mgz$$

olduğuna göre LAGRANGE fonksiyonu

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

olur. Öte yandan $x^2 + y^2 = \rho^2$ olduğundan tek bağ şartı

$$\rho^2 - az = 0,$$

ya da

$$2\rho \delta\rho - a \delta z = 0$$

olur. Eğer $q_1 = \rho$, $q_2 = \theta$ ve $q_3 = z$ vazederseniz (VI.7.2) ye göre

$$A_1 = 2\rho, A_2 = 0, A_3 = -a$$

olduğu görülür. Buna göre LAGRANGE denklemleri de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda_1 A_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

yâni

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 2\lambda_1 \rho \quad \rightarrow \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = 2\lambda_1 \rho$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = -\lambda_1 a \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 a$$

olur. Bu üç denklemler birlikte

$$2\rho\dot{\rho} - a\dot{z} = 0$$

bağ şartı denklemleri ρ , θ , z ve λ_1 i belirlemeğe yeterlidirler.

2. ÖRNEK : — Şekil : VI.7. de gösterildiği gibi bir çift sarkaç sistemi (x, y)

düşey düzleminde salınım terkedilmektedir. Sistemin, küçük salınımlar için hareket denklemlerini tesis ediniz.

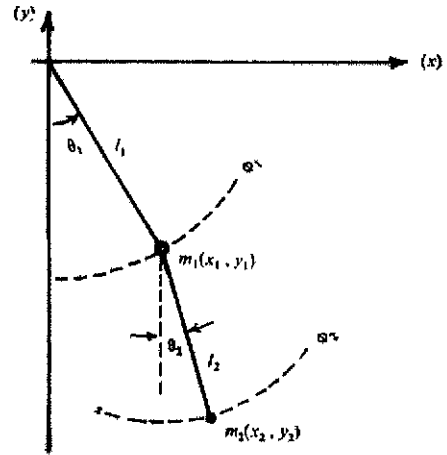
* Genelleştirilmiş koordinatlar olarak

$$x_1 = q_1, y_1 = q_2, x_2 = q_3, y_2 = q_4$$

alalım. Problemin bağ şartları ise

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2 - l_1^2) = 0$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} [(q_3 - q_1)^2 + (q_4 - q_2)^2 - l_2^2] = 0$$



Şekil : VI.7. Çifte sarkaç sisteminin küçük salınımlarının incelenmesi hakkında.

olur; ya da bunlar diferansiyel biçimde ifade edilirse

$$\sum_{j=1}^4 A_{1j} \delta q_j = q_1 \delta q_1 + q_2 \delta q_2 = 0$$

$$\sum_{j=1}^4 A_{2j} \delta q_j = (q_1 - q_3) \delta q_1 + (q_2 - q_4) \delta q_2 + (q_3 - q_1) \delta q_3 + (q_4 - q_2) \delta q_4 = 0$$

olur. Diğer taraftan LAGRANGE fonksiyonu da

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) - m_1 g q_2 - m_2 g q_4$$

dür. Buna göre

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21} \rightarrow m_1 \ddot{q}_1 = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 (q_1 - q_3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \lambda_1 A_{12} + \lambda_2 A_{22} \rightarrow m_1 \ddot{q}_2 = \lambda_1 q_2 + \lambda_2 (q_2 - q_3) - m_1 g$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = \lambda_1 A_{13} + \lambda_2 A_{23} \quad \rightarrow \quad m_2 \ddot{q}_3 = -\lambda_2 (q_1 - q_3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_4} = \lambda_1 A_{14} + \lambda_2 A_{24} \quad \rightarrow \quad m_2 \ddot{q}_4 = -\lambda_2 (q_2 - q_4) - m_2 g$$

Bu dört denklem ve iki bağ şartı aracılığıyla $q_1, q_2, q_3, q_4, \lambda_1$ ve λ_2 yi tesbit etmek mümkündür. Fakat aslında sistem sâdece iki serbestlik derecesine sâhip olduğundan bu çözüm çok ayrıntılı bir çözüm manzarası arz etmektedir.

En kolayı, elde ettiğimiz hareket denklemlerinin birincisi ile üçüncüsünü göz önüne alarak λ_2 çarpanını elemek; sonra da ikincisi ile dördüncüsü arasında aynı çarpanı elemektir. Bu sûretle elde edilen bağıntılar λ_1 e göre kolaylıkla çözümlenirler. Bu her iki son ifâde λ_1 e eşit olduklarından birbirlerine de eşit olurlar ve $M = m_2/m_1$ vazederek de nihâyet

$$q_2 (\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_3) = q_1 [\ddot{q}_2 + g + M(\ddot{q}_4 + g)] \quad (\text{VI.7.9})$$

bulunur. Hareket denklemlerinin son ikisinden λ_2 ayrı ayrı kolaylıkla hesaplanabilir. Bu iki ifâdenin eşitliğinden de

$$\ddot{q}_3 (q_4 - q_2) = (\ddot{q}_4 + g) (q_3 - q_1) \quad (\text{VI.7.10})$$

bulunur. Kutupsal koordinatlar cinsinden

$$\left. \begin{aligned} q_2 = y_1 = -r_1 \cos \theta_1, \quad q_1 = x_1 = r_1 \sin \theta_1 \\ q_4 - q_2 = y_2 - y_1 = -r_2 \cos \theta_2, \quad q_3 - q_1 = x_2 - x_1 = r_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.7.11})$$

dir. Buna göre bağ şartları da sâdece

$$\Phi_1 \equiv r_1 - l_1 = 0, \quad \Phi_2 \equiv r_2 - l_2 = 0$$

olurlar. Şimdi gerek θ_1 in gerekse θ_2 nin zamanın fonksiyonu olarak nasıl değiştiklerini tesbit etmek üzere elimizde (VI.7.9-11) denklemleri bulunmaktadır. r_1 ve r_2 ler sâbit olmak üzere (VI.7.11) den türev alınırsa

$$\dot{y}_1 = (l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1, \quad \ddot{y}_1 = l_1 (\cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1) \text{ ilh...}$$

hesaplanıp bunlar (VI.7.9) ve (VI.7.10) ifâdelerine vazedilerek uzunca fakat basit hesaplardan sonra, nihâyet,

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \left[\cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 \right] &= 0 \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 + l_2 \left[\cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 \right] &= 0 \end{aligned}}$$

hareket denklemleri bulunur. Çifte sarkaç sisteminin küçük salınımları göz önünde tutulduğunda bu denklemleri lineerleştirmek mümkün olur. Gerçekten de θ_1 ve θ_2

nin küçük değerleri için $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ ve $\dot{\theta}^2 \approx 0$ yazılabileceğinden bu denklemler

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + g\theta_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \ddot{\theta}_2 = 0$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + g\theta_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 = 0$$

şekline indirgenebilirler ve artık bunları

$$\theta_1 = \alpha_1 e^{i\omega t} \quad \text{ve} \quad \theta_2 = \alpha_2 e^{i\omega t}$$

vazederek çözmek de kolay olur. ■

Şimdi LAGRANGE çarpanlarının neye delâlet edebileceklerini araştıralım. Bunun için (VI.7.7) ifâdesine dönecek olursak bunun

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \quad (\text{VI.7.6})$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

şeklinde de yazılabileceği (VI.7.5) ve (VI.7.6) dan bellidir. Buradaki Q_j lere genişletilmiş kuvvet bileşenleri denilmekte olduğunu görmüştük. Q_j lere eklenen $(\lambda_1 A_{1j} + \dots + \lambda_m A_{mj})$ ifâdesinin de bir kuvvetin boyutlarını haiz olacağı apaçıktır. Bu ise, bu ifâdenin bağların sistemde oluşturduğu kuvvetleri temsil ettiğini telkin etmektedir. Buna göre bir problemde LAGRANGE çarpanlarını tâyin ettiğimizde, açıkça ifâdelerini bulmaya gerek kalmaksızın, bağ kuvvetlerini de hesaba katmış oluruz.

(VI.8) LAGRANGE FONKSİYONUNUN ÖNEMLİ BİR İNVARİYANS ÖZELLİĞİ

Şimdi

$$\Lambda_j \cdot = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \cdot}{\partial q_j} \quad (\text{VI.8.1})$$

diferansiyel operatörünü tanımlıyalım. Bu tanıma göre ve

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$$

de verilen bir mekanik sistemin LAGRANGE fonksiyonu olmak üzere, sistemin hareket denklemleri olan 2. cins LAGRANGE hareket denklemleri, kısaca,

$$\Lambda_j L = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VI.8.2})$$

şeklinde yazılabileceklerdir.

Şimdi, yalnızca genelleştirilmiş koordinatlar ile zamanın sürekli keyfî bir fonksiyonu olduğunu varsaydığımız

$$\Omega = \Omega(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \quad (\text{VI.8.3})$$

ifâdesini göz önüne alalım. Ω nın t ye göre tam türevi

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial\Omega}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (\text{VI.8.4})$$

dır. Bu ifâdeyi bir kere q_j ye göre türetirsek

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) = \frac{\partial^2\Omega}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\Omega}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \quad (\text{VI.8.5})$$

olur.

Öte yandan, Ω nın \dot{q}_j lere bağlı olmadığını da göz önünde tutarak (VI.8.4) den

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_j} \quad (\text{VI.8.6})$$

bulunur. Bu son ifâdenin de zamana göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) \right] = \frac{\partial^2\Omega}{\partial t \partial q_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\Omega}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \quad (\text{VI.8.7})$$

olur. Şu hâlde (VI.8.5) ve (VI.8.7) ye göre, ve (VI.8.1) i de göz önüne alarak

$$\Lambda_j \left(\frac{d\Omega(q_1, \dots, q_n; t)}{dt} \right) \equiv 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VI.8.8})$$

olduğu bulunur. Yâni q_j genelleştirilmiş koordinatlarıyla t zamanının keyfî bir sürekli fonksiyonunun zamana göre tam türevi LAGRANGE denklemlerini özdeş olarak gerçekler.

Buna göre, eğer $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$ bir sistemin LAGRANGE fonksiyonu ise ve $\Omega = \Omega(q_1, \dots, q_n; t)$ şeklinde keyfî fakat sürekli bir fonksiyon ise sistemin hareket denklemleri

$$L' = L + \frac{d\Omega}{dt} \quad (\text{VI.8.9})$$

fonksiyonu için de aynıdırlar; yâni, başka bir deyimle, LAGRANGE formalizminde bir sistemin hareket denklemleri L yi $L + (d\Omega/dt)$ ye dönüştüren dönüşümlerde invaryant kalırlar.

(VI.9) İVMELİ SİSTEMLERİN LAGRANGE FONKSİYONU

Bir mekanik sistemin LAGRANGE fonksiyonunu tesis ederken göz önüne hep eylemsizlik (GALİLE referans) sistemi aldık. Böyle bir (Σ_0) eylemsizlik sisteminde LAGRANGE fonksiyonunun ifâdesi, bir tek nokta için,

$$L_0 = \frac{m}{2} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 - U(\mathbf{r}_0) \quad (\text{VI.9.1})$$

olup buna tekaabül eden hareket denklemi de

$$m \ddot{\mathbf{r}}_0 = - \text{grad } U(\mathbf{r}_0)$$

dır.

İvmeli bir harekete tekaabül eden LAGRANGE fonksiyonunun artık (VI.9.1) şeklinde olmayacağı besbellidir. Bir eylemsizlik sisteminden ivmeli bir sisteme geçişi iki kademe yapacağız. Önce

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t)$$

bağıntısıyla belirlenen bir *öteleme dönüşümüyle* (Σ_0) eylemsizlik sisteminde ivmeli (çünkü $d\mathbf{V}/dt \neq 0$) bir (Σ') sistemine geçelim. (Σ') deki L' nün ifâdesi

$$L' = \frac{m}{2} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' + m \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{v}' + \frac{m}{2} \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t) - U \quad (\text{VI.9.2})$$

şekline girer. Ancak, buradaki $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ zamanın bilinen bir fonksiyonudur; bu itibarla da bir başka fonksiyonun zamana göre tam türevi olarak ifâde edilebilir. Bu ise (VI.8) paragrafındaki sonuca binâen L' ifâdesinde bu terimden tamâmen sarf-ı nazar etmemize müsaade eder. Öte yandan da

$$m \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{v}' = m \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{V} \cdot \mathbf{r}') - m \mathbf{r}' \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

yazılabildiğinden bunu L' nün (VI.9.2) ifâdesine vazettikten sonra gene zamana göre tam türev şeklinde ifâde olunan teriminden, gene (VI.8) paragrafına binâen, sarf-ı nazar edebiliriz. Böylece (Σ') deki L' nün ifâdesi

$$L' = \frac{m}{2} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' - m \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r}') \quad (\text{VI.9.3})$$

olur. Burada $\mathbf{A}(t) = d\mathbf{V}/dt$ olup (Σ') referans sisteminin ötelenme ivmesini göstermektedir. (VI.9.3) e tekaabül eden hareket denklemi kolayca hesaplanır, ve

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = - \text{grad } U(\mathbf{r}') - m \mathbf{A}(t) \quad (\text{VI.9.4})$$

bulunur. Burada, ivmeli hareket dolayısıyla ortaya $-m \mathbf{A}(t)$ zahiri kuvvetinin çıktığını göstermekteyiz.

Şimdi (Σ') ye nazaran $\omega(t)$ açısal hızıyla bir dönme hareketi yapan ve orijini de (Σ') nün orijiniyle çakışan bir (Σ) referans sistemine geçelim. Böyle bir dönüşümde her iki referans sistemindeki v' ve v hızları birbirlerine

$$v' = v + (\omega \times r) = v + (\omega \times r) \quad (\text{VI.9.5})$$

ifâdesi uyarınca bağlı olacaklardır. (VI.9.5) eğer (VI.9.4) e yerleştirilirse (Σ) daki L LAGRANGE fonksiyonunun ifâdesi

$$L = \frac{m}{2} v \cdot v + m v \cdot (\omega \times r) + \frac{m}{2} (\omega \times r) \cdot (\omega \times r) - m A \cdot r - U \quad (\text{VI.9.6})$$

şekline girer. Buradan hareket denklemini elde edebilmek için dL tam diferansiyelini teşkil edelim; sembolik olarak

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial v} dv + \frac{\partial L}{\partial r} dr = m v \cdot dv + m dv \cdot (\omega \times r) + m v \cdot (\omega \times dr) \\ &+ m (\omega \times r) \cdot (\omega \times dr) - m A \cdot dr - \frac{\partial U}{\partial r} \cdot dr \\ &= \{ m v + m (\omega \times r) \} dv + \{ m (v \times \omega) + m ((\omega \times r) \times \omega) - m A - \text{grad } U \} dr \end{aligned}$$

olur. LAGRANGE denklemleri de, buna binâen,

$$m \frac{dv}{dt} = - \text{grad } U - m A + m (r \times \dot{\omega}) + 2m (v \times \omega) + m (\omega \times (r \times \omega))$$

(VI.9.7)

olur.

Eğer dönme hareketi düzgünse ($\dot{\omega} \equiv 0$), ve öteleme ivmesi de yoksa ($A \equiv 0$) bu takdirde LAGRANGE fonksiyonu ve hareket denklemleri sırasıyla

$$L = \frac{m}{2} v \cdot v + m v \cdot (\omega \times r) + \frac{m}{2} (\omega \times r) \cdot (\omega \times r) - U \quad (\text{VI.9.8})$$

$$m \frac{dv}{dt} = - \text{grad } U + 2m (v \times \omega) + m (\omega \times (r \times \omega)) \quad (\text{VI.9.9})$$

şekline girerler.

(VI.10)* NOETHER TEOREMİ; BAKIŞIM VE KORUNUM KANUNLARI

(II.7) alt-bölümünde grup kavramına değinerek bunun aksiyomlarını vermiş ve $\mathbf{r}_0 = \text{sabit}$ bir vektör olmak üzere

$$\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$$

şeklindeki öteleme dönüşümlerinin bir grup oluşturduklarını göstermiştik.

Şimdi ise mekanik bir sistemin hareket denklemlerini şeklen invaryant bırakan sürekli dönüşüm gruplarını incelemek istiyoruz. Hareket denklemlerini şeklen invaryant bırakan sürekli dönüşümlere bakışım (simetri) dönüşümleri adı verilir. Bir bakışım dönüşümü,

$$\left. \begin{aligned} t' &= t'(t) \\ q_i' &= q_i'(q_1, \dots, q_n; t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.10.1})$$

şeklinde sürekli bir dönüşüm ile bunun ters dönüşümü olan

$$\left. \begin{aligned} t &= t(t') \\ q_i &= q_i(q_1', \dots, q_n'; t') \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.10.2})$$

şeklindeki sürekli dönüşüm verildiğinde, sistemin

$$L'(q_1', \dots, \dot{q}_1', \dots; t')$$

şeklindeki yeni LAGRANGE fonksiyonunu, sistemin yeni değişkenler cinsinden yazılmış

$$L(q_1', \dots, \dot{q}_1', \dots; t')$$

şeklindeki eski LAGRANGE fonksiyonuyla özdeş kılan, ya da birbirlerinden, (VI.8) de de gösterilmiş olduğu vechile,

$$\Omega = \Omega(q_1', \dots, q_n'; t')$$

gibi genelleştirilmiş koordinatlar ile zamanın keyfî fakat sürekli bir fonksiyonunun zamana göre tam türevi kadar farketmelerini, yâni

$$L'(q_1', \dots, \dot{q}_1', \dots; t') = L(q_1', \dots, \dot{q}_1', \dots; t') + \frac{d\Omega(q_1', \dots, q_n'; t')}{dt'} \quad (\text{VI.10.3})$$

şeklindeki bir bağıntının geçerli olmasını sağlayan dönüşüme denir.

(VI.10.2) şeklindeki bir dönüşüme göre $L dt$ büyüklüğünün alacağı şekli hesaplırsak

$$\begin{aligned} L(q_1, \dots; \dot{q}_1, \dots; t) dt &= \left\{ L(q_1', \dots, \dot{q}_1', \dots; t') \frac{dt}{dt'} \right\} dt' \\ &= L'(q_1', \dots, \dot{q}_1', \dots; t') dt' \end{aligned} \quad (\text{VI.10.4})$$

bulunur. (VI.10.3) ve (VI.10.4) bağıntılarından ise kolaylıkla

* (VI.10) ve (VI.11) alt-böümleri ilk okumada atlanabilirler.

$$\boxed{L(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots; t) dt = L(q_1', \dots, \dot{q}_1', \dots; t') dt' + d\Omega(q_1', \dots, q_n'; t')} \quad (\text{VI.10.5})$$

olacağı görülmektedir.

Eğer bakışım dönüşümleri bir **sürekli grup** oluşturuyorsa, bu takdirde

$$\left. \begin{aligned} t' &= t + \delta t \\ q_i' &= q_i + \delta q_i \\ \dot{q}_i' &= \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.10.6})$$

şeklindeki *sonsuz küçük sürekli dönüşümleri* incelemek yeterlidir; zirâ sonlu bir sürekli dönüşüm peşpeşe uygulanmış sonsuz küçük dönüşümlerin bileşkesi olarak telâkki olunabilir.

(VI.10.6) da δ simgesi sürekli bakışım dönüşümüne uygun olan bir sonsuz küçük artışa işâret etmekte olup bu, keyfi bir sonsuz küçük artışa işâret eden d ile her zaman değiş-tokuş edilebilir; yâni, her zaman

$$\delta(dt) = d(\delta t) \quad (\text{VI.10.7})$$

dir. Ayrıca (VI.10.6) daki $\delta \dot{q}_i$ yi açıkça hesaplamak için de önce

$$\begin{aligned} \dot{q}_i' &= \frac{d(q_i + \delta q_i)}{d(t + \delta t)} = \frac{d(q_i + \delta q_i)}{dt} \frac{1}{\frac{d(t + \delta t)}{dt}} = \\ &= \left(\frac{dq_i}{dt} + \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \left(1 - \frac{d}{dt} \delta t \right) = \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (\delta q_i) - \dot{q}_i \frac{d}{dt} (\delta t) \end{aligned}$$

yazılabileceğine dikkati çekelim. Buna göre de

$$\boxed{\dot{q}_i' - \dot{q}_i = \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (\delta q_i) - \dot{q}_i \frac{d}{dt} (\delta t)} \quad (\text{VI.10.8})$$

olduğu anlaşılabilir olur.

Şimdi $L dt$ büyüklüğünün sürekli bakışım dönüşümüne uygun $\delta(L dt)$ artışını hesaplayalım:

$$\delta(L dt) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t dt + L \delta(dt)$$

(VI.10.7) ve (VI.10.8) i de göz önünde tutarak bu son ifade

$$\begin{aligned} \delta(L dt) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right] dt + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t dt + \\ &+ \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{d(\delta t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (\text{VI.10.9})$$

şekline girer.

(VI.10.6) ile verilen sonsuz küçük sürekli bir dönüşümde (VI.10.5) ifadesi

$$\begin{aligned} L(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots; t) dt &= L(q_1 + \delta q_1, \dots, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots; t + \delta t) d(t + \delta t) + \\ &+ d[\delta \Omega(q_1, \dots, q_n; t)] \end{aligned}$$

şeklini alır. Sonsuz küçük sürekli bir dönüşümde $\delta \Omega$ zâten bir diferansiyel olduğundan argümentindeki δq_i ve δt artışlarına artık ayrıca işaret edilmemiştir. Bu son ifâdeden

$$L(q_1 + \delta q_1, \dots, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots; t + \delta t) d(t + \delta t) - L(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, t) dt + d(\delta \Omega) = 0$$

ya da kısaca

$$\delta(L dt) + d(\delta \Omega) = 0 \quad (\text{VI.10.10})$$

sonucu çıkar. Bu son bağıntı ise (VI.10.9) a binâen

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{d(\delta t)}{dt} = - \frac{d(\delta \Omega)}{dt}}$$

(VI.10.11)

şekline girer.

(VI.10.11) bağıntısı, *LAGRANGE* fonksiyonu tarafından tasvir olunan sistemin hareket denklemlerinin, (VI.10.6) şeklinde sonsuz küçük sürekli bir bakışım dönüşümünde invaryant kalmaları için gerekli şartı oluşturmaktadır.

Şu hâlde belirli bir *LAGRANGE* fonksiyonuna tekaabül eden hareket denklemlerinin (VI.10.6) dönüşümüne göre şeklen invaryant kalıp kalmadıklarını tesbit etmek için (VI.10.11) denkleminin sol yanının sıfır olup olmadığını; ya da hiç değilse bir tam diferansiyel şeklinde yazılıp yazılamıyacağını araştırmak gerekmektedir. Böylelikle $\delta \Omega$ fonksiyonu tesbit edilmiş olacaktır. Özellikle eğer $\delta \Omega = 0$ ve $\delta(dt) = d(\delta t) = 0$ ise, bu takdirde $\delta L = 0$ olur ki bu da *LAGRANGE* fonksiyonunun göz önüne alınmış olan dönüşüme göre invaryant olduğunu gösterir.

Şimdi (VI.6.16) *LAGRANGE* hareket denklemlerini de göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) &= \frac{\partial L}{\partial t} - \left\{ \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right\} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \dot{q}_i = 0 \end{aligned}$$

yâni

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (\text{VI.10.12})$$

bulunur. Buna dayanarak da (VI.10.11) bağıntısı

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right\} + \left\{ \frac{d}{dt} \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \right\} \cdot \delta t + \\ + \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \cdot \frac{d}{dt} (\delta t) + \frac{d}{dt} (\delta \Omega) = 0 \quad (\text{VI.10.13}) \end{aligned}$$

şekline girer. Bu ifâdenin ilk teriminde büyük parantez içindeki ilk terim (VI.6.16) *LAGRANGE* hareket denklemlerinden yararlanarak

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

şeklinde yazılabilir. İkinci ve üçüncü terimlerin toplamı ise

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \cdot \delta t \right\}$$

den başka bir şey değildir. Buna binâen (VI.10.13) ifâdesi de

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \cdot \delta t + \delta \Omega \right] = 0 \quad (\text{VI.10.14})$$

şekline girer. Buna göre (VI.10.11) şartının gerçekleşmesi için (VI.10.14) ile verilen tam türevin sıfıra eşit olması yâni bu ifâdede köşeli parantez içindeki büyüklüğün

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \left(L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t + \delta \Omega = \text{sâbit} \quad (\text{VI.10.15})$$

uyarınca bir sâbit olması gereklidir. Bu sonuç (VI.10.15) in sol yanının korunduğuna yâni bir hareket sâbiti ya da, başka bir deyimle, göz önüne alınan hareketin bir integrali olduğuna delâlet etmektedir. Bu sonuca göre: **bir sistemin hareket denklemlerini şeklen invaryant bırakan sürekli bakışım grubu sistemle ilgili bir korunum kaanûnuna yol açar (NOETHER teoremi).**

(VI.11) NOETHER TEOREMİNİN UYGULANMASINA BASİT ÖRNEKLER

Sürekli bakışım gruplarının ne gibi *korunum kaanûnlarına* yol açtıkları hakkında somut bir fikir sâhibi olabilmek için dört basit örnek takdim etmek istiyoruz.

1. Zaman ötelenmesi dönüşümü (Enerji korunumu) — (VI.10.11) bağıntısını göz önüne alırsak, eğer

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

ise, mekanik bir sistemin

$$\delta t = \text{sâbit}, \quad \delta q_i = 0, \quad \delta \Omega = 0$$

ile belirlenen sonsuz küçük zaman ötelenmesine göre invaryant olacağı derhâl görülür. Bu takdirde (VI.10.15) bağıntısından da

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = E = \text{sâbit} \quad (\text{VI.11.1})$$

bulunur. VIII. Bölümde, (VI.11.1) in sol yanının göz önüne alınan mekanik sistemin toplam mekanik enerjisini temsil ettiği gösterilecektir. Şu hâlde *LAGRANGE* fonksiyonu zamandan bağımsız olan mekanik sistemlerde, sonsuz küçük bir zaman ötelenmesiyle temsil olunan sürekli bakışım grubu enerji korunumu kaanûnuna yol açmaktadır.

2. Uzay ötelenmesi dönüşümü (İmpuls korunumu) — Bunun için tek bir maddesel noktadan oluşan çok basit bir sistem göz önüne alacağız. Bu sistemin *LAGRANGE* fonksiyonu

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - U(x_1, x_2, x_3)$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi gene (VI.10.11) bağıntısını göz önüne alırsak

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{VI.11.2})$$

şartı altında, sistemin

$$\delta x_3 = \text{sâbit}, \quad \delta x_1 = \delta x_2 = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta \Omega = 0$$

ile belirlenen, x_3 -ekseni boyunca sonsuz küçük bir ötelenmeye göre invaryant olacağı derhâl görülür. Bu takdirde (VI.10.15) bağıntısından da

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = p_3 = \text{sâbit}$$

olduğu, yâni maddesel noktanın x_3 -ekseni boyunca impulsunun korunduğu anlaşılmış olur.

3. Dönme dönüşümü (Dönme impulsu korunumu) — Gene tek bir maddesel nokta göz önüne alalım. x_3 -ekseni etrafında

$$\delta \varphi_3 = \text{sâbit}, \quad \delta \varphi_1 = \delta \varphi_2 = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta \Omega = 0$$

ile belirlenen sürekli bir dönme dönüşümünde bu sistemin,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = 0$$

şartı altında, (VI.10.11) bağıntısını gerçekleyerek (VI.10.15) e göre de

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} = l_3 = \text{sâbit}$$

şeklinde dönme impulsunun x_3 -bileşeninin korunum kaanûnuna yol açacağı kolayca görülmektedir.

4. GALİLE dönüşümü (Kütle merkezi korunumu) — Tek bir maddesel nokta için x_3 -ekseni boyunca

$$\delta x_3 = t \delta v_3, \quad \delta v_3 = \text{sâbit}, \quad \delta x_1 = \delta x_2 = 0, \quad \delta t = 0$$

ile belirlenen sürekli dönüşümü (GALİLE dönüşümünü) göz önüne alalım.

Böyle bir dönüşümün sistemin hareket denklemlerini invaryant bırakması için (VI.10.11) şartına binâen

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) \delta v_3 = - \frac{d(\delta \Omega)}{dt} \quad (\text{VI.11.3})$$

olmasının gerekli olduğu görülmektedir. Bu takdirde bu sürekli dönüşümün ortaya koyduğu korunan büyüklük de (VI.10.15) e göre

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} t \delta v_3 + \delta \Omega = \text{sâbit} \quad (\text{VI.11.4})$$

olur.

Eğer hareket denklemlerinin, *GALİLE dönüşüm grubu* yanında bir de *uzay ötelenmeleri grubuna* nazaran invaryant olmaları istenirse, bu takdirde (VI.11.2) dolayısıyla (VI.11.3) ün ilk terimi sıfır olur. Buna binâen ve $p_3 = mv_3 = m\dot{x}_3$ vaz ederek $\delta \Omega = -m x_3 \delta v_3$ elde edilir ki bu da (VI.11.4) e yerleştirildiğinde ortaya

$$- \frac{p_3}{m} t + x_3(t) = \text{sâbit} = x_3(0) \quad (\text{VI.11.5})$$

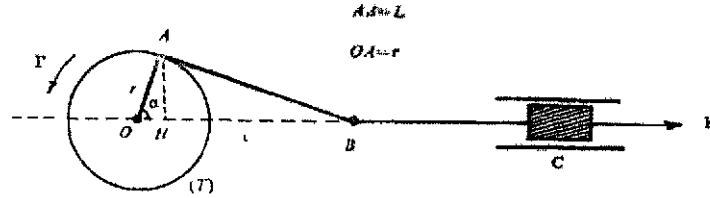
şeklinde bir korunum kaanûnu çıkar. Çok sayıda maddesel noktadan oluşan mekanik sistemler göz önüne alındığında (VI.11.5) şeklindeki korunum kaanûnu göz önüne alınan *sistemin kütle merkezinin korunum kaanûnunu* verir.

E. NOETHER Teoremiyle İlgili Bazı Referanslar :

- E. NOETHER** : *Invariante Variationsprobleme; Göttinger Nachrichten, S. 235-257, (1918).*
- E. L. HILL** : *Hamilton principles and the conservation theorems of mathematical physics; Rev. Mod. Phys.; 23, S. 253 - 260, (1951).*
- N.N. BOGOLIUBOV,**
D.V. CHIRKOV : *Introduction à la théorie quantique des champs; Dunod, Paris; S. 15, (1960).*
- F. ROHRICH** : *Classical charged particles; Addison-Wesley; S. 54 - 60, (1965).*
- C. LANCZOS** : *Variational principles of mechanics; University of Toronto Press, 3. baskı, S. 357 - 364, (1966).*
- B. F. PLYBON** : *J. Math. Phys., 12, S. 57, (1971).*
- E. FICK** : *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie; Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main; S. 37 - 41, (1972).*
- E. CANDOTTI,**
C. PALMIERI,
B. VITALE : *On the inversion of Noether's theorem in classical dynamical systems; Amer. J. Phys. ; 40, S. 424 - 429, (1972).*

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

VI.1. Üzerine bir K kuvveti etkileyen bir C pistonu Şekil : VI.8. deki

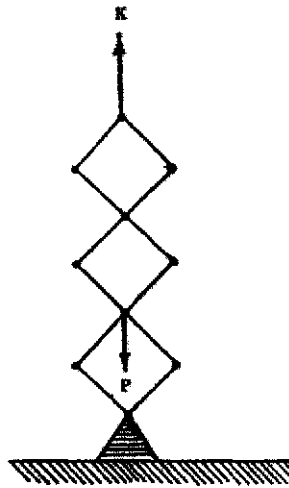


Şekil . VI.8.

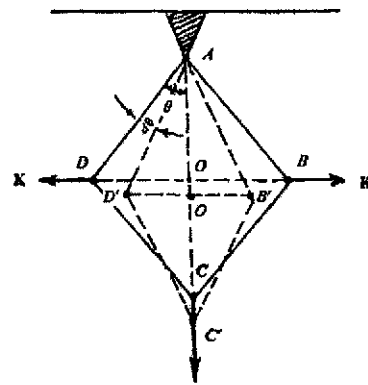
gibi bir bıyel-manivela sistemi aracılığıyla bir (T) tekerleğini döndürmektedir. K yı dengelemek için (T) ye uygulanması gerekli Γ kuvvet çiftinin ne olması lâzım geldiğini hesaplayınız.

VI.2. Bir P ağırlığını yukarı kaldırmak için Şekil: VI.9 daki gibi bir düzenden yararlanılmaktadır. Bu sistemin eklem yerlerindeki sürtünmeyi ihmâl ederek, denge durumunun oluşması için K kuvveti ile P ağırlığı arasındaki bağıntının ne olması gerektiğini bulunuz.

VI.3. l uzunluğunda ve P ağırlığındaki bir çubuk pürüzsüz bir yatay zemin ile gene pürüzsüz dikey bir duvara dayanmaktadır. Bu çubuğun, yatay doğrultusu ile bir θ açısı yapacak şekilde dengede durması için, çubuğun zemindeki ucuna acaba ne gibi bir K yatay kuvveti uygulanmalıdır ?



Şekil . VI.9.



Şekil : VI.10.

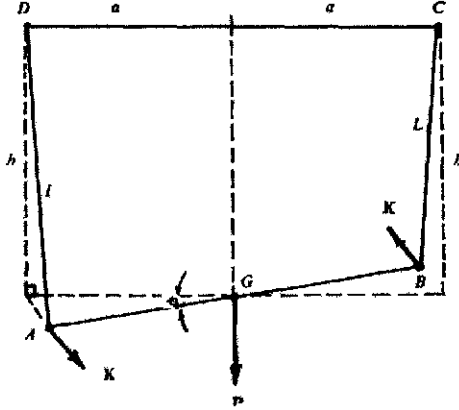
VI.4. Her biri L uzunluğunda dört çubuktan müteşekkil bir paralelkenar göz önüne alınıyor. Bu dört çubuk biri sâbit ve tavana rabtedilmiş olmak üzere dört

adet sürtünmesiz mafsallarıyla birbirlerine bağlanmış bulunmaktadırlar. Bu paralelkenarın B ve D noktalarına, Şekil: VI.10 da görüldüğü gibi, birbirlerine eşit fakat zıt yönde K kuvvetleri ve C noktasına da düşey bir P kuvveti uygulandığında sistemin A da belirli bir θ yarı tepe açısını haiz olarak denge durumunda bulunabilmesi için θ , K ve P arasında ne gibi bir bağıntının bulunması gerektiğini ortaya koyunuz.

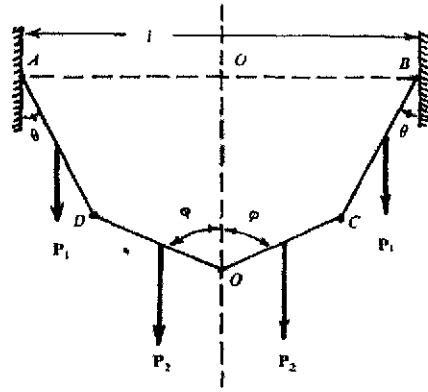
VI.5. Şekil : VI.11 deki gibi dört adet çubuğun, θ ve φ açılarının verilmiş değerleri için dengede bulunmalarını temin maksadıyla bu çubukların P_1 ve P_2 ağırlıklarının gerçeklemeleri gereken bağıntıları tesis ediniz.

(Çubukları birbirlerine ve duvarlara birleştiren mafsallarda sürtünme bulunmadığı kabul edilmektedir).

VI.6. Şekil : VI.12 deki gibi $2b$ uzunluğunda ve P ağırlığındaki bir AB çubuğu, L uzunluğundaki iki ipe yatay ve $2a$ uzunluğundaki sâbit bir CD çubuğunun uçlarına tutturulmuş ve bir yatay kuvvet çiftine tâbî tutulmuş bulunmaktadır. Buna göre sistemin denge durumunda bulunabilmesi için, uygulanmış olan kuvvet çiftinin momentinin ne olması gerektiğini hesaplayınız.



Şekil : VI.11



Şekil : VI.12.

VI.7. m kütleli bir nokta bir elips çemberinin üzerinde bulunmaktadır. Elips dikey doğrultuda bulunan kendi küçük eksenini etrafında sâbit bir ω açısal hızıyla döndüğü zaman bu noktanın elips çemberini terketmemek şartı altındaki denge durumunu tâyin ediniz.

VI.8. Şekil : VI.13 deki gibi R_1 ve R_2 yarıçaplı (M_1) ve (M_2) makaraları sâbit bir O yatay eksenini etrafında dönebilen tek bir cisim meydana getirecek sùrette birbirlerine sıkı sıkıya rabtedilmiş bulunmaktadırlar. (M_3) ise R_3 yarıçaplı hareketli bir makaradır. (M_4) ve (M_5) de tıpkı (M_1) ve (M_2) gibi birbirlerine sıkı sıkıya bağlı fakat düşey doğrultusunda beraberce hareket edebilen iki makaradır.

(M_1) makarasının A noktasına tutturulmuş bir $ABCDEFGH$ ipi sırasıyla (M_3), (M_2) ve (M_4) makaraları üzerinden geçtikten sonra (M_4) de H noktasına

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^k u_i(q_i) \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^k v_i(q_i) \dot{q}_i^2 \right\}$$

ile verilmektedir. Eğer sistemin mâruz kaldığı kuvvetler

$$U = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w_i(q_i) \sum_{i=1}^k u_i(q_i)$$

şeklinde bir potansiyelden türüyorsa ve bu ifâdelerdeki u_i , v_i ve w_i fonksiyonları da yalnızca q_i ye bağlı keyfî fonksiyonlarsa hareket denklemlerinin k adet ilk integrale (yâni hareket sâbitine) sâhip olduklarını gösteriniz.

VI.20. Potansiyel enerjisi, ifâde olunduğu kartezyen koordinatların k -nıncı dereceden homogen bir fonksiyonu olan bir mekanik sistem göz önüne alınıyor.

1) Hareket denklemlerinin, geometrik açıdan, benzer yörüngeler verdiklerini gösteriniz.

2) $M(t)$ ve $M'(t')$ ile bu benzer yörüngelerden ikisinin mütekaabil iki noktasını göstererek, ve l'/l de söz konusu iki yörünge'nin lineer boyutlarının oranı olmak üzere, $M(t)$ ve $M'(t')$ nün mütekaabil yörünge parçalarını katetmeleri için geçen zamanların

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l} \right)^{1 - \frac{k}{2}}$$

oranında olduğunu gösteriniz.

VI.21. Bir sistem için kinetik enerji ile potansiyel enerjisinin

$$2T = 3\dot{q}_1^2 + 3\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$2U = -3q_2^2 + 2q_3^2 + 2q_1 q_2$$

formülleriyle verildiği tesbit edilmiştir.

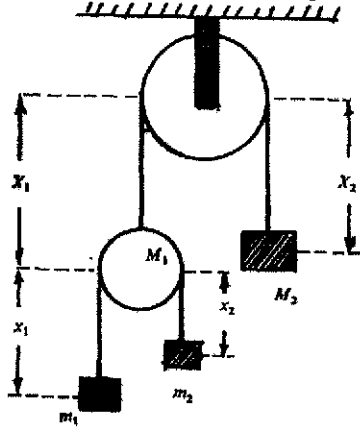
Öyle bir koordinat dönüşümü bulunuz ki bu formüllerdeki terimlerde artık farklı koordinatların çarpımı bulunmasın; yâni başka bir deyimle, T ve U nun ifâdelerini *köşegenleştiriniz*.

VI.22. Şekil: VI.17 deki makaralar sistemi için LAGRANGE fonksiyonunu ve hareket denklemlerini tesis ediniz.

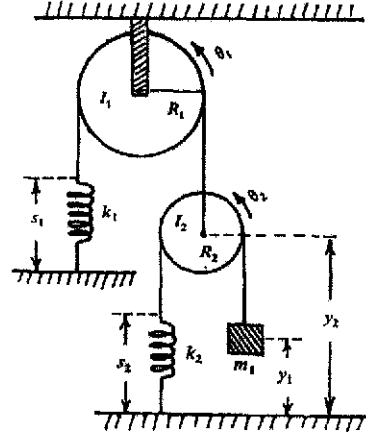
VI.23. a) VI. BÖLÜM'ün 3. paragrafında 1. örnekteki problemde maddî noktanın $\omega = \sqrt{2g/a}$ ya eşit bir açısal hıza sâhip olması hâlinde $z = h$ düzleminde yatay bir daire çizeceğini gösteriniz.

b) Eğer tanecek bu dairesel yörüngeden hafifçe uzaklaşacak olursa, $(1/\pi)\sqrt{2g/a}$ frekansıyla bir takım salınımlara mâruz kalacağını gösteriniz.

VI.24. Şekil: VI.18 deki sistemin LAGRANGE fonksiyonunu tesbit ediniz.



Şekil : VI.17.



Şekil : VI.18.

VI.25. m kütleli bir yüzük parametrik denklemleri

$$x = a(\theta - \sin \theta)$$

$$y = a(1 + \cos \theta)$$

ile verilen sikloit şeklindeki bir tel üzerinde ve kendi ağırlığının etkisi altında sürtünmesiz olarak kaymaktadır.

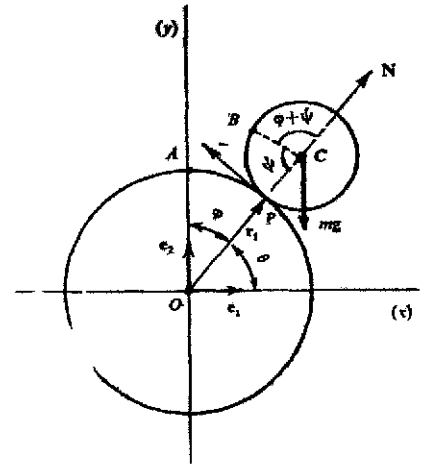
Hareket denklemini LAGRANGE fonksiyonundan hareketle bulup, $\cos(\theta/2) = u$ olmak üzere, bunun

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a} u = 0$$

şekline indirgenebileceğini ve dolayısıyla yüzüğün $2\pi\sqrt{4a/g}$ periyoduyla salınımlar yapacağını gösteriniz.

VI.26. a yarıçaplı ve m kütleli bir küre b yarıçaplı bir küre üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Birinci kürenin ikinciyi nerede terkedeceğini bulunuz. (Şekil: VI.19)

VI.27. Dikdörtgensel homogen bir levha sürtünmesiz olarak yatay bir düzlemde her bir köşesine benzer şekilde tutturulmuş dört özdeş yayın etkisi altında sükûnette bulunmaktadır. Levhanın bu, denge durumu civarındaki muhtemel küçük titreşimlerini inceleyiniz.



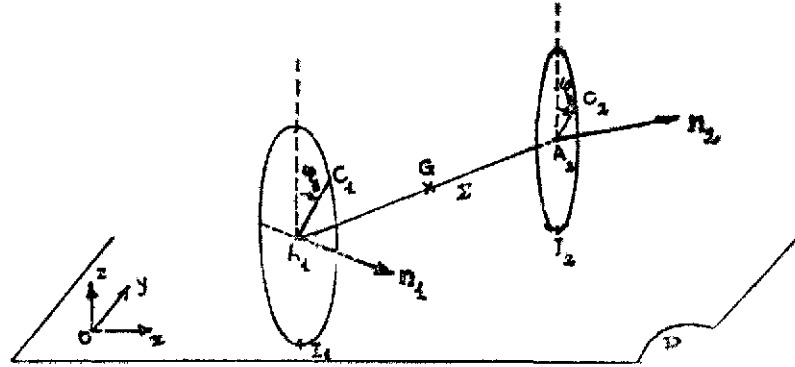
Şekil : VI.19.

VI.28. m kütleli bir tanecek, $r^2 = x^2 + y^2$ olmak üzere $U = \Phi(r, z)$ potansiyelinden türeyen bir kuvvet alanında bulunmaktadır.

Eğer $\partial\Phi/\partial z$ türevi $r = a$ ve $z = b$ için sıfırlaşıyorsa, bu takdirde $r = a$, $z = b$ nin bir yörünge olduğunu gösteriniz. Bu yörünge üzerindeki hareketin dengeli olabilmesi için $\Phi(r, z)$ fonksiyonunun gerçekleşmesi gereken şartlar nelerdir; tesbit ediniz.

VI.29. m kütleli ve r yarıçapını haiz ve sırasıyla A_1 ve A_2 merkezli iki homogen ve özdeş T_1 ve T_2 diskleri olarak alınabilen iki tekerlek yatay bir P düzlemiyle temas etmektedirler. Bunlar, aralarında, kütlesi ihmal edilebilen ve kendilerini aralarındaki $A_1A_2 = 2l > 2r$ uzaklığı sabit kalacak şekilde dikey tutabilen bir Σ düzlemiyle birbirlerine bağlı bulunmaktadır. Böylece tanımlanmış olan mekanik sistemin hareketi, Ox ve Oy eksenleri P düzleminde bulunan bir $O(x, y, z)$ dik kartezyen referans sisteminde incelenmektedir.

Sistemin peşinen 7 parametreye bağlı olduğu görülmektedir. \mathbf{n}_1 ve \mathbf{n}_2 ile T_1 ve T_2 nin eksenleri üzerindeki birim vektörleri, A_1C_1 ve A_2C_2 ile de T_1 ve T_2 üzerinde tesbit edilmiş iki yarıçapı göstermek üzere bu parametreler şunlardır: A_1A_2



Şekil : VI.20.

nin ortası olan G noktasının x ve y koordinatları; $\theta = (\mathbf{Ox}, A_1A_2)$ açısı; $\psi_1 = (\mathbf{Ox}, \mathbf{n}_1)$, $\psi_2 = (\mathbf{Ox}, \mathbf{n}_2)$, $\varphi_1 = (\mathbf{Oz}, A_1C_1)$ ve $\varphi_2 = (\mathbf{Oz}, A_2C_2)$ açıları.

1) Her iki tekerleğin P düzlemi üzerinde sürtünmesiz kaydıklarını varsayarak sistemin hareketini belirleyiniz.

2) Bir de her iki tekerleğin P düzlemi üzerinde kaymadan yuvarlandıklarını varsayarak, \dot{x} , \dot{y} , $\dot{\varphi}_1$ ve $\dot{\varphi}_2$ genelleştirilmiş hızlarını diğer parametreler ile bunların türevleri cinsinden ifade ediniz.

3) Bu şartlar altında (yani kaymasız yuvarlanma hâli için) hareketin diferansiyel denklemlerini tesis ediniz.

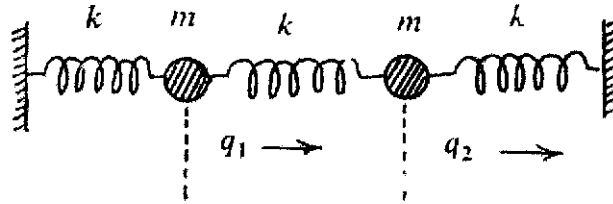
VI.30. m kütleli bir tanecek l uzunluğundaki ince ve içi boş bir çubuğun içinde sürtünmesiz hareket etmektedir. Çubuğun, ortasından geçen bir eksen etrafında ve yatay bir düzlemde sâbit bir ω açısal hızıyla dönmesi hâlinde LAGRANGE denklemlerini kullanarak taneciğin hareketini inceleyiniz.

VI.31. m kütleli ve e yüklü bir tanecek v hızıyla bir \mathbf{E} elektrik ve \mathbf{B} magnetik alanında hareket etmektedir. Üzerine etkiyen kuvvet $\mathbf{K} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ile verilmiştir. Bir Φ skaler potansiyeli ve bir de \mathbf{A} vektör potansiyeli cinsinden bu alanlar: $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ve $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ bağıntılarıyla ifade edilebilmektedirler. Bu takdirde böyle bir tanecek için LAGRANGE fonksiyonunun

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\Phi$$

şeklinde olduğunu gösteriniz.

VI.32. Şekil: VI.21 deki gibi özdeş üç yay ile dikey iki duvar arasında bulunan



Şekil : VI.21

aynı m kütleli iki topun titreşimlerini inceleyiniz.

VI.33. Bir taraftan küçük salınımlar yapmakta iken diğer taraftan da ipi, zamanın fonksiyonu olarak yavaş yavaş kısalmakta olan bir sarkacın hareketini inceleyiniz.

VI.34. Birbirlerine a uzunluğunda ve kütlesi ihmâl edilebilen bir çubukla bağlı iki m kütlesi biri x -ekseni, diğeri ise dik y -ekseni üzerinde kalmak şartıyla sâdece ağırlıklarının etkisi altında hareket etmektedirler. Sistemin hareket denklemlerini ve bağ kuvvetlerini bulunuz.

VI.35. m kütleli bir nokta, ağırlığının etkisi altında, düşey bir düzlemdeki bir parabol boyunca hareket etmektedir. Hareketin denklemlerini kurunuz.

VI.36. m kütleli bir nokta düşey bir düzlemde sâbit bir açısal hızla dönen bir doğru üzerinde kendi ağırlığının etkisi altında hareket etmektedir. Hareketinin denklemlerini ve bağ kuvvetlerinin momentlerini yazınız.

VI.37. $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ şeklinde t ye bağlı olmayan bir LAGRANGE fonksiyonu; $\Omega = \Omega(q_1, \dots, q_n; t)$ şeklinde sürekli bir fonksiyon verildiğinde, ϵ sonsuz küçük bir parametre olmak üzere koordinatların

$$\delta q_j = \varepsilon f_j(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$$

şeklinde sonsuz küçük bir dönüşümü L nin

$$\delta L = \varepsilon \frac{d\Omega}{dt}$$

şeklinde bir dönüşümünü doğurursa bu takdirde

$$F = \text{sâbit} = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Omega$$

nin hareketin bir sâbiti olduğunu gösteriniz.

VII. BÖLÜM

MEKANIĞIN VARYASYON İLKELERİNE GİRİŞ

(VII.1) HAMILTON VARYASYON İLKESİ

Her biri bir t parametresinin $q_i = q_i(t)$ gibi fonksiyonu olan ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere n adet fonksiyonun, bunların t ye göre birinci türevleri olan $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$ lerin ve kezâ t nin fonksiyonu olan

$$f = f(q_i(t), \dot{q}_i(t); t) = f(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t); t) \quad (\text{VII.1.1})$$

nin $t = t_1$ den $t = t_2$ ye kadar integralini, yâni

$$A = \int_{t_1}^{t_2} f(q_i(t), \dot{q}_i(t); t) dt \quad (\text{VII.1.2})$$

ifâdesini göz önüne alalım. Acaba (VII.1.1) ile ifâde edilen f fonksiyonunun $q_i(t)$ ve $\dot{q}_i(t)$ fonksiyonlarına bağıllığı ne türlü olmalıdır ki (VII.1.2) ile ifâde edilen A integrali bir ekstremum (genellikle minimum) değeri haiz olsun?

Bu, A integralinin δA varyasyonunu

$$\delta A = 0 \quad (\text{VII.1.3})$$

kılacak $q_i = q_i(t)$ fonksiyonlarını tâyin etme problemine denktir.

Bu problemi çözmek üzere, ε serbest değişen sonsuz küçük bir parametre ve $\alpha_i = \alpha_i(t)$ fonksiyonları da $]t_1, t_2[$ açık aralığında keyfî fakat

$$\alpha_i(t_1) = \alpha_i(t_2) = 0 \quad (\text{VII.1.4})$$

şartlarını gerçekleyen bir takım fonksiyonlar olmak üzere

$$Q_i(t) = q_i(t) + \varepsilon \alpha_i(t) \quad (\text{VII.1.5})$$

ile temsil edilen tek parametrelili bir eğri ailesini göz önüne alalım. A yı ekstremum kılan $q_i = q_i(t)$ fonksiyonları bu eğri ailesinin $\varepsilon = 0$ değerine tekaabül eden elemanlarıdır.

Şimdi de ε a bağlı

$$A(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} f(Q_i(t), \dot{Q}_i(t); t) dt$$

fonksiyonunu göz önüne alıp bunu ε a göre türetelim. Bundan sonra bir de $\varepsilon \rightarrow 0$ için limitini hesaplırsak

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dA(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \frac{dQ_1}{d\varepsilon} + \dots + \frac{\partial f}{\partial Q_n} \frac{dQ_n}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_1} \frac{d\dot{Q}_1}{d\varepsilon} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_n} \frac{d\dot{Q}_n}{d\varepsilon} \right) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial Q_n} \alpha_n + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_1} \dot{\alpha}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_n} \dot{\alpha}_n \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \alpha_n + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} \dot{\alpha}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_n} \dot{\alpha}_n \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \alpha_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \dot{\alpha}_i \right) \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu son ifâdede parantez içindeki ikinci terime kısmî integrasyon uygulanır ve integrasyon sınırları için geçerli olan (VII.1.4) şartları da göz önünde tutulacak olursa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dA(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) \alpha_i \right\} dt = 0$$

olur. Bu integralin sıfır olması için integrantının sıfır olması yeterlidir. Hâlbuki integrantı teşkil eden toplamın sıfır olabilmesi için, $\alpha_i = \alpha_i(t)$ lerin göz önüne alınan aralıkta tamamen keyfî fonksiyonlar olması dolayısıyla, i indisinin her bir değeri için α_i lerin katsayıları olan parantezlerin özdeş olarak sıfır olmaları, yâni f fonksiyonunun

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

(VII.1.6)

şeklindeki bir diferansiyel denklem sistemini gerçeklemesi gerekir.

Bu denklem sisteminin ise

$$L = L(q_i, \dot{q}_i; t) = T - U$$

ile tanımlanan LAGRANGE fonksiyonunun gerçeklediği (VI.6.16) denklem sistemiyle tıpatıp aynı olduğu görülmektedir. Buna göre, ve (VI.8.8.)₁ de göz önünde tutarak, L LAGRANGE fonksiyonunun, α gibi sâbit bir çarpan ve $\Omega = \Omega(q_i; t)$ gibi bir fonksiyonun zamana göre türevinin toplamsal yaklaşıklığıyla (VII.1.3) varyasyon problemindeki integrantla özdeş, yâni

$$f \equiv \alpha L + \frac{d\Omega}{dt}$$

alınabileceği ve dolayısıyla da L LAGRANGE fonksiyonuyla tasvir olunan bir mekanik sistemin, *tümüyle*,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt = 0 \quad (\text{VII.1.7})$$

şeklinde bir varyasyon ilkesi aracılığıyla belirlenebileceği anlaşılmaktadır.

$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ holonom bir sisteme tekaabül eden LAGRANGE fonksiyonu, t_1 ve t_2 de sistemin evriminde farklı iki an olduklarında, sistemin gerçek durumu

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt \quad (\text{VII.1.8})$$

belirli integralinin değerini stasyoner, yâni

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt = 0$$

kılan konfigürasyon aracılığıyla belirlenir. (VII.1.8) ile tanımlanan S büyüklüğüne "aksiyon" adı verilir.

HAMILTON (1805-1865) ilkesi diye bilinen bu ilke, nokta mekaniğinin çok geniş kapsamlı global teoremlerinden biri olup sonradan bütün sürekli alan teorilerinin de çıkış noktası olarak alınmıştır.

HAMILTON varyasyon ilkesine doğrudan doğruya D'ALEMBERT ilkesinden hareket ederek de erişmek mümkündür. Bunun için (VI.5.4) ifâdesini yeniden göz önüne alalım:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{K}_i - \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (\text{VII.5.4})$$

Söz konusu N adet maddî noktadan oluşan mekanik sistemdeki $\delta \mathbf{r}_i$ sanal ötelenmelerinin $t = t_1$ ve $t = t_2$ gibi önceden verilmiş iki an için sıfır olduklarını varsayalım :

$$\delta \mathbf{r}_i(t_1) = \delta \mathbf{r}_i(t_2) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{VII.1.9})$$

Bunun anlamı, sistemin durumunun $t = t_1$ ve $t = t_2$ için verilmiş ve bu sınırlarda da sanal ötelenmelere müsaade edilmemiş olmasıdır.

Şimdi (VI.5.4) ün her iki yanını da dt ile çarpıp $t = t_1$ den $t = t_2$ ye kadar integre edelim :

$$\int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{K}_i - \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = 0 \quad (\text{VII.1.10})$$

Kuvvetlerin bir potansiyelden türemeleri hâlinde bu ifâdenin sağ yanının ilk terimi

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = - \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad (\text{VII.1.11})$$

şeklinde yazılabilir. Burada U potansiyelinin, gene, hızlara yâni \dot{q}_i lere bağlı olmadığı kabul edilmiştir. (VII.1.10) un ikinci terimi için kısmi integrasyon yöntemiyle

$$- \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = - \sum_{i=1}^N \left[m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}_i) dt$$

yazılır. Bu ifâdenin sağındaki ilk terim, (VII.1.9) a göre $\delta \mathbf{r}_i(t_1) = \delta \mathbf{r}_i(t_2)$ olması hasebiyle, sıfırdır. Bu itibarla

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i dt &= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} m_i \delta (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt \end{aligned} \quad (\text{VII.1.12})$$

ödür. (VII.1.11) ve (VII.1.12) aracılığıyla (VII.1.9) ifâdesi

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} U dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

bulunur ki

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (\text{VII.1.13}),$$

vazederek bu

$$\boxed{\delta S = 0} \quad (\text{VII.1.14})$$

demek olur ki bu da zâten göstermek istediğimiz şeydir.

(VII.2) HAMILTON İLKESİNİN GEOMETRİK ANLAMI

N adet maddî noktadan oluşan ve n adet de serbestlik derecesini haiz olan mekanik bir sistemin, bileşenleri sırasıyla: $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ olan bir $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$ vektörü aracılığıyla n -boyutlu bir kartezyen hiperuzaydaki bir noktayla temsil edildiğini ve bu hiperuzaya da *konfigürasyon uzayı* denildiğini bilmekteyiz. t zaman parametresi değişince her biri zamanın fonksiyonu ve $\mathbf{r}_i(t)$ yervektörünün bileşenleri olan $q_j = q_j(t)$ genelleştirilmiş koordinatları da değişeceğinden göz önüne alınan sistemin durumunu temsil eden

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r}_i(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \mathbf{e}_j, \quad (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk})$$

yervektörü de, ve dolayısıyla, konfigürasyon uzayında buna tekaabül eden noktada da değişecektir. Konfigürasyon uzayında böylece oluşan tek parametrelî eğriye *sistemin evrim yolu* adı verilir. Ancak şu husûsa özellikle dikkat etmek gerekir ki, genelleştirilmiş koordinatlar nasıl zorunlu olarak konum koordinatları değilse, bu hiperuzayın da fiziksel olaylara gerçekten de yataklık eden gerçek üç boyutlu uzayla bir özdeşliği ve hattâ sıkı bir ilişkisi bulunması gerekmez. Bu itibarla sistemin konfigürasyon uzayındaki evrim yolunun da, sistemin *herhangi bir* noktasının üç boyutlu gerçek fiziksel uzayda haiz olacağı *yörüngesine* benzermesi için hiç bir zorunluluk yoktur. Sistemin konfigürasyon uzayındaki evrim yolunun belirli bir t ânına tekaabül eden bir noktası, sâdece, *bütün* mekanik sistemin o belirli t ânındaki durumunu temsil eder.

Bu itibarla HAMILTON ilkesindeki integralin (*aksiyon integralinin*, veyâ kısaca *aksiyonun*) minimum olması demek konfigürasyon uzayında $t = t_1$ ve $t = t_2 > t_1$ anları arasında sistemin evriminin (yâni t_1 den t_2 ye kadarki değiş-

mesinin) S nin varyasyonunu sıfır kılacak (tek parametrelî) evrim yolu üzerinde vukuu bulması demektir.

Şimdi, gene, n adet serbestlik derecesini haiz holonom bir sistemin LAGRANGE fonksiyonu

$$L = L(q_i, \dot{q}_i; t) \quad (\text{VII.2.1})$$

ile verilmiş olsun. Bu takdirde konfigürasyon uzayında

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ Q_n = f_n(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{array} \right\} \quad (\text{VII.2.2})$$

şeklinde; sonlu, tek değerli, sürekli ve jakobyenleri sıfırdan farklı olacak şekilde türetelebilen f_i fonksiyonları aracılığıyla yeni bir genelleştirilmiş koordinatlar takımı tanımlarsak aslında konfigürasyon uzayını kendi üzerine tasvir eden bir *nokta dönüşümü* tanımlamış oluruz. Böyle bir dönüşümde genelleştirilmiş koordinatların diferansiyelleri birbirlerine

$$dQ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial q_j} dq_j$$

şeklinde lineer olarak bağlı olurlar. Böyle tanımlanan bir nokta dönüşümünün tersi de gene aynı özellikleri haiz bir noktasal dönüşümdür. Bunu da

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = h_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \\ \vdots \\ q_n = h_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \end{array} \right\}$$

ve

$$dq_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial Q_j} dQ_j$$

ile gösterelim. Bu da gene n -boyutlu konfigürasyon uzayını kendi üzerine tasvir eden *bire-bir* bir dönüşümdür. Böyle bir dönüşümde LAGRANGE fonksiyonu da

$$L = L(q_i, \dot{q}_i; t) \text{ den } \tilde{L} = \tilde{L}(Q_i, \dot{Q}_i; t)$$

ye dönüşür. Her ne kadar \tilde{L} , şekil bakımından L den oldukça farklı olabilir ise de \tilde{L} nin değeri L nininkinin aynısıdır. Bu itibarla da

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt$$

ve kezâ bunun dönüşmüşü olan

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{L}(Q_i, \dot{Q}_i; t) dt$$

aksiyonlarının değerleri de aynı kalır. Yeni koordinatlarda $\delta\bar{S} = 0$ varyasyon problemini çözen denklemler ister istemez gene

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.2.3})$$

şeklinde olup, (VI.6.16) ile karşılaştırıldıklarında, sistemin hareket denklemlerinin (VII.2.2) gibi bir noktasal dönüşümde şekillerini korumuş oldukları görülmektedir.

LAGRANGE denklemlerinin keyfi bir noktasal dönüşüme nazaran bu in-varyant kalma özellikleri göz önüne alınan problemin mâhiyeti bakımından en uygun koordinat takımının kullanılabilmesini mümkün kılan çok önemli bir özelliktir.

(VII.3) KONFIGÜRASYON UZAYININ GEOMETRİSİ

Konfigürasyon uzayının geometrisini anlamak ve özellikle analitik mekanik ile geometri (ve özellikle RIEMANNsal geometri) arasındaki ilişkiyi ortaya koyabilmek amacıyla önce N adet maddî noktadan oluşmuş bir mekanik sistemin

$$T = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (\text{VII.3.1})$$

ile verilen kinetik enerjisinin ifâdesini göz önüne alalım. $3N$ boyutlu bir dik kartezyen koordinat sisteminin tanımladığı bir hiperuzay için, ve koordinatları da x_1, x_2, \dots, x_{3N} diye isimlendirerek, kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \quad (\text{VII.3.2})$$

şeklinde de yazılabilir. Şimdi

$$\xi_i = \sqrt{m_i} x_i$$

vazederek bir değişken dönüşümü yaparsak bu, göz önüne almış olduğumuz hiperuzayı kendi üzerine tasvir eden bir noktasal dönüşümdür; fakat bu takdirde

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \frac{d\xi_i}{dt} \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (\text{VII.3.3})$$

yazılabilir. ds^2 ile, $3N$ boyutlu $\{\xi_i\}$ koordinat sisteminde birbirlerine sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklık gösterilmektedir. Buna göre

$$\boxed{ds^2 = 2T dt^2} \quad (\text{VII.3.4})$$

olur. Bu ifâde sistemin haiz olduğu toplam T kinetik enerjisi ile, sistemin hâl ve durumunun tasvirinin dayandığı $3N$ boyutlu hiperuzayın ds yay elemanı arasındaki sıkı bağı göstermek bakımından ilgi çekicidir.

Eğer bu $3N$ boyutlu $\{x_i\}$ dik kartezyen koordinatları

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = h_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ x_2 = h_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ x_{3N} = h_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{array} \right\} \quad (\text{VII.3.5})$$

şeklinde bir dönüşümle eğrisel koordinatlara dönüştürülürlerse, bu $3N$ boyutlu uzayın geometrisinin ÖKLİTsel kalmasına rağmen, ds^2 yay elemanı karesi artık

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^{3N} a_{ik} dq_i dq_k \quad (\text{VII.3.6})$$

gibi daha genel bir şekle bürünür. Fakat ters dönüşüm yapıldığında, bu hiperuzayın haiz olduğu ÖKLİTsel karakter dolayısıyla, $a_{ik} \rightarrow \delta_{ik}$ olur.

Şimdi koordinatları arasında, verilmiş bir takım bağıntılar bulunan bir mekanik sistem göz önüne alalım. Bu takdirde böyle bir problemi iki şekilde incelemek mümkündür :

1) Birinci şıkta gene bir $3N$ boyutlu konfigürasyon uzayı göz önüne alınır. Ancak, sistemimizi temsil eden konfigürasyon uzayı noktası artık bu $3N$ boyutlu uzayın herhangi bir noktası değil fakat koordinatlar arasında var oldukları kabul edilen

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0 \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{VII.3.7})$$

şeklindeki m adet bağı temsil ettikleri m adet $3N-1$ boyutlu hiperyüzeyin tanımladıkları $n = 3N-m$ boyutlu bir alt-uzayın noktasıdır; sistemimizi temsil eden nokta, sistemin bütün evrimi boyunca bu $n = 3N-m$ boyutlu hiperyüzey üzerinde

kalmak zorundadır. Bu alt-uzayı karakterize eden n sayısı aynı zamanda sistemimizin serbestlik derecesidir de. İşte bu $n < 3N$ boyutlu alt-uzay artık genellikle bir ÖKLİTsel uzay değil, fakat bir RİEMANNsal uzaydır.

2) İkinci şıkta, sistemi oluşturan noktaların koordinatları q_1, q_2, \dots, q_n diye n adet parametre aracılığıyla

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ x_2 &= b_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ x_{3N} &= b_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.3.8})$$

şeklinde ifâde edilebilirler. Bu n parametre, bu takdirde, n boyutlu bir uzayın eğrisel koordinatları olurlar. Böyle bir uzayın ds^2 yay elemanı karesi (VII.3.8) deki denklemlerin her iki yanlarının diferansiyellerini teşkil ettikten sonra bu ifâdeleri (VII.3.2) ye yerleştirmekle elde edilir. Bu takdirde, ve

$$g_{ik} = g_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (\text{VII.3.9})$$

olmak üzere,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ik} dq_i dq_k \quad (\text{VII.3.10})$$

olur. Burada yay elemanı (VII.3.9) dolayısıyla RİEMANNsaldır; ve n boyutlu konfigürasyon uzayı, belki sonsuz küçük yerel bölgeler hâriç olmak üzere, $3N$ boyutlu konfigürasyon uzayının ÖKLİTsel yapısını muhafaza etmemektedir.

(VII.3.4) ve (VII.3.10) u göz önüne alır da buradan bir varyasyon problemi vaz edersek, bu

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} ds = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(E-U)} dt = 0} \quad (\text{VII.3.11})$$

şeklinde ifâde edilecektir.

ds^2 nin (VII.3.10) anlamında olduğu göz önünde tutulacak olursa bu ifâdenin sol yanı, n boyutlu RİEMANNsal bir uzay olan konfigürasyon uzayında t_1 ve t_2 anlarına tekaabül eden noktalar arasından geçen en kısa eğrinin yâni bu noktaları birleştiren *geodezik eğrisinin* tâyini probleminin ifâdesidir. Bu itibarla, ve (VII.3.10) un sağ yanı da göz önünde tutularak, bir mekanik sistemin bir U potansiyelinin etkisi altındaki durumunun evriminin, sistemin dinamik tasvirine dayanak olan n boyutlu RİEMANNsal bir yapıyı haiz konfigürasyon uzayının

bir geodezik eğrisi boyunca gelişeceği anlaşılmaktadır. Böylelikle bir dinamik probleminin çözümü tamâmen geometrik bir problem olan bir geodezik eğrisini tâyin etme problemine indirgenmiş olmaktadır.

(VII.4) FERMAT (1601-1665) İLKESİ

Elektron optiğinin ana problemi, korunumlu bir alanın etkisi altında, bir A kaynağı tarafından yayınlanan elektronların bir B noktasına aynı anda varabilmeleri için izlemeleri gereken yörüngelerin tâyini problemidir.

Böyle bir elektronun hareketini bir varyasyon ilkesi aracılığıyla ifâde etmek istersek problem (VII.1.7) varyasyon problemini gerçekleyen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ yörüngesini tesbit etmekten ibâret olacaktır.

m ile elektronun kütesini göstererek, dik kartezyen koordinatlarda problemin LAGRANGE fonksiyonu

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - U(x_i) = T(\dot{x}_i^2) - U(x_i) \quad (\text{VII.4.1})$$

ve elektronun korunan E toplam mekanik enerjisi de

$$E = T + U = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + U(x_i) \quad (\text{VII.4.2})$$

olacaktır.

(VII.4.1) ve (VII.4.2) den

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - E \quad (\text{VII.4.3})$$

yazılabileceği kolaylıkla görülür. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - E &= \sum_{i=1}^3 m \dot{x}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + U(x_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + U(x_i) = L(x_i, \dot{x}_i) \end{aligned}$$

dir. Buna göre söz konusu varyasyon ilkesi de (VII.1.7) ve (VII.4.3) e binâen

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - E \right] dt = 0 \quad (\text{VII.4.4})$$

şeklinde ifâde olunabilecektir. Elektron, korunumlu bir alanda hareket ettiğinden toplam mekanik enerjisi de $[t_1, t_2]$ aralığında sâbittir. Bu itibarla bunun varyasyonu sıfır olacağından (VII.4.4)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - E \right] dt = \delta \int_A^B \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dx_i = \\
&= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^3 m \dot{x}_i \right) dx_i = 0
\end{aligned} \tag{VII.4.5}$$

şeklinde yazılır. Burada $dx_i = \dot{x}_i dt$ değişken dönüşümüyle zaman parametresi yok edilmiş ve integrasyon sınırları da t_1 ânına tekaabül eden A uzay noktasıyla t_2 ânına tekaabül eden B uzay noktasına dönüştürülmüş olduğundan, eğer bir değişken dönüşümü daha yapılır da s yay elemanı ithâl edilecek olursa (VII.4.5) in sağ yanındaki integralin integrantı

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 m \dot{x}_i dx_i &= \sum_{i=1}^3 m \frac{dx_i}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dx_i}{ds} ds \\
&= \sum_{i=1}^3 m \dot{s} \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 ds = m \dot{s} ds
\end{aligned} \tag{VII.4.6}$$

şeklinde yazılır; zirâ, hatırlanacağı gibi, aranan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ yörünge eğrisinin \mathbf{T} birim teğet vektörü, tanımı gereği,

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{ds} \mathbf{e}_i, \quad \text{ve} \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = 1$$

bağıntılarını gerçeklemektedir.

Söz konusu integranta s yay elemanının ithâliyle, yeni integrasyon sınırları da A ve B noktalarına tekaabül eden s_A ve s_B yay uzunlukları olur.

Öte yandan elektronun kinetik enerjisi için

$$E - U = T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

yazılabileceğinden

$$m \dot{s} = \sqrt{2m [E - U(\mathbf{r}(s))]} \tag{VII.4.7}$$

olur. Ve (VII.4.6) ile (VII.4.7) nin ışığı altında (VII.4.5) varyasyon ilkesi de

$$\delta S = \delta \int_{s_A}^{s_B} \sqrt{2m [E - U(\mathbf{r}(s))]} ds = 0 \tag{VII.4.8}$$

şekline girer. Eğer şimdi \mathbf{r}_0 keyfî seçilmiş bir sâbit yervektörü olmak üzere $\delta S = \sqrt{E - U(\mathbf{r}_0)} \cdot \delta \tau$ ve

$$n(\mathbf{r}(s)) = \sqrt{\frac{E - U(\mathbf{r}(s))}{E - U(\mathbf{r}_0)}} \quad (\text{VII.4.9})$$

vazedilirse (VII.4.8)

$$\delta\tau = \delta \int_{\mathbf{r}(S_1)}^{\mathbf{r}(S_2)} n(\mathbf{r}(s)) ds = 0 \quad (\text{VII.4.10})$$

şeklinde ifade edilebilir. (VII.4.9) ile tanımlanan $n(\mathbf{r}(s))$ büyüklüğüne *kırma indisi* ve τ ya da *optik yol* veyâ *eikonal* adı verilir.

Kırma indisi n ile verilen bir ortamda yayılan elektronun izleyeceği optik yolun minimum olması gerektiğine işaret eden (VII.4.10) varyasyon ilkesine *FERMAT ilkesi* denir.

FERMAT ilkesinin yalnızca elektron ya da herhangi başka bir yüklü tânecek optiği için değil fakat elektromagnetik dalgaların geometrik optiği için de geçerli olduğu gösterilir (bk. XI. BÖLÜM).

(VII.5) GEOMETRİK OPTİK İLE NOKTA DİNAMİĞİ ARASINDAKİ FORMEL BENZERLİK

Üzerine hiçbir kuvvetin etkemediği m kütleli bir maddî nokta göz önüne alalım. Buna tekaabül eden LAGRANGE fonksiyonu

$$L = T - U = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} p \frac{ds}{dt}$$

şeklinde olup bu hâl için HAMILTON varyasyon ilkesi de

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \rightarrow \delta \int_A^B p ds = 0 \quad (\text{VII.5.1})$$

şekline girer. Bu şekliyle, bu varyasyon ilkesine *MAUPERTUIS* (1698 - 1759) *ilkesi* adı verilir.

Öte yandan optikte, n kırma indisini haiz dispersif olmayan bir ortamda yayılan ışığın bu ortamda haiz olduğu u hızı, λ dalgaboyu, ν frekansı ve ışığın boşluktaki ($n = 1$) sâbit c yayılma hızı arasında

$$u = \lambda\nu = \frac{c}{n}$$

bağıntıları bulunduğundan bir önceki paragrafta sözü edilen FERMAT ilkesinin ifâdesi de, geometrik optik için,

$$\delta \int_A^B n ds = \delta \int_A^B \frac{c}{\lambda v} ds = 0 \rightarrow \delta \int_A^B \frac{ds}{\lambda v} = 0 \quad (\text{VII.5.2})$$

şekline bürünür.

Maddesel noktanın serbest hareketini veren (VII.5.1) *HAMİLTON ilkesi* ile ışığın kırıcı bir ortamda yayılmasını düzenleyen (VII.5.2) *FERMAT ilkesinin* formel bakımdan aynı oldukları ve her iki ifâdedeki integrantların da *sâbit* bir çarpan farkıyla birbirlerine eşit olacakları besbellidir. Bu integratların boyutsal analizi

$$[p] = M L T^{-1}, \quad \left[\frac{1}{\lambda v} \right] = L^{-1} T$$

verdiğinden, k ile söz konusu sâbit çarpanı göstererek

$$p = \frac{k}{\lambda v}$$

eşitliğinin yazılabilmesi için k nın boyutunun

$$[k] = M L^2 T^{-2}$$

şeklinde olması gerekeceği, yâni k nın bir enerji boyutunu haiz olması icâbettığı görülmektedir.

Yayılan ışığı karakterize eden fotonun enerjisi sâbit olup $E = h\nu$ dür. Şu hâlde $k = h\nu$ vazedilirse

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda} ; \text{veyâ } \lambda = \frac{h}{p}} \quad (\text{VII.5.3})$$

olur. Bu sonuç, *HAMİLTON* ve *FERMAT* ilkelerinin ışığı altında, maddî bir noktanın hareketinin, dalgaboyu $\lambda = h/p$ ile verilmiş bir dalganın hareketi gibi telâkki edilebileceği gibi, bir dalganın hareketinin de implusu $p = h/\lambda$ olan bir maddî nokta gibi telâkki olunabileceğini telkîn etmektedir. Böylelikle *dalga-madde düalitesini* aynı bir matematiksel şema içinde incelemek olanağı doğmuştur.

HAMİLTON ve *FERMAT* ilkeleri arasındaki bu formel benzerlik 1924 de *LOUIS DE BROGLIE* (doğ. 1897) tarafından kuvantum dalga mekaniğinin temellerinin vaz'ına yol açmıştır (Bk. XI. BÖLÜM).

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

VII.1. Dönel bir silindirin yüzeyinde herhangi iki nokta arasındaki en kısa yolun bir helis üzerinde bulunacağını, yâni başka bir deyimle söz konusu yüzey üzerindeki geodezik eğrilerinin helisler olduğunu, bir varyasyon problemi aracılığıyla gösteriniz.

VII.2. Bir ucu sâbit bir yayın diğer ucunda m kütleli bir maddî nokta bulunmaktadır. Böylece oluşturulmuş olan sarkacın hareket denklemlerini HAMILTON ilkesini doğrudan doğruya uygulayarak tesis ediniz.

VII.3. HAMILTON varyasyon ilkesini holonom olmayan sistemlere genişletiniz.

VIII. BÖLÜM

HAMILTON FORMALİZMİ

(VIII.1) HAMILTON HAREKET DENKLEMLERİ

(VI.6.16) ile verilmiş olan LAGRANGE hareket denklemleri q_i ler cinsinden *ikinci mertebeden* n adet diferansiyel denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sistemi meydana getirmektedirler. Böyle bir sistemi $2n$ değişken cinsinden fakat *birinci mertebeden* $2n$ adet diferansiyel denklemden oluşan bir sisteme indirmek her zaman mümkündür. Bu işlemi gerçekleştirebilmek üzere, önce, *kanonik impuls* diye isimlendireceğimiz ve

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII.1.1})$$

bağıntısıyla tanımlayacağımız yeni bir değişken ithâl edelim. LAGRANGE hareket denklemlerinden $dp_i/dt = \dot{p}_i$ nin de

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{VIII.1.2})$$

ile tanımlanacağı derhâl görülür. (VIII.1.1. ve 2) denklemleri $2n$ denklemden oluşan ve p_i ve \dot{p}_i lere göre çözümlenmiş bulunan bir denklem sistemi meydana getirmektedirler. Bu denklem sisteminin sağ yanları hâlâ q_i , \dot{q}_i ve t nin fonksiyonlarıdır. Amacımız, söz konusu diferansiyel denklem sistemini o türlü dönüştürmektir ki sol yanlar yalnızca \dot{p}_i ve \dot{q}_i lere göre çözümlenmiş, ve sağ yanlar da yalnızca p_i , q_i ve t nin fonksiyonu olmuş olsunlar. Böylece, sâdece birinci mertebeden kısmî türevli $2n$ adet diferansiyel denklemden oluşan ve çözümünü de, bundan dolayı, (VI.6.16) LAGRANGE hareket denklemlerinin çözümüne nisbetle muhakkak ki çok daha basit olacak olan bir denklem sistemi elde edilmiş olacaktır.

Bu programı gerçekleştirebilmek üzere önce $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ LAGRANGE fonksiyonunun tam diferansiyelini teşkil edelim :

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \end{aligned}$$

Buradan, sağdaki tam diferansiyeli sola geçirmek ve (VIII.1.1 ve 2) bağıntılarını da göz önünde tutmak sûretiyle

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\right) &= dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.3})$$

bulunur. Bu ifâdenin sol yanı bir tam diferansiyeldir; ve bu H gibi bir fonksiyonun tam diferansiyeli olarak telâkki olunabilir. İfâdenin sağ yanı ise bu tam diferansiyelin açık ifâdesini vermektedir. Buradan görüldüğü gibi sağ yanda yalnızca p_i, q_i ve t değişkenleri tam diferansiyelin ifâdesine katkıda bulunmaktadır. O hâlde (VIII.1.3) ile tanımlanmış olan H fonksiyonu yalnızca p_i, q_i ve t değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Bu sonucun ve (VIII.1.1) ile (VIII.1.3) ün ışığı altında

$$H = H(p_i, q_i; t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (\text{VIII.1.4})$$

olduğu anlaşılmış olur.

Şimdi $H = H(p_i, q_i; t)$ nin tam diferansiyelini teşkil edelim :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \quad (\text{VIII.1.5})$$

olur. (VIII.1.3) ile (VIII.1.5) in mukayesesinden de, derhâl,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \text{ve} \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (\text{VIII.1.6})$$

olacağı sonucu çıkar. Böylece

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}} \quad (\text{VIII.1.7})$$

sistemi sol yanları sâdece q_i veyâ p_i nin zamana göre birinci mertebeden türevini; sağ yanları ise sâdece p_i , q_i ve t ye bağlı bir fonksiyonu ihtivâ eden $2n$ adet diferansiyel denklemden oluşan bir sistem meydana getirir ki bu da tesis etmeğe ça-laştığımız sistemdir.

(VIII.1.7) denklemlerine *HAMILTON denklemleri* veyâ *kanonik hareket denklemleri* adı verilir. p_i ve q_i bağımsız değişkenlerine *birbirlerine eşlenik kano-nik impuls* ve *kanonik koordinat* denir.

(VIII.2) HAMILTON DENKLEMLERİNİN BİR VARYASYON İLKESİNDEN TÜRETİLMESİ

HAMILTON denklemlerini bir varyasyon ilkesinden hareketle de elde etmek mümkündür. Önce (VIII.1.4) tanım bağıntısından kezâ

$$L(q_i, \dot{q}_i; t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i; t) \quad (\text{VIII.2.1})$$

yazılabileceğine dikkati çekelim. Bundan sonra artık HAMILTON varyasyon ilkesi

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right\} dt = 0 \quad (\text{VIII.2.2})$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi bu varyasyon problemini çözen $H = H(p_i, q_i; t)$ fonksiyonunu tâyin etmek için ε serbest değişen sonsuz küçük bir parametre ve $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ile $\beta_i = \beta_i(t)$ fonksiyonları da $]t_1, t_2[$ açık aralığında keyfî değerler alan fakat

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i(t_1) &= \alpha_i(t_2) = 0 \\ \beta_i(t_1) &= \beta_i(t_2) = 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.2.3})$$

şartlarını gerçekleyen fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde

$$P_i(t) = p_i(t) + \varepsilon \alpha_i(t)$$

$$Q_i(t) = q_i(t) + \varepsilon \beta_i(t)$$

ile temsil edilen tek parametrelî eğri ailelerini göz önüne alalım.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right\} dt$$

integralini ekstremum kılan $p_i = p_i(t)$ ve $q_i = q_i(t)$ fonksiyonları bu eğri ailelerinin $\varepsilon = 0$ değerine tekaabül eden elemanlarıdır. Şimdi

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) \dot{Q}_i(t) = B(P_i, \dot{Q}_i; t)$$

olmak üzere

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ B(P_i, \dot{Q}_i; t) - H(P_i, Q_i; t) \right\} dt$$

fonksiyonunu göz önüne alıp bunu ε a göre türetelim. Bundan sonra $\varepsilon \rightarrow 0$ limitini alıp da bunu sıfıra eşitlersek sonuç (VIII.2.2) varyasyon ilkesinin ifâdesi olacaktır.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial B}{\partial P_j} \frac{dP_j}{d\varepsilon} + \frac{\partial B}{\partial \dot{Q}_j} \frac{d\dot{Q}_j}{d\varepsilon} \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{dP_j}{d\varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial Q_j} \frac{dQ_j}{d\varepsilon} \right) \right\} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\dot{Q}_j \alpha_j(t) + P_j \dot{\beta}_j(t) \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial P_j} \alpha_j(t) + \frac{\partial H}{\partial Q_j} \beta_j(t) \right) \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \alpha_j(t) + \sum_{j=1}^n p_j \dot{\beta}_j(t) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \beta_j(t) \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

Bu son ifâdede ortadaki terim kısmî integrasyonla ve (VIII.2.3) sınır şartları da göz önünde tutularak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \dot{\beta}_j(t) dt &= \left[\sum_{j=1}^n p_j \beta_j(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \dot{p}_j \beta_j(t) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \dot{p}_j \beta_j(t) dt \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonucun ışığı altında bir önceki ifâde

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \alpha_j(t) - \sum_{j=1}^n \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \beta_j(t) \right\} dt = 0$$

şeklini alır. α_j ve β_j ler $]t_1, t_2[$ açık aralığında tamâmen keyfi değerler alabildiklerinden bu ifâdenin gerçekleşebilmesi ancak integranttaki parantezlerin özdeş olarak sıfır olmalarıyla mümkün olur ki bu da

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

yâni HAMILTON hareket denklemlerini verir.

(VIII.3) HAMILTON FONKSİYONUNUN FİZİKSEL ANLAMI

Korunumlu bir sistem için potansiyel enerjinin $U = U(r)$ şeklinde sâdece koordinatların fonksiyonu olduğunu III. Bölümde görmüştük. Bu itibarla ve kanonik impulsun (VIII.1.1) ile verilmiş olan tanımını da göz önünde tutarak

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{VIII.3.1})$$

olur. Dik kartezyen koordinatlarda

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

dir. Genelleştirilmiş koordinatlar söz konusu olduğunda

$$x_i = x_i(q_j, t) \quad \text{ve} \quad \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (\text{VIII.3.2})$$

yazılabileceğinden kinetik enerjinin ifâdesi de

$$\begin{aligned} T &= \sum_k \sum_j \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &+ \sum_j \left(\sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \sum_j \sum_k a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c \end{aligned}$$

ye indirgenir. Eğer (VIII.3.2) dönüşüm formülleri t ye bağlı değilse T kinetik enerjisinin ifâdesi de yalnızca

$$T = \sum_i \sum_k a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (\text{VIII.3.3})$$

şeklinde \dot{q} ların kuvadratik bir fonksiyonu olur.

Bilindiği gibi EULER'in homogen fonksiyonlar hakkındaki teoremi, eğer f ile n -ninci mertebeden homogen bir fonksiyonu gösterirsek,

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f$$

olduğunu bildirir. Bunu 2. dereceden homogen bir ifâde olan (VIII.3.3) e uygularsak, (VIII.3.1) i dikkate alarak,

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i p_i \dot{q}_i = 2T \quad (\text{VIII.3.4})$$

olacak demektir. (VIII.1.4) ile verilen HAMILTON fonksiyonu ifâdesine (VIII.3.4) ü vazederek

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = 2T - T + U = T + U = E \quad (\text{VIII.3.5})$$

bulunur; yâni *korunumlu sistemler söz konusu olduğunda ve sistemin T kinetik enerjisinin de zamandan bağımsız ve \dot{q} ların kuvadratik bir fonksiyonu olması hâlinde sistemin HAMILTON fonksiyonu sistemin toplam mekanik enerjisine özdeş olur.*

Şimdi tekrar H ile L arasındaki bağıntılara dönelim. (VIII.1.4) e göre

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (\text{VIII.3.6})$$

dir. Buradan ve $\partial L / \partial \dot{q}_i = p_i$, ve HAMILTON hareket denklemlerine göre de $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ olduğunu da hesaba katarak kezâ

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i - H \quad (\text{VIII.3.7})$$

yazılabilir.

Eğer bir sistem için LAGRANGE fonksiyonu kendiliğinden

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = L \quad (\text{VIII.3.8})$$

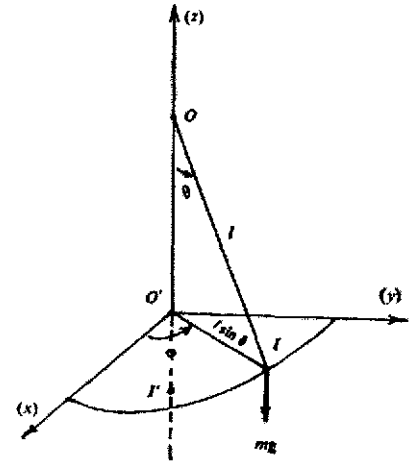
bağıntısını gerçekliyorsaydı (VIII.3.6) ya göre $H \equiv 0$ olur ve böyle bir sistemi HAMILTON formalizmi çerçevesi içinde incelemek de tabiidir ki artık mümkün olmaz.

(VIII.3.8) bağıntısı, EULER'in homogen fonksiyonlar hakkındaki teoremine binâen, bir sistemin HAMILTON formalizmi çerçevesi içinde incelenebilmesinin LAGRANGE fonksiyonunun \dot{q}_i ler cinsinden birinci mertebeden homogen bir fonksiyon olması hâlinde imkânsız olduğuna işaret etmektedir.

Benzer bir muhakeme, (VIII.3.7) bağıntısından hareketle de yapılır; ve neticede H HAMILTON fonksiyonunun p_i ler cinsinden birinci mertebeden homogen bir fonksiyon olması hâlinde sistemin LAGRANGE formalizmi çerçevesi içinde incelenemeyeceği anlaşılır.

Şimdi HAMILTON formalizmi aracılığıyla dinamik problemlerinin nasıl çözüldüklerine dair bir örnek vereceğiz.

ÖRNEK : — *Küresel bir sarkacın hareket denklemlerini HAMILTON formalizmi çerçevesi içinde tesis ediniz.*



Şekil : VIII.1 — Küresel sarkaç; $OI = O'I' = l$.

* Belirli bir (E) eğrisi üzerinde hareket eden m kütleli bir maddî noktanın T kinetik enerjisi, s ile (E) nin yay parametresi gösterildiğinde,

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

dir. Hâlbuki l yarıçaplı bir küre üzerine çizilmiş bir eğrinin yay elemanı

$$ds^2 = l^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

olduğundan böyle bir küre üzerinde kalmaya mahkûm ve yalnızca Arzın gravitasyon kuvvetine tâbî bir maddî noktanın kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

ve potansiyel enerjisi de

$$U = mg(OI' - OO') = mgl(1 - \cos \theta)$$

olur. Buna göre sistemin LAGRANGE fonksiyonu

$$L = L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgl(1 - \cos \theta)$$

olacağından kanonik impulslar olarak

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{ml^2}$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{ml^2 \sin^2 \theta}$$

ve sistemin HAMILTON fonksiyonu olarak da

$$\begin{aligned} H = H(p_{\theta}, p_{\varphi}, \theta, \varphi) &= p_{\theta} \dot{\theta} + p_{\varphi} \dot{\varphi} - L \\ &= \frac{p_{\theta}^2}{ml^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{ml^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{p_{\theta}^2}{m^2 l^4} + \frac{p_{\varphi}^2 \sin^2 \theta}{m^2 l^4 \sin^4 \theta} \right) \\ &\quad + mgl(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2ml^2} \left(p_{\theta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre küresel sarkacın kanonik hareket denklemleri

$$(A) \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{ml^2}, \quad (B) \quad \dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta} p_{\varphi}^2 - mgl \sin \theta$$

$$(C) \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{ml^2 \sin^2 \theta}, \quad (D) \quad \dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

olur. Eğer HAMILTON fonksiyonunda koordinatlardan biri bulunmuyorsa bu takdirde buna eşlenik kanonik impulsun da sâbit olacağı (yani korunacağı) anlaşılmaktadır. Bu özelliği haiz koordinatlara devrî koordinatlar denir. (A) yı zamana göre türeterek elde edilecek olan \dot{p}_{θ} nın değeri (B) ye yerleştirilirse küresel sarkacın hareket denklemi olarak

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} \left[\frac{\cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta} p_{\varphi}^2 - mgl \sin \theta \right]$$

bulunur. (D) den $p_{\varphi} = \text{sâbit}$ bulunmuş olduğundan (C) denklemi de $\theta = \text{sâbit}$ 'e tekaabül eden yatay düzlem için geçerli olan alanlar kuralını verir. ■

ALİŖTIRMALAR VE PROBLEMLER

VIII.1. $U = U(r, \theta, \varphi)$ potansiyelinden türeyen bir kuvvet alanında hareket eden m kütleli bir tâneçiğin HAMILTON hareket denklemlerini (r, θ, φ) küresel koordinatlarında ifâde ediniz.

VIII.2. α açısıyla belirlenmiŖ eğik bir düzlem üzerindeki m kütleli bir tâneçiğin sürtünmesiz hareketinin HAMILTON denklemlerini çıkarınız.

VIII.3. Üç boyutlu anizotropik bir harmonik osilâtörün HAMILTON hareket denklemlerini yazınız.

VIII.4. İki cisim problemini HAMILTON formalizmine göre inceleyiniz.

VIII.5. a) Bir eksen etrafında düzgün bir dönme hareketi yapan m kütleli bir tâneçiğin p impulsunu ve buna tekaabül eden LAGRANGE fonksiyonuna dayanarak da E toplam mekanik enerjisini hesaplayınız.

b) Tâneçiğin H HAMILTON fonksiyonunun ifâdesini tesis ediniz.

IX. BÖLÜM

DÖNÜŞÜMLER TEORİSİ VE İNVARYANS ÖZELLİKLERİ

(IX.1) KANONİK DÖNÜŞÜMLER

Herhangi bir mekanik sistem için ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$H = H(p_i, q_i; t), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (\text{IX.1.1})$$

HAMİLTON fonksiyonu ve hareket denklemleri verilmiş olsun. Bu takdirde, (IX.1.1) hareket denklemlerinin şeklen invaryant kalmaları şartı altında

$$\boxed{P_k = P_k(p_i, q_i; t), \quad Q_k = Q_k(p_i, q_i; t)} \quad (\text{IX.1.2})$$

$(k = 1, 2, \dots, n)$

şeklindeki sürekli bir koordinat dönüşümüne *kanonik dönüşüm* adı verilir. Bu takdirde (IX.1.1) denklemlerinin de $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\boxed{\bar{H} = \bar{H}(P_k, Q_k; t), \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}} \quad (\text{IX.1.3})$$

şeklinde olmaları gereklidir. Buradaki dönüşmüş \bar{H} HAMİLTON fonksiyonu, (IX.1.2) nin ters dönüşümü olan

$$p_i = p_i(P_k, Q_k; t), \quad q_i = q_i(P_k, Q_k; t) \quad (\text{IX.1.4})$$

ifâdelerinin H ya yerleştirilmesiyle, yâni

$$\begin{aligned} H &= H(p_i, q_i; t) = H(p_i(P_k, Q_k; t), q_i(P_k, Q_k; t); t) \\ &= \bar{H}(P_k, Q_k; t) \end{aligned} \quad (\text{IX.1.5})$$

olarak elde edilmiş bulunmaktadır.

Besbellidir ki herhangi bir (IX.1.2) dönüşümü mutlaka (IX.1.3) kanonik denklemlerini vermez. Şimdi amacımız, sonunda (IX.1.3) denklemlerinin elde edilebilmesi için (IX.1.2) dönüşümlerinin ne gibi özelliklere sâhip olmaları gerektiğini tesbit etmektir.

(VIII.2) paragrafından, HAMILTON denklemlerinin

$$\delta S = \delta \int L dt = \delta \int \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right\} dt = 0 \quad (\text{IX.1.6})$$

gibi bir varyasyon ilkesinden elde edilebileceklerini bilmekteyiz. (IX.1.2) gibi bir dönüşüm sonucu gene HAMILTON denklemlerinin elde edilmesi için mütekaabil varyasyon ilkesinin de

$$\delta \int \bar{L} dt = \delta \int \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \bar{H} \right\} dt = 0 \quad (\text{IX.1.7})$$

şeklinde olması gereklidir. Nitekim (IX.1.7) den hareketle (VIII.2) paragrafındaki yöntem uygulanacak olursa sonunda (IX.1.3) kanonik denklemleri elde edilir.

Ancak (VI.8) paragrafından biliyoruz ki (IX.1.6) ve (IX.1.7) varyasyon ilkeri, eğer integrantları birbirlerinden, en çok koordinatların ve zamanın bir fonksiyonu olan Ω gibi bir fonksiyonun tam diferansiyeli kadar fark ederlerse eşdeğerdirler. Şu hâlde, kanonik bir dönüşüm söz konusu olduğunda,

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \bar{H} dt + d\Omega \quad (\text{IX.1.8})$$

olmalıdır. Her kanonik dönüşüm böyle bir Ω fonksiyonu aracılığıyla karakterize edilir. Bu fonksiyona söz konusu *kanonik dönüşümün doğurgan fonksiyonu* adı verilir.

(IX.1.8) şartı yeniden düzenlenecek olursa

$$d\Omega = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + (\bar{H} - H) dt \quad (\text{IX.1.9})$$

ifâdesinden Ω nın sâdece q_i , Q_i ve t değişkenlerine bağlı yâni $\Omega = \Omega(q_i, Q_i; t)$ şeklinde olduğu sonucu çıkar. Buna göre, kezâ

$$d\Omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \Omega}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt \quad (\text{IX.1.10})$$

yazılabileceğinden (IX.1.9) ve (IX.1.10) un karşılaştırılmasından

$$p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial Q_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (\text{IX.1.11})$$

olduğu bulunur. Belirli bir $\Omega = \Omega(q_i, Q_i; t)$ fonksiyonu için (IX.1.11) bağıntıları eski (p_i, q_i) değişkenleriyle yeni (P_i, Q_i) değişkenleri arasındaki ilişkileri temsil etmekte ve yeni HAMILTON fonksiyonunun da ifadesini vermektedirler.

Ancak HAMILTON denklemlerini invaryant bırakan yegâne kanonik dönüşüm $\Omega = \Omega(q_i, Q_i; t)$ doğurgan fonksiyonuyla karakterize edilen dönüşüm değildir. (IX.1.9) da $d\Omega$ yerine, meselâ,

$$d\Phi = d\left(\Omega + \sum_{i=1}^n P_i Q_i\right)$$

de alınabilir. Φ fonksiyonunun da (IX.1.6) ve (IX.1.7) varyasyon ilkelerinin özdeş olmaları için gerekli olan şartı gerçeklediği besbellidir. Buna göre (IX.1.9)

$$\begin{aligned} d\Phi = d\left(\Omega + \sum_{i=1}^n P_i Q_i\right) &= \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + \sum_{i=1}^n P_i dQ_i \\ &+ \sum_{i=1}^n Q_i dP_i + (\bar{H} - H) dt \end{aligned}$$

şekline girer ve buradan da

$$d\Phi = \sum_{i=1}^n p_i dq_i + \sum_{i=1}^n Q_i dP_i + (\bar{H} - H) dt \quad (\text{IX.1.12})$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise Φ doğurgan fonksiyonunun $\Phi = \Phi(P_i, q_i; t)$ şeklinde olduğunu göstermektedir. Buna göre kezâ

$$d\Phi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} dP_i \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt \quad (\text{IX.1.13})$$

yazılabileceğinden (IX.1.12) ve (IX.1.13) ün karşılaştırılmasından

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{IX.1.14})$$

olduğu bulunur.

Şimdi doğurgan fonksiyon olarak

$$d\Psi = d\left(\Omega - \sum_{i=1}^n p_i q_i\right)$$

alacak olursak benzer hesaplardan sonra $\Psi = \Psi(p_i, Q_i; t)$ olduğu ve kezâ

$$q_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial Q_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (\text{IX.1.15})$$

olduğu bulunur.

Ve nihâyet doğurgan fonksiyon olarak

$$d\Theta = d\left(\Omega - \sum_{i=1}^n p_i q_i + \sum_{i=1}^n P_i Q_i\right)$$

alacak olursak $\Theta = \Theta(p_i, P_i; t)$ olduğu ve kezâ

$$q_i = -\frac{\partial \Theta}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Theta}{\partial P_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (\text{IX.1.16})$$

olduğu bulunur.

Böylece (IX.1.6) ve (IX.1.7) varyasyon ilkelerinin özdeşliğini temin eden mümkün bütün kanonik dönüşümlerin doğurgan fonksiyonları elde edilmiş olmaktadır.

Ayrıca (IX.1.11), (IX.1.14, 15 ve 16) bağıntılarından hareketle de

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \\ \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.1.17})$$

bağıntıları da tesbit edilir. Bu bağıntılar bir dönüşümün kanonik olup olmadığının kriterleridir.

Gördüğümüz gibi bütün (IX.1.17) bağıntılarının varlığı tek bir doğurgan fonksiyonun varlığına bağlanmaktadır. Aslında

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega(q_i, Q_i; t) \\ \Phi &= \Phi(P_i, q_i; t) = \Omega + \sum_{i=1}^n P_i Q_i \\ \Psi &= \Psi(p_i, Q_i; t) = \Omega - \sum_{i=1}^n p_i q_i \\ \Theta &= \Theta(p_i, P_i; t) = \Omega - \sum_{i=1}^n (p_i q_i - P_i Q_i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.1.18})$$

fonksiyonlarından birisini bu doğurgan fonksiyon olarak almak mümkündür; zirâ geri kalan diğer üçü birbirlerinden bağımsız olmadıklarından (IX.1.18) bağıntıları aracılığıyla hemen inşâ edilebilirler.

UYGULAMA :

Kanonik bir dönüşüm, eğer yeni değişkenler cinsinden ifade edilen $\bar{H} = \bar{H}(P_k, Q_k)$ HAMILTON fonksiyonuna daha basit bir şekil veriyorsa ilgi çekicidir; çünkü bu takdirde kanonik denklemlerin integrasyonu da basitleşmiş olur. Kanonik bir dönüşüm \bar{H} yi yalnızca P_k ların fonksiyonu kılsa, yâni böylece bütün Q_k lar devri koordinatlar olsalar, kanonik denklemler

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = 0$$

şekline indirgenmiş olurlardı ki buradan derhâl

$$P_k = \alpha_k = \text{sâbit}$$

elde edilirdi. Böylece $\bar{H} = \bar{H}(\alpha_k)$ şeklinde olacağından $\partial \bar{H} / \partial P_k = \partial \bar{H} / \partial \alpha_k$ da Q_k nın fonksiyonu olamaz; olsa olsa β_k gibi bir sâbite eşit olur. Buna göre de

$$Q_k = \beta_k (t - t_0)$$

yazılabilir. t_0 burada bir integrasyon sâbitidir.

Şimdi basit bir misâl olmak üzere harmonik osilâtörü ele alalım :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2, \quad U = \frac{k}{2} q^2$$

olduğundan

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad \text{ve} \quad T = \frac{p^2}{2m}$$

bulunur. Buna göre harmonik osilâtörün HAMILTON fonksiyonu

$$H = H(p, q) = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \quad (\text{A})$$

olur. Şimdi öyle bir kanonik dönüşüm arayalım ki bu H yi yalnızca P ye bağlı basit bir şekle indirgesin; ve meselâ β bir sâbiti göstermek üzere

$$H(p, q) = \bar{H}(P) = \beta P \quad (\text{B})$$

olsun. Kanonik denklemler de, böylece,

$$\dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = \beta$$

olurlar; buradan

$$P = \alpha = \text{sâbit} \quad \text{ve} \quad Q = \beta (t - t_0)$$

bulunur. t_0 gene bir integrasyon sâbitidir. (A) ve (B) den

$$p = \sqrt{2m \left(\beta P - \frac{k}{2} q^2 \right)} = p(q, P)$$

bulunur ki bu da bize $\Phi = \Phi(q, P)$ şeklinde bir doğurgan fonksiyon seçmemizi telkin eder. Şu hâlde (IX.1.14) e göre

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P} \quad (\text{C})$$

olacak demektir. $p = p(q, P)$ olduğu göz önünde tutularak ilk denklem

$$\Phi = \int_0^q p(q', P) dq' + f(P) = \int_0^q \sqrt{2m \left(\beta P - \frac{k}{2} q'^2 \right)} dq' + f(P) \quad (\text{D})$$

şeklinde integre edilir. Ancak, bizim için bu genel kanonik dönüşüm değil de bizi (B) ifâdesine sevk edebilecek herhangi bir kanonik dönüşüm dahi yeterli olduğundan rahatlıkla $f(P) \equiv 0$ alınabilir. Bu şart altında (D) yi (C) nin ikinci denklemine yerleştirerek

$$Q = \int_0^q \frac{\partial p(q', P)}{\partial P} dq' = Q(q, P)$$

bulunur ki böylece elde edilmiş olan

$$p = p(q, P) \quad \text{ve} \quad Q = Q(q, P)$$

ifâdeleri aranan kanonik dönüşümün ne şekilde olması gerektiğine işâret ederler.

(IX.2) HAMILTON - JACOBI DENKLEMİ

Şimdi (VIII.2.2) varyasyon ilkesinin dayanağı olan

$$S = \int_0^t L dt' = \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right\} dt' \quad (\text{IX.2.1})$$

aksiyonunu göz önüne alalım. Burada kolaylık olsun diye integralin alt limiti sıfır alınmış olup bu, zaman ekseninin uygun bir kaydırılmasına tekaabül eden ve genelliği bozmayan bir husustur. S yi t ye göre türeterek

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = L \quad (\text{IX.2.2})$$

ve buradan da

$$dS = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n - H dt \quad (\text{IX.2.3})$$

olması gerektiği tesbit edilmiş olur. Bu son bağıntı S aksiyonunun

$$\boxed{S = S(q_1, q_2, \dots, q_n; t)} \quad (\text{IX.2.4})$$

şeklinde yalnızca q_i koordinatlarıyla t zamanının bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Öte yandan (IX.2.4) den tam diferansiyel olarak

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial S}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (\text{IX.2.5})$$

yazılabildiğinden (IX.2.3) ve (IX.2.5) in karşılaştırılmasından

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i} \quad (\text{IX.2.6})$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

olduğu tesbit edilmiş olur.

$H = H(p_i, q_i; t)$ şeklinde olduğundan (IX.2.6) denklemlerinin ilki diğerleri aracılığıyla açıkça yazılacak olursa

$$\boxed{H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad (\text{IX.2.7})$$

bağıntısı elde edilmiş olur. Bu kısmi türevli diferansiyel denkleme HAMILTON-JACOBI (1804-1851) diferansiyel denklemi adı verilir.

Korunumlu ve kinetik enerjisi de zamana bağlı olmayan bir sisteme tekaabül eden aksiyon, $L = T - U = T - (E - T) = 2T - E$ yazılabildiğinden

$$S(q_i; t) = \int_0^t L dt' = \int_0^t 2T dt' - Et \quad (\text{IX.2.8})$$

dir. (VIII.3.4) e göre

$$S_0(q_i) = \int_0^t \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \int_0^t 2T dt' \quad (\text{IX.2.9})$$

vazedilirse her iki tarafın da önce zamana göre türevini ve sonra da tam diferansiyelini teşkil ederek S_0 ın gerçekten de t yi açıkça ihtivâ etmediği görülebilir. Bu son iki bağıntı arasındaki ilişkinin

$$\boxed{S(q_i; t) = S_0(q_i) - Et} \quad (\text{IX.2.10})$$

şeklinde olduğu gözükmektedir. Eğer (IX.2.10) bağıntısı (IX.2.7) ye yerleştirilirse, korunumlu ve zamana bağlı olmayan bir sistemin HAMILTON-JACOBI denklemi olarak

$$\boxed{H \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n; t \right) = E} \quad (\text{IX.2.11})$$

ifâdesi elde edilmiş olur.

Geçerken şuna da işaret edelim ki (IX.2.9) aksiyonu *MAUPERTUIS aksiyonu* adını alır. Buna tekaabül eden varyasyon ilkesine de *MAUPERTUISnin en küçük aksiyon ilkesi* denildiğini (VII.5) den bilmekteyiz.

$S = S(q_i, t)$ fonksiyonuna *HAMILTON'un asal fonksiyonu* ve $S_0 = S_0(q_i)$ fonksiyonuna da *HAMILTON'un karakteristik fonksiyonu* da denir.

Şimdi öyle bir kanonik dönüşüm arayalım ki \bar{H} dönüşmüş HAMILTON fonksiyonu özdeş olarak sıfır olsun. Bu takdirde hareket denklemleri

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \equiv 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} \equiv 0 \quad (\text{IX.2.12})$$

olacağından bu dönüşüm *dönüşmüş koordinatları da impulsları da hep sâbitlerden ibâret* kılacaktır. Ayrıca bu kanonik dönüşümün doğurgan fonksiyonu meselâ F ise H ile \bar{H} arasındaki bağıntı da

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0 \quad (\text{IX.2.13})$$

olacaktır. Eğer F doğurgan fonksiyonu eski q_i koordinatlarının, yeni P_i impulslarının ve t zamanının fonksiyonu olarak, yâni $F = F(q_i, P_i; t)$ şeklinde seçilirse (IX.1.14) e göre

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

olacağından bu ifâdeleri (IX.2.13) e yerleştirmekle

$$\bar{H} = H \left(\frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n; t \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (\text{IX.2.14})$$

bulunur ki bunun (IX.2.7) ile karşılaştırılması dönüşmüş HAMILTON fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasını sağlayan kanonik dönüşümün doğurgan fonksiyonunun $F = S = S(q_i, t)$ HAMILTON'un asal fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Şu halde gene (IX.1.14) dolayısıyla

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \text{ve} \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \quad (\text{IX.2.15})$$

ve

$$S = S(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n; t) \quad (\text{IX.2.16})$$

olduğu anlaşılmış olur.

(IX.3) POISSON PARANTEZLERİ

$f = f(p_i, q_i; t)$ şeklinde koordinatların, impulsların ve zamanın sürekli türetilen bir fonksiyonu göz önüne alındığında bunun zamana göre tam türevi

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

veyâ HAMILTON hareket denklemleri dolayısıyla

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (\text{IX.3.1})$$

olur. Burada

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = [H, f] \quad (\text{IX.3.2})$$

ifâdesine H ve f büyüklükleri için *POISSON parantezi* denir. Buna göre (IX.3.1)

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]} \quad (\text{IX.3.3})$$

şekline girer.

Bir sistemin hareketi esnâsında dinamik değişkenlerin, değerleri değişmeyen fonksiyonlarına *hareket sâbitleri* denildiği bilinmektedir. (IX.3.3) ifâdesi, bize, f nin bir hareket sâbiti ($df/dt \equiv 0$) olması şartının

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] \equiv 0 \quad (\text{IX.3.4})$$

şeklinde ifâde edilebileceğini ve, hele, eğer f zamana açıkça bağlı değilse

$$[H, f] \equiv 0, \quad (\text{IX.3.5})$$

yâni t yi açıkça ihtivâ etmeyen bir f büyüklüğünün bir sistemin hareket sâbiti olabilmesi için bunun, sistemin HAMILTON fonksiyonuna göre POISSON parantezinin sıfır olması gerektiğini göstermektedir. (IX.3.5) de sırasıyla $f = q_i$ ve $f = p_i$ alınacak olursa, kolaylıkla,

$$\boxed{\dot{q}_i = [H, q_i] \quad \text{ve} \quad \dot{p}_i = [H, p_i]} \quad (\text{IX.3.6})$$

olduğu tesbit edilir.

Ayrıca, gene, sürekli ve sürekli türetilbilir olmak şartları altında $f = f(p_i, q_i; t)$ ve $g = g(p_i, q_i; t)$ fonksiyonları için de POISSON parantezi

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (\text{IX.3.7})$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] \quad (\text{IX.3.8})$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] \equiv 0 \quad (\text{IX.3.9})$$

olduğu da gösterilir. Bu son bağıntıya *JACOBI özdeşliği* denir.

Ayrıca

$$\left. \begin{aligned} [f, g] &= -[g, f] \\ [p_i, p_k] &= 0 \\ [q_i, q_k] &= 0 \\ [p_i, q_k] &= \delta_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.3.10})$$

bağıntıları da kolaylıkla tesis edilir.

(IX.4) POISSON PARANTEZLERİNİN KANONİK DÖNÜŞÜMLERE GÖRE İNVARİYANS ÖZELLİKLERİ

Şimdi, gene,

$$q_i = q_i(P_k, Q_k) \quad , \quad p_i = p_i(P_k, Q_k) \quad (\text{IX.4.1})$$

şeklinde bir kanonik dönüşümde HAMILTON fonksiyonu

$$H(p_i, q_i; t) = H(p_i(P_k, Q_k), q_i(P_k, Q_k); t) = \bar{H}(P_k, Q_k; t) \quad (\text{IX.4.2})$$

ve kanonik denklemler de

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} & \rightarrow & \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} & \rightarrow & \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.4.3})$$

olacağına işaret ettikten sonra ters dönüşüm için de

$$Q_k = Q_k(p_i, q_i) \quad , \quad P_k = P_k(p_i, q_i) \quad (\text{IX.4.4})$$

ve kezâ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} &= \dot{Q}_k = \sum_i \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \\ -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} &= \dot{P}_k = \sum_i \left(\frac{\partial P_k}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.4.5})$$

yazılacağına dikkati çekelim. Buna göre

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial \bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right)$$

olacaktır. Bu ifâdeleri (IX.4.5) e yerleştirirsek

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = \dot{Q}_k &= \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} \right) \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \\ &+ \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} \right) \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = \dot{P}_k = & -\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} \right) \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \\
 & -\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} \right) \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son iki bağıntının sağ yanlarının sol yanlarına eşit olabilmeleri için mutlaka

$$\left. \begin{aligned}
 [P_j, Q_k] &= \sum_i \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) = \delta_{kj} \\
 [Q_j, Q_k] &= \sum_i \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right) = 0 \\
 [P_j, P_k] &= \sum_i \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.4.6})$$

olması gereklidir. Şu hâlde yeni kanonik değişkenler için de, eskileri için de POISSON parantezlerinin değerlerinin korunduğu, gerek (IX.3.7) den gerekse (IX.4.6) dan görülmektedir.

Şimdi gene (IX.4.4) şeklindeki kanonik bir dönüşümde f ve g gibi iki fonksiyonun

$$\left. \begin{aligned}
 f(p_i, q_i) &= f(p_i(P_k, Q_k), q_i(P_k, Q_k)) = F(P_k, Q_k) \\
 g(p_i, q_i) &= g(p_i(P_k, Q_k), q_i(P_k, Q_k)) = G(P_k, Q_k)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.4.7})$$

şeklinde dönüşmüş olacaklarına dikkat edelim. Buna göre ve (IX.3.6) tanım bağıntısına göre

$$\begin{aligned}
 [f, g] &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

olur. Parantezleri açıp terimleri düzenler, ve (IX.4.6) yı da göz önünde tutarsak

$$\begin{aligned}
[f, g] &= \sum_i \sum_j \sum_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) + \right. \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \right) + \\
&\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \right\} \\
&= \sum_j \sum_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} [P_j, P_k] + \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} [Q_j, Q_k] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} - \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_j} \right) [P_j, Q_k] \right\} \\
&= \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} - \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_j} \right) \delta_{jk} \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_k} - \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_k} \right) \\
&= [F, G] \tag{IX.4.8}
\end{aligned}$$

bulunur ki bu da kanonik bir dönüşümde POISSON parantezlerinin değerlerinin korunduğunu gösterir; ve dolayısıyla da hareket sabitlerinin de kanonik dönüşümlerde korunduklarının ispâtını teşkil eder.

(IX.5) SONSUZ KÜÇÜK KANONİK DÖNÜŞÜMLER

Eğer $i = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

şeklinde sürekli bir koordinat dönüşümü verilirse, ϵ koordinatlardan bağımsız bir parametre olmak üzere

$$y_i = f_i(\epsilon; x_1, \dots, x_n) \tag{IX.5.1}$$

şeklindeki dönüşümler demetinin

$$dy_i = \frac{\partial f_i}{\partial \epsilon} d\epsilon \tag{IX.5.2}$$

diferansiyeline *sonsuz küçük bir dönüşüm* denir.

ε parametresinin $d\varepsilon$ luk sonsuz küçük bir artışı için y_i de dy_i kadar artarsa bu,

$$g_i(y_1, \dots, y_n) = \frac{\partial f_i(\varepsilon; y_1, \dots, y_n)}{\partial \varepsilon}$$

olmaya, yâni $\partial f_i / \partial \varepsilon$ un ifâdesinde x_1, \dots, x_n yerine ε un verilen değerine tekaabül eden y_1, \dots, y_n vazetmek sûretiyle

$$y_i + dy_i = y_i + \varepsilon \cdot dg_i(y_1, \dots, y_n)$$

olmasına da eşdeğerdir.

Şimdi tam diferansiyeli

$$d\Phi = \sum_{i=1}^n p_i dq_i + \sum_{i=1}^n Q_i dP_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} dP_i$$

ile belirlenen $\Phi = \Phi(P_i, q_i)$ şeklinde skleronom bir kanonik dönüşüm verilmiş olsun. Buna göre

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad \text{ve} \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \quad (\text{IX.5.3})$$

olacaktır. Eğer Φ doğurganı

$$\Phi = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \varepsilon \cdot F(q_i, P_i) \quad (\text{IX.5.4})$$

şeklinde seçilirse, son iki formülden, $\varepsilon = 0$ in özdeş dönüşüme tekaabül ettiği ve $\varepsilon \neq 0$ için de

$$p_i = P_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} d\varepsilon, \quad Q_i = q_i + \frac{\partial F}{\partial P_i} d\varepsilon \quad (\text{IX.5.5})$$

şeklinde *sonsuz küçük bir kanonik dönüşümün* söz konusu olduğu görülür.

(IX.5.5) den

$$Q_i - q_i = dq_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} d\varepsilon \quad \text{ve} \quad P_i - p_i = dp_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i} d\varepsilon \quad (\text{IX.5.6})$$

yazılabilir. Bu ifâdeleri eğer

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt$$

kanonik denklemleriyle mukayese edersek bu kanonik denklemleri, H HAMILTON fonksiyonunun sonsuz küçük bir kanonik dönüşümün doğurganı olduğu tek bir t

parametresine bağlı özel bir (skleronom !!) kanonik dönüşüm olarak yorumlamak mümkün olur.

Şimdi $G = G(p_i, q_i)$ diye bir fonksiyon verildiğinde bunun sonsuz küçük bir kanonik dönüşümde nasıl değişeceğini yâni dG diferansiyelini araştıralım; (IX.5.6) bağıntılarını da göz önünde tutarak

$$\begin{aligned} dG &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i \right) \\ &= d\epsilon \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = [F, G] \cdot d\epsilon \end{aligned} \quad (\text{IX.5.7})$$

bulunur. Özellikle $G \equiv H$ alınırca doğurganı F olan sonsuz küçük bir kanonik dönüşüm için

$$dH = [F, H] d\epsilon \quad (\text{IX.5.8})$$

olacağı görülür. H HAMILTON fonksiyonunun dH değişiminin böyle bir dönüşümde sıfır olması yâni H nin değerinin göz önüne alınan sonsuz küçük kanonik dönüşümde invaryant kalması için $[F, H] = 0$ olması yâni, (IX.3) paragrafından bildiğimize göre, F nin bir hareket sâbiti olması gereklidir.

(IX.6) KANONİK DENKLEMLERİN BAZI SİMETRİ VE İNVARYANS ÖZELLİKLERİ

Fiziksel sistemlerin ve özellikle mekanik sistemlerin matematiksel incelenmesi, keyfî olarak seçilmiş de olsalar, bir koordinat sisteminin ve bir de zaman ölçeğinin göz önünde bulundurulmasını ve olayların bunlara izâfe edilmelerini zorunlu kılar. Bir koordinat sisteminde gerek orijin gerekse koordinat eksenleri uzayın diğer noktalarından belirgin bir şekilde ayrı tutulmuş görünürler. Ayrıca, kullanılan zaman ölçeğinin orijini de bütün ânların kendisine izâfe edildiği özel bir duruma sâhiptir.

Çoğu kere, incelenen mekanik probleminin mâhiyeti gerek koordinat sisteminin seçimini gerekse zaman başlangıcının seçimini dikte eder. Fakat öyle hâller vardır ki sistemi tasvir eden matematik ifâdeler bazı koordinat dönüşümlerine veyâ zaman ölçeğine bağlı olmaksızın geçerli olmaya, şekillerini korumaya devam edebilirler; meselâ, NEWTON'un hareket kaanûnunun, birbirlerine göre düzgün doğrusal hareket yapan *eylemsizlik sistemlerinde* korunduğu gibi.

Mekanik bir sistemi tasvir eden hareket denklemlerinin koordinat sistemine de, zaman ölçeğine de, koordinat eksenlerine de ve eylemsizlik sistemlerine (yâni birbirlerine nazaran düzgün doğrusal hareket yapan sistemlere) de bağlı olma-

maları yâni bütün bu dönüşümlere nazaran şeklen invaryant kalmaları hâlinde göz önüne alınan sisteme *kapalı sistem* adı verilir.

Kapalı mekanik sistemleri tasvir eden denklemlerin bu tür dönüşümlerde *kovaryant* oldukları söylenir.

Fiziksel bir sistemin belirli bir *dönüşüm grubuna* göre haiz olduğu invaryans özelliklerine, o sistemi tasvir eden matematik şemanın *simetri özellikleri* adı verilir.

Şimdi N adet maddî noktadan oluşan bir sistemi dik kartezyen koordinatlara izâfe edelim. Buna göre sistemin q_i genelleştirilmiş koordinatları $3N$ tâne olacaktır. $k = 1, 2, \dots, N$, noktaları numaralayan indis; ve $\mu = 1, 2, 3$ de kartezyen bileşenleri gösteren indis olmak üzere $q_i = x_{k\mu}$ vazedelim. Eğer sonsuz küçük bir kanonik dönüşümün doğurgan fonksiyonu olarak sistemin

$$F = P_\mu = \sum_{k=1}^N m_k \dot{x}_{k\mu} = \sum_{k=1}^N p_{k\mu}$$

ile tanımlanan toplam impulsun μ -nüncü bileşenini seçersek, (IX.5.5) e göre

$$dp_i = dp_{k\mu} = 0 \quad \text{ve} \quad dq_i = dx_{k\mu} = \delta_{k\mu} d\varepsilon$$

bulunur. Bu, göz önüne alınan dönüşümün, sistemin bütün noktalarının μ doğrultusunda sonsuz küçük bir ötelenmeye tâbî tutulmalarına delâlet eden bir sonsuz küçük öteleme dönüşümü olduğunu göstermektedir.

Eğer H HAMILTON fonksiyonu μ doğrultusunda bir öteleme dönüşümüne göre invaryant ise bu takdirde H nın bu dönüşümdeki değişimi sıfır olacak, yâni (IX.5.8) e göre

$$dH = [P_\mu, H] \cdot d\varepsilon = 0$$

veyâ $[P_\mu, H] = 0$ olacaktır. Hâlbuki (IX.3.4) genel formülüne göre bu

$$\frac{dP_\mu}{dt} = [P_\mu, H] = 0 \rightarrow P_\mu = \alpha_\mu = \text{sâbit}$$

demektir. Şu hâlde : *eğer bir sistemin HAMILTON fonksiyonu bir öteleme dönüşümünde invaryant kalıyorsa sistemin toplam impulsunun öteleme doğrultusundaki bileşeni korunur.*

Şimdi de N maddî noktadan oluşan aynı sistemin toplam dönme impulsunu göz önüne alalım :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3$ olmak ve dik kartezyen eksenlere delâlet etmek üzere L nin bileşenleri

$$L_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N (p_{i\mu} x_{i\nu} - p_{i\nu} x_{i\mu})$$

olur. Şimdi, μ ve ν sâbit olmak üzere,

$$F = L_{\mu\nu}$$

vazedelim. Buna göre (IX.5.6) ya göre

$$dq_i = (\delta_{\lambda\nu} x_{i\mu} - \delta_{\lambda\mu} x_{i\nu}) d\epsilon$$

$$dp_i = (\delta_{\lambda\nu} p_{i\mu} - \delta_{\lambda\mu} p_{i\nu}) d\epsilon$$

bulunur. Bu, göz önüne alınan dönüşümün, sistemin bütün noktalarının (μ, ν) düzleminde sonsuz küçük bir $d\epsilon$ açısı kadar bir dönmeye tâbi tutulmalarına delâlet eden bir sonsuz küçük dönme dönüşümü olduğunu göstermektedir. Eğer H HAMILTON fonksiyonu (μ, ν) düzlemindeki dönmelere göre invaryant ise H nin bu dönüşümdeki değişimi sıfır olacak, yâni (IX.5.8) e göre

$$dH = [L_{\mu\nu}, H] d\epsilon = 0$$

veyâ $[L_{\mu\nu}, H] = 0$ olacaktır. Hâlbuki bu (IX.3.4) genel formülüne göre

$$\frac{dL_{\mu\nu}}{dt} = [L_{\mu\nu}, H] = 0 \rightarrow L_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu} = \text{sâbit}$$

demektir. Şu hâlde: *eğer bir sistemin HAMILTON fonksiyonu bir dönme dönüşümünde invaryant kalıyorsa sistemin toplam impulsunun dönme eksenine doğrultusundaki bileşeni korunur.*

Kapalı bir sistemin HAMILTON fonksiyonunun sâhip olabileceği *simetri özelliklerinden* böylece birkaçını görmüş bulunmaktayız. Bu simetri özelliklerinin sonuçları olarak ortaya çıkan *korunum kaanunları* ise fizikte bu anlamdaki simetri özelliklerinin nasıl her zaman korunum kaanunlarına yol açtıklarının belirgin örnekleridir. Burada verilmiş olan misaller bir fizik teorisindeki (özellikle bir *alan teorisindeki*) simetri özelliklerini ve dolayısıyla da korunum kaanunlarını tesbit etmek üzere kullanılan, alman matematikçisi Bn. EMMY NOETHER' in (1882-1935) adıyla anılan ve VI. Bölümde görmüş olduğumuz çok önemli ve genel teoremin özel hâlleridir.

(IX.7) FAZ UZAYI VE LİOUVILLE TEOREMİ

n adet serbestlik derecesini haiz bir sistemi karakterize eden bir

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$$

LAGRANGE fonksiyonu verildiğinde sistemin hâlinin *konfigürasyon uzayı* denilen n boyutlu öklitsel bir hiperuzayda

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{IX.7.1})$$

bağıntılarıyla belirlenen bir nokta ile gösterileceğini ifâde etmiştik.

Ayrıca, 2. dereceden diferansiyel denklemler olan n adet LAGRANGE hareket denklemini 1. dereceden diferansiyel denklemler aracılığıyla temsil edilebilen hareket denklemlerine indirgemek üzere ithâl edilen p_i kanonik impuls değişkenleriyle

$$H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n; t)$$

gibi, t zaman değişkeni hâriç, $2n$ bağımsız değişkenle ifâde edilebilen ve göz önüne alınan sistemi karakterize eden bir fonksiyon inşâ etmek ve bunun aracılığıyla da $2n$ adet birinci dereceden diferansiyel denklemden oluşan HAMILTON hareket denklemlerini bulmak mümkün olmuştur.

$p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ diye $2n$ adet *kanonik koordinata* bağlı HAMILTON fonksiyonu ve

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

HAMILTON hareket denklemleri aracılığıyla, göz önüne alınan sistemi

$$p_1 = p_1(t), \dots, p_n = p_n(t), \quad q_1 = q_1(t), \dots, q_n = q_n(t)$$

diye birbirlerinden bağımsız $2n$ fonksiyonla tasvir etmek mümkün olmaktadır.

Şimdi $2n$ boyutlu öyle bir öklitsel hiperuzay tanımlayalım ki bunun bir noktası, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n [p_i(t) \mathbf{e}_i + q_i(t) \mathbf{e}_{n+i}], \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{j+i} = \delta_{i,j+i} \quad (\text{IX.7.2})$$

bağıntılarıyla belirlenmiş olsun.

n serbestlik derecesini haiz bir sistemin hâli, LAGRANGE formalizmi çerçevesi içinde nasıl ki n boyutlu *konfigürasyon uzayının* $\boldsymbol{\eta}(t)$ yervektörü (IX.7.1) ile verilmiş bir noktaysa temsil edilebiliyorsa HAMILTON formalizmi çerçevesi içinde de, $2n$ boyutlu *faz uzayının*, $\boldsymbol{\xi}(t)$ yervektörü (IX.7.2) ile verilmiş olan bir noktaysa temsil edilecektir. t parametresi değıştikçe sistemin evrimi de (IX.7.2) yervektörünün resmedeceği tek parametrelî eğri aracılığıyla yansıyacaktır.

Faz uzayının, $t = t_0$ ânında aynı bir E toplam mekanik enerjisine tekaabül eden bütün noktaları

$$H(\boldsymbol{\xi}; t_0) = E \quad (\text{IX.7.3})$$

bağıntısıyla belirlenen $2n-1$ boyutlu hiperyüzey üzerinde bulunurlar.

3 boyutlu uzaydakine benzer şekilde, faz uzayındaki gradyent operatörü de

$$\text{grad}_{\boldsymbol{\xi}} = \nabla(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \mathbf{e}_{n+i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right). \quad (\text{IX.7.4})$$

bağıntısıyla tanımlanır. Buna göre

$$\nabla(\boldsymbol{\xi}) \cdot H = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \mathbf{e}_{n+i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (\text{IX.7.5})$$

ifâdesi (IX.7.3) hiperyüzeyinin gradyentini gösterir. Eğer HAMILTON fonksiyonu sistemin toplam E mekanik enerjisini temsil etmek için gerekli şartları gerçekleştiriyorsa enerji korunumu geçerli olur ve sistemin hâlini gösteren faz uzayı noktası da, evrimi süresince, aynı bir enerji yüzeyi üzerinde kalır.

(IX.7.2) yi zamana göre türetilip kanonik denklemleri de göz önünde tutarak

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i \mathbf{e}_i + \dot{q}_i \mathbf{e}_{n+i}) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{e}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathbf{e}_{n+i} \right)$$

olur. Bu ifâdenin sağ yanı yalnızca p_i ve q_i lerin yâni $\boldsymbol{\xi}$ nin ve t nin bir fonksiyonudur. Şu hâlde

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}, t) \quad (\text{IX.7.6})$$

vazedilirse bu, $\boldsymbol{\xi}(t)$ noktasının faz uzayındaki hareketinin diferansiyel denklemi olur. Belirli bir $\boldsymbol{\xi}(0)$ başlangıç noktası verilmiş olduğunda bundan sonraki bütün $t > 0$ ânları için $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$ hâl vektörü (IX.7.6) denklemi aracılığıyla tek bir şekilde tesbit edilir.

Şimdi gene belirli bir t ânındaki hâllerin faz uzayının birer noktası olan birçok sistem göz önüne alalım, ve

$$\rho(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n; t) \cdot (\dot{q}_i dt) \cdot (dq_1 \dots dq_{i-1} dq_{i+1} \dots dq_n dp_1 \dots dp_n)$$

ifâdesiyle ve $q_i + dq_i = \text{sâbit}$ düzlemini kateden faz noktalarının sayısı da $\rho \dot{q}_i$ çarpımının q_i de değil de $q_i + dq_i$ için değerlendirilmesi gerektiği de göz önünde tutularak benzer bir ifâdeyle verilir. $\rho \dot{q}_i$ nin $q_i + dq_i$ düzlemindeki değeri

$$\rho \dot{q}_i + \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} dq_i$$

olduğundan $q_i = \text{sâbit}$ ve $q_i + dq_i = \text{sâbit}$ yüzlerinden $d\Omega$ ya girmiş olan net faz noktası sayısı

$$\begin{aligned} & \rho \dot{q}_i dt dq_1 \dots dq_{i-1} dq_{i+1} \dots dq_n dp_1 \dots dp_n - \left[\rho \dot{q}_i + \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} dq_i \right] dt dq_1 \dots \\ & \dots dq_{i-1} dq_{i+1} \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = - \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} dt dq_1 \dots dq_{i-1} dq_i dq_{i+1} \dots \\ & \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = - \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} dt d\Omega \end{aligned}$$

olur.

Buna binâen faz uzayının $d\Omega$ elemanter hacmine girmiş olan ve her biri bir mekanik sistemi temsil eden faz noktalarının toplam net sayısı, $d\Omega$ ya mümkün bütün yüzlerden giren net faz noktalarının sayısına yâni $d\Omega$ dakî faz noktalarının sayısında vâkî olan ve (IX.7.7) ile verilen ifâdeye eşit olacaktır:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega = \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right\} dt d\Omega,$$

veyâ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \rho \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \right\} \quad (\text{IX.7.8})$$

olur. Fakat kanonik denklemler dolayısıyla

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \equiv 0$$

olduğundan (IX.7.8) ifâdesinden

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho] = 0} \quad (\text{IX.7.9})$$

bağıntısı elde edilir. Buna göre, faz uzayındaki noktaların yoğunluğu zaman içinde

sâbit kalmaktadır. Faz uzayının çok önemli topolojik bir özelliğini ifade eden bu sonuç LİOUVILLE (1809-1882) teoremi diye bilinmektedir. LİOUVILLE teoremi özellikle *istatistiksel mekanikte* merkezî bir rol oynar.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

IX.1. $Q = p$, $P = -q$ dönüşümünün kanonik olduğunu gösteriniz.

IX.2. $Q = q \operatorname{tg} p$, $P = \ln (\sin p)$ dönüşümünün kanonik olduğunu gösteriniz.

IX.3. α ve β nın hangi değerleri için $Q = q^\alpha \cos \beta p$, $P = q^\alpha \sin \beta p$ dönüşümünün kanonik bir dönüşümü temsil edeceğini tesbit ediniz; ve bu hâle tekaabül eden doğurgan fonksiyonu bulunuz.

IX.4. $\Omega = \sum_i q_i Q_i$ ve $\Theta = \sum_i p_i P_i$ fonksiyonlarının koordinat ve impulsların değiş tokuş edilmelerini sağlayan ve $\Psi = - \sum_i Q_i p_i$ fonksiyonunun da, özdeş dönüşüme tekaabül eden doğurgan fonksiyonlar olduklarını gösteriniz.

IX.5. Eğer p ve q kanonik değişkenlerse

$$P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \sin p$$

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p)$$

dönüşümüyle belirlenen P ve Q nun da kanonik değişkenler olduklarını gösteriniz.

IX.6. $\Omega(q, Q; t) = \frac{1}{2} m \omega(t) q^2 \cotg Q$ ve $\Omega(q, Q; t) = \frac{1}{2} m \omega \left[q - \frac{F(t)}{m \omega^2} \right]^2 \cotg Q$

doğurgan fonksiyonlarının tanımladıkları kanonik dönüşümleri tâyin ediniz.

IX.7. $\Phi(q, p) = q^2 e^P$ doğurgan fonksiyonunun tanımladığı kanonik dönüşümün aynısını doğuran $\Psi = \Psi(p, Q)$ doğurgan fonksiyonunu tâyin ediniz.

IX.8. 2 boyutlu faz uzayındaki bir dönme dönüşümünün tek serbestlik dereceli bir sistem için kanonik bir dönüşüm oluşturduğunu gösteriniz.

IX.9. $x = X \cos \lambda + \frac{P_y}{m \omega} \sin \lambda$, $y = Y \cos \lambda + \frac{P_x}{m \omega} \sin \lambda$

$$p_x = -m \omega Y \sin \lambda + P_x \cos \lambda, p_y = -m \omega X \sin \lambda + P_y \cos \lambda$$

dönüşümünün kanonik bir dönüşüm olduğunu gösteriniz.

IX.10. δa , $\delta \beta$, $d\tau$ ve $\delta \alpha$ sonsuz küçük parametreler olmak üzere doğurgan fonksiyonları

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) + (\delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{P})$$

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) + [\delta \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{P})]$$

$$\Phi(q, P; t) = qP + H(q, P; t) \delta \tau$$

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) + (r^2 + P^2) \delta \alpha$$

olan kanonik dönüşümlerin fiziksel anlamlarını açıklayınız.

IX.11. Güneş etrafında dolanan m kütleli bir gezegen için HAMILTON-JACOBI denklemini yazınız.

IX.12. m kütleli bir noktanın $U(r) = -K \cos \theta / r^2$ şeklinde bir potansiyelden türeyen bir kuvvet alanında bulunduğunu varsayarak buna tekaabül eden HAMILTON-JACOBI denklemini kurunuz.

IX.13. Düzgün bir çekim alanında serbest düşüşe terk edilmiş olan m kütleli bir maddî nokta için HAMILTON-JACOBI denklemini çözünüz.

IX.14. Bir sistemin kanonik değişkenlerinin bir t ânındaki $f(p_i(t), q_i(t))$ şeklindeki her hangi fonksiyonun $t = 0$ ânındaki $p_i(0)$ ve $q_i(0)$ değerleri cinsinden

$$\begin{aligned} f(p_i(t), q_i(t)) &= f_0 + \frac{t}{1!} [H_0, f_0] + \frac{t^2}{2!} [H_0, [H_0, f_0]] + \dots \\ &= e^{t[H_0, \dots]} f(p_i(0), q_i(0)) \end{aligned}$$

şeklinde ifade olunabileceğini gösteriniz. Burada $f_0 = f(p_i(0), q_i(0))$ ve $H_0 = H(p_i(0), q_i(0))$ vazedilmiştir.

IX.15. S ile $2n$ boyutlu faz uzayında keyfî bir iki boyutlu yüzeyi göstermek üzere

$$J_1 = \iint_S \sum_i dq_i dp_i$$

integralinin bütün kanonik koordinatlarda aynı değeri haiz olması için

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}$$

olması gerektiğini gösteriniz.

IX.16. N adet maddî noktadan oluşan bir kanonik sistemin hareketi dik kartezyen koordinatlara izâfe ediliyor. Eğer her bir noktanın yer vektörü $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + (\delta \mathbf{v}) t$ gibi bir sonsuz küçük dönüşüme tâbî tutulursa ve böyle bir dönüşümde de sistemin $H = H(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}; t)$ HAMILTON fonksiyonu invaryant kalırsa bunun, sistemin kütle merkezinin hızının korunduğuna delâlet edeceğini gösteriniz.

IX.17.

$$S(x, P) = \int_0^x \sqrt{2m [E - U(x)]} dx$$

doğurgan fonksiyonundan yararlanarak ve $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere,

$$na < x < \left(n + \frac{1}{2}\right)a \quad \text{için} \quad U(x) = 0$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)a < x < (n + 1)a \quad \text{için} \quad U(x) = V$$

şeklindeki peryodik bir potansiyelde hareket eden bir tânecek için, $E > V$ olması ve $S(x, P)$ deki E nin de

$$P = \int_0^a \sqrt{2m[E - U(x)]} dx$$

denkleminde P nin fonksiyonu olarak elde edilmesi hâlinde, bir kanonik dönüşüm tanımlayınız.

X. BÖLÜM

HAMİLTON-JACOBI DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU

(X.1) HAMİLTON-JACOBI DENKLEMİNİN GENEL ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Geçen bölümün 2. paragrafında gerek LAGRANGE gerekse HAMİLTON hareket denklemlerinin bir varyasyon ilkesinden hareketle elde edilmelerinin dayanağı olan *aksiyon integralinden* hareketle bu integralin kanonik koordinatlara ve zamana göre kısmî türevleri ve HAMİLTON fonksiyonu arasında çok önemli bir fonksiyonel ilişkinin varlığını gösterdikti. Bu, kısmî türevli *HAMİLTON-JACOBI diferansiyel denklemi* idi. Aksiyon integralinin açıkça zamana bağlı olup olmamasına göre bu, (IX.2.7) ve (IX.2.11) şekillerine bürünmekteydi. Fakat, ayrıca, bu türlü karakterize edilen $S(q_i; t)$ ve $S_0(q_i)$ aksiyonları arasında da (IX.2.10) bağıntısı mevcuddu.

Bundan başka da zamana bağlı HAMİLTON-JACOBI denkleminin mâhiyetini belirgin kılmak için de doğurganı $S = S(q_i, P_i; t)$ şeklinde bir fonksiyon olan bir konik dönüşümün HAMİLTON fonksiyonunun dönüşmüşünü özdeş olarak sıfır kıldığını; dolayısıyla dönüşmüş kanonik denklemler bakımından hem koordinatların ve hem de impulsların devrî değişkenlere indirgenmiş olduklarını; ve hepsinden önemlisi, dönüşmüş ve özdeş olarak sıfır olan HAMİLTON fonksiyonunun açık ifâdesinin zamana bağlı HAMİLTON-JACOBI kısmî türevli diferansiyel denkleminden başka bir şey olmadığını da göstermiştik.

Şimdi problemi aksi yönden ele alacak olursak, demektir ki, eğer göz önüne alınan sistemin HAMİLTON fonksiyonu p_i, q_i ve t nin

$$H = H(p_i, q_i; t) \quad (X.1.1)$$

şeklinde genel bir fonksiyonu ise problemi mümkün olduğu kadar basite indirgemek ve hareket denklemlerinin integrasyonunu had derecede kolaylaştırmak için öyle bir kanonik dönüşüm uygulamalıyız ki dönüşmüş \bar{H} HAMİLTON fonksiyonu özdeş olarak sıfır olsun.

$$\bar{H} \equiv 0 \quad (\text{X.1.2})$$

Bu takdirde yeni kanonik denklemler de

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \equiv 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} \equiv 0 \quad (\text{X.1.3})$$

olacaklar ve bunların integrasyonu, derhâl,

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= \beta_i = \text{sâbit} \\ P_i &= \gamma_i = \text{sâbit} \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.1.4})$$

sonucunu verecektir. Yukarıda söylemiş olduğumuz ve (IX.2) de de göstermiş olduğumuz vechile dönüşmüş HAMILTON fonksiyonunun (X.1.2) ye binâen özdeş olarak sıfır olmasını sağlayan kanonik dönüşümün doğurganı

$$S = S(q_i, P_i; t) \quad (\text{X.1.5})$$

aksiyonundan başka bir şey değildir ve bu doğurgan

$$\bar{H} = H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0 \quad (\text{X.1.6})$$

HAMILTON-JACOBI kısmî türevli diferansiyel denklemini gerçekler.

Şu hâlde, mesele, (X.1.3) şeklindeki basit biçimli kânonik denklemler elde ederek bu hareket denklemlerinin kolaylıkla integre edilebilmelerini temin etmek için her şeyden önce (X.1.2) yâni (X.1.6) yı mümkün kılan S doğurgan fonksiyonunu tâyin etmektir.

(X.1.6) denklemi n adet q_i ve 1 adet de t bağımsız değişkenlerine bağlı olmak hasebiyle $n + 1$ değişkenli birinci mertebeden kısmî türevli bir diferansiyel denklem görünümündedir. Buna göre denklemin genel bir çözümü $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ diye $n + 1$ adet bağımsız integrasyon sâbiti ihtivâ edecektir. Ancak, (X.1.6) denklemi S nin kendisini değil de türevlerini ihtivâ etmektedir. Buna göre eğer S bu denklemi gerçekleyen bir çözüm ise, α bir sâbit olmak üzere, $S + \alpha$ nın da gene bu denklemi gerçekleyecek bir çözüm olacağı âşikârdır, zirâ böyle bir toplamsal sâbitin S nin kısmî türevlerinin değerini değiştirecek hiç bir etkisi olamaz. Dönüşüm formülleri bakımından da bu herhangi bir değişikliğe sebep olmaz, çünkü dönüşüm formülleri de hep S nin kısmî türevleriyle ifâde edilmişlerdir. Şu hâlde bu toplamsal α sâbiti, gerek dönüşüm formülleri gerekse (X.1.6) denklemi bakımından hiç bir önemi olmaması hasebiyle, sıfır alınabilir. Buna göre (IX.1.6) nın genel çözümü, $\alpha_{n+1} = \alpha = 0$ vazederek,

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) \quad (\text{X.1.7})$$

şeklinde olacaktır; ve buradaki n adet integrasyon sâbitinden hiçbiri, artık, toplamsal sâbit değildir.

(X.1.6) yi gerçekleyen S doğurgan fonksiyonunun (IX.2.16) ile verilen ifâdesini (X.1.7) ile karşılaştırırsak, (X.1.3) kanonik denklemlerinin integrasyonunun verdiği sâbit impulsların (X.1.6) nın genel çözümündeki integrasyon sâbitlerinin

$$P_i = \gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (\text{X.1.8})$$

şeklindeki bağımsız fonksiyonları olarak ve meseleyi daha basitleştirmek için hattâ

$$P_i = \gamma_i = \alpha_i \quad (\text{X.1.9})$$

şeklinde dahi seçilebilecekleri anlaşılır.

Bundan sonra (IX.2.15) den ve (X.1.4) den

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S(q_i, \alpha_i; t)}{\partial q_i} \\ Q_i = \beta_i &= \frac{\partial S(q_i, \alpha_i; t)}{\partial \alpha_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.1.10})$$

yazılır. $t = t_0$ ânı için bu $2n$ denklem n adet α_i sâbiti ile n adet β_i sâbitinin $p_i(0)$ ve $q_i(0)$ başlangıç değerleri cinsinden tâyin edilebilmelerini temin eder. Bundan sonra (X.1.10) denklemlerinin ikinci takımı q_i lere göre çözümlenerek, koordinatlar,

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i; t) \quad (\text{X.1.11})$$

şeklinde başlangıç değerleri ve zamanın fonksiyonu olarak tâyin edilmiş olurlar ki bu da göz önüne alınmış olan spesifik dinamik probleminin nihai çözümünü teşkil eder.

(X.2) HAMILTON-JACOBI TEORİSİNİN BİR UYGULAMASI OLARAK HARMONİK OSİLÂTÖR

Tek boyutlu bir harmonik osilâtörün HAMILTON fonksiyonu, m ile kütle-sini ve k ile de yay sâbitini göstermek sûretiyle,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \quad (\text{X.2.1})$$

dir. HAMILTON-JACOBI kısmî türevli diferansiyel denklemi $p = \partial S / \partial q$ vazedip bunu (X.2.1) e yerleştirmek ve yeni HAMILTON fonksiyonunun sıfıra eşit olduğunu ifâde etmekle elde edilir.

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{k}{2} q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{X.2.2})$$

Denklemin t ye olan bağılılığı sâdece son terimde ortaya çıktığı için ilk iki terimin sâdece q ya bağılı görünmesi, α ile bir integrasyon sâbitini göstererek, (X.2.2) nin bir çözümünün

$$S(q, \alpha, t) = S_0(q, \alpha) - \alpha t \quad (\text{X.2.3})$$

şeklinde yazılabileceğini telkîn etmektedir. (X.2.3) ün (X.2.2) ye yerleştirilmesi sonucu $S_0(q, \alpha)$ fonksiyonunun gerçekleştirilmesi gereken diferansiyel denklemin

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha \quad (\text{X.2.4})$$

şeklinde olduğu tesbit edilmiş olur. (X.2.4) derhâl integre edilebilir, ve

$$S_0 = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} dq$$

yâni

$$S(q, \alpha; t) = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} dq - \alpha t \quad (\text{X.2.5})$$

bulunur. Öte yandan (X.1.10) a binâen

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} - t$$

olur. Bu integrasyon yapılırsa, kolaylıkla,

$$t + \beta = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \sqrt{\frac{k}{2\alpha}} q$$

olur. Şimdi $\omega = \sqrt{k/m}$ vazedip buradan q yu çözerek

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \omega (t + \beta) \quad (\text{X.2.6})$$

nihâi çözümü elde edilmiş olur. Geçen paragrafta izah edilmiş olduğu biçimde bu meseleyi tamamlamak için α ve β nın başlangıç şartlarıyla ilişkilerinin gösterilmesi gereklidir. Bunun için meselâ $t = 0$ da osilâtörün sükûnette olduğunu yâni $p_0 = 0$ olduğunu fakat denge durumundan da q_0 kadar ötede bulunduğunu varsayalım. Buna göre (X.2.5) den

$$0 = p_0 = p(0) = \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)_{t=0} = \sqrt{2m} \sqrt{\alpha - \frac{kq_0^2}{2}}$$

bulunur ki buradan da

$$\alpha = \frac{kq_0^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2} q_0^2 \quad (\text{X.2.7})$$

olduğu yâni α nın sistemin başlangıçtaki toplam mekanik enerjisi olduğu görülür. Kuvvetin korunumlu bir kuvvet olması hasebiyle (X.2.7), şu hâlde, sistemin korunan toplam mekanik enerjisinin değeri olacaktır.

(X.3) HAMILTON-JACOBI DENKLEMİ İÇİN DEĞİŞKENLERE AYRIŞIM YÖNTEMİ

HAMILTON-JACOBI diferansiyel denklemi, çözümünü her zaman kolaylıkla elde edilebilen bir denklem değildir. Çözümü elde etmede aracı olan yöntemlerden, çoğu hallerde en iyi işleyeni, *değişkenlere ayrışım yöntemi*dir. Bu yöntem HAMILTON asal fonksiyonunun

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(q_i) + S_{n+1}(t) \quad (\text{X.3.1})$$

şeklinde olduğunu varsayarak HAMILTON - JACOBI diferansiyel denkleminin daha basit ve kolay integre edilebilir denklemlere ayrışabilip ayrışamayacağını araştırmaktan ibârettir. Ancak, söz konusu denklem her zaman ayrışabilen bir denklem olmadığı gibi ayrışabilirliği hakkında da basit kriterler maalesef yoktur. Birçok problem için, bu arada meselâ üç cisim problemi için de, HAMILTON-JACOBI denklemini değişkenlere ayrıştırmak olanağı yoktur. Bunun dışında atom fiziğinin pekçok problemi için bu denklem ayrıştırılabilmektedir. Ayrıca vektörel mekanik veyâ LAGRANGE formalizmi aracılığıyla kesin analitik çözümleri yazılabilen problemlere tekaabül eden HAMILTON-JACOBI diferansiyel denkleminin ayrıştırılabildiği de bilinmektedir. Bundan başka söz konusu diferansiyel denklemin ayrışabilir olup olmaması keyfiyeti çok kere de kullanılan genelleştirilmiş koordinatlar sistemine bağlıdır. Meselâ üzerine merkezil bir kuvvet etkiyen tek cisim probleminde eğer koordinat sistemi olarak dik kartezyen koordinatlar seçilirse denklem ayrıştırılamaz; halbuki aynı problem için kutupsal koordinatlar seçildiğinde denklemin ayrışabilir olduğu kolaylıkla tahkik edilebilir. Pekçok problem için de, denklemin ayrışabilir kılınabildiği birden fazla farklı koordinat sistemi olabilir.

Şimdi söz konusu değişkenlere ayrışım yöntemini somut bir misâle uygulayarak nasıl sonuca varıldığının ayrıntıları hakkında bir fikir edinelim.

Bunun için $U = -K/r$ şeklindeki bir potansiyelden türeyen merkezil bir kuvvet alanında bulunan m kütleli noktasal bir cismin hareketini inceleyece-

ğiz. Eğer $K = GmM$ alınırsa bu problem, m kütleli bir gezegenin M kütleli Güneşin etrafındaki (KEPLER) hareketinin incelenmesi demek olur. G , evrensel çekim sâbitidir.

Böyle bir sistemin HAMILTON fonksiyonu, kutupsal koordinatlarda,

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r} \quad (\text{X.3.2})$$

dir. HAMILTON-JACOBI teorisine göre $p_r = \partial S / \partial r$, $p_\varphi = \partial S / \partial \varphi$ olduğundan HAMILTON-JACOBI denklemi

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} - \frac{K}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{X.3.3})$$

olur. Bu denklem için değişkenlere ayrışım yönteminin işleyip işlemediğini görmek üzere

$$S = S_1(r) + S_2(\varphi) + S_3(t) \quad (\text{X.3.4})$$

vazedelim. (X.3.4) ün (X.3.3) e yerleştirilmesi sonucu

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dS_2}{d\varphi} \right)^2 \right\} - \frac{K}{r} = - \frac{dS_3}{dt} \quad (\text{X.3.5})$$

olur. Hâlbuki bu ifâdenin sol yanı yalnızca r ve φ ye ve sağ yanı da yalnızca t ye bağlı olduğu görüldüğünden sol tarafı $f(r, \varphi)$, sağ tarafı da $g(t)$ ile göstererek, ilk bakışta,

$$f(r, \varphi) = g(t) \quad (\text{X.3.6})$$

yazmak haklı bir davranış olabilirdi. Oysa ki, eğer gerçekten de (X.3.5) in sol yanı r ve φ nin açık bir fonksiyonu ve sağ yanı da t nin bir fonksiyonu olsaydı (X.3.6) ifâdesi r , φ , t değişkenlerinin bağımsız değişkenler olmayıp aralarında fonksiyonel bir bağıntının var olduğuna delâlet edecekti. Fakat ne var ki r , φ ve t tamâmen bağımsız değişkenlerdir. Bu çelişkinin ortadan kalkması ancak ve ancak (X.3.5) in, yâni (X.3.6) nın her iki yanınında aynı bir α_2 sâbitine eşit olmasıyla mümkündür. Bu takdirde değişkenler arasında fonksiyonel bir bağıntı olamayacağı besbellidir. Şu hâlde (X.3.5)

$$\left. \begin{aligned} - \frac{dS_3}{dt} &= \alpha_2 \\ \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dS_2}{d\varphi} \right)^2 \right\} - \frac{K}{r} &= \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.3.7})$$

şeklinde iki denkleme ayrılmış olur. Bunlardan birincisi derhâl integre edilir ve bir integrasyon sâbitinden sarfı nazar edilirse sonuç

$$S_3(t) = -\alpha_2 t \quad (\text{X.3.8})$$

dir. İkinci denklem ise yeniden düzenlendiği takdirde

$$r^2 \left\{ 2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 \right\} = \left(\frac{dS_2}{d\varphi} \right)^2 \quad (\text{X.3.9})$$

şeklinde yazılır. Bunun sol yanının yalnızca r ye ve sağ yanının da yalnızca φ ye bağlı olduğu görülmektedir. Yukarıdaki muhakemeyi burada da tekrarlayabiliriz ve neticede her iki yanın da aynı bir α_1^2 sâbitine eşit olması gerektiği bulunur. Bu ise bize

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_2}{d\varphi} &= \alpha_1 \\ r^2 \left\{ 2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 \right\} &= \alpha_1^2 \end{aligned} \right\}$$

denklemlerini verir. Birincisinden hemen

$$S_2(\varphi) = \alpha_1 \varphi \quad (\text{X.3.10})$$

bulunur. İkinci denklemden ise

$$S_1(r) = \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr \quad (\text{X.3.11})$$

elde edilir. Buna göre

$$S(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2; t) = \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr + \alpha_1 \varphi - \alpha_2 t \quad (\text{X.3.12})$$

olur. Şimdi, sırasıyla, α_1 ve α_2 yi P_r ve P_φ ile özdeşlersek (X.1.10) a göre

$$Q_r = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr + \varphi$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2 = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr - t$$

olur. β_1 ve β_2 yeni sâbitler olmak üzere bu ifâdelerden

$$\int \frac{\alpha_1 dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}}} = \varphi - \beta_2 \quad (\text{X.3.13})$$

$$\int \frac{m dr}{\sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}}} = t + \beta_2 \quad (\text{X.3.14})$$

bağıntıları bulunur. (X.3.13) ifâdesindeki integral $r=1/u$ değişken dönüşümü aracılığıyla kolaylıkla hesaplanabilir ve neticede yörünge denklemi olarak

$$r(\varphi) = \frac{\frac{\alpha_1^2}{mK}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\alpha_1^2}{mK^2}} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \beta_1\right)} \quad (\text{X.3.15})$$

bulunur. (X.3.14) denklemine gelince, o da integre edildiğinde $r(t)$ yâni ışınsal uzaklığı zamanın fonksiyonu olarak verir.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

X.1. Değişkenlere ayrışım yöntemini uygulayarak bir harmonik osilâtörün hareket kaanûnunu HAMILTON-JACOBI teorisine göre tesis ediniz.

X.2. m kütleli bir tânecik küresel koordinatlar cinsinden $U = -K \cos \theta / r^2$ şeklindeki bir potansiyelden türeyen bir kuvvetin etkisi altında hareket etmektedir. Problemi HAMILTON-JACOBI teorisi çerçevesi içinde inceleyiniz.

X.3. $U = mgz$ şeklindeki bir potansiyelden türeyen homogen çekim kuvvetinin etkisindeki bir tâneciğin hareketinin HAMILTON-JACOBI denklemini dik kartezyen koordinatlarda ayrıştırıp çözüünüz.

X.4. $U = \frac{1}{2} m(k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2)$ ile karakterize edilen anizotropik bir osilâtörün HAMILTON-JACOBI denklemini dik koordinatlarda ayrıştırın.

X.5. $U = -\frac{k^2}{2} + Ez$ şeklindeki bir potansiyel fonksiyonunun etkisi altında zuhûr eden STARK olayının HAMILTON-JACOBI denklemini

$$x = \sqrt{uv} \cos \Phi$$

$$y = \sqrt{uv} \sin \Phi$$

$$z = \frac{1}{2} (u - v)$$

şeklinde parabolik koordinat sisteminde değişkenlere ayrıştırınız.

X.6. Dar bir magnetik mercek, bileşenleri

$$A_\varphi = \frac{r}{2} H(z), \quad A_r = A_z = 0$$

ile verilen bir vektörel potansiyel aracılığıyla tanımlanmış olup burada $H(z)$ magnetik alan şiddeti $|z| < a$ aralığı için sıfırdan farklıdır. z eksenine paralel hareket eden dar bir elektron hüzmesi $(0, 0, z_0)$ noktasından çıkarak merceğe varmaktadır. $|z_0| \gg a$ ve $z_1 \gg a$ varsayarak huzmenin merceği katettikten sonra fokuslandığı $(0, 0, z_1)$ noktasını tesbit ediniz.

(İpucu : HAMILTON-JACOBI denklemini $S(r, \varphi, z; t)$ yi

$$S(r, \varphi, z; t) = [-Et + \varphi p_\varphi + f(z)] + r\psi(z) + \frac{1}{2} r^2 \sigma(z) + \dots$$

şeklinde r -nin kuvvetleri cinsinden seriye açarak çözünüz.

XI. BÖLÜM

HAMILTON-JACOBI TEORİSİNE GÖRE DALGA DENKLEMİ

(XI.1) AKSİYON DALGALARI

(VII.1.8) ve (IX.2.10) a göre aksiyonun

$$S = -Et + S_0 = \int L dt \quad (\text{XI.1.1})$$

şekillerinde ifâde edilebildiğini görmüştük.

Şimdi hareketini dik bir kartezyen referans sistemine izâfe edeceğimiz sâbit E toplam enerjili bir maddî nokta göz önüne alalım. Bu takdirde (IX.2.6) ya göre

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S_0}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S_0}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial S_0}{\partial z} \quad (\text{XI.1.2})$$

veyâ vektörel olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{grad } S = \text{grad } S_0 \\ &= \nabla S = \nabla S_0 \end{aligned} \quad (\text{XI.1.3})$$

yazabiliriz.

Bu son bağıntı bize gerek $S = \text{sâbit}$ gerekse $S_0 = \text{sâbit}$ yüzeylerinin maddî noktanın mümkün yörüngelerine dik olan iki ayrı yüzey ailesi teşkil ettiklerini göstermektedir. Bu iki yüzey ailesi arasındaki dinamik ilişkiyi anlayabilmek için $S_0 = 0, S_0 = E, S_0 = 2E, \dots, S_0 = mE, \dots, \text{ilh...}$ yüzeylerini göz önüne alalım. Bunlar üç boyutlu uzayda belirlenmiş üzerilerinde S_0 ın değeri sâbit olan ve hepsi de z zamandan bağımsız ve uzaydaki konumları değişmeyen yüzeylerdir.

$t = 0$ ânı için bütün $S = \text{sâbit}$ yüzeyleri bütün $S_0 = \text{sâbit}$ yüzeyleriyle çakışır. $t = 1$ ânı için $S = 0$ yüzeyi $S_0 = E$ yüzeyi ile, $S = E$ yüzeyi $S_0 = 2E$ yüzeyi ile..., $S = mE$ yüzeyi $S_0 = (m + 1)E$ yüzeyi ile... *ilh...* çakışır. $t = 2$ ânı için ise $S = 0$ yüzeyi $S_0 = 2E$ yüzeyi ile, $S = E$ yüzeyi $S_0 = 3E$ yüzeyi ile..., $S = mE$

yüzeyi $S_0 = (m + 2)E$ yüzeyi ile..., *ilh...* çakışır; ve bu böylece devâm eder gider. Böylece $S = sâbit$ yüzeylerinin zamana bağlı evriminin bu yüzeylerin, $S_0 = 0$ yüzeyinden başlayarak, peşpeşe ve çakışa çakışa uzayda sâbit ve değişmez olarak tanımlanmış olan $S_0 = E, S_0 = 2E, \dots, S_0 = mE, S_0 = (m + 1)E, S_0 = (m + 2)E \dots, \dots, ilh...$ yüzeylerinden geçmeleriyle oluşacağı anlaşılmaktadır. Böyle bir evrime fizikte "*dalgasal yayılma*" adı verilir. Buna göre biz de S aksiyonunun uzayda dalgasal biçimde yayılmakta olduğunu ifade edebilir ve bu aksiyon dalgalarının $u = u(x, y, z, t)$ yayılma hızını araştırabiliriz.

Sâbit bir S değerine tekaabül eden bir aksiyon dalgası yüzeyi (*dalga cephesi*) için, ve

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) = \dot{x} \mathbf{e}_1 + \dot{y} \mathbf{e}_2 + \dot{z} \mathbf{e}_3 \quad (\text{XI.1.4})$$

olmak üzere,

$$\frac{dS}{dt} = 0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial S}{\partial z} \dot{z}$$

yâni

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } S = 0} \quad (\text{XI.1.5})$$

olur. (XI.1.4) ile tanımlanmış olan \mathbf{u} vektörü S aksiyon dalgasının yayılma hızıdır.

(XI.1.1) den

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad (\text{XI.1.6})$$

olduğu besbellidir. Ayrıca gene aynı tanım bağıntısından

$$\begin{aligned} \text{grad } S &= \int_{t_1}^{t_2} \text{grad } L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \text{grad } T \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \text{grad } U \, dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \text{grad } U \, dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{\mathbf{v}} \, dt = m\mathbf{v} = \mathbf{p} \end{aligned} \quad (\text{XI.1.7})$$

bulunur. Burada T kinetik enerjisinin koordinatlara açıkça bağlı olmamasının $\text{grad } T = 0$ sonucunu verdiği keyfiyetinden yararlanılmış bulunmaktadır.

Buna göre (XI.1.6) ve (XI.1.7) yi (XI.1.5) süreklilik denklemine yerleştirirsek

$$\boxed{E = m \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \quad (\text{XI.1.8})$$

sonucu çıkar. Gerek maddî noktanın v hızı, gerekse S aksiyon dalgasının u yayılma hızı dalga cephesine dik olduklarından (XI.1.8) için

$$E = m u v = p u$$

de yazılabilir.

Noktanın momentumu $p = \sqrt{2m T} = \sqrt{2m(E - U)}$ olduğundan S aksiyon dalgasının yayılma hızının da

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}} \quad (\text{XI.1.9})$$

ile verileceği anlaşılmış olur.

Diğer taraftan

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{XI.1.10})$$

HAMİLTON-JACOBI denklemini ve (XI.1.7) yi göz önüne alacak olursak

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U = \frac{1}{2m} |\mathbf{grad} S|^2 + U \quad (\text{XI.1.11})$$

yazılabilmesi dolayısıyla (XI.1.10)

$$\frac{1}{2m} |\mathbf{grad} S|^2 + U + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

olur. Bu son denklemden, (XI.1.6) ve (XI.1.9) göz önünde tutularak

$$|\mathbf{grad} S|^2 = 2m(E - U) = \frac{1}{u^2} E^2$$

ifâdesi çıkartılır. Bu ifâdenin sağ yanındaki E^2 için de gene (XI.1.6) dan yararlanılırsa, sonunda, *HAMİLTON dalga denklemi* denilen ve S aksiyon dalgasının yayılma kaanûnunu veren

$$|\mathbf{grad} S|^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{XI.1.12})$$

denklemi elde edilmiş olur. Bu denklem maddî bir noktanın aksiyon dalgasının yayılma denklemi olmakla beraber, bilinen diğer dalga yayılma denklemlerinden farklı bir görünüm arz etmektedir. Bir aksiyon dalgasının yayılımı ile âdî mânâdaki bir dalganın, meselâ bir elektromagnetik dalganın, yayılımı arasında ne vüs'atte bir benzerlik olabileceğini bir sonraki paragrafta inceleyeceğiz.

(XI.2) OPTİK BENZERLİK

Bir elektromagnetik dalganın oluşumuna sebep olan E elektrik alanının

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (\text{XI.2.1})$$

şeklindeki bir *dalga denkleminde* uygun olarak boşlukta $u = c = 299774$ km/san hızıyla ve kırılma indisi n olan bir ortamda da

$$u = \frac{c}{n}$$

hızıyla yayıldığı bilinmektedir.

Optikte, çoğu kere, elektromagnetik dalgalar yerine bunların sâbit fazlı yüzeylerine dik olan ışınları göz önüne alarak bir yaklaşım yapılır. Buna *geometrik optik* yaklaşımı adı verilir. Eğer elektromagnetik dalgaların fazını Φ ile gösterirsek; λ dalga uzunluğu, ν dalgalı hareketin frekansı ve s de ışın üzerinde seçilen apsis olmak üzere

$$\Phi = \Phi(s, t) = \Phi(x, y, z, t) = 2\pi \left(\frac{s}{\lambda} - \nu t \right) = 2\pi \nu \left(\frac{s}{u} - t \right) = 2\pi \nu \left(\frac{ns}{c} - t \right) \quad (\text{XI.2.2})$$

dir. Eğer ışınların huzmesi çok ıraksak değilse ve kırılma indisi de çok az değişiyorsa

$$E = a e^{i\Phi} \quad (\text{XI.2.3})$$

şeklinde bir ifade (XI.2.1) in yaklaşık bir çözümünü oluşturur. (XI.2.3) ü (XI.2.1) e yerleştirirsek Φ fazı için

$$\begin{aligned} i \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} - \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ = i \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

veyâ kısacası

$$i \nabla^2 \Phi - |\text{grad } \Phi|^2 = i \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{XI.2.4})$$

bağıntısı bulunur.

Ancak, (XI.2.2) den

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -2\pi\nu \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{XI.2.5})$$

dır. Bundan başka da gene (XI.2.2) tanım bağıntısından

$$\mathbf{grad} \Phi = \frac{2\pi\nu}{c} \mathbf{grad} (ns) = \frac{2\pi\nu}{c} n \frac{\mathbf{s}}{s} + \frac{2\pi\nu}{c} s (\mathbf{grad} n) \quad (\text{XI.2.6})$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \text{div} \mathbf{grad} \Phi = \frac{2\pi\nu}{c} \nabla^2 (ns) = \frac{2\pi\nu}{c} \left[n \nabla \left(\frac{\mathbf{s}}{s} \right) + 2 \frac{\mathbf{s}}{s} \cdot \nabla n + s (\nabla^2 n) \right] \\ &= \frac{2\pi\nu}{c} \left[n \text{div} \left(\frac{\mathbf{s}}{s} \right) + 2 \frac{\mathbf{s}}{s} \cdot \mathbf{grad} n + s \text{div} \mathbf{grad} n \right] \end{aligned} \quad (\text{XI.2.7})$$

bulunur. Eğer n kırılma indisi çok az değişken ise ve de ışın demeti çok az ıraksak ise (XI.2.7) nin sağ yanındaki her bir terim sıfır alınabilir ve bu sonucun ışığı altında da (XI.2.4) den

$$\boxed{|\mathbf{grad} \Phi|^2 = \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2} \quad (\text{XI.2.8})$$

ifâdesinin geçerli olacağı anlaşılır.

(XI.2.8) ifâdesi formel olarak (XI.1.12) ifâdesinin aynıdır. Bu *klâsik mekanik* ile *geometrik optik* arasında mükemmel bir yapı benzerliğinin var olduğuna işaret eden bir sonuçtur.

Eğer geometrik optiğin

$$\mathbf{grad} n \approx 0 \quad \text{ve} \quad \text{div} \left(\frac{\mathbf{s}}{s} \right) \approx 0$$

varsayımları gerçekleşmezse, bu takdirde ışığın kırınım olayları ortaya çıkar. Buna rağmen (XI.2.3) vazi yapıldığı da bu (XI.2.1) dalga denkleminde yerleştirilirse Φ fazı için artık (XI.2.8) ifâdesine erişilemeyeceği ve mekanik ile aradaki benzerliğin bozulmuş olacağı besbellidir.

Şimdi meseleye daha geniş bir açıdan bakacak olursak *geometrik optik* ile *klâsik teorik mekanik* arasındaki formel benzerliğin elemanlarını daha da belirgin kılabiliriz.

(XI.1.1) ve (XI.2.2) ile verilen *aksiyon* ve *faz* arasındaki yapısal benzerlik

$$\left. \begin{aligned} S &= S_0 - Et \\ \Phi &= \frac{2\pi\nu}{u} s - 2\pi\nu t \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.2.9})$$

ile ortaya konulmuştur. Ayrıca aksiyonun ve, geometrik optik yaklaşımında, fazın gerçekledikleri

$$\left. \begin{aligned} |\text{grad } S|^2 &= \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \\ |\text{grad } \Phi|^2 &= \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.2.10})$$

denklemleri de bu yapısal benzerliği kuvvetlendirmektedirler. Tabiidir ki gerek (XI.2.9) gerekse (XI.2.10), fiziksel fonksiyonları ve boyutları farklı şeyler olan S aksiyonu ile Φ fazının birbirlerine eşit olduklarını içermez, belki birbirleriyle orantılı olduklarını içerir. Ancak, boyut bakımından aksiyonun boyutunun: $[S] = ML^2T^{-1}$ olmasına karşılık faz boyutsuz bir büyüklüktür. Şu hâlde: $[h] = ML^2T^{-1}$ gibi bir aksiyonun boyutunu haiz bir sâbit olmak üzere, meselâ,

$$\boxed{\Phi = \frac{2\pi}{h} S} \quad (\text{XI.2.11})$$

olabilir.

Mekanik ile geometrik optik arasındaki yapısal benzerliğin tam olabilmesi için nasıl ki geometrik optikte fazın gerçeklediği (XI.2.8) bağıntısı bir dalga denkleminde hareketle elde edilmiş ise aynı şekilde *mekanik dalga teorisinde* de öyle bir Ψ büyüklüğünün olması gereklidir ki bu da

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{XI.2.12})$$

şeklinde bir dalga denklemini gerçeklesin.

Nasıl (XI.2.3) vazını yaptıysak şimdi de (XI.2.11) in ışığı altında

$$\Psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S} = e^{\frac{2\pi i}{h} (S_0 - Et)} \quad (\text{XI.2.13})$$

vazını yapalım. Ayrıca da S_0 ı

$$S_0 = \frac{h}{2\pi i} \ln \Psi \quad (\text{XI.2.14})$$

diye bir Ψ fonksiyonu cinsinden ifâde edelim. Buna göre (XI.2.12) denklemi

$$\nabla^2 \Psi = -\frac{4\pi^2 E^2}{h^2 u^2} \Psi$$

şekline girer. Diğer taraftan u hızının (XI.1.9) ile verilmiş olan ifâdesini göz önünde tutacak olursak

$$\nabla^2\Psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\Psi = 0 \quad (\text{XI.2.15})$$

denklemini elde edilir. SCHRÖDİNGER (1887-1961) denklemini adı verilen bu denklem TEORİK FİZİK DERSLERİ dizimizin 3. cildi olan KLÂSİK KUVANTUM MEKANİĞİ cildinde göreceğimiz gibi kuvantum dalga mekaniğinin nüvesini ve (XI.2.12) ilâ (XI.2.15) e kadar olan formüller de klâsik teorik mekaniğin bir genelleştirilmesi olan bu dalga mekaniğinin temelini oluşturmaktadırlar. Bu denklemin, sonradan deneylerin de gerçekledikleri gibi, atom fiziğinin meselelerini doğru bir biçimde çözmek ve öngörmek gibi fevkalâde avantajları varsa da esas mâhiyeti bizce maalesef bilinmeyen ve yorumu da çeşitli ekollerin oluşmasına yol açmış olan bir Ψ dalga fonksiyonunu ortaya koymak gibi bir mahzûru vardır.

Yukarıda söz konusu ettiğimiz kitabımızda, Ψ dalga fonksiyonunun gerçek mâhiyetini bilmesek bile onun ölçülebilir fiziksel büyüklüklerle olan ilişkilerinin nasıl tesbit edilebileceğini ve bu bilgi aracılığıyla özellikle atomsal sistemleri ve bunların sahne oldukları olayları nasıl öngörüp yorumlayabileceğimizi ele alacağız.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

DERS NOTLARI

- Fezâ GÜRSEY : Rasyonel Mekanik Notları (1954-1955 ders yılı; notları tutan: A. Y. ÖZEMRE)
- Fikret KORTEK : Teorik Mekanik Notları (1956-1957 ders yılı; notları tutan: A.Y. ÖZEMRE)

METİN KİTAPLARI

- G. BOULIGAND : *Mécanique Rationnelle, Cours et Problèmes Résolus*; 5. baskı, *Vuibert* (1954).
- T.C. BRADBURY : *Theoretical Mechanics*; *John Wiley* (1968)
- H.CABANNES : *Cours de Mécanique Générale*; 2. baskı, *Dunod* (1965).
- R.CAMPBELL : *La Mécanique Analytique*; *Presses Universitaires de France* (1971)
- G. FALK : *Theoretische Mechanik I, Punktmechanik*; *Springer Verlag* (1966)
- B. FINZI : *Meccanica Razionale*; 2 cild *Zanichelli Ed.* (1948).
- S. FLÜGGE : *Lehrbuch der theoretischen Physik*; *Springer Verlag*, 1.cild (1961) ve 2. cild (1967)
- Ph. FRANK, von MISES : *Differentialgleichungen der Physik*, 2. cild; unveränderter Nachdruck der 2. vermehrten Auflage; *Dover* (1961)
- H.GOLDSTEIN : *Classical Mechanics*; *Addison Wesley* (1950)
- Y. HAGIHARA : *Celestial Mechanics, Vol. 1; Dynamical Principles and Transformation Theory*; *MIT Press* (1970)
- G. HAMEL : *Theoretische Mechanik*; *Springer Verlag* (1949)
- G. HAMEL : *Elementare Mechanik*; *Johnson Reprint Corp.* (1965)

- W. HAUSER : *Introduction to the Principles of Mechanics; Addison Wesley* (1966)
- C.W.KILMISTER : *Hamiltonian Dynamics; Longmans* (1964)
- C.KITTEL, W.D.KNIGHT,
M.A.RUDERMAN : *Mechanics-Berkeley Physics Course: 1; 1. baskı, Mc Graw Hill* (1965)
- C. LANCZOS : *Variational Principles of Mechanics; 3. baskı, University of Toronto Press, (1966)*
- L.D.LANDAU,
E.M.LIFSCHITZ : *Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik; Akademie Verlag* (1967)
- J.W.LEECH : *Classical Mechanics; Methuen and Co.* (1965)
- G.LUDWIG : *Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik, 1. Band; Bartelsmann Universitätsverlag* (1974)
- L. LUR'E : *Mécanique Analytique, 2 cild; Presses de l'Université Libre de Bruxelles* (1973)
- W. MACKE : *Mechanik der Teilchen, Systeme und Kontinua; 2. baskı, Akademische Verlagsgesellschaft* (1964)
- A.MERCIER : *Analytical and Canonical Formalism in Physics; North Holland Publ. Comp.* (1958).
- D.MORGENSTERN,
I.SZABO : *Vorlesungen über theoretische Mechanik; Springer Verlag* (1961)
- C. SCHAEFFER : *Einführung in die theoretische Physik I: 5. baskı, Walter de Gruyter* (1950)
- A.SOMMERFELD : *Mechanics, Academic Press* (1952)
- J.L.SYNGE : *Classical Dynamics, in Handbuch der Physik, Band: III/1, Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie, s. 1-225; Springer Verlag* (1960)
- TER HAAR : *Elements of Hamiltonian Mechanics; North Holland Publ. Comp., (1961)*
- H.VOLTZ : *Einführung in die theoretische Mechanik in 2 Bänden; Akademische Verlagsgesellschaft* (1972)

PROBLEM KİTAPLARI

- P.ALAIS, M.HULIN : *Mécanique (Cinématique-Dynamique); Armand Colin* (1969)
- H.BEGHIN, G.JULIA : *Exercices de Mécanique; 2 cild, Gauthier-Villars* (1959)
- H.CABANNES : *Problèmes de Mécanique Générale; Dunod* (1966)
- K.FEDEROHOFFER : *Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes; 3 cild; Springer Verlag, Wien* (1951)

-
- G.L.KOTKIN, V G.SERBO : *Collection of Problems in Classical Mechanics; Pergamon Press (1971)*
- G. Le MORVAN : *Mécanique et Thermodynamique-Licence-Exercices avec Solutions; Vuibert (1973)*
- M.MANTON : *Exercices et Problèmes de Mécanique; Armand Colin (1973)*
- J.P.MAURY : *Mécanique; Armand Colin (1970)*
- MECHTCHERSKI : *Recueil de Problèmes de Mécanique Rationnelle; Editions de Moscou (1974)*
- P.PROVOST,A PROVOST . *Problèmes de Mécanique; Masson et Cie (1970)*
- M.R SPIEGEL : *Theory and Problems of Theoretical Mechanics; Schaum Publ. Comp. (1967)*
- D.A.WELLS : *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics, Schaum Publ. Comp. (1967)*
-

ERRATA

(* işâretli satırlar sayfanın altından itibaren sayılacaktır).

| S a y f a | S a t ı r | Y a n l ı Ő | D o ğ r u |
|-----------|-----------|------------------------------------|------------------------------------|
| 8 | 9* | $z = r = \cos \theta$ | $z = r \cos \theta$ |
| 45 | 11* | ρ : ışınsal | ρ : ışınsal |
| 46 | 1 | $= \rho(\pi) \overline{F_1 A_1}$ | $\rho(\pi) = \overline{F_1 A_1}$ |
| 47 | 2 | ifâdeye | ifâdeyi |
| 96 | 17 | $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}$ | $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}$ |
| 117 | 9* | yok | yol |
| 118 | 3* | V ile... | V ile ... |
| 118 | 2* | test parçacığı | test tâneciği |
| 119 | 2 | test parçacığı | test tâneciği |
| 135 | 2* | $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ij}$ | $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ |
| 180 | 1 | keyfî bir | keyfî skaler bir |
| 254 | 1* | r - nin... | r nin... |

İÇİNDEKİLER

| | |
|--------------------|-----|
| <i>İTHAF</i> | V |
| <i>ÖNSÖZ</i> | VII |

BİRİNCİ KISIM : KİNEMATİK

I. BÖLÜM

NOKTANIN KİNEMATİĞİ

| | | |
|--------|---|----|
| (I.1) | Noktanın uzayda belirlenmesi | 3 |
| (I.2) | Dik referans sistemleri | 3 |
| (I.2a) | Dik kartezyen referans sistemi | 4 |
| (I.2b) | Dik silindirik referans sistemi | 6 |
| (I.2c) | Küresel referans sistemi | 8 |
| (I.3) | Doğal referans sistemi (<i>Serret-Frenet Üçyüzlüsü</i>) | 9 |
| (I.4) | Hız ve ivme | 13 |
| (I.5) | Genel doğrusal hareket | 20 |
| (I.6) | Genel düzlemsel hareket | 21 |
| (I.7) | Merkezil hareket | 22 |
| (I.8) | Lineer harmonik hareket | 25 |
| (I.9) | Hareketin hız veyâ ivme aracılığıyla genel olarak belirlenmesi | 26 |
| (I.10) | Görel (izâfî) hareket | 29 |
| (I.11) | Âni dönme vektörü | 31 |
| (I.12) | Arz üzerindeki bir noktanın hareketi | 34 |
| (I.13) | Mermilerin hareketi | 38 |
| (I.14) | <i>Foucault</i> sarkacı | 41 |
| (I.15) | Gezegenlerin hareketi | 45 |
| (I.16) | Hodograf | 49 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 51 |

İKİNCİ KISIM: DİNAMİK

II. BÖLÜM

NOKTANIN DİNAMIĞI

| | | |
|--------|---|----|
| (II.1) | Dinamiğin temel ilkeleri ve eleştirisi | 61 |
| (II.2) | Nokta dinamiğinin temel problemi | 68 |
| (II.3) | Klâsik mekaniğin belirlilik ilkesi | 71 |
| (II.4) | Eylemsizlik sistemleri, invaryans özellikleri | 73 |
| (II.5) | Eylemsizlik (atâlet) kuvvetleri | 75 |
| (II.6) | Eylemsizlik kuvvetlerinin fiziksel kökeni: <i>Mach</i> ilkesi | 77 |
| (II.7) | Dinamiğin temel denkleminin öteleme ve dönme dönüşümlerine göre bakışım özellikleri | 79 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 84 |

III. BÖLÜM

DİNAMIĞIN GENEL TEOREMLERİ

| | | |
|---------|---|-----|
| (III.1) | İmpuls | 88 |
| (III.2) | İş, kinetik enerji, potansiyel enerji | 89 |
| (III.3) | Dönme impulsu ve dönme momenti | 92 |
| (III.4) | Viriyel | 94 |
| (III.5) | Nokta sistemlerinin dinamiği | 96 |
| (III.6) | Nokta sistemleri için viriyel teoremi | 103 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 104 |

IV. BÖLÜM

EVRENSEL ÇEKİM (GRAVİTASYON)

| | | |
|--------|---|-----|
| (IV.1) | Gezegenlerin hareketlerinin dinamik özellikleri | 112 |
| (IV.2) | Gezegenlerin hareketlerinin kinematik özellikleri: mümkün yörüngeler | 115 |
| (IV.3) | Evrensel çekim kaanûnu | 117 |
| (IV.5) | Statik çekim alanı | 118 |
| (IV.6) | <i>Poisson</i> denkleminin formel çözümü | 123 |
| (VI.7) | Üç ayrı kütle kavramı | 126 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 128 |

V. BÖLÜM

KATI CİSMİN MEKANİĞİNE GİRİŞ

| | | |
|-------|--|-----|
| (V.1) | Katı cismin sonlu dönmeleri | 131 |
| (V.2) | Katı cismin düzlemsel hareketinde âni dönme eksenini | 136 |
| (V.3) | Bir nokta etrafındaki harekette dönme impulsu | 137 |
| (V.4) | Katı cismin kinetik enerjisi | 139 |
| (V.5) | Eylemsizlik momentinin bazı özellikleri | 140 |
| (V.6) | Eylemsizlik tansörü | 143 |
| (V.7) | Katı cismin hareket denklemleri (<i>Euler denklemleri</i>) | 145 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 149 |

ÜÇÜNCÜ KISIM: ANALİTİK MEKANİK

VI. BÖLÜM

ANALİTİK MEKANİĞE GİRİŞ

| | | |
|---------|---|-----|
| (VI.1) | Genelleştirilmiş koordinatlar | 153 |
| (VI.2) | Konfigürasyon uzayı | 157 |
| (VI.3) | Bağlar | 158 |
| (VI.4) | Sanal işler ilkesi | 161 |
| (VI.5) | <i>D'Alembert</i> ilkesi | 164 |
| (VI.6) | <i>Lagrange</i> denklemleri | 165 |
| (VI.7) | Holonom olmayan hâller; <i>Lagrange</i> çarpanları yöntemi | 172 |
| (VI.8) | <i>Lagrange</i> fonksiyonunun önemli bir invaryans özelliği | 179 |
| (VI.9) | İvmeli sistemlerin <i>Lagrange</i> fonksiyonu | 181 |
| (VI.10) | <i>Noether</i> teoremi; bakışım ve korunum kaanunları | 183 |
| (VI.11) | <i>Noether</i> teoreminin uygulanmasına basit örnekler | 187 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 190 |

VII. BÖLÜM

MEKANİĞİN VARYASYON İLKELERİNE GİRİŞ

| | | |
|---------|--|-----|
| (VII.1) | <i>Hamilton</i> varyasyon ilkesi | 199 |
| (VII.2) | <i>Hamilton</i> ilkesinin geometrik anlamı | 203 |
| (VII.3) | Konfigürasyon uzayının geometrisi | 205 |
| (VII.4) | <i>Fermat</i> ilkesi | 208 |
| (VII.5) | Geometrik optik ile nokta dinamiği arasındaki formel benzerlik | 210 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 212 |

VIII. BÖLÜM

HAMILTON FORMALİZMİ

| | | |
|----------|--|-----|
| (VIII.1) | <i>Hamilton</i> hareket denklemleri | 213 |
| (VIII.2) | <i>Hamilton</i> denklemlerinin bir varyasyon ilkesinden türetilmesi... | 215 |
| (VIII.3) | <i>Hamilton</i> fonksiyonunun fiziksel anlamı | 217 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 221 |

IX. BÖLÜM

DÖNÜŞÜMLER TEORİSİ VE İNVARİYANS ÖZELLİKLERİ

| | | |
|--------|---|-----|
| (IX.1) | Kanonik dönüşümler | 222 |
| (IX.2) | <i>Hamilton-Jacobi</i> denklemi | 227 |
| (IX.3) | <i>Poisson</i> parantezleri | 230 |
| (IX.4) | <i>Poisson</i> parantezlerinin kanonik dönüşümlere göre invariyans özellikleri | 232 |
| (IX.5) | Sonsuz küçük kanonik dönüşümler | 234 |
| (IX.6) | Kanonik denklemlerin bazı simetri ve invariyans özellikleri | 236 |
| (IX.7) | Faz uzayı ve <i>Liouville</i> teoremi | 239 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 243 |

X. BÖLÜM

HAMILTON-JACOBI DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU

| | | |
|-------|--|-----|
| (X.1) | <i>Hamilton-Jacobi</i> denkleminin genel çözüm yöntemi | 246 |
| (X.2) | <i>Hamilton-Jacobi</i> teorisinin bir uygulaması olarak harmonik osilâtör | 248 |
| (X.3) | <i>Hamilton-Jacobi</i> denklemi için değişkenlere ayrışım yöntemi ... | 250 |
| | Alıştırmalar ve problemler | 253 |

XI. BÖLÜM

HAMILTON-JACOBI TEORİSİNE GÖRE DALGA DENKLEMİ

| | | |
|--------|------------------------------|-----|
| (XI.1) | Aksiyon dalgaları | 255 |
| (XI.2) | Optik benzerlik | 258 |
| | YARARLANILAN KAYNAKLAR | 263 |
| | ERRATA | 266 |
| | İÇİNDEKİLER | 267 |