

TEORİK FİZİK DERSLERİ

Dizinin Yönetici : AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

"Teorik Fizik Dersleri" şimdilik 6 sı Lisans ve 6 sı da Lisansüstü düzeyinde 12 cild metin kitabı ile 15 cild de çözümlü problem kitabından oluşan bir dizi olarak plânlanmış bulunmaktadır.

METİN KİTAPLARI :

Lisans Düzeyinde

1. Fizikte Matematik Metotlar: A.Y. Özemre (1. baskısı ITÜ Yayınları No. 826, 1971; genişletilmiş 2. baskısı hazırlanıyor).
2. Klâsik Teorik Mekanik; A.Y. Özemre (İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No. 132, 1976).
- 3/B Kuantum Mekaniğinin Temel İlkeleri: A. Ferendeci (İst. Üniv. Fen. Fak. Yay. BASKIDA).
4. Elektromagnetik Teori.
5. Isı Teorisi; A.Y. Özemre (İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No. 140, 1977).
6. Özel Rölâtivite Teorisi; A.Y. Özemre ve E.M. Rıza (HAZIRLANIYOR).

Lisansüstü Düzeyinde

7. Gravitasyon Rölâtivist Teorileri; A.Y. Özemre (BASKIDA).
8. Kozmoloji; A.Y. Özemre (İlk versiyonu BASKIDA).
9. İleri Kuantum Mekaniği
10. Çekirdek Teorisi; Ç. Cansoy (İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No. , 1978).
11. Alan Teorilerine Giriş
12. Temel Tâneçikler Teorisi; F. Kortel (HAZIRLANIYOR).

ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTAPLARI :

Dizinin tasarlanan 15 adet Çözümlü Problem Kitabından hâlen baskıda ya da hazırlanmakta olanlar şunlardır :

- 1/I Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı Cild I; E. M. Rıza ve K.G. Akdeniz (HAZIRLANIYOR).
- 1/III Fizikte Matematik Metotlar Çözümlü Problem Kitabı Cild III; K.G. Akdeniz ve E.M. Rıza (HAZIRLANIYOR).
- 2/I Klâsik Teorik Mekanik Çözümlü Problem Kitabı; A.Y. Özemre ve Ş. Zebitayan (HAZIRLANIYOR).
- 3/I Kuantum Mekaniği Çözümlü Problem Kitabı; E.M. Rıza (BASKIDA).
- 5/I Isı Teorisi Çözümlü Problem Kitabı; A.Y. Özemre ve E..M. Rıza (BASKIDA).
- 7/I Gravitasyonun Rölâtivist Teorileri Çözümlü Problem Kitabı; Ş. Zebitayan ve A.Y. Özemre (HAZIRLANIYOR).
- 10/I Çekirdek Teorisi Çözümlü Problem Kitabı; Ç. Cansoy (HAZIRLANIYOR).

TEORİK FİZİK DERSLERİ

CİLD 10

ÇEKİRDEK TEORİSİ

Doç. Dr. ÇETİN CANSOY

**İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Teorik Fizik Kürsüsü Öğretim Görevlisi**

**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ**

1978

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
YAYINLARINDAN

Sayı : 2416

FEN FAKÜLTESİ

Sayı : 143

TEORİK FİZİK KÜRSÜSÜ

Sayı : 5

© Her hakkı İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesine aittir.

EŐİM YÜKSEL'E

Ö N S Ö Z

Bu kitap İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsü lisansüstü öğretimi için hazırlanmıştır. 1974 - 1977 yılları arasında bu kitabın üçüncü ve dördüncü bölümlerini Teorik Fizik Kürsüsünde 8. yarıyıl lisans öğrencilerine haftada 3 saat ders ve 2 saat tatbikat olmak üzere "Çekirdek Teorisi" adı altında okuttum.

Çekirdek teorisine ait tansör kuvvetler, nükleonların polarizasyonu, çekirdeğin kollektif modeli, çekirdeğin mikroskopik modeli, optik model, direkt reaksiyonlar, çok yüksek enerjilerdeki çekirdek reaksiyonları, fisyon, çekirdeklerin elektromanyetik alanla etkileşmeleri, beta-parçalanmasının teorisi, ve çekirdek kuvvetlerinin mezon teorisi konuları gerek lisansüstü seviyesini aştığı için, gerekse zaman darlığı nedeni ile kitabın kapsamı dışında bırakılmışlardır. Kitabın kapsamı içine giren konuların da tam olarak derinliğine inilmemiş, sadece çekirdek teorisine giriş seviyesinde sunulmuştur. Fakat kitabın kapsamına giren konuların mümkün olduğu kadar ayrıntılı ve anlaşılabilir bir tarzda anlatılmasına özen gösterilmiştir. Altı bölümden oluşan bu kitap, hiç bir orijinalliği olmayan bir ders kitabıdır.

Her bölümün sonuna konu ile ilgili çözülmemiş problemler eklenmiştir. Bu problemlerin çözümleri, ilâve problemler ile birlikte ayrı bir çözümlü problem kitabı hâlinde yayımlanmak üzere hazırlanmaktadır.

Beni bu kitabı yazmaya teşvik ettiği ve cesaretlendirdiği için Teorik Fizik Kürsüsü Başkanı Prof. Dr. Ahmed Yüksel Özemre'ye en samimî teşekkürlerimi burada ifâde etmeyi borç bilirim. Kendisine ayrıca kitabın güzel görünümünü veren sayfa düzenlemesini üzerine almak lütfunda bulunduğu için şükran borçluyum.

Teorik Fizik Kürsüsü sekreteri Mansûre Altıngiray'a manüskrinin daktilo edilmesinde gösterdiği sür'at ve dikkat için, ve kitabın dizgi, prova ve baskı işlemleri sırasında büyük emekleri geçmiş olan Fen Fakültesi Basımevinin bütün elemanlarına gösterdikleri dikkat ve gayretler için samimî teşekkürlerimi burada ifâde etmeyi borç bilirim.

İstanbul, Ocak 1978

Çetin Cansoy

ERRATA

(* işaretli satırlar sayfanın altından itibaren sayılacaktır.)

Sayfa	Satır	Y a n l ı ş	D o ğ r u
12	15*	...= 68 <i>mc</i>	(12) ...= 68 <i>mc</i>
13	14*	...→ $e^+ + {}^1_0n$...→ $e^+ + {}^1_0n$ (12)
16	16*	Gerçekten	Gerçekte
46	2*	yarıçapı <i>c</i> ile.....gösterilsin. (noktalı yerler atlanmış.)	...ve yoğunluğun maksimum de- ğerin yüzde 90 ından yüzde 10 una düştüğü geçiş bölgesini oluşturan kabuğun kalınlığı da <i>s</i> ile
58	13*	(II.2)	(III.2)

I. BÖLÜM

ÇEKİRDEKLERİN NİTEL ÖZELLİKLERİ

(I.1) ELEMANTER PARÇACIKLAR

Parçacıkları, sadece kütle ve yük gibi belirli sabit fiziksel özelliklere sahip geometrik noktalar olarak kabul edip iç yapıları ile ilgilenmediğimiz sürece elemanter olarak kabul edeceğiz. Bu tarife göre, klâsik mekanikteki elemanter parçacıklar moleküllerdir ve klâsik kimyadaki elemanter parçacıklar da atomlardır.

Nükleer fizikteki elemanter parçacıklar, kütlelerine göre dört gruba ayrılabilirler :

(a) Elektromanyetik alanın kuvantumu olan **foton**. Bunun ne kütlesi ne de yükü vardır.

(b) **Leptonlar** adı verilen hafif parçacıklar. Bu grupta pozitron ve elektron vardır; her birinin kütlesi m_e ve yükleri de mütেকabilen $+e$ ve $-e$ dir. Bu grupta aynı zamanda iki çeşit oldukları bilinen yüksüz ve çok küçük kütleyle sahip nötrinolar vardır.

(c) **Baryonlar** adı verilen ağır parçacıklar. Bu gruptakiler içinde bizi ilgilendirenler en hafifleri olan proton ve nötrondur. Bunların kütleleri tamamen aynı değildir, ve nötronun kütlesi protonunkinden biraz daha büyüktür; her ikisinin kütlesi de $1840 m_e$ mertebesindedir. Protonun yükü $+e$ dir ve nötron yüksüzdür. Bizi ilgilendirmeyen diğer baryonlar çok kararsızdır ve hızla bozularak protonlara ve nötronlara dönüşürler.

(d) Yukarıdakilerin arasındaki kütlelere sahip olan **mezonlar**. Bu grupta pek çok elemanter parçacık vardır. Fakat bunlar arasında çekirdek teorisini en fazla ilgilendiren ikisini bahis konusu edeceğiz. Bunlar **müon** veya μ -**mezonu** ve **pion** veya π -**mezonu**dur. Bu parçacıklar $+e$ veya $-e$ yüklerine sahip olabilirler, pion aynı zamanda yüksüz de olabilir. Yüksüz müon deneysel olarak tesbit edilmemiştir ve muhtemelen yoktur. Kütesini bir yana bırakırsak müon, özellikleri bakımından elektrona, piondan çok daha yakındır.

Elemanter parçacıklar, kütle ve yüke ilâve olarak çok önemli iki özelliğe daha sahiptirler: *spin açısal momentumu* ve *manyetik moment*. Spin, kuvantum mekaniğinin ortaya koyduğu ve deneylerin sağladığı bir özellik olup klâsik mekaniğe ve makroskopik fizikte bir benzeri yoktur.

Spinin varlığını ispat eden delillerin başında spektral çizgilerde dubletlerin varlığı gelir; sodyumun D-çizgileri ve anormal Zeeman olayında olduğu gibi. Bu deneyler, elektronun $\frac{1}{2} \hbar$ değerinde bir spini ve $\mu_e = -\frac{e\hbar}{2m_e c}$ değerinde bir manyetik momenti olduğunu gösterir. $\frac{e\hbar}{2m_e c}$ büyüklüğüne bir *Bohr manyetonu* adı verilir. Negatif işaret, spin ve manyetik moment vektörlerinin ters doğrultularda olduğunu gösterir. Bunlar aynı zamanda Dirac'ın rölâtivistik elektron denkleminin tabii sonuçlarıdır.

Benzer deneyler protonların ve nötronların da $\frac{1}{2} \hbar$ değerinde birer iç spine sahip oldukları sonucuna götürür. Fakat bu parçacıkların ölçülen manyetik momentleri beklendiği gibi $\mu_p = \frac{e\hbar}{2M_p c}$ ve $\mu_n = 0$ değildir. Deneysel değerler

$$\mu_p = + 2,7927 \text{ nükleer manyeton,}$$

$$\mu_n = - 1,9131 \text{ nükleer manyeton,}$$

olup burada bir nükleer manyeton: $\frac{e\hbar}{2M_p c}$ büyüklüğüdür. Böylece, spin nükleonların Dirac denkleminde uyabileceğini gösterdiği hâlde, manyetik moment nükleonların (yani proton ve nötronların) elektronlar gibi basit parçacıklar olamayacağını gösterir.

Elemanter parçacıkların özelliklerini gösteren cetvel

İsim	Sembol	Kütle (m_e birim ile)	Yük (e birimi ile)	Spin (\hbar birimi ile)
Foton	γ	0	0	1
Nötrino	ν	<0,001	0	1/2
Elektron	e^\pm	1	+1 veya -1	1/2
Müon	μ^\pm	206,9	+1 veya -1	1/2
Pion	π^\pm	273,3	+1 veya -1	0
Yüksüz pion	π^0	264,3	0	0
Proton	p	1836,1	1	1/2
Nötron	n	1838,7	0	1/2

(I.2) ÇEKİRDEĞİN BÜYÜKLÜĞÜ, KÜTLESİ VE ELEKTRİK YÜKÜ

Atomun merkezinde ağır, pozitif yüklü ve çok küçük boyutlara sahip bir çekirdeğin varlığı ilk defa Rutherford tarafından gösterilmiştir. (1911). Rutherford ince metal levhaları, evvelce iki defa iyonize olmuş helyum atomlarından ibaret olduklarını gösterdiği α -parçacıkları ile bombardıman etti, ve bu parçacıkların yaprak tarafından saçılması sonucu meydana gelen sapma açılarını inceledi. Etkin saptırıcı kuvvetin, Z yaprağın elemanlarının periyodik cetvelindeki numarası olmak üzere, $2Ze^2/r^2$ olduğunu buldu. Fazla olarak, saçılma açılarından bazıları α -parçacığının atomun merkezinden 10^{-12} cm mertebesinde bir uzaklıktan geçtiğini gösterdi. Bu da α -parçacıklarının, yarıçapı 10^{-8} cm mertebesinde olan atomun içerisinden geçtiklerini ispatladı. Diğer yandan, çekirdeğe en fazla yaklaşma uzaklığı olan 10^{-12} cm de olan çarpışmalarda Coulomb kanunundan sapmalar görüldü. O halde, çekirdeğin sonlu bir büyüklüğü vardır. Aynı zamanda çekirdeğin hemen hemen atomun bütün kütesine sahip olduğu anlaşıldı; çünkü aksi takdirde α -parçacıkları atomun dış kısımları tarafından saçılacaktı. Nihayet, atom bütün halde yüksüz olduğu ve çekirdek $+Ze$ yüküne sahip bulunduğu için, çekirdek kendisine 10^{-8} cm mertebesinde uzaklıkta bulunan Z tane elektron tarafından kuşatılmış olmalıdır. Atomun boşluğu tarifsiz büyüktür. Atom çok kere güneş sistemi ile mukayese edilir. Fakat eğer çekirdek, güneşin büyüklüğüne ve kütesine sahip olacak şekilde büyütülseydi, elektronun kütesi dünyanın kütesi kadar olacaktı ve çekirdekten uzaklığı da güneşin en uzak planetinin uzaklığından on defa daha büyük olacaktı.

Sonradan, J. J. Thomson elektrik yükü belirli olan bir çekirdeğin kütesinin tek olarak tayin edilemediğini keşfetti (1913). Genel olarak çekirdeğin yükü arttıkça kütesi de artmakla beraber, aynı yüke tekabül eden bir çok kütle vardır. Şüphesiz böyle çekirdekler kendilerini çevreleyen aynı sayıda elektrona sahiptirler. Çekirdeklerin atomlar arasındaki etkileşmelerde hiçbir etkileri yoktur, çünkü çekirdekleri çevreleyen elektronlar bunların yeter derecede birbirlerine yaklaşmalarına engel olur, ve böylece bir atomun kimyasal özellikleri sadece elektronlarının sayısı, yani, Z yük sayısı ile belirli olur. Thomson bu şekilde kimyasal bakımdan saf olan bir elementin atomlarından müteşekkil bir cismin bütün atomlarının aynı kütleyle sahip olmadıklarını keşfetti. Böyle atomlara **izotop** adı verilir. Aynı bir elementin atomlarının çekirdeklerine, yani belirli bir izotop atomlarının çekirdeklerine **nüklid** adı verilir.

Herhangi bir izotopun kütesi, hidrojen atomunun çekirdeği olan protonun kütesinin belirli bir tam katına çok yakındır. (Tam olarak doğrusunu söylemek gerekirse, atomik kütle birimi olarak protonun kütesi alınmaz, fakat protonun kütesinin yaklaşık olarak 12 katına sahip olan karbon izotopunun kütesinin 1/12 si alınır. Bu şekilde tam kat kaidesi daha iyi bir yaklaşıkla sağlanır). Böylece bir nüklid, atomik kütle birimi cinsinden kütesinin en yakın olduğu tam sayı olan A

kütle sayısı ve Z yük sayısı ile tamamen belirlidir. Başlangıçta çekirdeğin A proton ile $A-Z$ elektrondan meydana geldiği düşünölmüştü. Sonradan çekirdeğin içinde elektronların mevcut olamayacakları ve bir çekirdeğin Z proton ile $N=A-Z$ nötrondan meydana geldiği anlaşıldı. A kütle sayısına ve Z yük sayısına sahip bir X kimyasal elementine ait bir nüklid A_ZX_N sembolü ile gösterilir. Meselâ, tritium nüklidi (çok ağır hidrojen : $A=3$, $Z=1$) 3_1H_2 ile gösterilir. Çok kere aşğıdaki sayılar ihmal edilir, çünkü nüklid AX sembolü ile tamamen belirlidir. Protonları ve nötronları ayrı ayrı düşünmek gerekmediğı zamanlar bunlara **nükleonlar** adı verilir.

Hafif çekirdeklerde, A yaklaşık olarak Z nin iki katına eşittir, yani, protonların sayısı yaklaşık olarak nötronların sayısına eşittir. Fakat Z arttıkça $\frac{A}{Z}$ oranı da artar ve ağır çekirdeklerde 2,5 i aşar. Nötronların protonlara nazaran bu fazlalığı şöyle açıklanabilir : Elektrik yüklü protonlar birbirlerini ittikleri halde yüksüz olan nötronlar birbirlerini itmezler ve böylece nötronlar nükleonları çekirdekte bir arada tutan çekirdek kuvvetleri tarafından daha sıkı olarak birbirlerine bağlanırlar.

Yukarda eşit Z ye, fakat farklı N ye sahip nüklidlerden, yâni izotoplardan bahsetmiştik. Eşit N ye, fakat farklı Z ye sahip nüklidlere de **izoton** adı verilir. Eşit A ya, fakat farklı N ve Z ye sahip nüklidlere **izobar** adı verilir. İzobarlar çekirdek fiziğı bakımından birbirlerine çok benzerler, çünkü aynı sayıda nükleona sahiptirler; halbuki kimya bakımından izotoplar birbirlerine benzerler. Son olarak, aynı A , N ve Z ye sahip olan, fakat iç enerjileri bakımından birbirlerinden farklı çekirdekler düşünölebilir. Böyle çekirdekler, bir veya daha fazla elektronu fazla enerjiye sahip, uyarılmış atomlara benzerler. Bilindiğı gibi, uyarılmış atomlar uyarılmamış hale döndüklerinde ışık kuvantumları verirler. Aynı şekilde uyarılmış çekirdekler kararsızdırlar ve kararlı hale döndüklerinde γ -ışını olarak bilinen ışık kuvantumları yayarlar. Bununla beraber, atomlar uyarılmış hallerde uzun zaman kalamadıkları halde, bazı uyarılmış nüklidler bir kaç saat mertebesinde ömürlere sahiptirler. Uyarılmış bir halde bulunan bir X çekirdeğı X^* ile gösterilir ve uzun ömürlü bir uyarılmış hale **izomer** adı verilir.

(L3) BAĞ ENERJİSİ

Bir çekirdeğı teşkil eden parçacıklar şiddetli çekici kuvvetler tarafından bir arada tutulur ve bu sebepten bu parçacıkları birbirlerinden ayırabilmek için bir iş yapılması gerekir. Yani, bir çekirdeğı kendisini teşkil eden parçalara ayırmak için bir enerji verilmesi gereklidir ve böylece parçaların birbirlerinden tamamen ayrıldıkları zamanki toplam enerjisi çekirdeğı teşkil etmek üzere birleştikleri zamanki enerjiden daha büyüktür.

Çekirdeği meydana getiren parçaları birbirlerine bağlayan enerji Özel Rölâ-tivite Teorisindeki

$$E = Mc^2 \quad (1)$$

kütle-enerji bağıntısı ile hesaplanabilir, burada E ve M bir parçacığın enerjisi ve kütlesidir, ve c de ışığın boşluktaki hızıdır. Bu formüle göre kütle bir enerji şeklidir, ve bu sebepten bir çekirdeğin toplam kütlesi, çekirdeği meydana getiren kısımların kütlelerinin toplamından daha küçüktür. Bu sonuç çekirdeklere ait deneyler tarafından büyük bir yakınlıkla gerçekleşmiştir.

Bir çekirdeğin M kütlesi ile bu çekirdeği meydana getiren parçacıkların toplam kütlesi arasındaki farka **kütle eksikliği** adı verilir. Bu kütle eksikliğinin (1) formülü ile verilen enerji eşdeğerine de çekirdeğin bağ enerjisi adı verilir. Bağ enerjisi

$$B = (NM_n + ZM_p - M) c^2 \quad (2)$$

denklemleri ile bellidir, burada M_p protonun kütlesi ve M_n nötronun kütlesidir. Bir çekirdekteki nükleonların birbirlerinden tamamen ayrılmaları hali sıfır enerji seviyesi olarak alındığından, çekirdeğin toplam enerjisi $-B$ dir.

Bağ enerjileri ve kütle eksikleri şüphesiz sadece çekirdeklere has değildir. Atomlardaki elektronlar, moleküllerdeki atomlar ve kristal kafeslerindeki moleküller bağ enerjilerine sahiptirler, fakat bu bağ enerjileri o kadar küçüktürler ki kütle eşdeğerleri deneysel olarak ölçülemezler.

Şimdi de kütle ve enerji birimlerini inceleyelim. u ile gösterilen atomik kütle birimi karbonun yüksüz ^{12}C izotopunun kütlesinin $1/12$ si olarak tarif edilir. Bu tarif, az miktarda ^{17}O ve ^{18}O ile karışmış olan tabii oksijeni esas alan kimyasal tariften çok az farklıdır. Sonuç olarak, kimyasal atomik kütle birimi fiziksel atomik kütle biriminin $1,000046$ katıdır. Şunu da belirtmek önemlidir ki kütle birimine esas alınan ^{12}C çekirdeği değil, etrafındaki altı elektronu ile birlikte ^{12}C atomudur. Buna sebep de tamamen elektronsuz karbon çekirdeğinin kütlesinin tayininin çok güç olmasıdır. Elektrik yükünün korunumundan dolayı, bir çekirdek reaksiyonunu temsil eden bir denklemin her iki tarafındaki elektronların sayısı aynıdır ve böylece her iki taraftaki elektronların kütleleri birbirlerini götürürler ve yüksüz ^{12}C nin standart olarak kullanılmasından hiç bir karışıklık meydana gelmez. Böylece, (1) denklemindeki M kütlesi yüksüz bir atomun kütlesi olarak ve M_p de yüksüz hidrojen atomunun kütlesi olarak alınır. Bunun tek istisnası pozitronu ihtiva eden denklemlerdir, çünkü bir nükleer denklemin bir yanına bir pozitron ile bir elektronun eklenmesi yükü değiştirmeksizin kütleleri değiştirir. Farklı atomlardaki elektronların bağ enerjileri arasındaki fark ihmal edilecektir; gerçekten bu bağ enerjileri, kütle eksikleri olarak ifade olunduklarında, ölçülemeyecek kadar küçüktürler.

Atomik enerji birimi elektron-volt (eV) dur, ve bu enerji e yüküne sahip bir parçacığın bir voltluk bir potansiyel farkı içerisinde hızlandırıldığı zaman kazandığı enerjidir. Bu birimin katları şunlardır:

$$1 \text{ keV (kilo elektron-volt)} = 10^3 \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV (milyon elektron-volt)} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV (milyar elektron-volt)} = 10^9 \text{ eV}$$

Atomik birimlerle c.g.s. sisteminin birimleri arasındaki bağıntılar Avogadro sayısının aracılığıyla hesaplanabilir. Avogadro sayısı $N_0 = 6,025 \times 10^{23}$ mol başındır. Elementer elektrik yükü $e = 4,803 \times 10^{-10}$ esu ve ışığın hızı $c = 2,998 \times 10^{10}$ cm/sn. dir. Atomik kütle birimi gram cinsinden Avogadro sayısının tersinden ibarettir :

$$1 \text{ u} = 1,660 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$1 \text{ Volt} = \frac{1}{300} \text{ esu olduğundan}$$

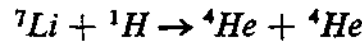
$$1 \text{ eV} = 1,601 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

dir. (1) formülü 1 u nun enerji eşdeğerini verir :

$$1 \text{ u} = 1,49 \times 10^{-3} \text{ erg} = 931,44 \text{ MeV}$$

Bu birimler cinsinden elektronun kütlesi $0,000549 \text{ u}$ dur ve bunun da enerji eşdeğeri $0,511 \text{ MeV}$ dir.

Şimdi (1) formülünü gerçekleyen bir çekirdek reaksiyonuna bir misâl verebiliriz. Eğer lityum yavaş protonlarla bombardıman edilirse, her birinin kinetik enerjisi $8,6 \text{ MeV}$ olan iki α -parçacığına ayrılır :



Bu çekirdeklerin u cinsinden atomik kütleleri şöyledir :

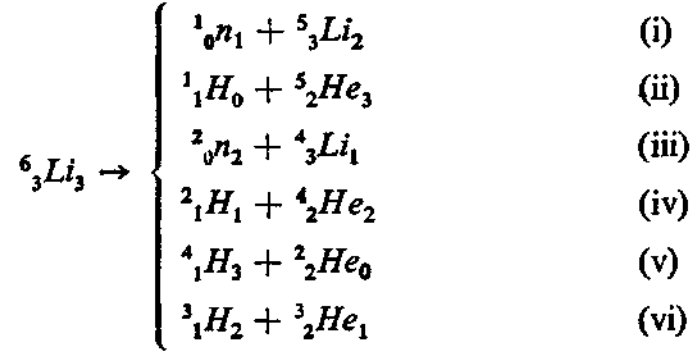
$${}^7\text{Li} = 7,01601 \quad {}^1\text{H} = 1,00783, \quad {}^4\text{He} = 4,00260.$$

O halde kütle azalması $0,01864 \text{ u}$ dur ve bunun enerji eşdeğeri de $17,3 \text{ MeV}$ dir, ve kazanılan toplam kinetik enerjiye ($2 \times 8,6$) eşittir. Lityum hedefinin, ve yavaş protonun kinetik enerjileri ise ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

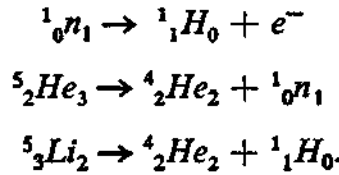
(I.4) KARARLILIK

Bağ enerjisi aynı zamanda bir çekirdeğin kararlılığının bir ölçüsüdür, çünkü eğer çekirdeğin kütlesi herhangi iki parçaya ayrıldığı zaman bu parçaların kütlelerinin toplamından küçükse çekirdek bu parçalara ayrılmaya karşı karardır.

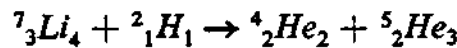
Bir örnekle bu izah edilebilir. ${}^6_3\text{Li}_3$ ün aşağıdaki şekillerde iki parçaya ayrıldığı düşünülebilir :



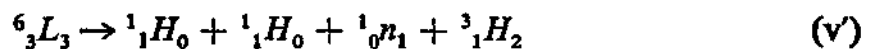
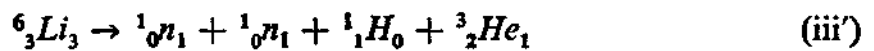
(iv) ve (vi) da bulunan kütleler doğrudan doğruya ölçülebilirler ve değerleri şöyledir : ${}^6\text{Li} = 6,0151$, ${}^2\text{H} = 2,0141$, ${}^3\text{H} = 3,0160$, ${}^3\text{He} = 3,0160$, ${}^4\text{He} = 4,0026$. Böylece ${}^6\text{Li}$ nin (iv) reaksiyonuna karşı izâfî kütle azalması 0,0016 ve (vi) reaksiyonuna karşı da 0,0169 dur. (i) ve (ii) de ${}^1\text{H} = 1,0078$ doğrudan doğruya ölçülebilir, fakat 1n , ${}^5\text{He}$ ve ${}^5\text{Li}$ aşağıdaki reaksiyonlar uyarınca kararsızdırlar :



${}^5\text{He}$ in kütlesi ise



reaksiyonundan elde edilebilir. Çünkü ${}^7\text{Li}$, ${}^2\text{H}$ ve ${}^4\text{He}$ ün kütleleri bilinmektedir ve reaksiyondaki kinetik enerjileri ölçülebilir. Böylece ${}^5\text{He}$ in kütlesi 5,0123 olarak bulunur. ${}^5\text{Li}$ in kütlesi *ayna çekirdekler teorisinden* elde edilebilir ve değeri 5,0125 tir. 1n in kütlesi, nötronun yukarıda zikredilen parçalanma reaksiyonundan ziyade, döteronu yani ${}^2\text{H}$ yi bir proton ile bir nötrona ayırmak için gereken enerjinin bilinmesinden elde edilebilir ve değeri 1,0087 dir. Böylece (i) ve (ii) reaksiyonlarındaki kütle eksikleri mütakabilen 0,0061 ve 0,0050 dir. (iii) ve (v) reaksiyonları hepsi de kararsız olan parçalar meydana getirir. Bu sebepten bu reaksiyonlar



şekillerinde yazılmalıdır ve buradaki kütle eksikleri de mütakabilen 0,0261 ve 0,0252 dir. O halde ${}^6\text{Li}$ kararlıdır. Şüphesiz genel olarak bütün mümkün parçalanmaları araştırmak gerekmez, çünkü iki kararsız parça ile sonuçlanan reaksiyonlar her zaman ihmal edilebilir.

Kararlı çekirdekler listesi A ve Z nin çift veya tek olmasına göre gruplara ayrıldıkları vakit, çift Z ye sahip nüklidlerin tek Z ye sahip nüklidlerden çok daha fazla sayıda oldukları, ve çift A ya sahip olanların da tek A ya sahip olanlardan çok daha fazla sayıda oldukları görülür. Ayrıca çift A ya sahip nüklidlerin hemen hemen hepsi çift Z ye sahiptirler, ve bunun sadece dört istisnası vardır. Çift A ya sahip oldukları halde tek Z ye sahip olan nüklidler 2_1H_1 , 6_3Li_3 , ${}^{10}_5B_5$ ve ${}^{14}_7N_7$ dür. Bu özellikler aşağıdaki cetvelde özetlenmiştir.

A	Z	N	Kararlı izotopların sayısı
çift	çift	çift	149
tek	çift	tek	51
tek	tek	çift	47
çift	tek	tek	4

Bu çeşit incelemelere devam edilirse görülür ki çift Z ye sahip izotopların sayısı tek Z ye sahip izotopların sayısından çok daha fazla ve çift N ye sahip izotopların sayısı tek N ye sahip izotopların sayısından çok daha fazladır. Bir çift Z için çoğunlukla çift N ye sahip altı veya daha fazla izotop vardır, ve bu durum izotoplar için de aynıdır.

(1.5) ÇEKİRDEK REAKSİYONLARI

Yukarıda lityum çekirdeklerinin protonlarla bombardımanından iki α -parçacığının çıktığı bir reaksiyon gördük. Bu, bir çekirdek reaksiyonu için bir örnektir. Böyle bir reaksiyon esnasında enerjinin ve yükün korunması beklenmelidir. Bu gerçekten böyledir ve ayrıca açısal momentum da korunur. Genel bir çekirdek reaksiyonu



şeklinde yazılabilir, burada a bombardıman parçacığı, X hedef çekirdeğine çarpmakta ve Y çekirdeği ile birlikte hedeften uzaklaşan b parçacığını meydana getirmektedir. Reaksiyon sonucunda açığa çıkan enerji Q dur. Egzotermik bir reaksiyon için Q pozitif ve andotermik bir reaksiyon için Q negatiftir. Bütün reaksiyon kısaca

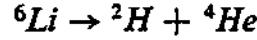


şeklinde yazılır. Bombardıman parçacığı genellikle bir nötron, proton, döteron, triton veya α -parçacığıdır. Bu bombardıman parçacıkları 1_0n , 1_1H , 2_1H , 3_1H ve 4_2He sembolleri yerine basitçe n , p , d , t ve α harfleri ile gösterilir. a veya b bir γ fotonu olduğu zaman önemli bir özel hal ortaya çıkar :



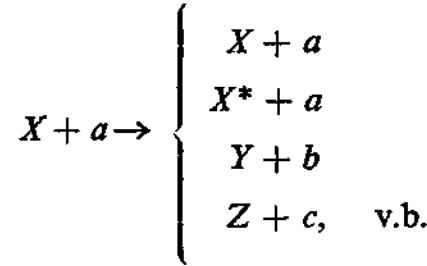
Bu iki işleme, müttekabilen, *foto-desintegrasyon* ve *radyatif yutulma* adı verilir.

Bombardıman parçacığının, reaksiyonu mümkün kılabilen minimum enerjisine *eşik enerjisi* adı verilir. Âşikâr olarak, Q pozitif olduğu zaman eşik enerjisi sıfırdır ve Q negatif olduğu zaman eşik enerjisi pozitiftir. Yukarıdaki (i)-(vi) reaksiyonlarında eşik enerjisi pozitiftir ve



reaksiyonu için de eşik enerjisi minimumdur.

(3) tipindeki bir reaksiyon sadece sol tarafı ile belirli olamaz. Farklı şartlar altında aşağıdaki reaksiyonlar da mümkün olabilir :



Bu reaksiyonlardan birincisine *elâstik saçılma* adı verilir, çünkü bombardıman parçacığı enerji kaybetmeden tekrar açığa çıkar; ikincisine de *elâstik olmayan saçılma* adı verilir, çünkü bombardıman parçacığı hedef çekirdeği uyarmak üzere enerjisinin bir kısmını ona verdiğinden kendisi enerjisi azalmış olarak tekrar açığa çıkar. Bunlara ilâve olarak son iki satırda ifade edildiği gibi bir çok çeşitli reaksiyonlar olabilir. Meselâ, ${}^6\text{Li}(d, \alpha){}^4\text{He}$ ve ${}^6\text{Li}(d, p){}^7\text{Li}$ reaksiyonlarının her ikisi de gözlenmiştir. Diğer yandan bu reaksiyonlar sonucunda ortaya çıkan çekirdekler temel hallerinde bulunabilirler veya uyarılmış hallerden birinde olabilirler. Böylece hedeften uzaklaşan parçacıklar çeşitli enerjilerde gruplanabilirler. ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ reaksiyonundan bu yolla ${}^{12}\text{C}$ nin temel seviyenin üzerinde 4,43 , 7,66 ve 9,63 MeV lik uyarılmış enerji seviyeleri keşfedilmiştir.

(I.6) KARARSIZ ÇEKİRDEKLER

Kararsız bir çekirdek teşekkül eder etmez parçalanmaz ve belirli bir zaman aralığında parçalanması için sonlu bir ihtimal vardır. Bu olay klâsik mekanik aracılığıyla açıklanamaz ve ancak kuvantum mekaniğinin kullanılması ile açıklanabilir.

Eğer bir çekirdeğin birim zamanda parçalanması ihtimali λ ise ve t anında N çekirdek varsa, dt zaman aralığında parçalanma yolu ile azalan çekirdeklerin sayısı

$$dN = - N \lambda dt$$

olur. O halde

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (6)$$

elde edilir, burada N_0 başlangıçtaki çekirdeklerin sayısıdır. Parçalanmanın ömrü birim zamanda parçalanma ihtimalinin tersi olarak tarif edilir, yani:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \text{ ve } N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7)$$

Böylece, çekirdeklerin sayısının zaman başlangıcındaki e^{-1} oranında azalması için geçen zaman ömrüdür. Genellikle nükleer ömürler 10^{-6} saniye ile 10^{14} yıl arasındaki değerler için doğrudan doğruya ölçülebilirler. Bununla beraber, bu sınırların dışındaki ömürler de bazı hallerde dolaylı yollardan tayin edilebilirler. Ömürle yakından ilgili bir büyüklük *yarı ömür*dir. T ile gösterilen yarı ömür belirli sayıda bir çekirdeğin yarısının parçalandığı zamandır. Böylece :

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\frac{T}{\tau}}$$

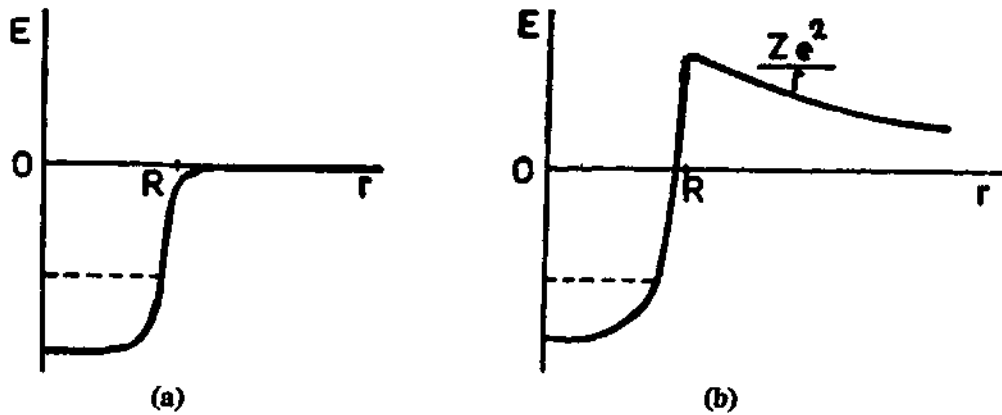
ve

$$T = \tau \ln 2 = 0,693 \tau \quad (8)$$

Bir nükleer parçalanmada üç hal ayırt edilebilir : (a) ağır parçacıkların neşredilmesi, (b) elektronların neşredilmesi, (c) fotonların neşredilmesi. Bu parçalanmalar sırası ile incelenecektir.

a — Ağır Parçacıkların Neşredilmesi

Bir çekirdeğin neşrettiği ağır parçacıklar çoğunlukla kararlı olanlardır; yani, nötronlar, protonlar ve α -parçacıklarıdır. Diğer parçacıklar hiç bir zaman kendiliklerinden neşredilmezler.



Şekil: I.1 — Bir çekirdek alanındaki (a) yüksüz, ve (b) yüklü parçacıklara ait potansiyeller.

Parçalanmanın mekanizmasını anlayabilmek için bir parçacığın çekirdek içerisinde nasıl tutulduğunu görmek lâzımdır. Diğer nükleonların meydana ge-

tirdiği çekimler ortalama olarak bir merkezî çekim meydana getirir; böylece çekirdeğe ait her parçacık ilk yaklaşıklıkta bir merkezî potansiyel altında hareket eder ve çekirdeğe bağlı kaldığı sürece negatif bir toplam enerjiye sahiptir. Eğer parçacıklar yüklü ise bu parçacıklarla çekirdeğin kalan kısmı arasında bir elektrostatik itme vardır ve bu itme nükleer çekime ilâve edilmesi gereken bir pozitif potansiyel meydana getirir. Bir çekirdek alanındaki yüksüz ve yüklü parçacıklara ait potansiyeller Şekil : I.1 de şematik olarak gösterilmiştir.

Şekil : I.1 (a) da görüldüğü gibi bir çekirdek içerisindeki bir nötronun bağ enerjisi pozitif ise bu nötron çekirdeğe bağlıdır, negatif ise nötron serbesttir. Böylece bir nötronun neşredilmesine ait ömür, nötronun çekirdeği bir baştan bir başa kat etmesi için gerekli zaman ($10^{-12} - 10^{-21}$ s) mertebesindedir. Gerçekten, nötron emisyonuna karşı kararsız çekirdekler hiç bir zaman gözlenmemiştir.

Protonlar ve α -parçacıkları için durum tamamen farklıdır, çünkü bu parçacıklar Şekil:I.1 (b) deki potansiyel enerji eğrisinin maksimumunun altında kaldıkları sürece bağ enerjileri negatif olsa bile çekirdeğe bağlı kalabilirler. Klâsik mekanik bakımından böyle bir parçacık çekirdeğe iyice bağlı olurdu; fakat ilerde görüleceği üzere kuvantum mekaniği bakımından parçacığın potansiyel engelinden sızarak çekirdeği tamâmen terketmesi için küçük fakat sıfırdan farklı bir ihtimal vardır. Bu olay, *tünel olayı* adı ile bilinir. Parçacığın potansiyel kuyusu içerisindeki enerjisine bağlı olarak, böyle bir bozulmanın ömrü gözlenemeyecek kadar kısa bir zamandan gözlenemeyecek kadar uzun bir zamana kadar değişebilir. Ayrıca, parçalanma ömürleri intişar eden parçacığın kütlesi ve elektrik yükü ile hızla artar. Böylece, bilinen yegâne proton bozulması ${}^5\text{Li}$ e aittir ve gerçekten gözlenemeyecek kadar kısa ömürlüdür. α -parçalanmaları genellikle gözlenebilir; bununla beraber, bu bozulmaların bazıları muhtemelen gözlenemeyecek kadar uzundur. ${}^{12}\text{C}$ ve ${}^{16}\text{O}$ çekirdeklerinin neşredilmesine ait ömürler teorik yoldan 10^{100} yıl mertebesinde hesaplanmıştır ve bozulmalar hiç bir zaman gözlenmemiştir. Başka çekirdeklerin neşredilmesi daha da az muhtemeldir

Nihayet, kendiliğinden fisyon ihtimali vardır. Fisyon, bir ağır çekirdeğin yaklaşık olarak eşit büyüklükte iki parçaya ayrılması demektir. Bu olayın mekanizması, meselâ α -bozulmasınıninkinden tamâmen farklıdır, çünkü âşikâr olarak merkezî potansiyel yaklaşıklığı burada uygulanamaz. Fisyon mekanizması çekirdeğin titreşen bir sıvı damlasına benzetilmesi ile daha iyi açıklanabilir. ${}^{238}\text{U}$ in kendiliğinden fisyonu gözlenmiştir ve ömrü 10^{24} s mertebesindedir. (Petrzhak ve Flerov, 1940).

b — Elektronların ve Pozitronların Neşredilmesi

Tamamen farklı tipte bir desintegrasyon β -parçalanmasıdır. β -parçalanması, bir çekirdeğin bir elektron veya bir pozitron neşretmesi demektir. Böyle bir parçalanmada çekirdeğin kütle sayısı aynı kalır ve yük sayısı bir artar veya bir azalır.

Bu olay sadece çekirdeğin içindeki bir nötronun bir protona dönüşmesi veya tersinden ibaretmiş gibi bir görünüştedir. Böylece, bir çekirdeğin β -parçalanması gerçekten bir nükleonun β -parçalanmasından ibarettir: yâni:

$${}^1_0n_1 \rightarrow {}^1_1H_0 + e^- \quad (9)$$

$${}^1_1H_0 \rightarrow {}^1_0n_1 + e^+ \quad (10)$$

Bu olaylardan ikincisi ile aynı zamanda meydana gelen diğer bir olay da bir çekirdeğin yörünge elektronlarından birini kapmasıdır. Böyle bir kapma genellikle *K*-kabuğundan olur, çünkü bu kabuk çekirdeğe en yakın olan kabuktur, ve bu olay *K*-kapması adı ile bilinmektedir. Bu olay şu denklemle gösterilebilir :

$${}^1_1H_0 + e_k^- \rightarrow {}^1_0n_1 \quad (11)$$

(10) ve (11) işlemleri sadece çekirdeğin içerisinde yer alabilir, çünkü serbest bir proton karardır. (9) işlemi ise çekirdeğin dışında da yer alabilir, çünkü serbest bir nötron kararlı değildir ve yarı ömrü 770 ± 140 saniyedir.

Belirsizlik prensibinin uygulanması elektronların çekirdekte kalamıyacağını gösterir. Gerçekten saçılma deneylerinden, meselâ protonların bir helyum çekirdeği tarafından saçılmasından, hafif çekirdeklerin yarı çaplarının $2-3 \times 10^{-13}$ cm. kadar, yani elektronun klâsik r_0 yarı çapının büyük'üğü mertebesinde olduğunu biliyoruz. Eğer bir elektron böyle bir hafif çekirdeğin içinde bulunursa, lineer koordinatlarından bir tanesindeki belirsizlik $\Delta x \cong r_0$ dır. Ve buna tekabül eden momentumdaki belirsizlik

$$\Delta p_x \cong \frac{\hbar}{2\Delta x} \cong \frac{\hbar}{2r_0} = \frac{\hbar c}{2e^2} mc = 68 mc \quad (12)$$

olur. Bu momentum çok büyüktür ve Rölâtivite Teorisinin formüllerine göre kinetik enerji en az $68 mc^2$, yani 34 MeV kadardır. Çekirdekdeki parçacıkların kinetik enerjilerinin 5-8MeV arasında bulunduğu artık bilinmektedir; böylece elektronun hesaplanan enerjisine sahip bir parçacık çekirdeğin içinde kalamaz.

Elektronların çekirdek içerisinde bulunmaması, β -parçalanmasının herhangi bir teorisinde rastlanan başlıca güçlüktür. Bu sebepten, elektronların, neşredilme işlemi esnasında yaratıldıkları kabul edilmelidir; tıpkı atomun çevresindeki yüksek bir enerji seviyesinde bulunan bir elektronun daha aşağı enerji bir seviyesine düştüğü zaman fotonların yaratılması gibi.

β -parçalanmasında çıkan elektronların sıfır ile belirli bir maksimum enerji arasındaki bütün enerjilere sahip oldukları deneysel olarak bulunmuştur. Eğer duraklı bir halde bulunan bir nötron, (9) da olduğu gibi, bir protonla bir elektrona parçalanırsa, bu işlem için mevcut elverişli toplam enerji sabit olduğundan, enerji ve momentum bir ve yalnız bir elektron enerjisi için korunabilir. Böylece,

deneyin aksine, neşredilen elektronların hepsinin aynı enerjiye sahip olmaları gerekirdi. Halbuki, eğer iki parçacık neşredilseydi, mevcut sabit enerji ve momentum sonsuz şekilde bu iki parçacık arasında bölünebilirdi, çünkü proton ve neşredilen iki parçacık arasındaki açılar sonsuz şekilde değiştirilebilir. Böylece, neşredilen elektronun değişken enerjisini hesaba katmak için, geri kalan enerji ve momentumu alıp götüren diğer bir parçacığın aynı anda neşredildiğini farzediyoruz. Bu parçacık yüksüz olmalıdır; ve bütün β -parçalanmalarında elektronun gözlenen maksimum enerjisi elverişli toplam enerjiye eşit olduğundan, bu parçacığın kütlesi çok küçük olmalıdır, hiç değilse elektronunkinden çok daha küçük olmalıdır. Bu parçacığa **nötrino** adı verilmiştir ve ν ile gösterilir. Protonların, nötronların ve elektronların her biri $\frac{1}{2} \hbar$ spinine sahip olduğundan, nötrinonun da spini $\frac{1}{2} \hbar$ olmalıdır, ancak bu şekilde açısal momentum korunabilir. Bu sonuç nötrinonun Dirac denklemini sağladığını da gösterir.

Nötrino, maddenin içinden geçme kabiliyeti en yüksek olan parçacıktır, ve ortalama olarak 50 ışık yılı kalınlığındaki kurşundan geçebildiği hesaplanmıştır. Nötrinonun bu olağanüstü uzunluktaki ortalama serbest yörüngesi kütlesinin küçüklüğünden ve yükünün sıfır oluşundan ileri gelmez, fakat bütün diğer parçacıklarla etkileşmesinin hemen hemen hiç olmayışından ileri gelir. Meselâ fotonlar, sıfır kütle ve sıfır elektrik yüküne sahip olmalarına rağmen, yüklü parçacıklarla kuvvetli etkileşmelerinden dolayı kolaylıkla gözlenebilirler. Cowan ve Reines (1956), bir banyo küveti büyüklüğündeki bir sıvı sintilasyon sayıcısına bir atomik pilden çıkan büyük bir nötrino akısını düşürdüler; ve böylece



ters β -parçalanmasını elde ederek nötrino yutulmasını gözlemeye çalıştılar. Nötrinolardan bazıları sayıcıdaki çekirdeklerle etkileşti ve neşredilen pozitronlar sintilasyonlar şeklinde gözlemlendi. Bu şekilde nötrinonun varlığının artık fiilen tesbit edilmiş olduğunu söyleyebiliriz.

c — Fotonların Neşredilmesi

Evvelce de zikredildiği gibi, bir çekirdek bir enerji halinden diğer bir enerji haline geçerken γ -ışını olarak bilinen bir ışık kuvantumu veya foton neşreder. Böyle bir γ -ışınının enerjisi, bir atomun dış kısmındaki bir elektron bir halden bir diğerine geçtiği zaman neşredilen bir kuvantumun enerjisinden çok daha büyüktür; çünkü çekirdeğin içindeki enerjiler atomun dış kısmındaki enerjilerden genellikle daha büyüktür, ve γ -ışınının dalga boyu bilinen difraksiyon şebekesi metodu ile ölçülemez. Bununla beraber, γ -ışını atomun dış kısmından geçerken çok kere yörünge elektronlarının biri tarafından yutulur ve bu elektron atomdan

dışarı fırlar. Atomdan fırlayan bu elektronun enerjisi γ -ışınının enerjisinden çok daha kolay olarak ölçülebilir. Bu olay fotoelektrik olayın özel bir halidir ve iç dönüşüm adı ile bilinmektedir.

Uyarılmış bir halin ömrü genellikle son derece kısadır (10^{-17} - 10^{-12} saniye). Bununla beraber, bir temel halin ve bir uyarılmış halin açısal momentumları birbirlerinden çok farklı iseler, uyarılmış halin ömrü nisbeten daha uzun olur ve böyle bir uzun ömürlü uyarılmış hale **nükleer izomer** adı verilir.

(I.7) ÇEKİRDEK KUVVETLERİ

Buraya kadar çekirdeğin nükleonlarını bir arada tutan mekanizma ile ilgilenmedik; sadece (I.6) da nükleonların içinde hareket ettikleri bir ortalama çekici potansiyelin varlığını farz ettik. Nükleonlar arasındaki kuvvetler hakkında daha iyi bir görüş elde edebilmek için önce en basit bir nükleer sistem olan döteron incelenmelidir ve ayrıca bir nükleonun bir diğeri tarafından saçılması problemi incelenmelidir. Bu ilerde yapılacaktır; fakat herhangi bir ayrıntıya girmeden de çekirdek kuvvetleri hakkında bazı şeyler söylenebilir.

Çekirdek fiziğinden önce yalnız iki çeşit kuvvet biliniyordu: elektromanyetik kuvvetler ve gravitasyonel kuvvetler. Pek âşikârdır ki çekirdek kuvvetleri tabiatları bakımından ne elektromanyetik ne de gravitasyonel olabilir. Nötron yüksüz olduğu için bu kuvvetler elektriksel olamaz ve gravitasyonel kuvvetler çok küçük bağ enerjileri verdiği için gravitasyonel de olamaz. Gerçekten eğer döterondaki proton ile nötron arasındaki çekim saf gravitasyonel olsaydı, bağ enerjisi $-G M_p M_n / r$ gravitasyon potansiyeli ile verilecekti; burada G gravitasyon sabiti ve r de nükleonlar arasındaki ortalama uzaklıktır ve değeri 2-4 fm kadardır. (1 fm = 10^{-13} cm). Bu büyüklükler 3×10^{-37} MeV mertebesinde bir bağ enerjisi verir; halbuki deneysel değer 2,2 MeV dir.

Çekirdeğin içerisinde çekirdek kuvvetleri makroskopik fizikte karşılaşılan kuvvetlerden pek çok daha büyüktür. Diğer yandan, Rutherford'un saçılma deneyleri, çekirdeğin merkezinden 10 fm gibi küçük uzaklıklarda çekirdek kuvvetlerinin aynı çekirdeğe ait elektrostatik kuvvetlere nazaran ihmal edilebilecek kadar zayıf olduğunu göstermektedir. Bu sebepten, çekirdek kuvvetlerinin sonlu ve çok kısa bir menzile sahip oldukları söylenir; 2-3 fm mertebesinde olan bu menzilin dışında bu kuvvetler ihmal edilebilir. Ters kare kanununa uyan kuvvetler her uzaklıkta ölçülebilir, ve böyle kuvvetlere uzun menzilli kuvvetler adı verilir. Bu iki cins kuvvetin tabiatları arasındaki fark, şüphesiz çekirdek fiziği ile atom fiziği arasındaki esas farkları ortaya koyar.

Çekirdek kuvvetlerinin menzillerinin daha yakından bir incelenmesi, en hafif kararlı çekirdekler olan ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$ ve ${}^4_2\text{He}$ çekirdeklerinin bağ enerjileri karşılaştırılmak suretiyle yapılabilir (Wigner 1933). Bu çekirdeklerdeki muhtemel

nükleer bağların sayısı mütakabilen 1, 3 ve 6 dır, ve bu sebepten bağ enerjilerinin bu sayılarla orantılı olmasına beklerdik. Fakat deneysel olarak bulunan bağ enerjileri $B(^2_1\text{H}) = 2,2 \text{ MeV}$, $B(^3_2\text{He}) = 7,72 \text{ MeV}$, $B(^4_2\text{He}) = 28,3 \text{ MeV}$ dir, ve bunlar 1: 3,5 : 12,7 oranındadır. Bu aykırılık 2-3 fm mertebesindeki çok kısa bir menzile sahip çekirdek kuvvetleri ile açıklanabilir. Böylesine kısa bir menzilden ötürü döterondaki nükleonlar zamanlarının aşağı yukarı yarısını yekdiğerlerinin kuvvet menzillerinin dışında geçirirler. ^4_2He çekirdeğinde nükleon başına bağ sayısı arttığı için, nükleonlar hemen hemen devamlı olarak birbirlerinin çekim menzillerinin içinde bulunurlar. Böylece, $B(^4_2\text{He})$, $B(^2_1\text{H})$ nin altı katından çok daha büyüktür.

(I.8) MEZONLAR

Kuvantum teorisinin en önemli sonuçlarından birine göre, elektromanyetik alanın enerjisi kuvantumlar veya fotonlar adı ile bilinen birbirinden ayrı birimler halinde bulunur. Evvelce görüldüğü gibi, nükleonları birarada tutan kuvvetler elektromanyetik tabiatında değildir, fakat çekirdek kuvvetlerinin elektromanyetik alana benzer şekilde bir alanla tasvir edilebileceğinin mümkün olduğunu farz etmek asla yanlış değildir. Bununla beraber, böyle bir alanın enerji kuvantumlarının özellikleri fotonların özelliklerinden çok farklı olacaktır; çünkü mütakabil alanlarla tasvir edilen bu iki cins kuvvet, farklı tabiattadırlar. Fotonların ne kütlesi ne de yükü vardır, ve bunun elektrostatik kuvvetlerin uzun menzilli oluşları ile yalnız yüklü parçacıklar arasında etkili oluşlarının sonucu olduğu gösterilebilir. Çekirdek kuvvetleri gibi kısa menzilli ve yüklü parçacıklar arasında olduğu kadar yüksüz parçacıklar arasında da etkili kuvvetlerin, kuvantumları hem kütleye hem yüke sahip bir alanla tasvir edilebileceği gösterilebilir. Çekirdek kuvvetlerinin bilinen menzilinden böyle bir kuvantumun kütlesi hesaplanabilir ve böyle bir hesabın sonunda bir proton ile bir elektronun kütleleri arasında bir değer bulunmuştur. Bu kuvantumlara *mezonlar* adı verilir ve ait oldukları alana da *mezon alanı* adı verilir.

Yukardaki muhakemelere benzer bir muhakeme ile Yukawa (1935), elektronun kütlesinin 200 katı kadar bir kütleye sahip yüklü parçacıkların mevcut olmaları gerektiğini ileri sürdü, ve iki yıl sonra Anderson ve Neddermeyer (1937) tarafından kozmik ışınlar arasında böyle parçacıklar detekte edildi. (Kozmik ışınlar dünyanın atmosferine dışardan giren ışınlardır). Şunu da zikretmek ilginçtir ki Yukawa tarafından varlığı ileri sürülen mezona en çok benzeyen mezon piondur, fakat Anderson ve Neddermeyer tarafından keşfedilen mezon müondur. Pion ancak on yıl daha sonra keşfedildi (Lattes, Occhialini ve Powell, 1947).

(I.9) PARÇACIKLAR VE ANTİ - PARÇACIKLAR

Dirac'ın elektron teorisi, bir elektronun pozitif enerji hallerinde olduğu kadar negatif enerji hallerinde de bulunabileceğini öngörmektedir. Rölâtivistik

$$E^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4 \quad (13)$$

denklemine nazaran (burada E , p ve m_e bir elektronun enerjisi, momentumu ve kütesidir), verilmiş bir p momentumu için enerjinin iki değeri vardır; ve p sıfır ile sonsuz arasında değiştiği zaman enerjinin iki değişim aralığı vardır:

$$m_e c^2 < E < \infty \quad \text{ve} \quad -m_e c^2 > E > -\infty$$

Klâsik mekaniğe nazaran enerji sürekli olarak değişir ve böylece pozitif enerjili bir elektron hiç bir zaman negatif enerjili bir hale erişemez, çünkü bu $2 m_e c^2$ lik bir enerji atlamasını gerektirir. Kuantum mekaniğinde böyle bir atlama mümkündür, fakat negatif enerji hallerinde bulunan elektronlar gözlenmediğine göre, Dirac bütün negatif enerji hallerinin dolu olduğunu, fakat bu hallerde bulunan elektronların fiziksel olarak gözlenemediklerini farz etti. Böylece Pauli'nin dışarlama ilkesine göre, pozitif enerjili bir elektron bir negatif enerji haline atlayamaz.

Bununla beraber, $2m_e c^2$ (yaklaşık olarak 1 MeV) den daha büyük enerjilerdeki kuantumlara sahip elektromagnetik alanlar bir elektronu bu negatif enerjili elektronlar denizinden pozitif enerjili bir hale yükseltebilir. Böylece bu elektron, pozitif enerjili âdi bir elektron olarak gözlenebilir ve geride negatif enerjili bir elektronun yokluğundan ibaret bir delik kalır; bu delik zıt yüke sahip pozitif enerjili parçacık, yani pozitron olarak gözlenebilir. Bu sebepten pozitron elektronun anti-parçacığı olarak bilinmektedir. Tersine, bir elektronun bir pozitronla birleşmesi mümkün olabilirdi; böylece bir elektron bir deliğe düşerdi ve her iki parçacık da yok olarak bir γ -ışını ortaya çıkardı. Gerçekten, enerji ve momentumun korunabilmesi için en az iki γ -ışınının meydana gelmesi gerekir. Bu iki işlem *çift-üretimi* ve *çift-yokolması* olarak bilinmektedir, ve her ikisi de deneysel olarak gözlenmişlerdir.

Yukarıda nükleonların ve nötrinoların Dirac denklemine uydukları zikredilmişti; bu sebepten bu parçacıklar, anti-parçacıklara sahiptirler. Uzun yıllar devam eden bir araştırmadan sonra, anti-proton ve anti-nötron gözlendi (Chamberlain, 1955, ve Cork 1956). Anti-nükleonların varlığı, bunlar âdi nükleonlarla birbirlerini yok ettikleri vakit ortaya çıkan büyük miktardaki enerji sayesinde anlaşıldı. Anti-nükleonların kendilerinden beklenen özelliklerin çoğuna sahip oldukları görüldü. Bu buluşlar, çekirdek fizikçileri arasında hakikaten büyük bir rahatlığın ve sevincin sebebi oldular.

Nötrininonun anti-nötrinodan ayırt edilebildiği bir reaksiyon çift β -parçalanmasıdır ve bazı nüklidlerde gözlenebilir. Esas itibariyle reaksiyon



şeklinde olup burada şimdilik nötrinolar ihmal edilmiştir. Bu reaksiyonun iki safhada yer aldığı farz edilebilir, birinci safha şöyledir :

$$2n \rightarrow n + p + e^- + \nu \quad (15)$$

Eğer nötrino ve anti-nötrino farklı parçacıklarsa, ikinci safha şöyle olmalıdır:

$$n + p + e^- + \nu \rightarrow 2p + 2e^- + 2\nu. \quad (16)$$

Fakat eğer bu parçacıklar biribirinin aynı ise, ikinci β -parçalanması birinci β -parçalanmasında neşredilen nötrininonun yutulması ile meydana gelebilir, çünkü bir nötrininonun neşredilmesi bir antinötrininonun yutulmasına eşdeğerdir. Bu takdirde

$$n + p + e^- + \nu \rightarrow 2p + 2e^- + \text{nötrino yok} \quad (17)$$

reaksiyonu meydana gelmeliydi ve bu reaksiyonun ömrü çok kısa olmalıydı (yani olma ihtimali çok daha fazla olmalıydı). Maalesef çift β -parçalanması son derece nadir bir olaydır, ve gerçekten en kısa ömür bile çok uzundur ($\sim 10^{15}$ yıl). Bununla beraber, Awshalom (1956) tarafından yapılan deneyler daha da uzun bir ömürden yanadır ($\sim 10^{19}$ yıl), böylece anti-nötrininonun gerçekten nötrinodan farklı olduğu ortaya çıkmaktadır.

(12) reaksiyonundaki yüksüz parçacığa nötrino mu, yoksa anti-nötrino mu adı verileceği bir itibar (konvansiyon) meselesidir. Eğer pozitron bir anti-lepton olarak kabul edilirse, bu takdirde (12), (15), (16) ve (17) reaksiyonlarındaki nötrino adını verdiğimiz parçacıklar gerçekte birer anti-nötrinodur.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

I.1. ${}^8\text{Be}$ in (a) ${}^7\text{Li} + {}^1\text{H}$, (b) ${}^6\text{Li} + {}^2\text{H}$, (c) ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ parçalanmalarına karşı kararlılığını araştırınız.

I.2. Bir protonun hem pozitron parçalanmasına, hem de elektron yutulmasına karşı kararlı olduğunu gerçekleyiniz.

I.3. ${}^9\text{Be}$, 6 MeV enerjisindeki α -parçacıkları tarafından bombardıman edilmektedir. (I.5) in sonundaki sayısal değerleri kullanarak reaksiyonlardan ileri doğrultuda çıkan nötronların enerjilerinin 11,60; 6,90; 3,57 ve 0,69 MeV olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme: Karbonun geri tepme enerjisi ihmal edilemez).

II. BÖLÜM

ÇEKİRDEKLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

(II.1) BAĞ ENERJİSİ

Evvelce tarif edilen bir çekirdeğin bağ enerjisi, çekirdeğin parçalara ayrılmasına karşı kararlılığının bir ölçüsüdür. Bununla beraber, eğer bir çekirdeğin A sayıdaki bütün nükleonlarının ayrılmasına karşı mutlak kararlılığı incelenmek istenirse bağ enerjisi uygun bir ölçü değildir. Bağ enerjisi, çekirdeğin kararlılık derecesine bağlı olmayarak, A ile birlikte artar, çünkü daha çok sayıda nükleonun bağlanabilmesi için daha fazla bağ enerjisi gereklidir. Bu sebepten, kararlılık derecesinin ölçülebilmesi için nükleon başına bağ enerjisi olan ve

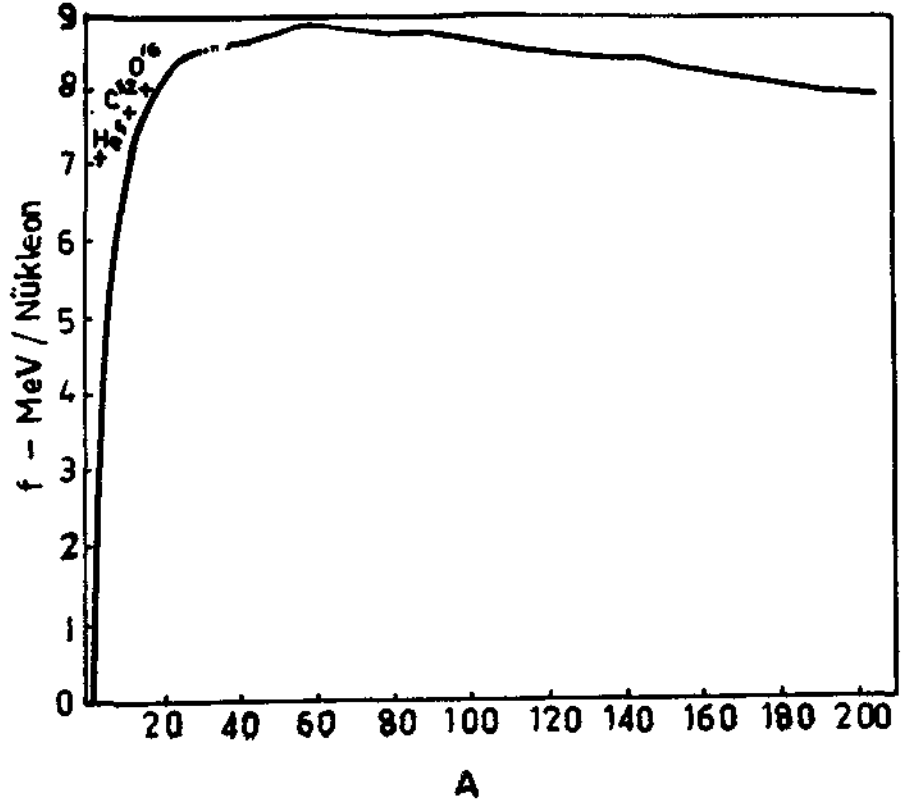
$$f = \frac{B}{A} = \frac{c^2}{A} (Z M_p + N M_n - M) \quad (1)$$

ile tarif edilen bağ oranı kullanılmalıdır.

Şekil: II.1 de bağ oranının kütle sayısına nazaran değişimi çizilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi, $A = 30$ ile $A = 100$ arasında bağ oranı hemen hemen sabit olup yaklaşık olarak nükleon başına 8,7 MeV değerine sahiptir; küçük ve büyük A lar için bağ oranı azalır; ^{12}C gibi hafif bir çekirdek için bile nükleon başına 7,7 MeV değerine sahiptir ve proton için şüphesiz sıfırdır. Bu sebepten, çekirdeklerin kütleleri ^{12}C nin kütlelerinin $1/12$ sine eşit bir kütle birimi ile ölçüldüklerinde hemen hemen tam sayı değerlerini alırlar; fakat protonun kütlesi birim kütle olarak alındığında artık bu mümkün değildir.

Bağ oranının sabitliği çekirdek kuvvetlerinin kısa menzilli olduğunu gösterir, çünkü büyük bir çekirdekteki bir nükleon küçük bir çekirdekteki nükleondan daha fazla sayıda nükleona bağlı değildir, ve çekirdek kuvvetlerinin menzili, oldukça küçük çekirdeklerin bile çaplarından daha küçüktür. Büyük A lar için bağ oranının azalması protonların arasındaki uzun menzilli Coulomb itmesinden do-

layıdır; çekirdekler büyüdükçe bunun önemi artar ve sonunda çekirdek kuvvetlerine galip gelerek çekirdeklerin büyüklüğünü sınırlar. Hafif çekirdeklerin bulunduğu diğer uçta her bir nükleon çok daha az sayıda başka nükleonlar tarafından çekildiğinden bunlarla aralarındaki uzaklık büyür ve böylece kararlılık azalır. Aynı muhakeme ile, çekirdeğin kütle yoğunluğunun önce A ile birlikte arttığı ve bağ oranı sabit olunca yoğunluğun da sabit olduğu sonucuna varılır.



Şekil: II.1 — Bağ oranının kütle sayısına göre değişimi.

${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$ ve ${}^{16}_8\text{O}$ çekirdekleri genel bağ oranı eğrisinin biraz üzerinde bulunurlar; bu çekirdekler tamamen α -parçacıklarından yapılmış olduğu düşünülebilen ve kararlı olan bir çekirdekler serisinin ilk üçüdür. ${}^8_4\text{Be}$ bu serinin bir istisnasıdır ve kararsız olup iki α -parçacığına ayrılır.

Bağ enerjisi ile yakından ilgili olan bir de *ayrılma enerjisi* vardır. Ayrılma enerjisi, bir X çekirdeğine ait bir a parçacığının, geriye bir Y çekirdeği bırakılmak üzere, bu çekirdekten sonsuz uzağa götürülebilmesi için gerekli olan enerjidir ve $S_a(X)$ ile gösterilir. X ve Y çekirdeklerinden her ikisi de temel hallerde bulunmalıdır. Tarife nazaran

$$S_a(X) = (M_a + M_Y - M_X) c^2 \quad (2)$$

veya bağ enerjisi denklemini kullanarak

$$S_a(X) = B_X - B_Y - B_a \quad (3)$$

yazılabilir. Genel olarak $S_n(X)$ ve $S_p(X)$, yani bir nükleonu çekirdekten ayırmak için gerekli enerjiler, yaklaşık olarak 8 MeV dir; böylece bir nükleonu ayırmak için gerekli enerji yaklaşık olarak nükleon başına ortalama bağ enerjisine eşittir. Fakat bunun istisnaları vardır: ^{21}Ne için $S_p = 14,2$ MeV ve ^{13}N için $S_p = 1,95$ MeV, ^{28}Si için $S_n = 16,8$ MeV ve ^{16}N için $S_n = 1,85$ MeV dir.

Nötronlar için nötronların ayrılma enerjisi

$$S_n = B(Z, N) - B(Z, N - 1) \quad (4)$$

veya

$$S_n = (A - 1) [f(Z, N) - f(Z, N - 1)] + f(Z, N) \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $f(Z, N)$ sadece A nın bir fonksiyonu ise (orta ağırlıktaki ve ağır çekirdekler için bu doğrudur), ve eğer $f(Z, N)$ de A ya nazaran türevi mevcut olacak şekilde yumuşak olarak değişiyorsa, (5) denklemi yaklaşık olarak

$$S_n(A) \cong (A - 1) \frac{df}{dA} + f(A) \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. O halde orta ağırlıktaki çekirdekler için $\frac{df}{dA}$ çok küçük olduğundan $S_n(A) \cong f$ olur; fakat ağır çekirdekler için bağ oranı A nın artması ile azaldığından $S_n(A) < f$ olur. Bu yaklaşıklığa göre $S_n(A) \cong S_p(A)$ olur.

Benzer şekilde $S_\alpha(A)$ için

$$S_\alpha(A) = -B(\alpha) + 4f(A) + 4(A - 4) \frac{df}{dA} \quad (7)$$

elde edilir, burada $B(\alpha) = 28$ MeV olup bu α -parçacığının bağ enerjisidir. Ağır çekirdekler için $f \cong 7,5$ MeV olduğundan $4f(A) - B(\alpha) \cong 2$ MeV olur ve bu değer (6) denklemindeki müteakbil f teriminden çok daha küçüktür. Diğer yandan, büyük A lar için $\frac{df}{dA} < 0$ olduğundan :

$$S_n - S_\alpha = -3f(A) + B(\alpha) - (3A - 15) \frac{df}{dA} \gg 0. \quad (8)$$

Bu sonuç deneylerle gerçekleşmiştir, çünkü bir çok ağır çekirdek α -radyoaktif olduğu halde proton ve nötron neşredilmesine karşı kararlıdır. Böyle çekirdekler için S_α negatif olduğu halde S_n ve S_p pozitiftir.

Bir çekirdekteki bir nükleonun toplam enerjisinin ortalama değeri $E \cong -8$ MeV olarak bulunmuş olduğundan, bir çekirdek içerisindeki ortalama potansiyelin

derinliği ve nükleonların ortalama kinetik enerjisi yaklaşık olarak hesaplanabilir. Çekirdek içerisindeki herhangi bir nükleon komşu nükleonlarla kısa menzilli bir etkileşimde bulunduğundan, yarıçapı nükleer kuvvetlerin menziline ($b = 2-3$ fm) yaklaşık olarak yarısı olan bir hacim işgal eder. Bu yarıçap, çekirdek içerisindeki bir nükleonun indirgenmiş *de Broglie dalga uzunluğu* mertebesinde. Nükleonun bu dalga boyuna tekabül eden kinetik enerjisi şudur :

$$T = \frac{1}{2M} \left(\frac{\hbar}{\frac{1}{2} b} \right)^2 \cong 10 \text{ ilâ } 20 \text{ MeV} \quad (9)$$

Böylece potansiyel kuyusunun derinliği 20-30 MeV mertebesinde ve bir nükleonun bağ enerjisi sayısal olarak çok daha büyük olan kinetik ve potansiyel enerjilerin farkına eşittir.

(II.2) ÇEKİRDEĞİN YARIÇAPI

Eğer bir parçacığın belirli bir yüzeyi varsa ve bu yüzeyin içerisinde madde yoğunluğu büyük ve yüzeyin dışında da ihmâl edilebilecek kadar küçükse, böyle bir parçacığın yarıçapından bahsedilebilir. Atomların yarıçaplarından bahsedilemez, çünkü bir atomdaki elektron yoğunluğu merkezden uzaklaştıkça tedricen azalır ve yüksek yoğunluktan alçak yoğunluğa sert bir geçiş yoktur. Bir ağır çekirdek ise daha ziyade bir bilârdö topuna benzer. Bütün deneyler, ağır çekirdekler için çekirdek yoğunluğunun merkezden belirli bir uzaklığa kadar yaklaşık olarak sabit olduğunu ve birinciye nazaran daha küçük bir uzaklık içerisinde de sıfıra kadar azaldığını göstermektedir. Böyle çekirdeklerin, hiç değilse yaklaşık olarak, bir yarıçapa sahip oldukları söylenebilir.

Çekirdek yoğunluğunun ayrıntılı değişimi deneysel metotlarla ölçülemez, fakat ortalama bir R_u yarıçap değeri verilebilir. R_u ortalama yarıçapı, esas çekirdekle aynı toplam kütle ve üniform bir yoğunluğa sahip ve merkeze nazaran aynı ikinci statistik momente sahip bir çekirdeğin yarıçapıdır.

Çekirdek yarıçapının ölçü metotları nükleer ve elektrik olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Bu ölçü metotları farklı yarıçap değerleri verir. Özellikle, elektrik metotlar sâdece protonlara hassastır, ve protonlar nötronlardan farklı şekilde dağılmış olabilirler.

Bağ oranına ait deneysel sonuçlardan görüldüğü gibi çekirdek maddesinin yoğunluğu çekirdekten çekirdeğe çok az değişir ve böylece ortalama çekirdek yarıçapı yaklaşık olarak

$$R_u \cong r_0 A^{1/3} \quad (10)$$

formülü ile belirlidir. Bununla beraber, r_0 sabiti farklı ölçü metotları için farklı değerler alabilir.

a. Nükleer Metotlar

Nükleer metotlar arasında en doğrudan doğruya olan metot, bir kaç MeV enerjisindeki hızlı nötronların ince yapraklar tarafından saçılması metodudur. Çekirdeğe çarpan hızlı nötronlar çekirdek tarafından saptırılırlar ve böylece yaprağı geçen nötron huzmesinin azalma oranından tek bir çekirdeğin tesir kesiti yüzeyi hesaplanabilir. Eğer bir çekirdeğin tamamen saydam olmayan bir küre olduğu farz edilirse, bu çekirdeğin tesir kesiti yüzeyinin $2\pi R^2$ olduğu gösterilebilir. Bu deney için kullanılan nötronların dalga boylarının çekirdek yarıçapından çok daha küçük olması gerektiğinden hızlı nötronlar kullanılmalıdır. Böyle nötronlar için tesir kesiti, πR^2 değerindeki geometrik tesir kesiti ile gene πR^2 değerindeki ve kenarlardaki difraksiyondan ileri gelen tesir kesitinin toplamıdır. Deneysel sonuçlara bir çok düzeltmeler uygulanmalıdır. Bir yandan, teorik sonuç yalnız sonsuz enerjiye sahip nötronlar için doğrudur ve sonlu enerjiler için tesir kesiti daha büyüktür. Diğer yandan, çok yüksek enerjiye sahip nötronlar için çekirdekler kısmen saydam olur, bu da saydam olmayan bir küresel çekirdeğinkine nazaran tesir kesitini daha küçük kılar. Bu metot "çekirdek reaksiyonları" bahsinde daha yakından incelenecektir.

Aynı tip deney şüphesiz protonlarla da yapılabilir. Çekirdek kuvvetlerinden olan saçılma ile Coulomb kuvvetlerinden olan saçılma interferens yaptığından bu tip deneylerin sonuçlarının tefsiri daha güçtür, fakat ölçüler daha doğrudur. Her iki metot da birbirine uygun sonuçlar verir: $r_0 \cong 1,3-1,4 fm$. Proton deneyleri ayrıca geçiş bölgesinin s kalınlığını da verir. $s = 2,5 fm$. Kalınlığı s olan geçiş bölgesi, çekirdek yoğunluğunun, maksimum değerinin yüzde 90 dan yüzde 10 a düştüğü bölgedir ve A dan müstakildir.

Son olarak, radyoaktif parçalanmalardan çıkan α -parçacıklarının enerjilerinden ve ömürlerinden α -radyoaktif çekirdeklerin ($A > 208$) yarıçap değerleri hesaplanabilir. Burada ithal edilen radyal parametre, şüphesiz, saçılma deneylerinden elde edilen çekirdek yarıçapı ile aynı fiziksel büyüklük değildir, ve teoriden açıkça görüldüğü gibi biraz daha büyük olmalıdır. Bu metotla bulunan yarıçapların mertebesi $1,4 A^{1/3} fm$ dir.

b. Elektrik Metotlar

Elektrik metotlar arasında en önemlisi çok hızlı elektronların çekirdekler tarafından saçılması metodudur. Protonlar tarafından meydana getirilen yük dağılımını araştırmak için elektronlar, çekirdek boyutlarına nazaran küçük dalga boylarına yâni, 200-500 MeV arasındaki dalga boylarına sâhip olmalıdır. Böyle enerjilerde yapılan deneyler s için proton saçılması deneylerinden elde edilen sonuçlara çok benzer sonuçlar vermiştir, fakat r_0 için daha küçük değerler vermiştir. r_0 in değeri ağır çekirdekler için $1,20 fm$ den daha hafif çekirdekler için $1,30 fm$ ye kadar değişmektedir.

Elektrik metotlarla bulunan r_0 değerinin nükleer metotlarla bulunandan daha küçük olduğu diğer iki elektrik metotla da gerçekleşmiştir. Bu metotlardan birincisi atomik spektrum çizgilerinin izotoplara nazaran kaymasına dayanır. İki izotopta aynı sayıda proton olmasına rağmen farklı sayıda nötron vardır, ve böylece iki izotopun çekirdeklerindeki proton dağılımı aynı değildir. Bu sebepten atomik elektronlar biraz farklı elektrostatik alanlarda bulunurlar yani bunların enerji seviyeleri biraz farklı olur. Spektrum çizgilerinin ayrılması izotopların çekirdek yarıçaplarının arasındaki farkı hesaplamakta kullanılabilir, ve böylece r_0 hesaplanabilir.

İkinci metot müonların, çok daha büyük olan kütlelerinin dışında, elektronlara çok benzemelerinden yararlanır. Müonlar atomlar tarafından tutulduklarında tıpkı elektronlar gibi yörüngeler teşkil ederler, fakat müonların daha büyük olan kütlelerinden dolayı bu yörüngelerin yarıçapları 200 defa kadar daha küçüktür. Bu sebepten çekirdeğin yüzeyine çok yakın bulunurlar, ve böylece bir yörüngedeki bir müonun enerjisi çekirdek yarıçapına hassas olarak bağlıdır. Buradaki tesir izotop kaymasındakinden çok daha büyüktür, fakat ölçülerin doğruluğu çok daha azdır, çünkü müonlar kısa ömürlüdür. Müon $2P \rightarrow 1S$ geçişini yaptığı zaman çıkan X-ışınlarına dayanan ölçü sonuçları r_0 için elektron saçılmasından elde edilen sonuçlara yakındır.

Sonuç olarak bütün elektrik metotlar

$$R_u = 1,2 A^{1/3} \quad (11)$$

verir. Halbuki bütün nükleer metotların verdiği değerler biraz daha büyüktür. Bu aykırılığın âşikâr izahı şudur: Nükleer metotlar çekirdeğin yoğunluk dağılımını ölçmez, fakat bu dağılımın sonucu olarak ortaya çıkan potansiyeli ölçer. Bu potansiyelin menzili ise, çekirdeğin yarıçapından biraz daha büyüktür.

İleride de görüleceği üzere bir çekirdekteki nötronların ve protonların dağılımı birbirine çok benzer. Eğer bunların özdeş olduklarını kabul edersek, proton dağılımından elde edilen yoğunluğu A/Z ile çarparak çekirdek yoğunluğunu elde edebiliriz. Bu yapıldığı zaman, maksimum çekirdek yoğunluğunun 6Li dan sonraki bütün A lar için sabit ve $\delta_{\max} = 1,07 \text{ fm}^{-3}$ değerine sahip olduğu bulunur. Bu sonuç çekirdek kuvvetlerinin doyma özelliklerine uygundur.

(II.3) AÇISAL MOMENTUM VE MANYETİK MOMENT

Çekirdeklerin açısal momentumundan çok kere spini diye bahsedilir. Bu deyim maalesef yanlışır, çünkü spin kelimesi elemanter parçacıkların yalnız iç açısal momentumunu ifade eder. Çekirdeklerin toplam açısal momentumu ise nükleonların spinleri ile yörünge açısal momentumlarından meydana gelir. Herhangi bir yüklü parçacığın açısal momentumu ile ilgili olarak her zaman bir manyetik momenti vardır. Böylece bir çekirdeğin bir manyetik momenti vardır, bununla bera-

ber bu manyetik moment atomun dış kısmındaki yörünge elektronlarının manyetik momentlerinden çok daha küçüktür. Çekirdek manyetik momentinin elektron manyetik momentine oranı m_e/M_p mertebesindedir.

Çekirdek açısal momentumu I , atomun dış kısmındaki elektronların J açısal momentumu ile aynı kuvantizasyon kaidelerine tâbidir, yâni I^2 nin öz değerleri $\hbar^2 I(I + 1)$ ve J^2 nin öz değerleri $\hbar^2 J(J + 1)$ dir. Böylece bir atomun F toplam açısal momentumu

$$F = I + J \quad (12)$$

ile verilir, burada F^2 nin öz değerleri $\hbar^2 F(F + 1)$ dir. F nin mümkün değerleri şöyledir :

$$\begin{aligned} J \geq I \text{ ise : } F = J + I, J + I - 1, \dots, J - I & \quad (2I + 1 \text{ değer}) \\ J \leq I \text{ ise } F = I + J, I + J - 1, \dots, I - J & \quad (2J + 1 \text{ değer}) \end{aligned} \quad (13)$$

Çekirdek ile elektronların manyetik etkileşmelerinden dolayı (13) ile bilinen hallerin enerjileri aynı değildir. Çekirdeğin manyetik momenti elektronunkinden çok daha küçük olduğundan etkileşme küçüktür, ve böylece (13) ile belirlenen hallerin enerji seviyeleri arasındaki farklar da küçüktür. Bir J seviyesi $J \geq I$ veya $J \leq I$ olduğuna göre birbirlerine çok yakın olan $2I + 1$ veya $2J + 1$ seviyeye ayrılır, bu da bahis konusu seviyenin aşırı ince (*hyperfine*) yapısı olarak bilinmektedir. Aşırı ince yapı tâbiri, bir elektronun yörünge ve spin açısal momentumlarının etkileşmesinden ileri gelen ince yapıdan ayırt edilmek üzere kullanılmaktadır. Her ince yapı seviyesi aşırı ince yapıya sahip olabilir.

Manyetik etkileşmeye ait enerji açısal momentumların skaler çarpımı ile orantılıdır :

$$W = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \quad (14)$$

(12) bağıntısı kullanılarak

$$2\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = F^2 - I^2 - J^2 = \hbar^2 [F(F + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)] \quad (15)$$

yazılabilir, çünkü kuvantum mekaniğinde bir açısal momentumun skaler karesi L^2 yerine $\hbar^2 L(L + 1)$ konulmalıdır. (13) bağıntıları $F = I + J - n$ şeklinde yazılabilir. Buradaki n tam sayısı,

$$J \geq I \text{ ise : } n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2I \quad (2I + 1 \text{ değer})$$

$$J \leq I \text{ ise : } n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2J \quad (2J + 1 \text{ değer})$$

değerlerini alabilir. F nin bu değerini (15) bağıntısında yerine koyarsak (14) bağıntısı

$$W_n = \hbar^2 A \left[IJ + \frac{1}{2} n(n-1) - n(I+J) \right]$$

şeklini alır. O hâlde, W şu değerler serisine sahiptir :

$$\hbar^2 A [IJ], \hbar^2 A [IJ - I - J], \hbar^2 A [IJ + 1 - 2(I+J)], \hbar^2 A [IJ + 3 - 3(I+J)] \quad (16)$$

Ardışık iki hal arasındaki enerji farkı :

$$W_n - W_{n+1} = \hbar^2 A [I + J - n] = \hbar^2 A F$$

şeklinde olup F ile orantılıdır ve şu değerler serisini alır:

$$\hbar^2 A (I + J), \hbar^2 A (I + J - 1), \hbar^2 A (I + J - 2), \dots, \hbar^2 A |I - J|. \quad (17)$$

Bu değerler, seviyeler arasındaki enerji aralıklarını verdiğiinden, **aralık kaidesi** olarak bilinir.

Eğer $I \leq J$ ise, sadece verilmiş bir J seviyesinin ayrıldığı seviyeleri saymak suretiyle I yi bulmak mümkündür. Eğer $I > J$ ise, J önceki yolla bulunabilir ve seviyelerin izafi ayrılmalarından aralık kaidesi kullanılarak F bulunur. Böylece $I + J = F + n$ ifâdesinden I tayin edilebilir.

Kütlesi M_p ve yükü e olan bir protonun yörünge açısai momentumu $\hbar[l(l+1)]^{1/2}$ dir (burada l yörünge kuvantum sayısıdır). Manyetik bir alan içerisinde açısai momentumun alan doğrultusundaki bileşeni de kuvantizedir ve $m\hbar$ değerine eşittir (burada da m manyetik kuvantum sayısıdır ve yörünge kuvantum sayısına $-l \leq m \leq l$ bağıntısı ile bağlıdır). Protonun yükü e ve dönme frekansı ω olduğuna göre $i = e\omega/2\pi$ şiddetindeki bir elektrik akımına denktir. r yarıçapındaki daire şeklindeki bir elektrik akımı Gauss birimleri cinsinden $\pi r^2 i/c = \mu$ manyetik dipol momentine denktir. Bu protonun yörünge açısai momentumunun yörünge düzlemine dik bileşeni de $m\hbar = M_p r^2 \omega$ dır. Maksimum manyetik moment $m = l$ ile verildiğinden

$$\mu_{\max} = \frac{e\hbar l}{2M_p c} \quad (18)$$

sonucu elde edilir. Bu, verilen bir yörüngedeki protonun manyetik momentidir.

Eğer yörünge açısai momentumu yerine protonun $\frac{1}{2} \hbar$ değerindeki iç spininden ileri gelen açısai momentumu göz önüne alınırsa buna tekabül eden manyetik momentin

$$\mu = \frac{e\hbar}{2M_p c} \quad (19)$$

olduğu gösterilebilir, bu değer beklenen değer iki katıdır.

leri anlaşılmaktadır. Tek A ya sahip bir çekirdeğin açısai momentumu, son nükleonun $\frac{1}{2}$ spini ile $0,1,2,\dots$ değerindeki bir yörünge açısai momentumunun toplamıdır; çift A ve tek Z ye sahip çekirdeklerin açısai momentumu son proton ile son nötronun $\frac{1}{2}$ değerindeki spinlerinin toplamı ile yörünge açısai momentumunun toplamıdır. Bu teoninin başlangıcı Landé'ye aittir ve çekirdeklerin kabuk modelinin tabii bir sonucudur.

Polarize demetler kullanılmak sûretiyle nükleer manyetik momentler ve hat-tâ bu momentlerin işaretleri tâyin edilebilir. Proton, nötron ve döteron için nükleer manyeton cinsinden sonuçlar şöyledir :

$$\mu_p = 2,7927, \quad \mu_n = -1,9131, \quad \mu_d = 0,8574.$$

Evvelce de zikredildiği gibi, bu sonuçlar proton ve nötronun elektron gibi birer basit parçacık olmadıklarını gösterir. Fazla olarak $\mu_p + \mu_n = 0,8796$ olup hemen μ_d ye eşittir, fakat bu fark deneysel hatâdan daha büyüktür. Manyetik momente yalnız yörüngelerin hiç bir iştirâki olmadığı zaman μ_d nin μ_p ile μ_n nin toplamı olması beklenebilir. Bu küçük fark, döteronun temel hâlinde proton ile nötronun kısmen sıfırdan farklı bir yörünge açısai momentumuna sahip olduklarını gösterir. Bununla beraber, fark çok küçük olduğundan, döteronun manyetik momenti esas itibriyle proton ile nötronun manyetik momentlerinin toplamından ibarettir, ve bu sebepten döteronun toplam açısai momentumu $I = 1$ dir. Proton ve döteronun açısai momentumları doğrudan doğruya ölçülebilir; bunlar mütekabilen $\frac{1}{2}$ ve 1 dir. Döteronun temel hâlinde proton ve nötronun yörünge açısai momentumlarına sâhip olmadıkları farz edilirse, doğrudan doğruya ölçülemiyen nötronun spini $\frac{1}{2}$ veya $\frac{3}{2}$ olabilir. Döteronun spini $I_d = I_n \pm \frac{1}{2}$ dir, fakat manyetik momentlerin deneysel değerleri $I_d = I_n + \frac{1}{2}$ olduğunu göstermektedir. O halde, $1 = I_n + \frac{1}{2}$ eşitliğinin sağlanabilmesi için nötronun spini $\frac{1}{2}$ olmalıdır.

(II.4) ELEKTRİK KUVADRUPOL MOMENT

Buraya kadar çekirdeklerin küresel simetrik oldukları kabul edildi. Gerçekte bu kabulü yapabilmek için hiç bir sebep yoktur. Bununla beraber, çekirdeklerin dönme peryotlarına nazaran uzun bir zaman aralığı için ortalama alınırsa, dönen çekirdekler ortalama olarak silindirik bir simetriye sahiptirler. Gerçekten, tatbikatta bu daima böyledir. Silindirik bir simetriye sâhip bir yük dağılımının mey-

dana getirdiği elektrostatik potansiyel, koordinat başlangıcından r uzaklığının tersinin kuvvetleri cinsinden seriye açılabilir :

$$\Phi(r, \theta) = \frac{e}{r} \left\{ Z + \frac{D}{r} P_1(\cos \theta) + \frac{Q}{2r^2} P_2(\cos \theta) + \dots \right\} \quad (24)$$

burada θ , yervektörü (\mathbf{r}) ile dönme eksenini (z) arasındaki açıdır, ve $P_1(\cos \theta)$, $P_2(\cos \theta)$,... Legendre polinomlarıdır, yani:

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1), \dots \quad (25)$$

Burada Z çekirdeğin yük sayısıdır ve D ve Q sâbitleri de elektrik dipol moment ve elektrik kuvadrupol moment adları ile bilinmektedir. İleride (II.6) da çekirdeklerin dipol momentlere sahip olamayacakları gösterilecektir böylece çekirdeklerin küresel asimetrisi Q ile ölçülür. Açısal momentumu sıfır olan ($I = 0$) çekirdekler için $Q = 0$ olmalıdır, çünkü $I = 0$ olduğu zaman çekirdeğin imtiyazlı bir eksenini yoktur ve böylece yük dağılımının zamana göre ortalaması küresel olur.

Açısal momentumu $I = \frac{1}{2}$ olan çekirdekler için de $Q = 0$ olur. Bu bir kuantum mekaniği olayıdır ve ispatı konumuzun dışındadır.

$\rho(\mathbf{r})$ şeklindeki bir klâsik yük dağılımı için dipol ve kuvadrupol momentler şöyle hesaplanır: $d\tau'$ hacim elemanı içerisindeki $\rho(\mathbf{r}')d\tau'$ yük elemanının meydana getirdiği potansiyel

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (26)$$

şeklindedir. $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha)^{1/2}$ olduğundan (burada α , \mathbf{r} ile \mathbf{r}' arasındaki açıdır), büyük r ler için

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} \cos \alpha + \frac{r'^2}{2r^2} (3 \cos^2 \alpha - 1) + \dots \right\} \quad (27)$$

yazılabilir. O hâlde

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} \cos \alpha + \frac{r'^2}{2r^2} (3 \cos^2 \alpha - 1) + \dots \right\} d\tau' \quad (28)$$

elde edilir. Bu ifade r ve θ nın bütün değerleri için (24) ifâdesine özdeş olmalıdır ve böylece herhangi bir θ için r^{-1} in aynı güçlerinin katsayıları eşitlenmekle D ve Q hesaplanabilir. Bu işlem en kolay bir şekilde $\theta = 0$ için yapılabilir. \mathbf{r} ve \mathbf{r}' doğrultusundaki birim vektörler \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}'_1 ise $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{r}' = r'\mathbf{e}'_1$ yazılabilir. \mathbf{r} yer vektörü dik kartezyen tabanda

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

şeklinde yazılabilir. (x, y, z) kartezyen koordinatları (r, θ, φ) küresel koordinatlarına $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ denklemleri ile dönüştürülürse

$$\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z)$$

veya

$$\mathbf{e}_1 = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

ve benzer şekilde

$$\mathbf{e}_1' = \sin \theta' \cos \varphi' \mathbf{e}_x + \sin \theta' \sin \varphi' \mathbf{e}_y + \cos \theta' \mathbf{e}_z$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' = \cos \alpha$$

olduğundan

$$\cos \alpha = \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'$$

sonucuna varılır. $\theta = 0$ için $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_z$ elde edilir, yani, \mathbf{r} vektörü z -ekseni doğrultusundadır. Son bağıntıdan da $\cos \alpha = \cos \theta'$ bulunur. O hâlde (28) bağıntısı

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta' + \frac{r'^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta' - 1) + \dots \right\} d\tau' \quad (28')$$

şeklini alır. Diğer yandan $\theta = 0$ için $P_1 = P_2 = \dots = 1$ olduğundan (24) bağıntısı

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{r} \left\{ Z + \frac{D}{r} + \frac{Q}{2r^2} + \dots \right\} \quad (24')$$

şeklini alır. (28') ve (24') bağıntılarında r^{-1} , r^{-2} , r^{-3} , ..., lerin katsayılarını eşit kılarak

$$Ze = \int \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$D = \frac{1}{e} \int \rho(\mathbf{r}') r' \cos \theta' d\tau'$$

$$Q = \frac{1}{e} \int \rho(\mathbf{r}') r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) d\tau'$$

veya $z' = r' \cos \theta'$ bağıntısını kullanarak

$$D = \frac{1}{e} \int \rho(\mathbf{r}') z' d\tau' \quad (29)$$

$$Q = \frac{1}{e} \int \rho(\mathbf{r}') (3z'^2 - r'^2) d\tau' \quad (30)$$

bağıntıları bulunur. Âşikâr olarak D uzunluk boyutuna ve Q yüzey boyutuna sâhiptir. Genellikle Q , barn cinsinden ölçülür. 1 barn = 10^{-24} cm² dir ve çekirdek fiziğinde yüz ölçümleri bu birimle ölçülür.

Kuvantum mekaniğinde bir çekirdeğin $\rho(\mathbf{r}')d\tau'$ yük elemanı, protonun e yükünü i -ninci protonun \mathbf{r}' deki $d\tau'$ hacim elemanı içinde bulunma ihtimali olan $P_i(\mathbf{r}')d\tau'$ ile çarpmakla ve sonra çekirdek içerisindeki bütün Z sayıdaki proton üzerine toplamakla bulunur, yâni

$$\rho(\mathbf{r}')d\tau' = \sum_{i=1}^Z e P_i(\mathbf{r}')d\tau' \quad (31)$$

$P_i(\mathbf{r})$, yalnız protonların değil, bütün nükleonların yerlerinin bir fonksiyonu olan $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A)$ çekirdek fonksiyonundan elde edilen $|\psi|^2$ yi diğer $A-1$ nükleonun bütün mümkün yer koordinatları üzerine integre etmekle bulunur. Böylece :

$$P_i(\mathbf{r}') = \int |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_{i-1} d\tau_{i+1} \dots d\tau_A \quad (32)$$

Eğer şimdi $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_i$ yazılırsa $z' = z_i$ ve $d\tau' = d\tau_i$ olur ve (29) bağıntısı

$$D = \sum_{i=1}^Z \int P_i(\mathbf{r}_i) z_i d\tau_i \quad (29')$$

şeklini ve (32) bağıntısı da

$$P_i(\mathbf{r}_i) = \int |\psi(\mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_{i-1} d\tau_{i+1} \dots d\tau_A \quad (32')$$

şeklini alır. (32') ifadesi (29') de yerine yazılırsa

$$D = \sum_{i=1}^Z \int z_i |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_A$$

veyâ $d\tau_1 \dots d\tau_A$ hacim elemanı $d\tau$ ile gösterilirse

$$D = \sum_{i=1}^Z \int z_i |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 d\tau \quad (33)$$

ve benzer şekilde

$$Q = \sum_{i=1}^Z \int (3z_i^2 - r_i^2) |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 d\tau \quad (34)$$

sonuçları elde edilir. Buradaki integrasyon $3A$ sayıdaki (x_i, y_i, z_i) koordinatları üzerine alınmalıdır.

Eğer bir çekirdeğin yük dağılımı üniform, şekli bir dönel elipsoid ise, ve a yarı eksenini simetri eksenini ve b yarı eksenini de ona dik olan eksen ise, (30) bağıntısından

$$Q = \frac{2}{5} Z (a^2 - b^2) \quad (35)$$

elde edilir. Pozitif Q yumurta biçimli (*prolate*) sferoide ($a > b$) ve negatif Q domates biçimli (*oblate*) sferoide ($a < b$) tekabül eder.

Çekirdeklerin kuvadrupol momentleri, enerji seviyelerinin aralık kaidesinden sapmalarını gözlemek suretiyle deneysel olarak tayin edilebilir. Aralık kaidesi, elektronlarla çekirdek arasındaki manyetik etkileşmeye ait enerjinin I ile J arasındaki θ açısına bağlı olması ve bu bağlılığın $\cos \theta$ ile orantılı bir fonksiyon şeklinde olması esasına dayanır. Eğer manyetik etkileşmeye ek olarak (24) tipinde bir elektrik etkileşme varsa, bu takdirde etkileşme enerjisinde $\cos^2 \theta$ ile orantılı bir terim daha olacaktır. Böylece gözlenen enerji aralıkları ile hesaplanan enerji aralıkları arasındaki farklar $\cos^2 \theta$ kanununa uymalıdır. Bu deneysel olarak gerçekleştirilmiştir. Kuvadrupol momentler ^{176}Lu için $+8b$ değerinden ^{119}Sn için $-8b$ değerine kadar değişir. Döteron için deneysel olarak en son bulunan değer $+0,00282 b$ dır (Auffray, 1961).

(II.5) ÖZDEŞ PARÇACIKLAR

Parçacıkların ve çekirdeklerin buraya kadar bahsedilen özelliklerinin hepsinin klâsik benzerleri vardır. Buradan itibaren bahsedilecek özellikler esas itibariyle kuvantum mekanişel özellikler olacaktır. Bunlardan birincisi özdeş parçacıkların ayırd edilemezliğidir. Klâsik fizikte özdeş parçacıkların etiketlenebileceği kabul edilir. Meselâ, 1 parçacığının A da ve 2 parçacığının B de bulunduğu bir durum, 2 parçacığının A da ve 1 parçacığının B de bulunduğu bir durumdan farklıdır. Bu durumlar âşikâr olarak birbirlerinden ayırd edilemezler ve bu sebepten kuvantum mekanişinde bir parçacığın A da ve diğersinin B de bulunduğu yalnız bir durumdan söz edilir.

Böylece, iki özdeş olmayan parçacıkla iki özdeş parçacık arasında esaslı bir fark olması gerekir ve bu fark matematik formalizmde de görülmelidir. Teori herhangi sayıda parçacık için doğrudur, fakat burada iki özdeş parçacık hali incelenecektir.

İki özdeş parçacığa ait Schrödinger denklemi

$$\mathcal{H}(1, 2) \psi(1, 2) = E \psi(1, 2) \quad (36)$$

şeklinde yazılabilir, burada 1 ve 2 numaralarından her biri bir parçacığın bütün koordinatlarını temsil etmektedir. Bu iki parçacık özdeş olduğundan, sistemin

matematik tasvirine tesir etmeksizin yerleri değiştirilebilir. O halde, sistemin $\mathcal{H}(1,2)$ Hamilton operatörü parçacıkların koordinatlarına nazaran simetrik olmalıdır yani :

$$\mathcal{H}(1,2) = \mathcal{H}(2,1) \quad (37)$$

(36) da 1 ile 2 nin yerlerini değiştirmek, ve (37) yi kullanmak suretiyle

$$\mathcal{H}(1,2) \psi(2,1) = E \psi(2,1) \quad (38)$$

elde edilir, yani $\psi(2,1)$ de bu denklemin çözümüdür. Yani hem $\psi(1,2)$ hem $\psi(2,1)$, $\mathcal{H}(1,2)$ operatörünün aynı E öz değerine tekabül eden öz fonksiyonlarıdır. Böylece sistem dejeneredir ve aynı zamanda herhangi bir

$$\Psi(1,2) = A \psi(1,2) + B \psi(2,1) \quad (39)$$

lineer kombinezonu da E ye tekabül eden bir öz fonksiyondur. Parçacıklar ayırd edilemez olduklarından, fiziksel olarak ölçülebilen bütün büyüklükler 1 ile 2 nin yer değiştirmesinden bağımsız olmalıdır. Özellikle

$$|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2 \quad (40)$$

olmalıdır, çünkü, bir dalga fonksiyonunun kendisi ölçülemez olmasına rağmen, modülünün karesi fiziksel olarak ölçülebilir bir büyüklüktür.

(40) şartının sağlanabilmesi için (39) ifadesindeki keyfi ve kompleks A ve B sabit katsayılarının sağlaması gereken şartlar bulunabilir. a, b, α, β reel sabitler ve $a > 0, b > 0$ olmak üzere $A = a e^{i\alpha}$ ve $B = b e^{i\beta}$ vaz edilsin.

$$\Psi(1,2) = a e^{i\alpha} \psi(1,2) + b e^{i\beta} \psi(2,1)$$

$$\Psi^*(1,2) = a e^{-i\alpha} \psi^*(1,2) + b e^{-i\beta} \psi^*(2,1)$$

$$|\Psi(1,2)|^2 = a^2 |\psi(1,2)|^2 + b^2 |\psi(2,1)|^2 + \\ + ab [e^{i(\alpha-\beta)} \psi(1,2) \psi^*(2,1) + e^{-i(\alpha-\beta)} \psi^*(1,2) \psi(2,1)]$$

$$|\Psi(2,1)|^2 = b^2 |\psi(1,2)|^2 + a^2 |\psi(2,1)|^2 +$$

$$+ ab [e^{-i(\alpha-\beta)} \psi(1,2) \psi^*(2,1) + e^{i(\alpha-\beta)} \psi^*(1,2) \psi(2,1)]$$

$a^2 = b^2$ ve $e^{i(\alpha-\beta)} = e^{-i(\alpha-\beta)}$ şartları elde edilir. $a > 0, b > 0$ olduğundan $a = b$ bulunur. $[\sin(\alpha - \beta) = 0$ şartı da sağlanmalıdır]. $a = b$ olduğundan:

$$\frac{A}{B} = e^{i(\alpha-\beta)} \quad \text{ve} \quad \frac{B}{A} = e^{-i(\alpha-\beta)}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin sağ tarafları eşit olduğundan :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{A}$$

veya

veyâ

$$A^2 = B^2$$

veyâ

$$A = \pm B \quad (\text{veyâ } B = \pm A)$$

sonucuna varılır. Meselâ $A = +1$ seçelim, o halde, $B = \pm 1$ olur. Böylece, mümkün iki dalga fonksiyonu vardır :

$$\Psi_{\text{sim}}(1,2) = \psi(1,2) + \psi(2,1) = \Psi_{\text{sim}}(2,1) \quad (41)$$

$$\Psi_{\text{anti}}(1,2) = \psi(1,2) - \psi(2,1) = -\Psi_{\text{anti}}(2,1). \quad (42)$$

Bu dalga fonksiyonları 1 ve 2 ye nazaran mütekabilen simetrik ve antisimetrik fonksiyonlardır. $\psi(1,2)$ eğer (36) dalga denkleminin bir çözümü ise, bu çözümden her zaman bir simetrik ve bir de antisimetrik çözüm teşkil etmek mümkündür. Ayrıca, dalga fonksiyonunun simetri karakterinin zamanla değişmediği gösterilebilir; böylece bir çift özdeş parçacık belirli bir simetriye sahip bir dalga fonksiyonu ile tasvir edilebilir. Filhakika, bir çift özdeş parçacığa ait zamana bağlı Schrödinger denklemi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(1,2) = \mathcal{H}(1,2) \psi(1,2)$$

şeklinindedir. Eğer ψ_s özel bir t ânında simetrik ise, (37) den dolayı $\mathcal{H}\psi_s$ de simetrik olur, ve böylece $\frac{\partial \psi_s}{\partial t}$ simetriktir. t ânında hem ψ_s ve hem zamana göre türevi simetrik olduğundan, sonsuz küçük bir zaman sonra ψ_s , $\psi_s + \frac{\partial \psi_s}{\partial t} dt$ değerini alır ve simetriktir. Böylece dalga denkleminin adım adım integrasyonuna istenildiği kadar büyük zaman aralıkları için devam edilebilir, ve ψ_s nin her zaman simetrik kaldığı görülebilir. Benzer şekilde, eğer ψ_A herhangi bir anda antisimetrik ise, $\mathcal{H}\psi_A$ ve dolayısıyla $\frac{\partial \psi_A}{\partial t}$ antisimetriktirler, ve dalga denkleminin integrasyonu ψ_A nın her zaman antisimetrik olduğunu gösterir. Böylece, sonuç olarak, simetrik ve antisimetrik parçacıklardan söz edilir. Özel bir halde hangi işâretin doğru olduğunu yalnız deney tayin edebilir.

Yukardaki mülâhazalar yalnız elementer parçacıklar için doğru olmakla kalmaz, fakat aynı zamanda α -parçacıkları gibi sıkıca bağlı kümeler veya hattâ atomlar ve moleküller için de doğrudur, fakat bunların diğer parçacıklarla etkileşmelerinde iç hareketleri ihmâl edilebilmelidir. Tamamen genel olarak buçuklu tam sayı açısıl momentumuna sahip sistemlerin antisimetrik ve tam sayı açısıl momentumuna sahip olan sistemlerin de simetrik oldukları bulunmuştur. Özellikle, protonlar, nötronlar, pozitronlar ve elektronlar hep antisimetriktir.

A sayıda antisimetrik parçacıktan meydana gelen bir sistemin A çift olduğu zaman simetrik ve A tek olduğu zaman antisimetrik olacağı kolaylıkla görülür; böylelikle bir sistemin simetri özellikleri sistemi meydana getiren parçacıkların simetri özelliklerinden çıkarılabilir. Meselâ, nötronun antisimetrik oluşu, deneysel olarak protonun antisimetrik ve döteronun simetrik oluşundan çıkarılır.

Çok büyük sayıda parçacıklar istatistik mekaniğin metotları ile incelendiğinde, simetrik ve antisimetrik parçacıkların farklı şekillerde incelenmeleri gerektiği bulunmuştur. Birincilerin Bose-Einstein istatistiğine ve ikincilerin de Fermi-Dirac istatistiğine uyduğu söylenir. Bu istatistiklerin her ikisi de klâsik Boltzmann istatistiğinden farklıdır. (Bk. Ahmed Yüksel ÖZEMRE, Teorik Fizik Dersleri Cild 5: ISI TEORİSİ)

Şimdi yukarıdaki mülâhazaların, "Fermi-Dirac istatistiğine uyan bir özdeş parçacıklar sisteminde (meselâ, bir atomun elektronları) herhangi iki parçacık aynı kuvantum halinde bulunamaz" şeklinde ifâde edilen dışarılama (*exclusion*) ilkesine götürdüğü görülebilir. Bu gene yalnız iki özdeş parçacıktan meydana gelen bir sistem için ispat edilecektir.

İki özdeş parçacık birbirleriyle etkileşmedikleri zaman önemli bir özel hal ortaya çıkar. Bu takdirde Hamiltonyen

$$\mathcal{H}(1,2) = \mathcal{H}(1) + \mathcal{H}(2) \quad (43)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer parçacıklardan birine ait dalga denklemi

$$\mathcal{H} \Phi_k = E_k \Phi_k \quad (44)$$

ise, iki parçacık için yazılmış denklemin $E_m + E_n$ enerjisine tekabül eden çözümü

$$\Psi_{mn}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_m(1) \Phi_n(2) \pm \Phi_n(1) \Phi_m(2)] \quad (45)$$

şeklinde, burada $\frac{1}{\sqrt{2}}$ çarpanı doğru normalizasyonu sağlar. Eğer $m = n$ ise, antisimetrik Ψ_{mn} sıfır olur, fakat simetrik Ψ_{mn} sıfır olmaz. O hâlde, iki özdeş antisimetrik parçacığın özdeş halleri işgâl etme ihtimâli sıfırdır. Bu, dışarılama ilkesinin özel bir ifâdesidir; ve bu ilke yalnız etkileşmeyen parçacıklar için doğrudur, fakat aynı zamanda zayıf olarak etkileşen parçacıklar için de yaklaşık olarak doğrudur.

Çekirdeklerin istatistiğini tayin etmek için, bir iki atomlu moleküldeki özdeş çekirdeklerin yer değiştirmesinin molekülün dalga fonksiyonunun işaretini nasıl etkilediği bulunmalıdır. Görüleceği gibi bu, molekülün band spektrumunda kendisini gösterecektir.

Böyle bir molekülün-dalga fonksiyonu:

(a) atomik elektronların hareketine,

(b) çekirdeklerin bunları birleştiren doğru çizgi boyunca titreşim hareketine,

- (c) çekirdeklerin ortak kütle merkezi etrafında dönme hareketine,
 (d) çekirdeklerin I iç açısal momentumuna bağlıdır ve

$$\Psi = \psi_{at} \psi_{vib} \psi_{rot} \psi_I \quad (46)$$

şeklinde yazılabilir.

İki çekirdeğin yerlerini değiştiren işlemi temsil eden operatör \mathcal{R} ile gösterilsin. O halde

$$\mathcal{R} \psi_{at} = \pm \psi_{at} \quad (47)$$

yazılabilir ve işaret molekül spektrumlarından tayin edilebilir. Bu işaret çok kere + dır ve buradaki ispatta + kabul edilecektir. Diğer yandan

$$\mathcal{R} \psi_{vib} = + \psi_{vib} \quad (48)$$

dur; çünkü ψ_{vib} sadece çekirdekler arasındaki uzaklığa bağlıdır ve çekirdeklerin yer değiştirmesi ile değişmez. ψ_{rot} un yapısı bir az daha karışıktır ve

$$\psi_{rot} = P_l^m (\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (49)$$

şeklinde bir küresel harmoniktir; burada θ ve φ çekirdeklerden birinin kütle merkezine nazaran küresel koordinatların açısal kısmıdır. Çekirdekler yer değiştirdiği zaman, bunlardan birinin (x, y, z) Kartezyen koordinatları yerine $(-x, -y, -z)$ koordinatları gelecektir. Bu işleme koordinat sisteminin refleksiyonu veya bundan sonraki kısımda görüleceği gibi "parite operasyonu" adı verilir. Kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara geçiş

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

denklemleri ile yapıldığından, küresel koordinatlarda koordinat sisteminin refleksiyonu θ yerine $\pi - \theta$ ve φ yerine $\pi + \varphi$ alınmakla yapılır. Diğer yandan

$$P_l^m [\cos (\pi - \theta)] = (-1)^{l+m} P_l^m (\cos \theta)$$

$$e^{im(\varphi + \pi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$$

olduğundan

$$\mathcal{R} \psi_{rot} = (-1)^l \psi_{rot} \quad (50)$$

elde edilir. Böylece buraya kadar, l çekirdeklerin yörünge açısal momentumu kuvantum sayısı olmak üzere çift l ler için Ψ simetrik, ve tek l ler için Ψ anti-simetriktir.

Son olarak dalga fonksiyonunun ψ_I kısmı incelenecektir. Bir çekirdeğin I toplam açısal momentumu belirli bir doğrultuda $\hbar m$ gibi bir bileşene sahiptir; ve buradaki m kuvantum sayısı $I, I-1, \dots, -I$ gibi $2I+1$ sayıda değer

alabilir. Böylece çekirdeklerden her biri için $2I + 1$ kuvantum hali vardır ve iki çekirdek için $\psi_{m_1}(1)\psi_{m_2}(2)$ şeklinde $(2I + 1)^2$ sayıda dalga fonksiyonu teşkil edilebilir. Eğer $m_1 = m_2$ ise bu fonksiyonlar simetriktir ve sayıları da $2I + 1$ dir. Eğer $m_1 \neq m_2$ ise bu fonksiyonlar simetrik değildir ve her $\psi_{m_1}(1)\psi_{m_2}(2)$ ve $\psi_{m_2}(1)\psi_{m_1}(2)$ çifti yerine $\psi_{m_1}(1)\psi_{m_2}(2) + \psi_{m_2}(1)\psi_{m_1}(2)$ şeklindeki simetrik bir dalga fonksiyonu ile $\psi_{m_1}(1)\psi_{m_2}(2) - \psi_{m_2}(1)\psi_{m_1}(2)$ şeklindeki bir antisimetrik dalga fonksiyonu konulmalıdır. Böylece, $I(2I + 1)$ sayıda antisimetrik dalga fonksiyonu ile $I(2I + 1) + (2I + 1)$ sayıda simetrik dalga fonksiyonu elde edilecektir. Simetrik dalga fonksiyonlarının antisimetriklerle oranı $(I + 1)/I$ dir.

Dalga fonksiyonunun tamamı kesin olarak ya simetrik, ya da antisimetrik olmalıdır. Eğer dalga fonksiyonu simetrikse, simetrik ψ_I çift l ye ait ψ_{rot} ile ve antisimetrik ψ_I de tek l ye ait ψ_{rot} ile bileşmelidir. Böylece, band spektrumundaki çift l ye ait bir çizginin şiddetinin bir sonraki tek l ye ait bir çizginin şiddetine oranı $(I + 1)/I$ dir. Ψ antisimetrik olduğu zaman bunun tersi doğrudur. Böylece, bu metotla çekirdeklerin hem istatistikleri hem de spinleri elde edilebilir. Bu metot bilhassa sıfır açısız momentumuna sahip çekirdekler için faydalıdır, çünkü böyle çekirdekler için spektrumdaki çizgilerin yarısı birer aralıkla yok olur. Band spektrumu metodu, şüphesiz çekirdeklerin manyetik momentleri hakkında hiç bir bilgi vermez.

(II.6) PARİTE

(x, y, z) kartezyen koordinatları yerine $(-x, -y, -z)$ konulmakla elde edilen dönüşüme parite dönüşümü veya parite işlemi (operasyonu) adı verilir, ve \mathcal{P} operatörü ile gösterilir. Bu dönüşümle bir sağ koordinat sistemi bir sol koordinat sistemine dönüşür, yani bir refleksiyona uğrar. Bu kısımda parite dönüşümünün bir dalga fonksiyonuna etkisi incelenecektir.

n -parçacıktan meydana gelen bir sistem için

$$\mathcal{P}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \psi(-\mathbf{r}_1, -\mathbf{r}_2, \dots, -\mathbf{r}_n) \quad (51)$$

elde edilir. Eğer operasyon tekrarlanırsa

$$\mathcal{P}^2\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (52)$$

bulunur, yani \mathcal{P}^2 operatörünün özdeğeri 1 dir. Böylece, \mathcal{P} operatörünün mümkün özdeğerleri $+1$ ve -1 dir. Şimdi belirli şartlar altında paritenin bir hareket sabiti olduğu gösterilecektir.

Eğer n -parçacıktan meydana gelen sistemin \mathcal{H} enerji operatörü (yani Hamiltoniyeni) koordinat refleksiyonu altında değişmiyorsa, o halde

$$\mathcal{H}\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = E\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (53)$$

dalga denklemi koordinat refleksiyonu altında

$$\mathcal{H}\psi(-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_n) = E\psi(-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_n) \quad (54)$$

şeklini alır. Bu sebepten, $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ ile $\psi(-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_n)$ aynı E enerjisi seviyesine ait olan dalga fonksiyonlarıdır. Eğer bu enerji seviyesi dejenere değilse, o halde bu iki dalga fonksiyonu birbiriyle orantılı olmalıdır, yani:

$$\psi(-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_n) = K\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (55)$$

elde edilir. Bu denklemde \mathbf{r} yerine $-\mathbf{r}$ koyulursa, (55) i kullanarak

$$\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = K\psi(-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_n) = K^2\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

veyâ

$$K = \pm 1 \quad (56)$$

sonucuna varılır; bu sonuç (52) ye uygundur. Fakat (55)

$$\mathcal{P}\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = K\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (57)$$

şeklinde parite operatörü cinsinden yazılabilir. Bu denklem \mathcal{P} parite operatörüne ait bir özdeğer denklemidir. O hâlde, parite bir hareket sâbitidir ve değeri +1 veya -1 dir. Filhakika, $\mathcal{P}\mathcal{H} = \mathcal{H}$ ve

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}\psi) = (\mathcal{P}\mathcal{H})(\mathcal{P}\psi) = \mathcal{H}(\mathcal{P}\psi)$$

olduğundan $\mathcal{P}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{P} = 0$ olur, yani parite operatörü Hamiltonyen ile komütatiftir.

Bir sistemin dalga fonksiyonunun belirli bir pariteye sahip olması için gerek şart sistemin \mathcal{H} enerji operatörünün koordinat refleksiyonu altında değişmemesidir. Bu da \mathcal{H} nın sadece skaler terimler ihtivâ etmesi, fakat psödo-skaler terimler ihtivâ etmemesi demektir. (Psödo-skaler büyüklüğe bir örnek açısal momentum ile lineer momentumun $L.P$ skaler çarpımıdır. Refleksiyon altında, P polar vektörü işâret değiştirir, L aksiyal vektörü değiştirmez, yani $L.P$ işâret değiştirir). Meselâ, eğer bir nükleer sistemin Hamiltonyeni çekirdek kuvvetlerinden ötürü küçük bir psödo-skaler terim ihtiva ediyorsa, o takdirde sistemin dalga fonksiyonu buna tekabül etmek üzere F amplitüdüne ve esas terimin paritesine zıt bir pariteye sahip küçük bir ilâve ihtiva eder. Bu da, parite tam olarak korunduğu zaman yasak olan bazı çekirdek reaksiyonlarının görünmesine yol açar. Böyle reaksiyonlar aranmış (*WILKINSON*, 1958), fakat bulunamamıştır. Böylece

$$F^2 \cong 10^{-7}$$

şeklinde bir üst limit elde edilmiştir. Yani, deney hatâları içerisinde, çekirdek kuvvetleri pariteyi korur, ve bu aynı şekilde elektromanyetik kuvvetler için de doğrudur. Bununla beraber, farklı tipte bir kuvvetle ilgili olan β -parçalanmasında paritenin korunmadığı (*WU*, 1957) bilinmektedir.

Eğer çekirdek reaksiyonlarında paritenin tam olarak korunduğu kabul edilirse, her hangi bir çekirdeğin bir elektrik dipol momente sahip olamayacağı gösterilebilir. Çekirdeğin belirli bir paritesi olduğundan, dalga fonksiyonu

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 = |\psi(-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_A)|^2 \quad (58)$$

şartını sağlar, yâni $|\psi|^2$ koordinatların bir çift fonksiyonudur. Diğer yandan, elektrik dipol momentini veren (33) numaralı

$$D = \sum_{i=1}^Z \int z_i |\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 d\tau$$

bağıntısındaki z_i âşikâr olarak tek fonksiyon ve dolayısıyla integrantların her biri tek fonksiyondur. Fakat bir "tek" fonksiyonun bütün uzaya teşmil edilmiş integrali sıfırdır. O halde, yukardaki toplamın her terimi sıfır olur ve böylece $D = 0$ olduğu ispat edilmiş olur.

(II.7) SPİN OPERATÖRLERİ

Buraya kadar çekirdeğe veyâ bir nükleona ait dalga fonksiyonları, tasvir ettikleri parçacıkların yalnız yer koordinatlarının bir fonksiyonu idi. Fakat çekirdek fiziğine giren elementer parçacıkların çoğu ve bu arada nükleonlar $\frac{1}{2}$ spinine sahip olduklarından, böyle bir parçacık (x, y, z) uzay koordinatlarının yanında spininin doğrultusunu tayin eden s_z spin koordinatları ile tamamen tasvir edilebilir. Şüphesiz (x, y, z) uzay koordinatları $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar herhangi bir değeri alabilirler; s_z spin koordinatları ise sadece $\pm \frac{1}{2} \hbar$ şeklindeki iki değeri alabilir. z indisi spinin ölçüldüğü itibarı z doğrultusunu göstermektedir. Böylece bir elementer parçacığın dalga fonksiyonu

$$\psi(x, y, z, s_z)$$

şeklinindedir. Alçak hızlarda parçacığın spinine ve yerine etki eden kuvvetler birbirleriyle interferens yapmaz ve bu sebepten dalga fonksiyonunu bir çarpım şeklinde yazmak mümkün olur:

$$\psi(x, y, z, s_z) = \Phi(x, y, z) \chi(s_z). \quad (59)$$

Spin gözlenebilir bir büyüklük olduğundan kuvantum mekaniğinde bir operatöre tekabül etmelidir ve bu operatör $\chi(s_z)$ spin fonksiyonuna etki etmelidir. Diğer yandan, spin bir vektör olduğundan kuvantum mekaniğinde bir vektör operatöre tekabül etmelidir. Bu vektör, açısal momentum operatörünün özel bir hâlidir ve onun bütün özelliklerine sahiptir. Böylece $\mathbf{s}(s_x, s_y, s_z)$ vektör operatörünün skaler karesi s^2 bir hareket sabitidir ve açısal momentum teorisine göre

$$s^2 \chi = \hbar^2 s(s+1) \chi$$

denklemini sağlar. s^2 ile birlikte ölçülebilen diğer bir büyüklük s_z dir ve

$$s_z \chi = \hbar m \chi$$

denklemini sağlar. Burada $-s \leq m \leq s$ olmalıdır. Spin açısal momentumu bahis konusu parçacıklar için $s = \frac{1}{2}$ ile bellidir. Böylece $s(s+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4}$ olduğundan

$$s^2 \chi = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi$$

ve $m = \pm \frac{1}{2}$ olmalıdır. Böylece

$$s_z \chi = \pm \frac{1}{2} \hbar \chi$$

elde edilir. O halde, s_z nin $\pm \frac{1}{2} \hbar$ şeklinde sâdece iki özdeğeri vardır ve $+\frac{1}{2} \hbar$ değerine "yukarı" ve $-\frac{1}{2} \hbar$ değerine de "aşağı" adı verilir. s_z nin (ve s^2 nin) bu iki özdeğere tekabül eden iki özfonksiyonu vardır. $s_z \chi(m) = \hbar m \chi(m)$ gösterilimini kullanırsak

$$s_z \chi \left(+ \frac{1}{2} \right) = + \frac{1}{2} \hbar \chi \left(+ \frac{1}{2} \right) \text{ ve } s_z \chi \left(- \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{2} \hbar \chi \left(- \frac{1}{2} \right)$$

yazılabilir. Bu özfonksiyonlar α ve β ile gösterilsin:

$$\chi \left(+ \frac{1}{2} \right) = \alpha, \chi \left(- \frac{1}{2} \right) = \beta, \quad (60)$$

o halde

$$s_z \alpha = \frac{1}{2} \hbar \alpha, s_z \beta = - \frac{1}{2} \hbar \beta, s^2 \alpha = \frac{3}{4} \hbar^2 \alpha, s^2 \beta = \frac{3}{4} \hbar^2 \beta \quad (61)$$

yazılabilir.

Keyfî bir spin doğrultusuna sahip bir parçacık için dalga fonksiyonu

$$\psi(x, y, z, s_z) = \Phi(x, y, z) (a\alpha + b\beta) \quad (62)$$

şeklinde olmalıdır. Burada a ve b uygun sabitlerdir. Dalga fonksiyonunun ihtimal cinsinden fiziksel tefsiri

$$\sum_{\text{spin}} \int_{\text{uzay}} |\Phi(x, y, z) \chi(s_z)|^2 d\tau = 1 \quad (63)$$

bağıntısını verir. Diğer yandan,

$$\int |\Phi(x, y, z)|^2 d\tau = 1 \quad (64)$$

olduğundan,

$$\sum_{\text{spin}} |\chi(s_z)|^2 = (a^* \alpha^\dagger + b^* \beta^\dagger) (a\alpha + b\beta) = 1$$

veyâ

$$|a|^2 \alpha^\dagger \alpha + |b|^2 \beta^\dagger \beta + a^* b \alpha^\dagger \beta + b^* a \beta^\dagger \alpha = 1 \quad (65)$$

bulunur. Kuantum mekaniğinin genel prensipleri, özdeğerlerin reelliğinden ötürü özfonksiyonların dikliğini verir:

$$\alpha^\dagger \beta = \beta^\dagger \alpha = 0. \quad (66)$$

Diğer yandan, spin fonksiyonlarını normalize etmek âdettir:

$$\alpha^\dagger \alpha = \beta^\dagger \beta = 1 \quad (67)$$

Böylece

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (68)$$

elde edilir. Bu sonucun fizikî tefsiri şöyledir: (62) ile tevsir edilen parçacığın spininin "yukarı" olma ihtimâli $|a|^2$ ve "aşağı" olma ihtimali $|b|^2$ dir.

$$s = \frac{1}{2} \hbar \sigma \quad (69)$$

bağıntısı ile yeni bir σ vektör operatörünü tarif etmek elverişlidir. Bu vektör operatörün ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) bileşenlerinin

$$\begin{aligned} \sigma_y \sigma_z &= i \sigma_x = -\sigma_z \sigma_y \\ \sigma_z \sigma_x &= i \sigma_y = -\sigma_x \sigma_z \\ \sigma_x \sigma_y &= i \sigma_z = -\sigma_y \sigma_x \\ \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I \end{aligned} \quad (69')$$

bağıntılarını gerçeklediği kuantum mekaniğinde ispat edilir; burada I birim operatördür. Bu bağıntılar temsil sistemine bağlı değildir. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ operatörlerinin bu bağıntıları sağlayan özel bir matris temsili Pauli tarafından verilmiştir. Pauli spin matrisleri aşağıdaki şekildedir:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Şüphesiz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde olmalıdır. (69) bağıntısına nazaran (61) bağıntıları

$$\sigma_z \alpha = \alpha, \quad \sigma_z \beta = -\beta; \quad \sigma^2 \alpha = 3\alpha, \quad \sigma^2 \beta = 3\beta \quad (70)$$

şeklinde yazılabilir. Pauli spin matrislerini kullanarak, (66), (67) ve (70) bağıntılarını sağlamak üzere α ve β özfonksiyonlarının matris temsili olarak

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alınabilir. Şüphesiz

$$\alpha^\dagger = (1 \ 0), \beta^\dagger = (0 \ 1)$$

olacaktır. Diğer yandan

$$a\alpha + b\beta = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ve

$$(a\alpha + b\beta)^\dagger = a^* \alpha^\dagger + b^* \beta^\dagger = (a^* \ b^*)$$

ve

$$|a\alpha + b\beta|^2 = (a\alpha + b\beta)^\dagger (a\alpha + b\beta) = (a^* \ b^*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2$$

olur. Aynı zamanda

$$\sigma_x \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta,$$

$$\sigma_y \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i\beta$$

$$\sigma_x \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha,$$

$$\sigma_y \beta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i\alpha$$

olduğundan

$$\sigma_x \alpha = \beta, \quad \sigma_x \beta = \alpha, \quad \sigma_y \alpha = i\beta, \quad \sigma_y \beta = -i\alpha \quad (71)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntıları özel bir temsil sistemini kullanarak elde ettik; fakat bu, σ_z nin diagonal olduğu herhangi bir temsil sistemi için de geçerlidir.

İki özdeş parçacıktan meydana gelen bir sistemin spin dalga fonksiyonu simetrik ve antisimetrik şekillerde yazılabilir.

$$\alpha_1 \alpha_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1), \quad \beta_1 \beta_2 \quad (72)$$

şeklinde üç simetrik spin fonksiyonu ve

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \quad (73)$$

şeklinde de bir antisimetrik spin fonksiyonu vardır. Buradaki $1/\sqrt{2}$ çarpanları spin fonksiyonlarının normalize olmalarını sağlar. Spini 1/2 olan iki özdeş par-

çacığın spin operatörleri $s^{(1)}$ ve $s^{(2)}$ ise ve bunların meydana getirdiği sistemin açısai momentum operatörü I ise

$$\mathbf{I} = \mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)}$$

yazılabilir. Bu operatörler

$$(s^{(1)})^2 \alpha_1 = \frac{3}{4} \hbar^2 \alpha_1, (s^{(1)})^2 \beta_1 = \frac{3}{4} \hbar^2 \beta_1, s_z^{(1)} \alpha_1 = \frac{1}{2} \hbar \alpha_1, s_z^{(1)} \beta_1 = -\frac{1}{2} \hbar \beta_1$$

$$(s^{(2)})^2 \alpha_2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \alpha_2, (s^{(2)})^2 \beta_2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \beta_2, s_z^{(2)} \alpha_2 = \frac{1}{2} \hbar \alpha_2, s_z^{(2)} \beta_2 = -\frac{1}{2} \hbar \beta_2$$

$$\mathbf{I}^2 \chi = \hbar^2 I(I+1) \chi, I_z \chi = \hbar m \chi$$

$$s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2}, m_1 = \pm \frac{1}{2}, m_2 = \pm \frac{1}{2}$$

bağıntılarını sağlarlar; burada χ özfonksiyonu (72) ve (73) teki fonksiyonlardan herhangi birini temsil etmektedir. s_1 , s_2 ve I kuvantum sayıları arasında

$$|s_1 - s_2| \leq I \leq s_1 + s_2$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı, $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$0 \leq I \leq 1 \text{ veyâ } I = 0 \text{ ve } I = 1$$

sonucunu verir. Diğer yandan $m_1 + m_2 = m$ kuvantum sayısı ile I kuvantum sayısı arasında

$$-I \leq m \leq I$$

bağıntısı vardır. $I = 1$ için bu bağıntı $m = 1, 0, -1$ sonuçlarını verir. Toplam açısai momentuma ait bu özdeğerlere tekabül eden özfonksiyonlar (72) ile verilir ve *triplet hâl* adını alır. $I = 0$ için de $m = 0$ elde edilir ve buna tekabül eden özfonksiyon da (73) ile verilir; bu hâle *singlet hâl* adı verilir.

Bazen $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ operatörünün özdeğerlerini bilmek gerekir. Bu özdeğerler,

$$\sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} = \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} + \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \quad (74)$$

operatörünü (72) ve (73) spin fonksiyonlarına doğrudan doğruya tatbik ederek bulunabilir. Bu takdirde, $\sigma^{(1)}$ in α_1 ile β_1 e ve $\sigma^{(2)}$ nin α_2 ile β_2 ye tesir ettiği dikkate alınmalıdır. Diğer bir yol

$$\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(2)} = \frac{1}{2} [\mathbf{I}^2 - (\mathbf{s}^{(1)})^2 - (\mathbf{s}^{(2)})^2]$$

bağıntısından faydalanmaktadır. $\mathbf{s}^{(1)} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ ve $\mathbf{s}^{(2)} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ olduğuna dikkat edilirse

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\hbar^2} I^2 - (\sigma^{(1)})^2 - (\sigma^{(2)})^2 \right] \\ \sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \chi &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\hbar^2} I^2 \chi - (\sigma^{(1)})^2 \chi - (\sigma^{(2)})^2 \chi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[4I(I+1) - 3 - 3 \right] \chi \\ &= [2I(I+1) - 3] \chi\end{aligned}$$

sonucuna varılır, yani aranan özdeğerler $2I(I+1) - 3$ tür. Triplet hâl için ($I=1$)

$$\sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \chi = \chi \quad (75)$$

ve singlet hâl için ($I=0$)

$$\sigma^{(1)} \cdot \sigma^{(2)} \chi = -3 \chi \quad (76)$$

elde edilir. Yani, aranan öz değerler triplet hâl için $+1$ ve singlet hâl için -3 tür.

(II.8) İZOSPİN

Çok kere nötron ve protonu, nükleonun yalnız yük bakımından fark eden iki kuvantum hâli olarak incelemek elverişlidir. Böylece nükleonun dalga fonksiyonu

$$\Psi = \psi_{uzay} \psi_{spin} \psi_{yük} \quad (77)$$

şeklinde ifâde edilebilir. $\psi_{yük}$ nükleonun iki yük hâline tekabül eden iki özfonksiyondan yalnız biri olabildiğinden, matematik bakımdan tamamen ψ_{spin} e eşdeğerdir, ve bu sebepten τ yük operatörü önceki kısımdaki σ spin operatörüne özdeş olarak alınacaktır. Bu sebepten, τ ya **izotopik** veya **izobarik spin operatörü** adı verilir. İkinci isim daha doğrudur, çünkü nötronlar ve protonlar izobarlardır, asla izotoplar değildir; fakat her iki isim de oldukça uzundur. Böylece Fermi'nin yaptığı gibi bu isimlerin kısaltılmışı olan izospin ismi kullanılacaktır. τ ile σ nın eşdeğerliği sadece matematikseldir ve izospinin spinle fiziksel olarak hiç bir ilgisi yoktur. Diğer yandan, izospin kavramının faydalı olabilmesi için çekirdek kuvvetlerinin yükten bağımsız olması gerekir; hiç değilse hemen hemen öyle olmalıdır. Eğer bu böyle olmasaydı, nötronlarla protonların yükten başka farkları da olması gerekirdi.

τ nun τ_1, τ_2, τ_3 gibi üç bileşeni vardır ve τ_3 ün de iki özdeğeri vardır; $+1$ özdeğeri protonu ve -1 özdeğeri de nötronu gösterir. Bu sebepten, nükleonun yükü

$$\frac{1}{2} (1 + \tau_3) e \quad (78)$$

operatörünün özdeğerleri olup proton için e ve nötron için de 0 dır. İki özdeğere tekabül eden iki özfonksiyon vardır; protona ait öz fonksiyon γ ve nötrona ait özfonksiyon da δ dır. (70) ve (71) bağıntılarına benzer şekilde

$$\tau_1\gamma = \delta, \tau_1\delta = \gamma, \tau_2\gamma = i\delta, \tau_2\delta = -i\gamma, \tau_3\gamma = \gamma, \tau_3\delta = -\delta \quad (79)$$

bağıntıları vardır. Diğer yandan, eğer

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2), \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) \quad (80)$$

operatörleri tarif edilirse hemen

$$\tau_+\gamma = 0, \tau_+\delta = \gamma, \tau_-\gamma = \delta, \tau_-\delta = 0 \quad (81)$$

sonuçları elde edilir. Böylece τ_- operatörü bir nötron hâlini yok eder ve bir proton hâlini bir nötron haline çevirir, ve τ_+ operatörü de bir proton hâlini yok eder ve bir nötron hâlini bir proton haline çevirir.

İki parçacıklı bir sistem için üç simetrik ve bir antisimetrik özfonksiyon vardır:

Simetrik		Antisimetrik
$\gamma_1 \gamma_2$	iki proton	
$\delta_1 \delta_2$	iki nötron	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1)$ nötron-proton (82)
		$\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1)$ nötron-proton

Diğer yandan, $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$ nin özdeğerleri simetrik hâl için +1 ve antisimetrik hâl için -3 tür.

Protonlar ile nötronlar farklı yük hallerinde bulunan özdeş parçacıklar olarak nazar-ı itibara alındığı zaman bazı güçlüklerin ortaya çıkacağı düşünülebilir. Özellikle döteron, bir protonla bir nötrondan meydana gelen iki özdeş olmayan parçacıktan ibaret bir sistem olarak incelenirken, işin içine izospin girince iki özdeş parçacık olarak farzedilmesi gerekir. Bununla beraber, aşağıda her iki inceleme şeklinin de aynı sonuca götürdüğü görülecektir.

Eğer iki nükleonlu bir sistemin dalga fonksiyonunun uzay ve spin kısmı $\Phi(1,2)$ ile gösterilirse, ve aynı zamanda bahis konusu iki nükleonun her ikisi de proton ise, yâni antisimetrik parçacıklarsa

$$\Phi(1,2) = -\Phi(2,1)$$

olmalıdır. İzospin formalizminde iki protonlu bir sistemin bütün dalga fonksiyonu

$$\Phi(1,2) \gamma_1 \gamma_2$$

olacaktır ve bu da, olması gerektiği gibi, antisimetriktir. İki nötronlu bir sistem için de benzer muhakemeler yapılabilir. Bir döteron için $\Phi(1,2)$ nin hiç bir simetri şartını sağlaması gerekmez, çünkü bu incelemede proton ile nötron özdeş değildir. İzospin incelemesinde bu parçacıklar özdeştir, ve bu sebepten

$$\Phi(1,2) \gamma_1 \delta_2 \text{ veyâ } \Phi(2,1) \gamma_2 \delta_1$$

şeklindeki iki dalga fonksiyonundan biri tarafından temsil edilirler. Artık şimdi nükleonlar özdeş parçacıklar olarak incelendiğinden, bu fonksiyon antisimetrik hâle getirilmelidir. Böylece izospin formalizminde döteronun dalga fonksiyonu

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi(1,2) \gamma_1 \delta_2 - \Phi(2,1) \gamma_2 \delta_1]$$

şeklinindedir. Böylece eski incelemedeki simetrik olmayan dalga fonksiyonundan yeni incelemede bir antisimetrik dalga fonksiyonu elde etmek mümkün olur.

Şimdi bir çekirdeği teşkil eden nükleonlardan meydana gelen bir sistem düşünölsün, ve

$$T_3 = \frac{1}{2} \sum \tau_3 \quad (83)$$

ifâdesi teşkil edilsin; buradaki toplama çekirdekdeki bütün nükleonlar üzerinden yapılmıştır.

N ve Z mütekaabilen çekirdekdeki nötronların ve protonların sayıları olduğuna göre, T_3 operatörünün özdeğeri olarak

$$T_3 = -\frac{1}{2} (N - Z) \quad (83')$$

sonucu elde edilir, yani $-2T_3$ nötron fazlasını ölçer. Spin formalizmine benzer şekilde, bir çekirdeğin

$$T = \frac{1}{2} \sum \tau$$

şeklinde bir toplam izospini vardır. O halde, T^2 nin öz değerleri

$$T^2 = T(T + 1), \quad T = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ veyâ } T = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

ve T_3 ün özdeğerleri de

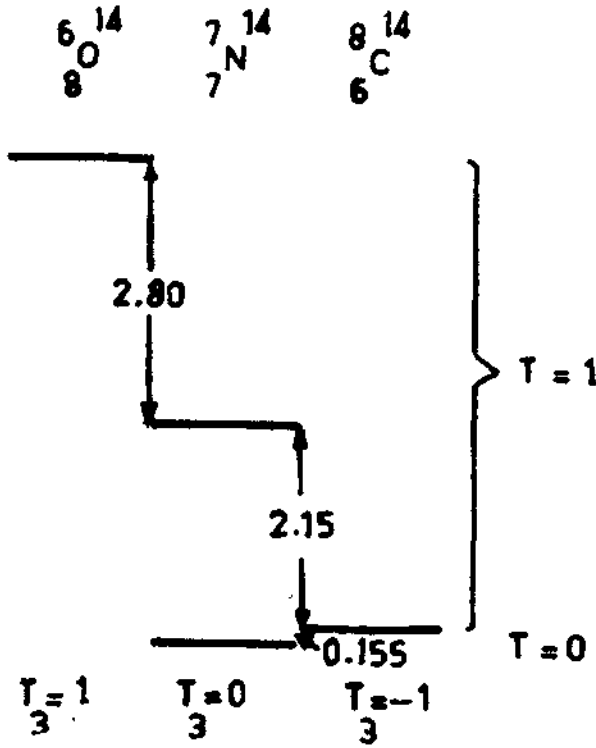
$$-T \leq T_3 \leq T$$

veyâ bir izospin mültipleti meydana getirmek üzere

$$T_3 = T, T - 1, T - 2, \dots, -T$$

şeklinde olur. Şimdi kuvvetlerin yükten bağımsız olduğu farz edilecektir. Eğer nötronlar ve protonlar aynı kütleyle sâhipseler ve Coulomb kuvvetleri mevcut değil-

se, mültipleğin enerji seviyeleri dejenere olur; bu tesirlerin her ikisi de oldukça küçük olduğundan, verilmiş bir mültipleğin enerji seviyelerinin özellikle hafif çekirdeklerde birbirlerine oldukça yakın sıralanmaları gerekir. Böyle bir seviye şeması deneysel olarak gözlenmiştir ve Şekil : II.2 deki gibidir. Bu örnekte $A = 14$ kütle sayısına sahip üç izobarın enerji seviyeleri deneysel olarak bulunmuştur : ^{14}O ile ^{14}C ün temel halleri ^{14}N ün birinci uyarılmış hâli ile birlikte bir izospin tripleti ve ^{14}N ün temel hâli de bir izospin singleti meydana getirir. Filhakika



Şekil : II.2 — $A = 14$ kütle sayısına sahip üç izobarın izospin değerleri.

$$T_3 = -\frac{1}{2}(6-8) = 1, \quad T_3 = -\frac{1}{2}(7-7) = 0, \quad T_3 = -\frac{1}{2}(8-6) = -1$$

tripleti $T = 1$ özdeğerine, ve $T_3 = -\frac{1}{2}(7-7)$ singleti de $T = 0$ özdeğerine tekabül eder. $T = 1$ seviyesinin ayrılması beklenen büyüklük mertebesindedir.

ALIŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

II.1. Çok incelikte yapılmış elektron saçılması deneyleri, bir çekirdeğin gerçekten hemen hemen sabit bir yoğunluğa sahip bir küre şeklinde olduğunu ve etrafınının da yoğunluğu azalarak sifıra düşen bir ince kabukla sarıldığını göstermektedir. Yoğunluğun maksimum değerinin yarısına düştüğü küre yüzeyinin yarı çapı c ile gösterilsin. Bu büyüklükler fm cinsinden deneysel olarak

$$c = 1,12 A^{1/3} - 0,94 A^{-1/3} \quad (84)$$

$$s = 2,5 \pm 0,3 \quad (85)$$

bağıntıları ile verilmiştir. Böylece, eşdeğer üniform dağılımın yarıçapı

$$R_u = 1,12 A^{1/3} + 2,35 A^{-1/3} - 2,07 A^{-1} \quad (86)$$

bağıntısı ile bellidir. Çekirdeklerdeki yoğunluk dağılımı sâdece c ve s gibi iki parametre ile belli olduğundan, bu dağılım aşağıdaki basit fonksiyonla verilebilir:

$$\begin{aligned} r < c - \frac{1}{2} t & \quad \text{için : } \rho = \rho_0, \\ c - \frac{1}{2} t < r < c + \frac{1}{2} t & \quad \text{için : } \rho = \rho_0 \frac{c + \frac{1}{2} t - r}{t}, \\ r > c + \frac{1}{2} t & \quad \text{için : } \rho = 0, \end{aligned}$$

burada ρ_0 , çekirdeğin merkezindeki yoğunluktur ve bütün çekirdekler için aynı olduğu kabul edilmektedir. $t \ll c$ olduğuna göre (84) ve (86) bağıntılarına benzeyen

$$c = a A^{1/3} - \frac{t^2}{12a} A^{-1/3}, \quad R_u = a A^{1/3} + \frac{5t^2}{24a} A^{-1/3}$$

bağıntılarını çıkarınız; burada $a = \left(\frac{4}{3} \pi \rho_0\right)^{-1/3}$ olup hesaplarda t^2/c^2 den daha küçük terimler ihmâl edilecektir. Aynı zamanda $t = 1,25 s$ ve $\rho_0 = 0,17 fm^{-3}$ olduğunu gösteriniz. (84) bağıntısı ile karşılaştırma yaparak $s = 2,84 fm$ olduğunu gösteriniz.

II.2. (11) ve (35) denklemlerini kullanarak $^{176}_{71}Lu$ ve $^{119}_{50}Sn$ un büyük eksenlerinin küçük eksenlerine oranlarını hesaplayınız.

II.3. Döteronun izospininin sıfır olduğunu gösteriniz.

II.4. Üç özdeş parçacığa ait antisimetrik dalga fonksiyonun

$$\psi = \Phi(1, 2, 3) + \Phi(2, 3, 1) + \Phi(3, 1, 2) - \Phi(1, 3, 2) - \Phi(3, 2, 1) - \Phi(2, 1, 3)$$

şeklinde olduğunu ispat ediniz.

II.5. (62) dalga fonksiyonu, spini (θ, φ) küresel koordinatları ile verilen doğrultuda olan bir parçacığı tasvir ettiğine göre

$$a = C \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{1}{2} i \varphi}, \quad b = C \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{1}{2} i \varphi}$$

olduğunu gösteriniz; burada C keyfî bir sâbittir. (Yol gösterme: $a\alpha + b\beta$ yı $\pm \frac{1}{2} \hbar$ özdeğerlerine tekabül eden bir özfonksiyon olarak kabul eden spin operatörünü bulunuz.)

III. BÖLÜM

ALÇAK ENERJİLERDE İKİ NÜKLEONLU SİSTEMLER

(III.1) KÜTLE MERKEZİ VE LABORATUVAR SİSTEMLERİ

Aralarındaki karşılıklı kuvvetlerin etkisi altında herhangi şekilde hareket eden m_1 ve m_2 gibi iki kütle düşünölsün. m_1 , m_2 ve bunların kütle merkezinin, lâboratuvara tesbit edilmiş koordinat sistemine (lâb. sistemi) nazaran koordinatları: (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) ve (X, Y, Z) olsun. m_1 in m_2 ye nazaran izâfî koordinatları da (x, y, z) olsun. O hâlde

$$(m_1 + m_2)X = m_1 x_1 + m_2 x_2, \quad x = x_1 - x_2 \quad (1)$$

yazılabilir; diğere koordinatlar için de benzer bağıntılar vardır. Şimdi iki parçacıktan meydana gelen sistem için Schrödinger denklemini yazmaya çalışalım. Eğer parçacıklar arasındaki kuvvetin potansiyeli V ve sistemin toplam enerjisi E ise aranan denklem

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 + \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 - V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \right\} \Psi + E\Psi = 0 \quad (2)$$

şeklindedir, burada

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}$$

dir. Bu denklem (1) bağıntıları kullanılarak X, Y, Z, x, y, z koordinatlarına dönüştürülebilir.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial X}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial x}{\partial x_1} = 1$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}$$

bulunur. Bu bağıntılardan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial X \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial X}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

olduğundan

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial X \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial X \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

sonuçlarına varılır. Buradan

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{m_1 + m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

veyâ

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

bulunur. O hâlde, aşağıdaki sonuca varılır :

$$\frac{1}{m_1} \nabla_1^2 + \frac{1}{m_2} \nabla_2^2 = \frac{1}{m_1 + m_2} \nabla_{(X, Y, Z)}^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \nabla_{(x, y, z)}^2 \quad (4)$$

burada $\nabla_{(X, Y, Z)}^2$ ve $\nabla_{(x, y, z)}^2$ mütekebilen (X, Y, Z) ve (x, y, z) koordinatlarına nazaran kısmî türevleri ihtiva eder. (X, Y, Z) noktasının yer vektörü \mathbf{R} ve (x, y, z) noktasının yer vektörü de \mathbf{r} olsun. Böylece $\nabla_{\mathbf{R}}^2$ ve $\nabla_{\mathbf{r}}^2$ kısaltılmış şekilleri kullanılabilir. (2) denklemindeki potansiyel yalnız $\mathbf{r}(x, y, z)$ izafî koordinatlarının bir fonksiyonu olabilir, yani, $V(x, y, z) = V(\mathbf{r})$ yazılabilir. Böylece (2) denklemi

$$\left\{ \frac{1}{m_1 + m_2} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{2}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \right\} \Psi + \frac{2}{\hbar^2} E \Psi = 0 \quad (5)$$

denklemine indirgenir. Bu denklem, Ψ yi \mathbf{R} ile \mathbf{r} nin birer fonksiyonlarının çarpımı şeklinde yazmakla çözülebilir. Böylece

$$\Psi = \psi(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{R}) \quad (6)$$

yazarak

$$\frac{\psi(\mathbf{r})}{M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 \chi(\mathbf{R}) + \frac{\chi(\mathbf{R})}{m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \psi(\mathbf{r}) - \frac{2}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{R}) + \frac{2}{\hbar^2} E \psi(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{R}) = 0$$

elde edilir, burada

$$M = m_1 + m_2 \quad (7)$$

sistemin toplam kütesidir ve

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8)$$

ifâdesi ile verilen m ye de *sistemin indirgenmiş kütesi* adı verilir. Dalga denkleminin her iki yanını $\psi \chi$ ile bölünür ve M ile çarpılırsa

$$\frac{1}{\chi(\mathbf{R})} \left\{ \nabla_{\mathbf{R}}^2 + \frac{2M}{\hbar^2} E \right\} \chi(\mathbf{R}) = - \frac{1}{\psi(\mathbf{r})} \frac{M}{m} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}). \quad (9)$$

elde edilir. Şimdi (9) denkleminin sol tarafı yalnız \mathbf{R} nin ve sağ tarafı da yalnız \mathbf{r} nin bir fonksiyonudur. Böylece bu denklemin iki tarafı birbirinden müstakildir ve bu sebepten bunlar ortak bir $\frac{2ME_{\text{cm}}}{\hbar^2}$ sabitine eşit olmalıdır. O hâlde (9) denklemini aşağıdaki iki denkleme ayırılır:

$$\nabla_{\mathbf{R}}^2 \chi + \frac{2M}{\hbar^2} (E - E_{\text{cm}}) \chi = 0 \quad (10)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{\text{cm}} - V) \psi = 0. \quad (11)$$

Bu denklemlerin her ikisi de tek parçacığa ait Schrödinger denklemleridir. Birincisi, hiç bir kuvvetin etkisi altında bulunmayan ve kütesi M olan bir parçacığın denklemidir, yâni, kütle merkezinin hareket denklemdir. İkinci denklem, iki parçacığın izafî hareketini verir ve kütesi m olan bir tek parçacığın $V(\mathbf{r})$ potansiyeli altındaki hareket denklemine eşdeğerdir. E_{cm} parçacıkların kütle merkezindeki toplam enerjisi veyâ kütesi m ve izafî koordinatı \mathbf{r} olan parçacığın enerjisidir. O halde, $E - E_{\text{cm}}$ kütle merkezinin hareketinin enerjisidir. (2) denklemini lâboratuvar sistemi için yazılmış olduğundan, E , sistemin lâboratuvar sistemindeki toplam enerjisidir: $E = E_{\text{lab}}$.

(10) denklemini

$$K^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E - E_{cm})$$

alınmak üzere

$$\nabla_R^2 \chi + K^2 \chi = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu, serbest parçacık gibi hareket eden kütle merkezinin hareket denklemdir ve çözümü de

$$\chi = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}$$

şeklinde serbest parçacık dalga fonksiyonudur. Bu fonksiyonu denklemden yerine yazarak

$$\begin{aligned} \nabla_R \chi &= i\mathbf{K} \chi, \quad \nabla_R^2 \chi = -\mathbf{K}^2 \chi \\ (-\mathbf{K}^2 + K^2) \chi &= 0, \quad \mathbf{K}^2 = K^2 \end{aligned}$$

bulunur. \mathbf{K} dalga sayısı vektörü doğrultusundaki birim vektör \mathbf{k} ise, yâni, $\mathbf{K} = K\mathbf{k}$ ise

$$\chi = \exp \left\{ i \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E - E_{cm}) \right]^{1/2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \right\} \quad (12)$$

elde edilir. Kütle merkezinin hareketsiz olduğu koordinat sisteminde (c.m. sistemi), $E - E_{cm} = 0$ ve dolayısıyla $\chi = 1$ olur. Bu sebepten c.m. sisteminde

$$\Psi = \psi(x, y, z) \quad (13)$$

olur; yâni, sistemin küllî dalga fonksiyonu yalnız iki parçacığın izafî koordinatlarının bir fonksiyonudur, ve E_{cm} sistemin c.m. sistemindeki toplam enerjisidir.

Böylece iki cisim problemi c.m. sisteminde indirgenmiş kütleyle sahip bir parçacığa ait tek cisim problemine eşdeğer oluyor. Bu, döteron probleminin hemen çözülebilmesini sağlar ve burada sadece döteronun kütle merkezi sistemindeki toplam enerjisinden ibaret olan iç enerjisini hesaplamak yeter. Diğer yandan, saçılma problemlerinde lâboratuvar sistemi kullanılmalıdır, çünkü gelen parçacığın enerjisi ile hareketin ilk ve son doğrultuları arasındaki saçılma açısının deneysel ölçümleri bu sistemde yapılır. Bu sebepten, m_2 parçacığı lâboratuvar sisteminde başlangıçta hareketsiz duran bir hedef olarak düşünülecek, ve m_1 parçacığı da başlangıçta bütün kinetik enerjiyi taşıyan bombardıman parçacığı olarak düşünülecektir.

(1) denklemleri, bütün koordinatlar göz önüne alındığında

$$(m_1 + m_2) \mathbf{R} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

şekillerinde yazılabilir. m_1 ve m_2 nin ilk hızları \mathbf{u}_1 ve \mathbf{u}_2 , ve son hızları da \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 olsun. O hâlde, $\mathbf{u}_2 = 0$ olur. Kütle merkezinin hızı \mathbf{V} ve m_1 in m_2 ye nazaran ilk izafî hızı \mathbf{u} ve son izafî hızı da \mathbf{v} olsun. O hâlde, son denklemlerde zamana nazaran türev olarak ve momentumun korunumunu düşünerek

$(m_1 + m_2) V = m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$, $v = v_1 - v_2$, $u = u_1$, $u_2 = 0$ elde edilir. Bu denklemlerden, u_1 , u_2 , v_1 , ve v_2 çözümlerse

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} V, & u_2 &= 0 \\ v_1 &= V + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, & v_2 &= V - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

bulunur. Diğer yandan, lâboratuvar sistemindeki toplam kinetik enerji son hızlar cinsinden ($E = E_{lab}$) şöyle yazılabilir:

$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Şimdi son izafî hız cinsinden E_{lab} ı hesaplayalım; (14) ü kullanarak

$$\begin{aligned} E_{lab} &= \frac{1}{2} m_1 \left[V^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V \cdot v \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left[V^2 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V \cdot v \right] \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 + \frac{m_1 m_2 - m_2 m_1}{m_1 + m_2} V \cdot v \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \end{aligned}$$

veyâ (7) ve (8) e göre; ve ilk hızlar cinsinden benzer hesapları tekrarlıyarak

$$E_{lab} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2, \quad E'_{lab} = \frac{1}{2} M V'^2 + \frac{1}{2} m u'^2 \quad (15)$$

bulunur.

Şimdi de kütle merkezi sistemine dönelim. Bu sistemde lâboratuvar sistemindeki bütün hızlar aynı harflerle gösterilsin. Aradaki fark şöyle belirtilsin: lâboratuvar sisteminde m_1 parçacığına ait son hız v_1 idi; buna karşılık olmak üzere kütle merkezi sisteminde m_1 parçacığına ait son hız v_1' olsun. Yalnız $V' = 0$ olduğuna dikkat edilsin. Böylece

$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$; $v' = v = v_1' - v_2'$, $u' = u = u_1' - u_2'$ ve (14) denklemlerine tekabül etmek üzere

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} u, & u_2' &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} u \\ v_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, & v_2' &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu bağıntılardan

$$\frac{1}{m_2} \mathbf{u}'_1 = -\frac{1}{m_1} \mathbf{u}'_2 = \frac{1}{M} \mathbf{u}, \quad \frac{1}{m_2} \mathbf{v}'_1 = -\frac{1}{m_1} \mathbf{v}'_2 = \frac{1}{M} \mathbf{v}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{u'_2}{u'_1} = \frac{v'_2}{v'_1},$$

bağıntıları elde edilir.

Kütle merkezi sisteminde toplam kinetik enerji son hızlar cinsinden şöyle yazılabilir:

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Son izafî hız cinsinden E_{cm} nin ifâdesi

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$$

veyâ ilk hızlar cinsinden benzer hesapları tekrarlıyarak

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m v^2, \quad E'_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m u^2 \quad (16)$$

bulunur. (15) ile (16) yı karşılaştırarak

$$E_{\text{lab}} = \frac{1}{2} M V^2 + E_{\text{cm}}, \quad E'_{\text{lab}} = \frac{1}{2} M V^2 + E'_{\text{cm}} \quad (17)$$

elde edilir. Şimdi bu sonucun daha önce elde ettiğimiz

$$K^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E_{\text{lab}} - E_{\text{cm}})$$

ifâdesi ile aynı olduğunu gösterelim. Bu ifâde serbest parçacık için kuvantum mekaniğinden elde edilmişti. Serbest parçacık için kuvantum mekaniği klâsik mekanikle aynı sonucu verir. Filhakika:

$$E_{\text{lab}} - E_{\text{cm}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2M} = \frac{P^2}{2M} = \frac{1}{2} M V^2$$

elde edilir ki bu da (17) bağıntısından başka bir şey değildir; burada $\hbar K = P = M V$ bağıntılarından faydalanılmıştır.

(14) bağıntılarından

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}$$

olduğuna dikkat ederek

$$\mathbf{v}_1 = \frac{m_1 \mathbf{u} + m_2 \mathbf{v}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (18)$$

sonuçları bulunur. Şimdi saçılmanın elâstik oluşunun sonuçları araştırılacaktır. Elâstik saçılma, lineer momentumun korunumu yanında kinetik enerjinin de korunması ile tarif edilir. O hâlde

$$E_{\text{lab}} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (19)$$

olmalıdır. Kinetik enerji, lâboratuvar sisteminde korunduğu gibi (17) bağıntısından dolayı kütle merkezi sisteminde de korunmalıdır, yâni, $E'_{\text{lab}} = E_{\text{lab}}$ şartı $E'_{\text{cm}} = E_{\text{cm}}$ şartına denktir. O hâlde

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad (20)$$

olmalıdır. Böylece

$$u = v, \quad \text{veyâ} \quad |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$$

sonucu elde edilir. (16) bağıntılarının kullanılması ile elde edilen bu sonuç (15) bağıntılarının kullanılması ile de elde edilebilirdi. Aynı sonuç, biraz uzunca bir hesapla, (18) deki hız ifâdelerinin (19) da yerlerine yazılması ile de bulunabilirdi.

Artık şimdi lâboratuvar ve kütle merkezi sistemlerindeki saçılma açıları arasındaki bağıntı araştırılabilir. Bahis konusu açılar $\sphericalangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = \theta_{\text{lab}}$ ve $\sphericalangle(\mathbf{u}'_1, \mathbf{v}'_1) = \theta_{\text{cm}}$ ile belirlidir. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ olduğundan $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = \theta_{\text{lab}}$, ve $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}$ ya ve $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}$ ye paralel olduğundan $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \theta_{\text{cm}}$ olur. Aynı zamanda, $\mathbf{u}'_2, \mathbf{u}$ ya ve $\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}$ ye paralel olduğundan $\sphericalangle(\mathbf{u}'_2, \mathbf{v}'_2) = \theta_{\text{cm}}$ olur; yâni kütle merkezi sisteminde m_1 ve m_2 parçacıklarının her ikisi de aynı saçılma açısı ile saçılırlar. (18) bağıntılarından birincisinin her iki yanını \mathbf{v} ile sağdan ve \mathbf{u} ile soldan vektörel olarak çarpılırsa

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v} = \frac{m_1}{M} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{M} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

ve bu bağıntılardan da

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v} = \frac{m_1}{m_2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_1) \quad (21)$$

bağıntısı bulunur. Diğer yandan

$$\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

olduğundan,

$$\theta_{\text{lab}} + \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) = \theta_{\text{cm}}$$

veyâ

$$\sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) = \theta_{\text{cm}} - \theta_{\text{lab}}$$

elde edilir. (21) vektörel denkleminin her iki yanının modülünü alarak

$$|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}| \sin \angle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) = \frac{m_1}{m_2} |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}_1| \sin \angle (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)$$

veyâ $|\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|$ olduğunu hatırlayarak

$$\sin (\theta_{\text{cm}} - \theta_{\text{lab}}) = \frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{\text{lab}} \quad (22)$$

sonucu elde edilir. Bu denklemden θ_{lab} aşağıdaki şekilde çözülebilir:

$$\sin \theta_{\text{cm}} \cos \theta_{\text{lab}} - \sin \theta_{\text{lab}} \cos \theta_{\text{cm}} = \frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{\text{lab}}$$

$$\frac{\sin \theta_{\text{cm}}}{\text{tg } \theta_{\text{lab}}} - \cos \theta_{\text{cm}} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{\sin \theta_{\text{cm}}}{\text{tg } \theta_{\text{lab}}} = \cos \theta_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_2}$$

$$\text{tg } \theta_{\text{lab}} = \frac{\sin \theta_{\text{cm}}}{\cos \theta_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_2}} \quad (23)$$

(22) den θ_{cm} de şöyle çözülür :

$$\theta_{\text{cm}} - \theta_{\text{lab}} = \text{arc sin} \left(\frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{\text{lab}} \right)$$

veyâ

$$\theta_{\text{cm}} = \theta_{\text{lab}} + \text{arc sin} \left(\frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{\text{lab}} \right) \quad (24)$$

(19) bağıntısını $u_1 = u = v$ olduğunu hatırlayarak

$$E_{\text{lab}} = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} v^2$$

şeklinde de yazılabilen (16) bağıntısı ile karşılaştırsak

$$E_{\text{cm}} = \frac{m_2}{M} E_{\text{lab}} \quad (25)$$

bağıntısı bulunur.

Şimdi buraya kadar elde edilenlerin özetini verelim.

(24) ve (25) bağıntıları, formüllerde kütle merkezi (c.m.) sisteminden lâboratuvar (lab.) sistemine dönüşümü sağlar :

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{cm}} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{\text{lab}} \\ \theta_{\text{cm}} &= \theta_{\text{lab}} + \arcsin \left(\frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{\text{lab}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(23) ve (25) bağıntıları, formüllerde lab. sisteminden c.m. sistemine dönüşümü sağlar:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{lab}} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} E_{\text{cm}} \\ \text{tg } \theta_{\text{lab}} &= \frac{\sin \theta_{\text{cm}}}{\cos \theta_{\text{cm}} + \frac{m_1}{m_2}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Son olarak, lâboratuvar sisteminde m_2 hedef parçacığı tarafından saçılan m_1 parçacığının hareketinin son doğrultusu ile m_2 parçacığının tepme hareketinin son doğrultusu arasındaki α açısını hesaplayalım. (18) ile verilen v_2 ve v_1 ifâdelerini taraf tarafa vektörel olarak çarpalım :

$$\begin{aligned} v_2 \times v_1 &= \frac{m_1}{M^2} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (m_1 \mathbf{u} + m_2 \mathbf{v}) \\ &= \frac{m_1}{M^2} (m_2 + m_1) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{m_1}{M} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu bağıntıyı evvelce bulunan

$$\mathbf{u} \times v_1 = \frac{m_2}{M} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

bağıntısı ile karşılaştırırsak

$$v_2 \times v_1 = \frac{m_1}{m_2} (\mathbf{u} \times v_1)$$

elde edilir. Bu bağıntı, (18) deki

$$v_2 = \frac{m_1}{M} (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

ve $\mathbf{v} = v_1 - v_2$ bağıntıları yardımı ile de elde edilebilir:

$$v_2 = \frac{m_1}{M} (\mathbf{u} - v_1 + v_2)$$

$$\left(1 - \frac{m_1}{M}\right) v_2 = \frac{m_1}{M} (\mathbf{u} - v_1)$$

$$\frac{m_2}{M} v_2 = \frac{m_1}{M} (\mathbf{u} - v_1)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{m_1}{m_2} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1)$$

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = \frac{m_1}{m_2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_1)$$

bağıntısı tekrar bulunur. Diğer yandan

$$v_2^2 = \frac{m_1^2}{M^2} (u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta_{cm})$$

ve $u = v$ olduğundan

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \frac{m_1^2}{M^2} 2u^2 (1 - \cos \theta_{cm}) \\ &= 4 \frac{m_1^2}{M^2} u^2 \sin^2 \frac{\theta_{cm}}{2} \end{aligned}$$

$$v_2 = 2 \frac{m_1}{M} u \sin \frac{\theta_{cm}}{2}$$

veyâ

$$\frac{v_2}{u} = 2 \frac{m_1}{M} \sin \frac{\theta_{cm}}{2}$$

bulunur. Şimdi yukarıda bulduğumuz

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = \frac{m_1}{m_2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_1)$$

ifâdesinin her iki yanının modülünü alalım:

$$|v_2| \cdot |v_1| \sin \alpha (v_2, v_1) = \frac{m_1}{m_2} |u| \cdot |v_1| \sin \alpha (u, v_1)$$

$$v_2 \sin \alpha = \frac{m_1}{m_2} u \sin \theta_{lab}$$

$$\frac{v_2}{u} \sin \alpha = \frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{lab}$$

$$2 \frac{m_1}{M} \sin \frac{\theta_{cm}}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{lab}$$

$$2 \sin \frac{\theta_{cm}}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{M}{m_2} \sin \theta_{lab}$$

$$= \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \sin \theta_{lab}$$

$$= \sin \theta_{lab} + \frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{lab}$$

elde edilir. Buradan (22) yi kullanarak

$$\begin{aligned}
2 \sin \frac{\theta_{cm}}{2} \cdot \sin \alpha &= \sin \theta_{lab} + \sin (\theta_{cm} - \theta_{lab}) \\
&= 2 \sin \frac{\theta_{cm}}{2} \cdot \cos \left(\frac{\theta_{cm}}{2} - \theta_{lab} \right) \\
\sin \alpha &= \cos \left(\frac{\theta_{cm}}{2} - \theta_{lab} \right)
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. O hâlde

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta_{cm}}{2} - \theta_{lab} \right)$$

olmalıdır. (24) ü kullanarak

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta_{lab} - \frac{1}{2} \left[\theta_{lab} + \arcsin \left(\frac{m_1}{m_1} \sin \theta_{lab} \right) \right]$$

veyâ

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_{lab}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{m_1}{m_2} \sin \theta_{lab} \right) \quad (28)$$

sonucuna varılır. Eğer $m_1 = m_2$ ise daima $\alpha = \frac{\pi}{2}$ elde edilir. O hâlde, bombardıman parçacığının kütlesi hedef parçacığının kütlesine eşitse, parçacıkların son hareket doğrultuları arasındaki açı her zaman 90° dir.

Gene $m_1 = m_2$ özel hâli için, (8), (26) ve (27) bağıntıları

$$m = \frac{1}{2} m_{lab}, \quad E_{cm} = \frac{1}{2} E_{lab}, \quad \theta_{cm} = 2\theta_{lab} \quad (29)$$

şekillerini alırlar.

(II.2) BİR PARÇACIKLAR DEMETİNİN BİR KUVVET MERKEZİ TARAFINDAN SAÇILMASI.

Kolime edilmiş, yâni hareket doğrultuları paralel olan, bir parçacıklar demetinin v izafî hızı ile bir saçıcı merkeze çarptığı düşünölsün. Evvelâ, parçacıkların bu saçıcı merkez (meselâ çekirdek) tarafından hiç absorplanmadığı farz edilecek ve absorpsiyon problemi daha sonra ele alınacaktır. O hâlde, demet halinde gelen parçacıklar saçıcı merkezin etkisi ile çeşitli doğrultularda saçılacaklardır. Bu parçacıklardan her biri (11) ile verilen Schrödinger denklemi uyarınca hareket edecektir. Bu denklemde, saçıcı merkezin kütlesi m_2 ve huzmeye ait parçacıkların her birinin kütlesi m_1 olmak üzere $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ indirgenmiş kütledir. Saçıcı merkezin parçacıklar üzerindeki etkisi $V(r)$ merkezî potansiyeli ile olur, burada $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ olup parçacıklardan herhangi birinin saçıcı merkeze olan uzaklığıdır.

(11) denklemini zamana bağlı olmayan Schrödinger denklemdir. Bu denklemini $\nabla_r^2 \equiv \nabla^2$ kısaltmasını yaparak yazalım ve ayrıca her iki tarafın kompleks eşleniğini alalım:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{cm} - V) \psi = 0,$$

$$\nabla^2 \psi^* + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{cm} - V) \psi^* = 0.$$

Bu denklemlerden birincisini soldan ψ^* ile ve ikincisini de soldan ψ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak

$$\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* = 0 \quad (30)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) \equiv \psi (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \psi)$$

vektörel özdeşliği $\mathbf{A} = \nabla \psi^*$ alınarak

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \psi^*) \equiv \psi \nabla^2 \psi^* + (\nabla \psi^*) \cdot (\nabla \psi)$$

şeklinde yazılabilir ve bu özdeşliğin kompleks eşleniği de

$$\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) \equiv \psi^* \nabla^2 \psi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \psi^*)$$

şeklindedir. Son iki özdeşlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \equiv \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*$$

özdeşliği elde edilir. Bu son özdeşlik yardımı ile (30) bağıntısı

$$\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0 \quad (31)$$

şeklinde veyâ

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (32)$$

vaz edilerek

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (33)$$

şeklinde yazılabilir. \mathbf{j} ye *ihтимâliyet akımı yoğunluğu* vektörü ve (33) denkleminde süreklilik denkleminin adı verilir. Süreklilik denkleminin korunumunu ifâde eder. Zamana bağlı Schrödinger denkleminin süreklilik denkleminin genelleştirilmiş şeklini verir.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi + \frac{V}{i\hbar} \psi$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = +\frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi^* - \frac{V}{i\hbar} \psi^*.$$

Gene bu denklemlerden birincisi soldan ψ^* ile ve ikincisi de ψ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{-\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

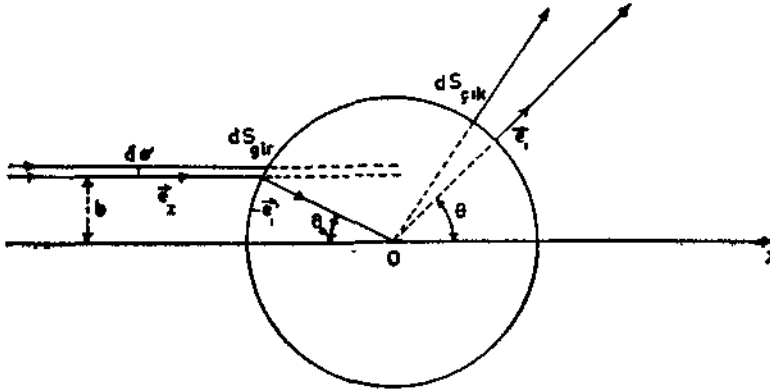
veyâ

$$\frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right]$$

veyâ $\psi^* \psi = |\psi|^2 = P$ yazarak ve (32) yi kullanarak

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (34)$$

genel süreklilik denklemi elde edilir. Zamana bağlı olmayan Schrödinger denklemi için, P ihtimaliyet yoğunluğu da zamana bağlı olmadığından (34) denklemi (33) denkleminde indirgenir.



Şekil : III. 1 — Bir paralel parçacık demetinin saçıcı bir hedef tarafından saçılması.

Sonsuzdan gelen parçacıklar, saçıcı merkez tarafından saçıldıktan sonra gene sonsuza doğru uzaklaşırlar. Saçıcı potansiyel sonsuzda sıfır olduğundan, her iki hâlde de parçacıklar serbest parçacık olarak davranırlar ve böyle parçacıklar için kuvantum mekaniği klâsik mekanikle aynı sonuçları verir, ve bundan önceki kısımda klâsik mekanik yardımı ile çıkarılan bütün bağıntılar doğrudur. Şimdi koordinatların başlangıç noktası olarak O saçıcı merkezi seçilsin; ve O saçıcı merkezini merkez kabul eden ve r yarıçapı istenildiği kadar büyük olan bir küre göz önüne alınsın. Yâni, bahis konusu kürenin yarıçapı sonsuz büyüktür ve $r \rightarrow \infty$ yazılabilir. Sonsuzdan gelen parçacıklar Oz koordinat ekseninin doğrultu ve yönünde hareket etmektedir. O hâlde sonsuzdan gelen parçacıklar, daha henüz sonsuzda iken, yâni daha henüz serbest parçacık hâlinde iken, sonsuz büyük yarıçaplı kürenin içine girerler ve saçıcı merkez tarafından saçıldıktan sonra kürenin dışına çıkarlar. Kürenin dışına çıkan saçılmış parçacıklar artık sonsuza varmışlar ve tekrar serbest parçacık hâlini almışlardır; ve hareket doğrultuları kürenin merkezinden geçer.

Şimdi (33) süreklilik denkleminin her iki yanını bahis konusu kürenin V hacmi üzerine integre edelim:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j} d\tau = 0.$$

Kürenin hacmına teşmil edilmiş olan bu integral, Gauss teoremi vasıtası ile kürenin yüzeyine teşmil edilmiş bir integrale dönüştürülebilir:

$$\iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Bu bağıntı, küre yüzeyinden birim zamanda geçen toplam parçacık sayısının sıfır olduğunu ifade eder. Bu sonuç ise, birim zamanda küre yüzeyinden içeri giren toplam parçacık sayısının çıkan parçacık sayısına eşit olduğunu gösterir; yâni, $S_{\text{giriş}}$ ile giriş yüzeyini ve $S_{\text{çıkış}}$ ile çıkış yüzeyini gösterirsek.

$$\iint_{S_{\text{giriş}}} \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{çıkış}}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

veyâ

$$\iint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}_{\text{giriş}} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}_{\text{çıkış}}$$

elde edilir. Gelen parçacığın yörüngesinin z eksenine dik b uzaklığı çarpışma parametresi adını alır. Diğer yandan, $d\mathbf{S}_{\text{giriş}}$ yüzey elemanından küreye giren parçacıkların $d\mathbf{S}_{\text{çıkış}}$ yüzey elemanından kürenin dışına çıktıklarını farz edelim. Böylece, z eksenini eksen kabul eden b ile $b+db$ yarı çaplı silindirler arasında kalan demetin dik kesiti $d\sigma$ ise, bu $d\sigma$ yüzeyinden geçerek küreye giren parçacıklar $d\mathbf{S}_{\text{giriş}}$ küresel yüzey elemanından geçerler. Farzımız gereğince

$$\mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}_{\text{giriş}} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}_{\text{çıkış}} \quad (35)$$

yazılabilir. $d\sigma$ yüzey elemanının normali \mathbf{e}_z ile $d\mathbf{S}_{\text{giriş}}$ küresel yüzey elemanının normali $-\mathbf{e}_1'$ arasındaki açı θ_0 olsun. Normaller arasındaki açı yüzey elemanları arasındaki açıya eşit olduğundan

$$d\sigma = dS_{\text{giriş}} \cos \theta_0$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\mathbf{j}_0 = j_0 \mathbf{e}_z, \quad d\mathbf{S}_{\text{giriş}} = dS_{\text{giriş}} (-\mathbf{e}_1')$$

ve

$$-\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_z = \cos \theta_0$$

oldüğundan

$$\mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}_{\text{giriş}} = j_0 dS_{\text{giriş}} \cos \theta_0 = j_0 d\sigma$$

sonucuna varılır. Ayrıca

$$dS_{\text{çikış}} = dS_{\text{çikış}} \mathbf{e}_1$$

ve

$$\mathbf{j} = j_r \mathbf{e}_1 + j_\theta \mathbf{e}_2 + j_\varphi \mathbf{e}_3$$

olduğundan

$$\mathbf{j} \cdot dS_{\text{çikış}} = j_r dS_{\text{çikış}}$$

elde edilir. O saçıcı merkezinin $dS_{\text{çikış}}$ küresel yüzey elemanını gördüğü katı açı elemanı $d\Omega$ ise

$$dS_{\text{çikış}} = r^2 d\Omega$$

ve dolayısıyla

$$\mathbf{j} \cdot dS_{\text{çikış}} = r^2 j_r d\Omega$$

bağıntısı elde edilir. Eğer elde edilen bu bağıntılar (35) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$j_0 d\sigma = r^2 j_r d\Omega$$

sonucuna varılır. Bu bağıntı $d\sigma$ yüzey elemanından gelen parçacıkların $d\Omega$ katı açı elemanına saçıldıklarını gösterir, ve $d\sigma$, gelen j_0 ihtimâliyet akımı yoğunluğu ile giden j_r ihtimâliyet akımı yoğunluğu cinsinden ifâde edildiğinden kendisi de bir çeşit ihtimalin ifâdesidir. Ω ile $\Omega + d\Omega$ katı açıları arasına parçacıkların saçılma ihtimâlini ifâde eden $d\sigma$ büyüklüğüne diferansiyel saçılma tesir kesiti adı verilir ve $d\sigma_{s\varphi}$ ile gösterilir. Çok kere çekirdek fizikçileri $\frac{d\sigma_{s\varphi}}{d\Omega}$ ifâdesine de diferansiyel saçılma tesir kesiti adını verirler. O hâlde diferansiyel saçılma tesir kesitinin ifâdesi

$$\frac{d\sigma_{s\varphi}}{d\Omega} = \frac{r^2 j_r}{j_0} \quad (36)$$

şeklindedir.

Şüphesiz diferansiyel saçılma tesir kesiti genellikle saçılma doğrultusunu ifâde eden θ, φ küresel koordinatlarının bir fonksiyonu olacaktır. Fakat gelen parçacıklar paralel hareket doğrultulu bir demet teşkil ediyorlarsa, ve bu ortak hareket doğrultusu ve yönü z ekseninin doğrultu ve yönünde ise; bu takdirde sistem bir dönele simetriye sâhiptir ve gerek diferansiyel saçılma tesir kesiti, gerekse ψ genel dalga fonksiyonu sâdece θ açısına bağlıdır. Böylece, saçılma açısı θ ise, yâni $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \theta$ ise, saçılan parçacıklar eksen z ve tepe katı açısı

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta)$$

olan bir dönele koninin içine saçılırlar; şüphesiz bu koninin içine saçılan parçacıklar yarıçapı b olan silindirin içinde gelen parçacıklardır. (36) daki j_r ve j_0 ihtimâliyet akımı yoğunlukları sonsuzdaki değerlere sâhiptir ve

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{\text{cm}} - V) \psi = 0$$

Schrödinger denkleminin asimptotik çözümlerinden, yâni $r \rightarrow \infty$ için elde edilen çözümlerden hesaplanmalıdır. Sonsuzda $V = 0$ olduğundan, asimptotik çözümler serbest parçacığa ait

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{cm}} \psi = 0$$

denklemini sağlamalıdır. Gelen bir parçacığın momentumu $\mathbf{p}_0 = \hbar \mathbf{k}_0$ dir, ve saçılan bir parçacığın momentumu da $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ dir; burada \mathbf{k}_0 ve \mathbf{k} mütakabilen gelen ve saçılan parçacıkların dalga sayısı vektörleridir. Şüphesiz

$$\angle (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}) = \angle (\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = \theta$$

saçılma açısıdır. Sonsuzdaki serbest parçacıklar klâsik mekaniğe de uyduklarından $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{u}$ ve $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ dir. Saçılmanın elâstik oluşundan geçen kısımda $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ veyâ $u = v$ olduğu ispatlanmıştı; o hâlde, $p_0 = p$ ve $k_0 = k$ dir. Böylece

$$(2m E_{\text{cm}})^{1/2} = p_0 = p$$

veyâ

$$\frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{cm}} = \frac{p^2}{\hbar^2} = k^2$$

olduğundan asimptotik Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (37)$$

şeklinde yazılabilir. Gelen serbest parçacık için düzlem bir dalga olan

$$\psi_0 \cong e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \quad (r \rightarrow \infty)$$

şeklindeki bir asimptotik çözüm (37) denklemini sağladığı gibi, saçılan bir serbest parçacık için de küresel bir dalga olan

$$\psi_{\text{sg}} \cong \frac{1}{r} f(\theta) e^{ikr} \quad (r \rightarrow \infty)$$

şeklindeki bir asimptotik çözüm gene (37) denklemini sağlar. Böylece (37) denkleminin genel çözümü, $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = k_0 r \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_1 = k r \cos \theta = kz$ olduğuna dikkat ederek

$$\psi \cong e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (38)$$

şeklinde olur.

\mathbf{j} nin genel ifâdesini veren (32) formülünde küresel koordinatlardaki gradyent ifâdesi olan

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_3$$

konulursa ve elde edilen sonuç $\mathbf{j} = j_r \mathbf{e}_1 + j_\theta \mathbf{e}_2 + j_\phi \mathbf{e}_3$ ifâdesi ile karşılaştırılırsa

$$j_r = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \right) \quad (39)$$

elde edilir. Bu ifâdede $\psi = \psi_{sc} \cong \frac{1}{r} f(\theta) e^{ikr}$ konulursa :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{ik}{r} f(\theta) e^{ikr} - \frac{1}{r^2} f(\theta) e^{ikr} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r} f(\theta) e^{ikr} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \psi$$

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) |\psi|^2$$

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} = \left[\left(ik - \frac{1}{r} \right) - \left(-ik - \frac{1}{r} \right) \right] |\psi|^2 = 2ik |\psi|^2$$

$$j_r = \frac{\hbar k}{m} |\psi|^2 \quad ; \quad |\psi|^2 = \frac{1}{r^2} |f(\theta)|^2$$

$$r^2 j_r = \frac{\hbar k}{m} |f(\theta)|^2 \quad (40)$$

sonucu elde edilir. Diğer yandan (32) ifâdesinde $\psi = \psi_0 \cong e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$ konulursa :

$$\nabla \psi = i\mathbf{k}_0 \psi \quad ; \quad \psi^* \nabla \psi = i\mathbf{k}_0 |\psi|^2 \quad ; \quad |\psi|^2 = 1$$

$$\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* = (i\mathbf{k}_0) - (-i\mathbf{k}_0) = 2i\mathbf{k}_0$$

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\hbar \mathbf{k}_0}{m}$$

veyâ

$$j_0 = \frac{\hbar k}{m} \quad (41)$$

sonucu elde edilir. (40) ve (41) ifâdeleri (36) da yerlerine yazılırsa

$$\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (42)$$

sonucuna varılır. O hâlde, dalga denkleminin (38) şeklindeki asimptotik çözümü bulunursa, $f(\theta)$ fonksiyonu elde edilebilir ve (42) yardımı ile diferansiyel saçılma tesir kesiti hesaplanabilir. Açılara göre integre edilmiş toplam saçılma tesir kesiti de

$$\sigma_{sc} = \iint |f(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \quad (43)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir.

Buraya kadar yapılan bütün tesir kesiti hesapları kütle merkezi sistemine göre yazılmış (11) Schrödinger denkleminde dayandığından, elde edilen sonuçlar sâdece c.m. sistemi için geçerlidir. Şimdi $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab}$ ifâdesini $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$ cinsinden yazmaya çalışalım. lab. ve c.m. sistemlerindeki mütakabil katı açılara giden parçacık sayıları aynı olduğundan

$$d\sigma_{lab} = d\sigma_{cm}$$

veyâ

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} d\Omega_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} d\Omega_{cm}$$

veyâ

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} 2\pi \sin\theta_{lab} d\theta_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} 2\pi \sin\theta_{cm} d\theta_{cm}$$

yazılabilir. Diğer yandan, $-d(\cos\theta_{lab}) = \sin\theta_{lab} d\theta_{lab}$ ve $-d(\cos\theta_{cm}) = \sin\theta_{cm} d\theta_{cm}$ olduğundan

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \frac{d(\cos\theta_{lab})}{d(\cos\theta_{cm})} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$$

elde edilir. Diğer yandan, (22) bağıntısından

$$\sin\theta_{cm} \cos\theta_{lab} - \sin\theta_{lab} \cos\theta_{cm} = \frac{m_1}{m_2} \sin\theta_{lab}$$

yazılabilir. $x = \cos\theta_{cm}$ ve $y = \cos\theta_{lab}$ vaz etmek suretiyle bu son iki bağıntı

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$$

ve

$$y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{1-y^2}$$

şekillerinde yazılabilir. Son bağıntıdan

$$y\sqrt{1-x^2} = \left(x + \frac{m_1}{m_2}\right) \sqrt{1-y^2}$$

$$y^2(1-x^2) = \left(x + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 (1-y^2)$$

$$\left[1 - x^2 + \left(x + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right] y^2 = \left(x + \frac{m_1}{m_2} \right)^2$$

$$\left(2 \frac{m_1}{m_2} x + 1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \right) y^2 = \left(x + \frac{m_1}{m_2} \right)^2$$

$$y = \frac{\left| x + \frac{m_1}{m_2} \right|}{\left(2 \frac{m_1}{m_2} x + 1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \right)^{1/2}}$$

$$y = \frac{|m_2 x + m_1|}{(2m_1 m_2 x + m_1^2 + m_2^2)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_2}{(2m_1 m_2 x + m_1^2 + m_2^2)^{1/2}} - \frac{m_1 m_2 (m_2 x + m_1)}{(2m_1 m_2 x + m_1^2 + m_2^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_2 (2m_1 m_2 x + m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2 x - m_1^2)}{(2m_1 m_2 x + m_1^2 + m_2^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_2^2 |m_2 + m_1 x|}{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 x)^{3/2}}$$

elde edilir. Yerine yazarak

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \frac{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta_{\text{cm}})^{3/2}}{m_2^2 |m_2 + m_1 \cos \theta_{\text{cm}}|} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cm}} \quad (44)$$

sonucu bulunur. $m_1 = m_2$ için (29) u kullanarak

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = 4 \cos \theta_{\text{lab}} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cm}} \quad (45)$$

elde edilir.

c.m. sistemindeki (11) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{\text{cm}} - V) \psi = 0,$$

$\frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{cm}} = k^2$ ve $\frac{2m}{\hbar^2} V(r) \equiv U(r)$ vaz ederek

$$\nabla^2 \psi + [k^2 - U(r)] \psi = 0 \quad (46)$$

şeklinde yazılabilir. Küresel koordinatlarda bu denklem

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 r} (r\psi) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (r\psi) \right) + (k^2 - U) r\psi = 0$$

şeklini alır. Bu denklemin aksel simetriye sahip, yani $\psi(r, \theta)$ şeklindeki en genel çözümü Legendre polinomları cinsinden

$$r\psi = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (47)$$

şeklinde olur. Bu çözüm, Legendre polinomlarının

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_l}{d\theta} \right) + l(l+1) P_l = 0$$

denklemini sağladığı göz önünde tutularak, Schrödinger denklemini özdeş olarak sağlar:

$$\sum_l \left[\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l + (k^2 - U) u_l \right] P_l(\cos \theta) = 0$$

Bu ifade Legendre polinomlarına nazaran bir özdeşlik olduğundan, Legendre polinomlarının katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır:

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0. \quad (48)$$

Şimdi bu denklemin $U(r) = 0$ için çözümlerini bularak (46) denkleminin $e^{ikr \cos \theta}$ şeklindeki çözümünün (47) açılımını elde etmeye çalışalım. Bahis konusu u_l fonksiyonları,

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0 \quad (i)$$

denklemini sağladığından, bu denklemin özel çözümleri olan (kr) kere küresel Bessel ve küresel Neumann fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir:

$$u_l = A_l kr j_l(kr) + B_l kr n_l(kr) \quad (ii)$$

Diğer yandan, (47) ye benzer şekilde

$$r e^{ikr \cos \theta} = \sum_l u_l(r) P_l(\cos \theta)$$

veyâ

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_n \frac{1}{r} u_n(r) P_n(\cos \theta)$$

yazılabilir. $x \equiv \cos \theta$ vaz edilirse

$$e^{ikrx} = \frac{1}{r} \sum_n u_n(r) P_n(x) \quad (\text{iii})$$

bulunur. Bu denklemin her iki yanını $P_l(x)$ ile çarpılıp -1 den 1 e kadar integre edilirse

$$\int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx = \frac{1}{r} \sum_n u_n(r) \int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx \quad (\text{iv})$$

bulunur. Diğer yandan, Legendre polinomlarının diklik bağıntılarını yazalım:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{nl} \quad (\text{v})$$

Özel olarak $P_0(x) = 1$ olduğunu hatırlayarak

$$\int_{-1}^1 P_l(x) dx = 2\delta_{l0} \quad (\text{vi})$$

bulunur. (v) in yardımı ile (iv)

$$\int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{1}{r} u_l(r) \quad (\text{vii})$$

şeklini alır. (ii) yi (vii) ye vaz ederek

$$\int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} k [A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)] \quad (\text{viii})$$

bulunur. Bu son bağıntının her iki yanının $r \rightarrow 0$ için limitini alalım:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} k \lim_{r \rightarrow 0} [A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)]$$

veyâ (vi) kullanılarak

$$2\delta_{l0} = \frac{2}{2l+1} k \lim_{r \rightarrow 0} [A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)]$$

veyâ

$$k \lim_{r \rightarrow 0} [A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)] = \delta_{l0} \quad (\text{ix})$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\lim_{r \rightarrow 0} j_l(kr) = \delta_{l0} \quad \text{ve} \quad \lim_{r \rightarrow 0} n_l(kr) \rightarrow \pm \infty$$

olduğundan $B_l = 0$ olması gerekir ve böylece

$$k A_l \delta_{l0} = \delta_{l0} \quad (\text{x})$$

bulunur. Bu bağıntı, $kA_0 = 1$ olduğunu ifade eder, fakat $l \neq 0$ için A_l yi vermez. Şimdi, $B_l = 0$ olduğuna göre (viii) bağıntısını yazalım:

$$\frac{2}{2l+1} k A_l j_l(kr) = \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx \quad (\text{xi})$$

Sağ tarafı kısmî integrasyonla integre edelim:

$$\int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx = \frac{1}{ikr} \left[e^{ikrx} P_l(x) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l'(x) dx$$

Eğer

$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l = e^{il\pi}, \quad \text{ve} \quad i^l = e^{\frac{1}{2}il\pi}$$

olduğu göz önüne alınırsa ve sağ taraftaki ikinci terimin $\frac{1}{(kr)^2}$ mertebesinde olduğuna dikkat edilirse,

$$\int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx = \frac{1}{ikr} [e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}] - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l'(x) dx$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx \rightarrow \frac{1}{ikr} [e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{ikr} e^{\frac{1}{2} i l \pi} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2} l \pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2} l \pi)} \right] = \\ &= \frac{2}{kr} i^l \sin \left(kr - \frac{l \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

bulunur. O halde (xi) den

$$\frac{2}{2l+1} k A_l \lim_{r \rightarrow \infty} j_l(kr) \rightarrow \frac{2}{kr} i^l \sin \left(kr - \frac{l \pi}{2} \right) \quad (\text{xii})$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} j_l(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l \pi}{2} \right) \quad (\text{xiii})$$

olduğundan

$$k A_l = i^l (2l+1) \quad (\text{xiv})$$

sonucuna varılır, bu sonuç $k A_0 = 1$ şartını da sağlar. O hâlde (ii)

$$u_l = (2l+1) i^l r j_l(kr) \quad (\text{xv})$$

ve (iii) te

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (49)$$

şeklini alır; bu da aranan açılımdır.

(47) veyâ (49) şeklindeki bir açılıma **kısmî dalgalar cinsinden açılım** adı verilir. Kısmî dalgalar metodu ile tesir kesiti hesabı için, (46) denkleminin (38) tipinde bir asimtotik çözümünün veyâ kısmî dalgalardan her birini veren (48) denkleminin bir asimtotik çözümünün mevcut olması gerekir. Şüphesiz $r \rightarrow \infty$ için, (48) denklemindeki $U(r)$ potansiyeli ile $\frac{l(l+1)}{r^2}$ merkezkaç potansiyeli ayrı ayrı sifıra giderler. Böylece (48) denkleminin asimtotik çözümü $A_l \sin(kr + \Delta_l)$ şeklinde olacaktır, burada Δ_l potansiyellere ve l yörünge açılal momentum kuvantum sayısına bağlı bir sabittir. Eğer merkezkaç potansiyeli $r \rightarrow \infty$ için $U(r)$ potansiyelinden daha çabuk sifıra yaklaşırsa asimtotik olarak kısmî dalga ortada kalmaz. Bu sebepten, kısmî dalga metodunun geçerliliği için $U(r)$ potansiyeli, merkezkaç potansiyeli ile aynı hızda veyâ daha çabuk sifıra yaklaşmalıdır. $r^2 \frac{l(l+1)}{r^2}$ sifıra yaklaşmaz, fakat $r \frac{l(l+1)}{r^2}$ sifıra yaklaşır. O hâlde, $r \rightarrow \infty$ için $r U(r) \rightarrow 0$ olmalıdır. Coulomb potansiyeli bu şartı sağlamadığından, bu potansiyele ait saçılma tesir kesiti kısmî dalgalar metodu ile

hesaplanamaz; ve Coulomb potansiyelinin menzilinün sonsuz olduğu söylenir. Fakat çekirdek potansiyeli çok kısa bir menzile sahip olduğundan kısmî dalgalar metodu ile incelenebilir ve çekirdeğin hemen dışında $r U(r) \rightarrow 0$ şartı sağlanır.

Şimdi (38) deki e^{ikz} teriminin asimtotik ifâdesini yazalım :

$$j_l(kr) \cong \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi \right) \cong \frac{1}{2ikr} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2} l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2} l\pi)} \right]$$

veyâ

$$j_l(kr) \cong \frac{1}{2ikr} e^{-\frac{1}{2} il\pi} [e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}]$$

olduğundan, (49) bağıntısından, $i^l = e^{\frac{1}{2} il\pi}$ olduğunu hatırlıyarak,

$$e^{ikz} \cong \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (50)$$

elde edilir. Daha önceki bağıntılardan yararlanarak (50) ifâdesi

$$r e^{ikz} \cong \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi \right) P_l(\cos \theta) \quad (51)$$

şeklinde de yazılabilirdi. (51) bağıntısı gerçekten (48) denkleminin $A_l \sin(kr + \Delta_l)$ şeklindeki bir çözümünü ihtiva eder; burada $A_l = \frac{1}{k} (2l+1) i^l$ ((xiv) bağıntısı) ve $\Delta_l = -\frac{1}{2} l\pi$ dir. e^{ikz} gelen dalgayı, yani, saçılmadan önceki asimptotik dalgayı temsil ettiğinden Δ_l faz kayması $U(r)$ potansiyeline bağlı olmayıp sadece merkezkaç potansiyeline bağlıdır.

Şimdi de (38) deki toplam ψ fonksiyonunun asimtotik ifâdesini yazmaya çalışalım. Bu ifâde, $U(r)$ potansiyeli tarafından saçıldıktan sonraki toplam dalganın asimptotik şeklini temsil ettiğinden Δ_l faz kayması hem merkezkaç potansiyeline, hem de $U(r)$ potansiyeline bağlı olmalıdır. Böylece $\Delta_l = -\frac{1}{2} l\pi + \delta_l$ yazılabilir; burada δ_l , $U(r)$ potansiyelinin sebep olduğu ilâve faz kaymasıdır. O halde (51) e benzer şekilde

$$\psi \cong \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} B_l (2l+1) i^l \sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right) P_l(\cos \theta) \quad (52)$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right) = \frac{1}{2i} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l)} \right]$$

veyâ

$$\sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right) = \frac{1}{2i} e^{-\frac{1}{2} il\pi} e^{-i\delta_l} [e^{2i\delta_l} e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}]$$

olduğundan, (50) ye benzer şekilde

$$\psi \cong \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} B_l (2l+1) e^{-i\delta_l} [e^{2i\delta_l} e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (53)$$

sonucuna varılır. (38) bağıntısına göre

$$\psi_{sc} \cong \frac{1}{r} f(\theta) e^{ikr} \cong \psi - e^{ikz}$$

olduğundan, (50) ve (53) bağıntıları yardımı ile

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \cong \frac{1}{2ikr} \left\{ e^{ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [B_l e^{i\delta_l} - 1] P_l(\cos \theta) - e^{-ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{il\pi} \right. \\ \left. \times [B_l e^{-i\delta_l} - 1] P_l(\cos \theta) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir; bu özdeşliğin sağlanabilmesi için $B_l e^{-i\delta_l} - 1 = 0$ veyâ $B_l = e^{i\delta_l}$ olmalıdır. Böylece, son bağıntıdan

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \quad (54)$$

ve (53) bağıntısından da

$$\psi \cong \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [e^{2i\delta_l} e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (55)$$

sonuçları bulunur. Şimdi, δ_l faz kaymasından itibaren

$$\eta_l = e^{2i\delta_l} \quad (56)$$

fonksiyonunu tarif edelim. Bu fonksiyona çarpışma fonksiyonu adı verilir. (54) ve (55) bağıntıları η_l cinsinden

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\eta_l - 1) P_l(\cos \theta) \quad (54')$$

$$\psi \cong \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\eta_l e^{ikr} - e^{il\pi} e^{-ikr}) P_l(\cos \theta) \quad (55')$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi

$$F(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \epsilon_l P_l(\cos \theta) \quad (57)$$

şeklinde bir ifade verildiğine göre

$$\int_0^{\pi} |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta$$

integralini hesaplayalım:

$$|F(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2n+1)(2l+1) \epsilon_n^* \epsilon_l P_n(\cos \theta) P_l(\cos \theta).$$

$\cos \theta = x$ koyarak ve $\sin \theta d\theta = -dx$ olduğuna dikkat ederek

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta &= \int_{-1}^1 |F|^2 dx = \\ &= \frac{1}{4k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2n+1)(2l+1) \epsilon_n^* \epsilon_l \int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx \\ &= \frac{1}{4k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2n+1)(2l+1) \epsilon_n^* \epsilon_l \frac{2}{2l+1} \delta_{nl} \\ &= \frac{1}{4k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 |\epsilon_l|^2 \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$

veyâ

$$\int_0^{\pi} |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\epsilon_l|^2 \quad (58)$$

sonucu elde edilir.

(54') ifadesi (57) ile karşılaştırılırsa, $\epsilon_l \equiv \eta_l - 1$ alınmak suretiyle $F(\theta) = f(\theta)$ elde edilir. (43) ifadesi de (58) ile karşılaştırılırsa

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\eta_l - 1|^2 \quad (59)$$

sonucu elde edilir. Diğer yandan, (56) yı kullanarak

$$|\eta_l - 1|^2 = 4 \sin^2 \delta_l$$

yazılabildiğinden, (59) ifadesi

$$\sigma_{sc} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (59')$$

şeklinde de yazılabilir.

Saçılma tesir kesitleri, δ_l veyâ η_l büyüklükleri saçıcı potansiyel cinsinden tayin edildikten sonra belli olduğundan; bu büyüklüklerin sonlu menzile sahip bir potansiyel için sonlu sayıda oldukları gösterilmelidir. Gelen huzme içerisindeki bir parçacığın lineer momentumu $mv = p$ ve çarpışma parametresi b ise, bu parçacığın klâsik açısal momentumu pb olur; eğer bu, açısal momentumun kuvantum mekaniğindeki ifâdesi ile eşitlenirse

$$pb = \hbar [l(l+1)]^{1/2} \quad (60)$$

bağıntısı elde edilir. Eğer potansiyelin sonlu olan menzili R ise, parçacığın potansiyelle etkileşmesi yalnız $b < R$ şartı sağlandığı zaman olur. O halde, $p = \hbar k$ olduğuna dikkat ederek

$$[l(l+1)]^{1/2} < kR \quad (61)$$

elde edilir. Böylece, verilmiş bir $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ enerjisine, yâni, verilmiş k ya sâhip gelen parçacıklar için, $[l(l+1)]^{1/2} > kR$ ise l -ninci kısmî dalga saçıcı potansiyelden etkilenmez; ve bu l için δ_l ihmâl edilebilir. Yarı-klâsik yoldan elde edilen bu sonuç kuvantum mekaniği ile de elde edilebilir.

(III.3) BİR PARÇACIKLAR DEMETİNİN BİR ÇEKİRDEK TARAFINDAN ABSORPSİYONU, REAKSİYON TESİR KESİTİ

Buraya kadar, bir çekirdek (veyâ bir saçıcı merkez) üzerine düşen parçacıkların çekirdek tarafından hiç absorplanmadan bir kısmının sadece saçıldığı farz edildi. Daha genel bir hâlde, çekirdek üzerine düşen parçacıkların bir kısmı hiç bir etkileşmeye uğramadan geçer, bir kısmı saçılır ve bir kısmı da çekirdek tarafından absorplanır. Çekirdek tarafından absorplanan parçacık bir çekirdek reaksiyonu meydana getirir ve bu sebepten absorpsiyon tesir kesitine reaksiyon

tesir kesiti de denir ve σ_{re} ile gösterilir. İlerideki bir bölümde çekirdek reaksiyonları ayrıntıları ile incelenecektir. Fakat bu kısımda reaksiyon tesir kesitinin genel ifâdesi kısmî dalgalar metodu ile bulunacaktır. Diferansiyel reaksiyon tesir kesiti (36) bağıntısına benzer şekilde

$$\frac{d\sigma_{re}}{d\Omega} = - \frac{r^2 j_r}{j_0} \quad (62)$$

şeklinde yazılabilir; buradaki eksi işâreti j_r ihtimaliyet akımı yoğunluğunu pozitif yapmak için konulmuştur. Reaksiyon tesir kesiti gelen parçacık huzmesindeki çekirdek tarafından yutulan parçacıkların j_r ihtimaliyet akımı yoğunluğu ile bellidir. Böylece j_r , sonsuz büyük yarı çaplı kürenin içine girip de bir daha bu kürenin dışına çıkmayan parçacıkların ihtimal akımı yoğunluğudur, ve işâreti de eksi- dir. Bu sebepten, j_r , (55') ile verilen toplam dalga fonksiyonundan hesaplanmalıdır. Eğer

$$f_1(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \eta_l P_l(\cos \theta) \quad (63)$$

ve

$$f_2(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\pi} P_l(\cos \theta) \quad (64)$$

vaz edilirse (55')

$$\psi \cong f_1(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} - f_2(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (65)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi ψ nin bu ifâdesi (39) da yerine yazılıp j_r hesaplanmalıdır. Bu hesaplar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{ik}{r} f_1(\theta) e^{ikr} - \frac{1}{r^2} f_1(\theta) e^{ikr} + \frac{ik}{r} f_2(\theta) e^{-ikr} + \frac{1}{r^2} f_2(\theta) e^{-ikr} \\ &= \frac{1}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) f_1(\theta) e^{+ikr} + \frac{1}{r} \left(ik + \frac{1}{r} \right) f_2(\theta) e^{-ikr} \\ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{1}{r^2} [f_1^*(\theta) e^{-ikr} - f_2^*(\theta) e^{ikr}] \left[\left(ik - \frac{1}{r} \right) f_1(\theta) e^{ikr} + \right. \\ &\quad \left. + \left(ik + \frac{1}{r} \right) f_2(\theta) e^{-ikr} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{1}{r^2} \left[\left(ik - \frac{1}{r} \right) |f_1(\theta)|^2 - \left(ik + \frac{1}{r} \right) |f_2(\theta)|^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(ik + \frac{1}{r} \right) f_1^*(\theta) f_2(\theta) e^{-2ikr} - \left(ik - \frac{1}{r} \right) f_1(\theta) f_2^*(\theta) e^{2ikr} \right] \\
\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} &= \frac{1}{r^2} \left[- \left(ik + \frac{1}{r} \right) |f_1(\theta)|^2 + \left(ik - \frac{1}{r} \right) |f_2(\theta)|^2 - \left(ik - \frac{1}{r} \right) f_1(\theta) f_2^*(\theta) e^{2ikr} \right. \\
&\quad \left. + \left(ik + \frac{1}{r} \right) f_1^*(\theta) f_2(\theta) e^{-2ikr} \right] \\
\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} &= \frac{1}{r^2} [2ik |f_1(\theta)|^2 - 2ik |f_2(\theta)|^2] \\
&= \frac{2ik}{r^2} (|f_1(\theta)|^2 - |f_2(\theta)|^2) \\
-r^2 j_r &= \frac{\hbar k}{m} (|f_2(\theta)|^2 - |f_1(\theta)|^2) \tag{66}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. (66) ve (41) ifâdeleri (62) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{d\sigma_{re}}{d\Omega} = |f_2(\theta)|^2 - |f_1(\theta)|^2 \tag{67}$$

sonucuna varılır. Açılara göre integre edilmiş toplam reaksiyon tesir kesiti de, (43) e benzer şekilde

$$\sigma_{re} = 2\pi \int_0^\pi (|f_2(\theta)|^2 - |f_1(\theta)|^2) \sin \theta d\theta \tag{68}$$

veyâ

$$\sigma_{re} = 2\pi \left\{ \int_0^\pi |f_2(\theta)|^2 \sin \theta d\theta - \int_0^\pi |f_1(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \right\} \tag{68'}$$

bağıntısı ile hesaplanabilir.

(64) ifâdesi (57) ile karşılaştırılırsa, $\epsilon_l = e^{i\pi}$ alınmak suretiyle $F(\theta) = f_2(\theta)$ elde edilir. (68') ifâdesi de (58) ile karşılaştırılarak

$$\int_0^\pi |f_2(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)$$

bulunur. Benzer şekilde, (63) ifadesi (57) ile karşılaştırılırsa, $\epsilon_l = \eta_l$ alınmak suretiyle $F(\theta) = f_1(\theta)$ elde edilir. (68') ifâdesi de (58) ile karşılaştırılarak

$$\int_0^\pi |f_1(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\eta_l|^2$$

bulunur. Bulunan bu ifâdeler (68') de yerlerine yazılırsa

$$\sigma_{re} = 2\pi \left\{ \frac{1}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) - \frac{1}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\eta_l|^2 \right\}$$

veyâ

$$\sigma_{re} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) \quad (69)$$

sonucuna varılır. (56) bağıntısına göre, eğer δ_l faz kayması reelse $|\eta_l| = 1$ ve $\sigma_{re} = 0$ olur, yâni sadece saf elâstik saçılma vardır. Bu bölümün bundan sonraki kısımlarında sadece bu hal incelenecektir. Çekirdek reaksiyonlarının ayrınılıları ile inceleneceği ilerideki bir bölümde $\delta_l = \lambda_l + i\mu_l$ şeklinde kompleks bir faz kayması alınacaktır. Bu takdirde, $\eta_l = e^{2i\lambda_l} e^{-2\mu_l}$ ve $|\eta_l| = e^{-2\mu_l}$ olacağından, $\sigma_{re} > 0$ elde edilir.

(III.4) DÖTERONUN TEMEL HALİ

Döteronun temel hali incelenirken aşağıdaki kabuller yapılacaktır:

(a) Döteron, kütleleri hemen hemen eşit ve M değerine sâhip iki parçacıktan ibârettir, böylece sistemin indirgenmiş kütlesi $M/2$ dir.

(b) Parçacıklar arasındaki kuvvet kısa menzillidir ve çekicidir, ve iki parçacığı birleştiren doğru çizginin boyunca tesir eder, yani, bir merkezî kuvvettir. Bu kabul tamamen doğru değildir, çünkü merkezî bir kuvvet döteronun kuvadrupol momentini açıklayamaz. Fakat döteronun kuvadrupol momenti çok küçük olduğundan, bu kabul yaklaşık olarak doğrudur.

(c) Parçacıklar arasındaki kuvvet bir mevziî (lokal) potansiyelden türetilir. Yâni, kuvvet potansiyeli hızları ve dolayısıyla gradyent operatörlerini ihtiva etmez.

Kuvvet her yerde çekici olduğundan, potansiyel negatiftir ve r azaldıkça, azalır; ve kuvvet kısa menzilli olduğundan, $r > R$ için sıfır olur ve R burada 3 fm mertebesindedir. Kısım 9 da küçük enerjiler için sonuçların potansiyelin kesin biçimine bağlı olmadığı gösterilecektir ve böylece bir kare kuyu potansiyeli kullanılabilir. Kare kuyu potansiyeli hesaplar için en kolayı olduğu için tercih edilir, ve

$$r < R \text{ için: } V = -V_0 \quad ; \quad r > R \text{ için: } V = 0 \quad (70)$$

ile tarif edilir. Burada V_0 a potansiyelin derinliği ve R ye de potansiyelin menzili adı verilir. Kısım II-3 ün sonunda döteronun toplam açısai momentumunun $l = 1$ olduğu gösterilmişti. Döteronun toplam açısai momentumu sadece kendisini meydana getiren iki nükleonun spinlerinden ileri geldiğinden, döteronun temel halinde nükleonlar sıfır yörünge açısai momentumuna sahiptir.

Diğer yandan, (11) Schrödinger denklemi küresel koordinatlarda yazılır ve $\psi(r) = \frac{1}{r} u(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ konulursa $V = V(r)$ şeklindeki bir merkezî potansiyel için, bu denklem

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + l(l+1) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

şeklindeki bir açısai denklem ile

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0$$

şeklinde bir radyal denkleme ayrılır. Döterondaki nükleonlardan biri için $l = 0$ ve $m = \frac{1}{2} M$ olduğundan, radyal denklem

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} (E - V) u = 0 \quad (71)$$

şeklini alır. Potansiyelin (70) ile tarif edilen şekline bakarak

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için: } \frac{d^2 u}{dr^2} + \kappa^2 u = 0 \\ r > R \text{ için: } \frac{d^2 u}{dr^2} - \alpha^2 u = 0 \end{array} \right\} \quad (72)$$

yazılabilir, burada $E = -B$ veya $-E = B > 0$ bağ enerjisi olmak üzere

$$\alpha^2 = \frac{M}{\hbar^2} B, \quad \kappa^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 - B)$$

alınmıştır. Şüphesiz sistemin toplam E enerjisi döteronun B bağ enerjisinin eksi işaretlisine eşittir. B nin deneysel değeri (KNOWLES, 1962)

$$B = 2,2245 \pm 0,0002 \text{ MeV} \quad (73)$$

dir. (72) denklemlerinin genel çözümleri şöyledir:

$$r < R \text{ için: } u = A_1 \sin \kappa r + B_1 \cos \kappa r; \quad r > R \text{ için: } u = A_2 e^{-\alpha r} + B_2 e^{\alpha r}$$

dir.

Şimdi bu çözümler için fiziksel sınır şartlarını arayarak A_1, A_2, B_1, B_2 integrasyon sâbitlerini tayin edelim. $r < R$ için ve dolayısıyla $r = 0$ için: $\psi = \frac{1}{r} u Y_{lm}$ nin sonlu olabilmesi için $u = 0$ olmalıdır, bu da $B_1 = 0$ verir. $r > R$ için ve dolayısıyla $r \rightarrow \infty$ için ψ nin sonlu olabilmesi için de $B_2 = 0$ elde edilir. O halde, (72) nin çözümleri

$$r < R \text{ için : } u = A_1 \sin \kappa r, \quad r > R \text{ için : } u = A_2 e^{-\alpha r} \quad (74)$$

şeklindedir; burada A_1 ve A_2 normalizasyon sâbitleridir. $r = R$ için u ve $\frac{du}{dr}$ sürekli olmalıdır, böylece A_1 ile A_2 arasında

$$\left. \begin{aligned} A_1 \sin \kappa R &= A_2 e^{-\alpha R} \\ \kappa A_1 \cos \kappa R &= -A_2 \alpha e^{-\alpha R} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar taraf tarafa bölünürse A_1 ile A_2 yok edilebilir ve κ ile R arasında, yani, potansiyelin derinliği ile menzili arasında B bağ enerjisi cinsinden bir bağıntı elde edilir:

$$\kappa \cotg \kappa R = -\alpha \quad (76)$$

A_1 ve A_2 sâbitleri, $|\psi|^2$ nin bütün uzay üzerinden integralinin bire eşit olması şartından elde edilebilir:

$$1 = \int |\psi|^2 d\tau = \iint |Y_{lm}|^2 d\Omega \int_0^\infty \frac{1}{r^2} |u|^2 r^2 dr = \int_0^\infty u^2 dr. \quad (77)$$

(74) ü kullanarak

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty u^2 dr = A_1^2 \int_0^R \sin^2 \kappa r dr + A_2^2 \int_R^\infty e^{-2\alpha r} dr \\ 1 &= \frac{1}{2} A_1^2 \left[\int_0^R dr - \int_0^R \cos 2\kappa r dr \right] - \frac{1}{2\alpha} A_2^2 \left[e^{-2\alpha r} \right]_R^\infty \\ 1 &= \frac{1}{2} A_1^2 \left[R - \frac{1}{2\kappa} (\sin 2\kappa R - 0) \right] + \frac{1}{2\alpha} A_2^2 [e^{-2\alpha R} - 0] \\ &\quad \frac{A_1^2}{2\kappa} (2\kappa R - \sin 2\kappa R) + \frac{A_2^2}{\alpha} e^{-2\alpha R} = 2 \end{aligned} \quad (78)$$

bağıntısı bulunur. Böylece A_1 ile A_2 , (78) ile (75) denklemlerinden birinden çözümlere elde edilebilir: (75) denklemlerini taraf tarafa çarparak

$$\frac{1}{2} A_1^2 \kappa \sin 2\kappa R = - A_2^2 \alpha e^{-2\alpha R}$$

bulunur. Diğer yandan, (76) denklemi

$$\operatorname{tg} \kappa R = - \frac{\kappa}{\alpha}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\sin 2\kappa R \equiv \frac{2\operatorname{tg} \kappa R}{1 + \operatorname{tg}^2 \kappa R}$$

özdeşliğinden faydalanarak

$$\sin 2\kappa R = \frac{-2\alpha \kappa}{\alpha^2 + \kappa^2}$$

bulunur. Böylece ilk bağıntı

$$- \frac{1}{2} A_1^2 \kappa \frac{2\alpha \kappa}{\alpha^2 + \kappa^2} = - A_2^2 \alpha e^{-2\alpha R}$$

veyâ

$$A_1^2 \frac{\kappa^2}{\alpha^2 + \kappa^2} = A_2^2 e^{-2\alpha R}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, (78) bağıntısı da

$$\frac{A_1^2}{2\kappa} \left(2\kappa R + \frac{2\alpha \kappa}{\alpha^2 + \kappa^2} \right) + \frac{A_2^2}{\alpha} e^{-2\alpha R} = 2$$

veyâ

$$A_1^2 \left(\alpha R + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \kappa^2} \right) + A_2^2 e^{-2\alpha R} = 2\alpha$$

şeklinde yazılabilir. Önceki denklem yardımı ile A_2^2 yok edilerek

$$A_1^2 \left(\alpha R + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \kappa^2} \right) + A_1^2 \frac{\kappa^2}{\alpha^2 + \kappa^2} = 2\alpha$$

veyâ

$$\alpha R A_1^2 + A_1^2 = 2\alpha$$

veyâ

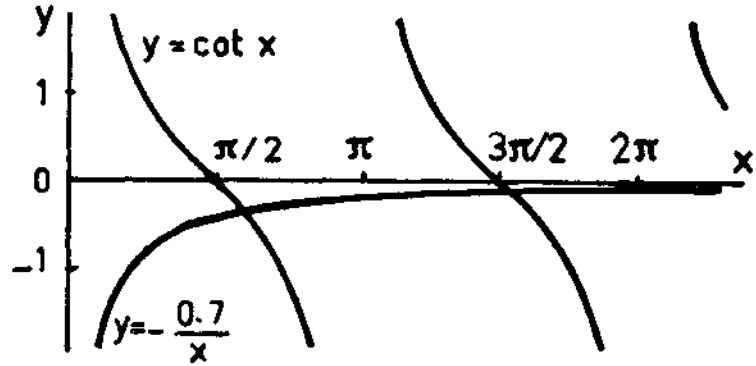
$$A_1^2 = \frac{2\alpha}{1 + \alpha R}, \quad A_2^2 = \frac{2\alpha}{(1 + \alpha R)} \cdot \frac{\kappa^2}{(\alpha^2 + \kappa^2)} e^{2\alpha R} \quad (79)$$

bulunur. Buradan $A_1 \equiv \sqrt{2\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha R \right)$ ve $A_2 \equiv \sqrt{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha R \right)$ bulunur.

(76) denklemi B bağ enerjisini ve aynı zamanda nükleonun uyarılmış enerji seviyelerini verir. Şimdi döteronun bir uyarılmış hâlde bulunamayacağını, yani, yalnız temel halde bulunabileceğini göstereceğiz. Eğer $x = \kappa R$ vaz edilirse (76) denklemi

$$x \cotg x = -\alpha R \quad (80)$$

şeklinde yazılabilir. (73) ü kullanarak $\alpha = 0,232 \text{ fm}^{-1}$ bulunur. $R \leq 3 \text{ fm}$ olduğundan, $\alpha R \leq 0,7$ elde edilir. Eğer $y = \cotg x$ ve $y = -\frac{\alpha R}{x}$ eğrileri şekildeki gibi çizilirse, bu eğrilerin kesişme noktaları (80) denkleminin köklerini verir. Şekilden de görüldüğü gibi bu kökler, $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere yaklaşık olarak $\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$ ye eşittir, fakat bu değerlerden az daha büyüktür. Doğru çözüm $\kappa R \cong \frac{\pi}{2}$ dir; çünkü $\kappa R \cong \frac{3\pi}{2}$ için κR nin değeri π den büyük olacaktı ve



Şekil : III.2 — $x \cotg x = -0,7$ denkleminin çözümünü hakkında.

$\kappa R = \pi$ için dalga fonksiyonu sıfır olduğundan bu da bahis konusu enerji seviyesinin en aşağı seviye olmadığını, yani temel hâl olmadığını gösterir. Böylece temel hâl için şu önemli sonuç elde edilir :

$$\frac{1}{2} \pi \leq \kappa R < \pi \quad (81)$$

Daha iyi bir yaklaşıklık elde etmek için (76) da $\kappa R = \frac{1}{2} \pi + \varepsilon$ koyulmalıdır:

$$\left(\frac{1}{2} \pi + \varepsilon\right) \cotg\left(\frac{1}{2} \pi + \varepsilon\right) = -\alpha R, \quad \varepsilon > 0$$

$$\cotg\left(\frac{1}{2} \pi + \varepsilon\right) = -\text{tg } \varepsilon \text{ olduğundan, eğer } \varepsilon \text{ küçükse } \cotg\left(\frac{1}{2} \pi + \varepsilon\right) \cong -\varepsilon$$

yazılabilir ve $\varepsilon \cong \frac{2\alpha R}{\pi}$ elde edilir. O hâlde,

$$\kappa R \cong \frac{1}{2} \pi + \frac{2\alpha R}{\pi} \quad (81')$$

sonucuna varılır. Böylece $\kappa \cong 0,6 \text{ fm}^{-1}$ elde edilir, ve $\kappa^2 \gg \alpha^2$ sonucuna varılır; yani, potansiyelin derinliği bağ enerjisinden çok daha büyüktür. Eğer $\frac{M}{\hbar^2} V_0 = k_0^2$ vaz edersek

$$\kappa^2 = k_0^2 - \alpha^2$$

yazılabilir; burada B_0 temel hâlin bağ enerjisi olmak üzere $\alpha^2 = \frac{M}{\hbar^2} B_0$ alınmıştır. Eğer birinci uyarılmış S -hâlinin bağ enerjisi B_1 ise, $\beta^2 = \frac{M}{\hbar^2} B_1$ vaz ederek

$$\kappa^2 = k_0^2 - \beta^2$$

yazılabilir. $\kappa^2 \gg \alpha^2$ olduğundan $\kappa \cong k_0$ alınabilir ve (81)

$$\frac{1}{2} \pi \leq k_0 R < \pi \quad (82)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan, birinci uyarılmış S -hâli için

$$R \sqrt{k_0^2 - \beta^2} > \frac{3}{2} \pi$$

veyâ

$$R k_0 > \frac{3}{2} \pi$$

olmalıdır; bu da (82) ile çelişir. O hâlde, hiç bir uyarılmış S -hâli mevcut olamaz.

Daha büyük açısız momentumlara sahip bağlı hâllerin de mevcut olamayacağını göstermek için, herhangi bir açısız momentum için doğru olan radyal denklem yazılmalıdır:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} (E - V) u - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \quad (83)$$

Bu denklem, S -dalgası için yazılmış (71) denkleminden daha geneldir ve (71) de V yerine aşağıdaki gibi bir V_{eff} yazılırsa (83) elde edilir:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{Mr^2} \quad (84)$$

Bu denklemin sağ yanındaki ikinci terim merkezkaç kuvvetin potansiyelidir. Bu potansiyel pozitif olduğundan iticidir, ve l ile birlikte artar; böylece, belirli bir l ye tekabül eden en aşağı bağlı hâlin bağ enerjisi l arttıkça azalır. Böylece, hiç bir bağlı P -hâli olmadığını göstermek yeter.

(83) denklemi, (72) ye benzer şekilde,

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } \frac{d^2u}{dr^2} + \alpha^2 u - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \\ r > R \text{ için : } \frac{d^2u}{dr^2} - \alpha^2 u - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \end{array} \right\} \quad (85)$$

şekillerinde yazılabilir. Eğer l ye tekabül eden hâl ancak bağlı ise, yani B çok küçükse, en küçük kuyu derinliği kâfi gelir; böylece $\alpha = 0$ ve $x = k_0$ olur. Eğer $k_0 r = x$ konulursa

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } \frac{d^2u}{dx^2} + u - \frac{l(l+1)}{x^2} u = 0 \\ r > R \text{ için : } \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} u = 0 \end{array} \right\} \quad (86)$$

elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri şöyledir:

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } u = A_1 x j_l(x) + B_1 x n_l(x) \\ r > R \text{ için : } u = A_2 \frac{1}{x^l} + B_2 x^{l+1} \end{array} \right\}$$

Burada $j_l(x)$ küresel Bessel ve $n_l(x)$ küresel Neumann fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların ilk üçünün açık ifâdeleri aşağıdadır :

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x} & n_0(x) &= -\frac{\cos x}{x} \\ j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} & n_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x & n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x \end{aligned}$$

Bu fonksiyonların $x \rightarrow 0$ için ilk terimleri şöyledir:

$$j_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}$$

$r < R$ için $u(0) = 0$ olması için $B_1 = 0$ ve $r > R$ için de $x \rightarrow \infty$ için u nun sonlu olabilmesi için $B_2 = 0$ olmalıdır. Böylece

$$\left. \begin{array}{l} x < k_0 R \text{ için : } u = A_1 x j_l(x) \\ x > k_0 R \text{ için : } u = \frac{A_2}{x^l} \end{array} \right\} \quad (87)$$

bulunur. $x = k_0 R$ için $x u$ lar ve $\frac{d}{dx} (x^l u)$ lar eşit olmalıdır :

$$x = k_0 R \text{ için : } A_1 x^{l+1} j_l(x) = A_2$$

$$x = k_0 R \text{ için : } \frac{d}{dx} [x^{l+1} j_l(x)] = 0$$

Diğer yandan $l > 0$ için

$$\frac{d}{dx} [x^{l+1} j_l(x)] = x^{l+1} j_{l-1}(x)$$

olduğundan

$$(k_0 R)^{l+1} j_{l-1}(k_0 R) = 0 \quad (88)$$

elde edilir. Özel olarak P -hâli için, yâni $l = 1$ için

$$k_0 R \sin k_0 R = 0. \quad (89)$$

Bu denklemin en küçük pozitif kökü $k_0 R = \pi$ dir. O hâlde, $l \neq 0$ için bir bağlı hâl yalnız $k_0 R > \pi$ olduğu zaman mevcut olabilir. Böylece, döteronun hiç bir uyarılmış hâli mevcut değildir.

Döteronun uyarılmış hâllerinin mevcut olmayışının nitel (kalitatif) sebebi şudur: Döteronun temel hâli bile çok sıkı bir şekilde bağlı değildir. Hâlen elimizdeki rakkamlar, yaklaşık olarak 15 MeV den daha büyük bir V_0 kuyu derinliğine götürür. İleride [(140) bağıntıları] gerçek değerlerin $V_0 = 34,4$ MeV ve $R = 2,07$ fm olduğu görülecektir; yani, $2,2245 \ll 34,4$ veya $B \ll V_0$ veya $a^2 \ll x^2$ yaklaşıklık iyi bir yaklaşıklıktır, ve B bağ enerjisi küçük olduğundan, döterondaki iki nükleon arasındaki bağ zayıftır. Çok zayıf bir bağla bağlanmış olan temel hâl, bir meretebe uyarılınca hiç bağ kalmaz ve doğrudan doğruya serbest hâle (yani pozitif enerjiye) geçilir.

(III.5) NÖTRONLARIN SERBEST PROTONLAR TARAFINDAN SAÇILMASI

$n-p$ saçılmasında protonların serbest olduğu hâl ile moleküllerde bağlı olduğu hâl birbirinden ayırt edilmelidir. Pratikte, şüphesiz protonlar her zaman moleküllerde bağlı durumdadırlar, fakat moleküler bağ enerjisi çok küçük olduğundan (0,1 eV mertebesinde), gelen nötronların enerjileri 1 eV dan büyük olduğu zaman protonlar serbestmiş gibi düşünülebilir. Böylece, nötron enerjisinin bir alt limiti ortaya çıkar, ve bu limitin altında çok daha karışık bir teörinin kullanılması gerekir. Sâdece birinci δ_0 faz kaymasının ihmâl edilememesinden de (S - dalga saçılması) bir üst limit ortaya çıkar. Bu bölümün sonuna kadar δ_0 yerine δ yazılacaktır; çünkü $l = 0$ dan daha yüksek açısai momentumlara ait faz kaymaları nazar-ı itibara alınmıyacaktır.

(61) den, $l = 0$ a ait c.m. sistemindeki maksimum enerji $l = 1$ koyularak elde edilir; ve $kR = \sqrt{2}$ bağıntısı bulunur. İndirgenmiş kütle $M/2$ olduğundan, $k = \frac{Mv}{2\hbar}$ yazılabilir, ve böylece (29) u kullanarak

$$E_{lab} = 2 E_{c.m.} = \frac{2\hbar^2 k^2}{M} = \frac{4\hbar^2}{MR^2} = 18,4 \text{ MeV}$$

bulunur. Bu maksimum enerji olduğundan, $l = 0$ hâlini garanti edebilmek için, 5 MeV in altındaki laboratuvar enerjileri kullanılacaktır.

Döteronun bağ enerjisini bildikten sonra tek bir deneyle saçılma tesir kesiti tayin edilmekle çekirdek potansiyelinin menzili ile derinliğinin tayin edilebileceği düşünülebilir. Fakat döteronun temel hâli daima bir triplet hâl olduğundan ve ayrıca $n-p$ saçılması 3:1 oranındaki triplet ve singlet hâllerin bir statistik karışımı olarak ortaya çıktığından daha başka deneylerin yapılmasına ihtiyaç vardır. Böyle deneyler, daha uzun dalgaboyuna sahip, yani, daha küçük enerjilerdeki nötronların kullanılması ile elde edilen koherent saçılma deneyleridir ve (III.7) de incelenecektir. Bu kısımda sâdece inkohherent saçılma incelenecektir.

Sadece, S -dalga saçılması ($l = 0$) göz önüne alındığından, ve $P_0(\cos \theta) = 1$ ve $\delta_0 = \delta$ olduğundan (54) bağıntısı

$$f = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta} - 1) \quad (90)$$

şeklinde yazılabilir; f artık θ ya bağlı olmadığından, saçılma izotropiktir, ve bu deneysel olarak da gerçekleşmiştir. (59') bağıntısından da toplam tesir kesiti yazılabilir:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta \quad (91)$$

Bu formüller triplet ve singlet saçılmalar için aynı derecede doğrudur. Bu iki tip saçılma arasında bu kısmın sonuna doğru bir ayırma yapılacaktır.

δ faz kayması enerjiye ve dolayısıyla k ya bağlıdır. δ faz kayması cinsinden gene $\left(\frac{M}{h^2} E\right)^{1/2} = k$ ya bağlı olan genel saçılma uzunluğu $a(k)$

$$k \cotg \delta = -\frac{1}{a(k)} \quad (92)$$

bağıntısı ile tarif edilir. Bu bağıntı

$$\frac{\text{tg } \delta}{k} = -a(k) \quad (92')$$

şeklinde de yazılabilir. a Fermi saçılma uzunluğu ise

$$\lim_{k \rightarrow 0} a(k) = a(0) \equiv a \quad (93)$$

bağıntısı ile tarif edilir. (92') veya (92) kullanılarak (93) bağıntısı

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\text{tg } \delta}{k} = -a, \quad \lim_{k \rightarrow 0} k \cotg \delta = -\frac{1}{a} \quad (93')$$

şeklinde de yazılabilir. (90) bağıntısı, aşağıdaki işlemlerden sonra,

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{k} e^{i\delta} \frac{1}{2i} (e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \equiv \frac{1}{k} e^{i\delta} \sin \delta \equiv \frac{1}{k} (\cos \delta + i \sin \delta) \sin \delta \\ &= \frac{1}{k} (\sin \delta \cos \delta + i \sin^2 \delta) \equiv \frac{1}{k} \left[\frac{\text{tg } \delta}{1 + \text{tg}^2 \delta} + i \frac{\text{tg}^2 \delta}{1 + \text{tg}^2 \delta} \right] \\ &= \frac{1}{k} \frac{\text{tg } \delta + i \text{tg}^2 \delta}{1 + \text{tg}^2 \delta} \equiv \frac{1}{k} \cdot \frac{(1 + i \text{tg } \delta) \text{tg } \delta}{(1 + i \text{tg } \delta)(1 - i \text{tg } \delta)} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{\text{tg } \delta}{1 - i \text{tg } \delta} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, ve (92') bağıntısından $\text{tg } \delta = -k a(k)$ yazılarak

$$f = \frac{-a(k)}{1 + ik a(k)} \quad (94)$$

sonucuna varılır. Diğer yandan,

$$\sigma = 4\pi |f|^2$$

bağıntısı kullanılarak

$$\sigma = \frac{4\pi a^2(k)}{1 + k^2 a^2(k)} \quad (95)$$

bağıntısı bulunur. (93) bağıntısı yardımı ile de

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = \sigma_0 = 4\pi a^2 \quad (95')$$

elde edilir.

Sistemin dalga denklemi gene (71) dir, fakat artık saçılma bahis konusu olduğundan bağlı hâl yoktur ve E pozitiftir. Bu denklemde

$$k^2 = \frac{M}{\hbar^2} E, \quad K^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 + E), \quad k_0^2 = \frac{M}{\hbar^2} V_0 \quad (96)$$

konulursa

$$\left. \begin{array}{l} r < R \quad \text{için :} \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + K^2 u = 0 \\ r > R \quad \text{için :} \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0 \end{array} \right\}$$

denklemleri elde edilir. $r < R$ için, $u(0) = 0$ sınır şartı ile birinci denklemin çözümü yazılabilir. $r > R$ için de (52) asimtotik çözümünü ($l = 0$) gerçeklemek üzere ikinci denklemin çözümü yazılabilir. Böylece

$$\left. \begin{array}{l} r < R \quad \text{için :} \quad u = A_1 \sin Kr \\ r > R \quad \text{için :} \quad u = A_2 \sin(kr + \delta) \end{array} \right\} \quad (97)$$

çözümleri elde edilir. Süreklilik şartı da şu sonucu verir:

$$k \cotg(kR + \delta) = K \cotg KR. \quad (98)$$

(98) bağıntısı, aşağıdaki işlemlerden sonra,

$$k \cdot \frac{\cotg kR \cotg \delta - 1}{\cotg kR + \cotg \delta} = K \cotg KR$$

$$\frac{\cotg \delta - \tg kR}{1 + \tg kR \cotg \delta} = \frac{K}{k} \cotg KR$$

$$\cotg \delta - \tg kR = \frac{K}{k} \cotg KR \tg kR \cotg \delta + \frac{K}{k} \cotg KR$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{K}{k} \cotg KR \operatorname{tg} kR\right) \cotg \delta &= \frac{K}{k} \cotg KR + \operatorname{tg} kR \\ \left(1 - \frac{K}{k} \cotg KR \operatorname{tg} kR\right) k \cotg \delta &= K \cotg KR + k \operatorname{tg} kR \\ k \cotg \delta &= \frac{K \cotg KR + k \operatorname{tg} kR}{1 - \frac{K}{k} \cotg KR \operatorname{tg} kR} \end{aligned} \quad (99)$$

sonucunu verir. (99) bağıntısının $k \rightarrow 0$ için limitini alır ve (93') bağıntısını kullanırsak, [(96) dan $K^2 = k_0^2 + k^2$ olduğuna dikkat ederek],

$$\frac{k_0 \cotg k_0 R}{1 - k_0 R \cotg k_0 R} = -\frac{1}{a} \quad (100)$$

veyâ

$$k_0 \cotg k_0 R = \frac{1}{R - a} \quad (100')$$

elde edilir.

Şimdi (99) bağıntısının sağ tarafını k nın kuvvetleri cinsinden seriye açmaya çalışalım. Küçük enerji yaklaşıklığı için k^2 ye kadar açmak yeter. Bu yaklaşıklık içerisinde

$$K = (k_0^2 + k^2)^{1/2} \cong k_0 + \frac{k^2}{2k_0} \text{ veya } K - k_0 \cong \frac{k^2}{2k_0}$$

yazılabilir. Böylece, $K \cotg KR$, $K = k_0$ civarında Taylor serisine açılırsa,

$$K \cotg KR \cong k_0 \cotg k_0 R + \frac{k^2}{2k_0} [\cotg k_0 R - k_0 R (1 + \cotg^2 k_0 R)]$$

veya (100') bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} K \cotg KR &\cong \frac{1}{R - a} + \frac{k^2}{2k_0} \left\{ \frac{1}{k_0 (R - a)} - k_0 R \left[1 + \frac{1}{k_0^2 (R - a)^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{R - a} + \frac{k^2}{2k_0} \left[-k_0 R + \frac{R - a - R}{k_0 (R - a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{R - a} + \frac{k^2}{2k_0} \left[-k_0 R - \frac{a}{k_0 (R - a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{R - a} - \frac{1}{2} R k^2 - \frac{a k^2}{2k_0^2 (R - a)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\operatorname{tg} kR \cong kR + \frac{1}{3}(kR)^3$$

olduğundan

$$k \operatorname{tg} kR \cong k^2 R \quad \text{ve} \quad \frac{\operatorname{tg} kR}{k} \cong R \left(1 + \frac{1}{3} R^2 k^2 \right)$$

yazılabilir. Böylece

$$K \cotg KR + k \operatorname{tg} kR \cong \frac{1}{R-a} + \frac{1}{2} Rk^2 - \frac{ak^2}{2k_0^2 (R-a)^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{K}{k} \cotg KR \operatorname{tg} kR \cong \frac{R}{R-a} \left(1 + \frac{1}{3} R^2 k^2 \right) \left(1 - \frac{1}{2} R(R-a)k^2 - \frac{ak^2}{2k_0^2 (R-a)} \right)$$

$$\cong \frac{R}{R-a} \left(1 - \frac{1}{2} R(R-a)k^2 - \frac{ak^2}{2k_0^2 (R-a)} + \frac{1}{3} R^2 k^2 \right)$$

$$1 - \frac{K}{k} \cotg KR \operatorname{tg} kR \cong 1 - \frac{R}{R-a} + \frac{1}{2} R^2 k^2 + \frac{aRk^2}{2k_0^2 (R-a)^2} - \frac{R^3 k^2}{3(R-a)}$$

$$= -\frac{a}{R-a} + \frac{1}{2} R^2 k^2 + \frac{aRk^2}{2k_0^2 (R-a)^2} - \frac{R^3 k^2}{3(R-a)}$$

$$= -\frac{a}{R-a} \left[1 - \frac{R^2 (R-a) k^2}{2a} - \frac{Rk^2}{2k_0^2 (R-a)} + \frac{R^3 k^2}{3a} \right]$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$K \cotg KR + k \operatorname{tg} kR \cong \frac{1}{R-a} \left[1 + \frac{1}{2} R(R-a)k^2 - \frac{ak^2}{2k_0^2 (R-a)} \right]$$

olduğundan,

$$\frac{K \cotg KR + k \operatorname{tg} kR}{1 - \frac{K}{k} \cotg KR \operatorname{tg} kR} \cong -\frac{1}{a} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} R(R-a)k^2 - \frac{ak^2}{2k_0^2 (R-a)}}{1 - \frac{R^2 (R-a) k^2}{2a} - \frac{Rk^2}{2k_0^2 (R-a)} + \frac{R^3 k^2}{3a}}$$

$$k \cotg \delta \cong -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{1}{2} R(R-a)k^2 - \frac{ak^2}{2k_0^2 (R-a)} \right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{R^2 (R-a) k^2}{2a} + \frac{Rk^2}{2k_0^2 (R-a)} - \frac{R^3 k^2}{3a} \right]$$

$$\begin{aligned}
k \cotg \delta &\cong -\frac{1}{a} \left[1 + \left(1 + \frac{R}{a} \right) \frac{1}{2} R(R-a)k^2 + \frac{(R-a)k^2}{2k_0^2(R-a)} - \frac{R^3 k^2}{3a} \right] \\
&= -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{R(R^2 - a^2)k^2}{2a} + \frac{k^2}{2k_0^2} - \frac{R^3 k^2}{3a} \right] \\
&= -\frac{1}{a} \left[1 - \frac{R^3 k^2}{3a} + \frac{R^3 k^2}{2a} - \frac{Ra^2 k^2}{2a} + \frac{k^2}{2k_0^2} \right] \\
&= -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{R^3 k^2}{6a} - \frac{Ra k^2}{2} + \frac{k^2}{2k_0^2} \right] \\
&= -\frac{1}{a} - \frac{R^3 k^2}{6a^2} + \frac{1}{2} R k^2 - \frac{k^2}{2ak_0^2} \\
&= -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 \left(R - \frac{R^3}{3a^2} - \frac{1}{k_0^2 a} \right) \tag{101}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. (92) bağıntısına göre (101)

$$\frac{1}{a(k)} \cong \frac{1}{a} - \frac{1}{2} k^2 \left(R - \frac{R^3}{3a^2} - \frac{1}{k_0^2 a} \right) \tag{101'}$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer (95) bağıntısı

$$\sigma = \frac{4\pi}{\frac{1}{a^2(k)} + k^2}$$

şeklinde yazılırsa, (101') yardımı ile tesir kesiti yaklaşık olarak hesaplanabilir; ve aşağıdaki ara hesaplardan sonra

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a(k)} &\cong \frac{1}{a} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 \left(-Ra + \frac{R^3}{3a} + \frac{1}{k_0^2} \right) \right] \\
\frac{1}{a^2(k)} &\cong \frac{1}{a^2} \left[1 + k^2 \left(-Ra + \frac{R^3}{3a} + \frac{1}{k_0^2} \right) \right] \\
\frac{1}{a^2(k)} + k^2 &\cong \frac{1}{a^2} \left[1 + k^2 \left(a^2 - Ra + \frac{R^3}{3a} + \frac{1}{k_0^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{a^2} \left\{ 1 + k^2 \left[a(a-R) + \frac{R^3}{3a} + \frac{1}{k_0^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{a^2(k)} + k^2 \right]^{-1} \cong a^2 \left\{ 1 - k^2 \left[a(a-R) + \frac{R^3}{3a} + \frac{1}{k_0^2} \right] \right\}$$

$$\sigma \cong 4\pi a^2 \left\{ 1 - k^2 \left[a(a-R) + \frac{R^3}{3a} + \frac{1}{k_0^2} \right] \right\} \quad (102)$$

elde edilir.

Son olarak, Fermi saçılma uzunluğunun bağlı hâlin bağ enerjisi cinsinden ifâdesini bulalım; yani, $\alpha \ll k_0$ olduğunu kabul ederek a yı α cinsinden yaklaşık olarak hesaplayalım.

$$k_0^2 = x^2 + \alpha^2 \cong x^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2} \right)$$

$$k_0 = x \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2} \right)^{1/2} \cong x \left(1 + \frac{\alpha^2}{2x^2} \right) = x + \frac{\alpha^2}{2x}; k_0 - x \cong \frac{\alpha^2}{2x}$$

olduğundan, $k_0 \cotg k_0 R$, $k_0 = x$ civarında Taylor serisine açılırsa

$$k_0 \cotg k_0 R \cong x \cotg xR + \frac{\alpha^2}{2x} [\cotg xR - xR (1 + \cotg^2 xR)]$$

veya (76) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} k_0 \cotg k_0 R &\cong -\alpha + \frac{\alpha^2}{2x} \left[-\frac{\alpha}{x} - xR \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2} \right) \right] \\ &= -\alpha + \frac{\alpha^2}{2x} \left[-\frac{\alpha}{x} (1 + \alpha R) - xR \right] \\ &= -\alpha + \frac{\alpha^2}{2x} (-xR) \\ &= -\alpha - \frac{1}{2} R\alpha^2 \\ &= -\alpha \left(1 + \frac{1}{2} R\alpha \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç (100) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{a} &\cong \frac{-\alpha \left(1 + \frac{1}{2} R\alpha\right)}{1 + R\alpha \left(1 + \frac{1}{2} R\alpha\right)} \\
\frac{1}{a} &\cong \alpha \frac{1 + \frac{1}{2} R\alpha}{1 + R\alpha} \cong \alpha \left(1 + \frac{1}{2} R\alpha\right) (1 - R\alpha) \\
\frac{1}{a} &\cong \alpha \left(1 - \frac{1}{2} R\alpha\right) \tag{103}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Burada $\alpha \rightarrow 0$ için $a \rightarrow \infty$ elde edilir; yani, bağlı hâlin küçük bir bağ enerjisine serbest hâlin büyük bir Fermi saçılma uzunluğu veya büyük bir sıfır-enerjili saçılma tesir kesiti tekabül eder.

Saçılma uzunluğunun matematiksel ve fiziksel tefsirleri yapılabilir. (93') bağıntısı

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\text{tg } \delta}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta}{k} = -a$$

veya

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta = -ka \tag{104}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer bu değer (97) de yerine yazılırsa sabit bir çarpan farkı ile $r > R$ için

$$u = \sin k(a - r), \quad r > R \tag{105}$$

elde edilir. Böylece, $r = a$ potansiyel kuyusunun dışında radyal dalga fonksiyonunun sıfır olduğu (düğüm noktasının) yeridir; şüphesiz bu sonuç sıfır-enerjili saçılma için doğrudur. Diğer yandan, sıfır enerji için $K = k_0$, yâni, kuyunun içerisinde dalga sayısı $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ dır. Hâlbuki (82) den $k_0 R \cong \frac{\pi}{2}$ olduğunu bi-

liyoruz. O hâlde, $R \cong \frac{\pi}{2k_0} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{2\pi} \cong \frac{1}{4} \lambda_0$ elde edilir. (97) den $r < R$ için

$u = 0$ yazıldığında $Kr = k_0 r = \pi$ veya $r = \frac{1}{2} \lambda_0$ elde edilir, bu da $r > R$ verir;

yani, kuyunun içerisinde dalga fonksiyonunun hiç bir düğüm noktası olamaz, ve $r = a$ kuyunun dışındaki ilk düğüm noktası olduğu gibi, içerde ve dışarda yegâne ilk düğüm noktasıdır.

Fiziksel tefsire gelince, $4\pi a^2$, a yarı çapına sahip geçirgen olmayan bir kürenin sıfır-enerjili saçılma tesir kesitine eşittir; burada klâsik tesir kesitinin πa^2 olması gerektiğine dikkat edilmelidir. Bunun ispatı ilerde çekirdek reaksiyonları bölümünde verilecektir.

Buraya kadar, triplet saçılma ile singlet saçılma arasında bir ayırma yapılmadı, ve çıkarılan bütün formüller her ikisi için de doğrudur. Üç tane triplet hal ile bir tane singlet hal, statistik olarak aynı oranda görülebildiğinden, inkoherent saçılmayı veren bütün tesir kesiti

$$\sigma = \frac{3}{4} \sigma_t + \frac{1}{4} \sigma_s \quad (106)$$

bağıntısı ile verilir, burada σ_t triplet ve σ_s singlet saçılma tesir kesitlerini göstermektedir. (95') ve (103) bağıntılarından σ_{0t} hesaplanabilir, çünkü α_t çok iyi bilinmektedir, ve R_t nin de 1-3 fm kadar olduğu bilinmektedir. Böylece

$$2,8 b < \sigma_{0t} < 4,5 b \quad (107)$$

elde edilir. Sıfır enerjili inkoherent saçılmanın deneysel değeri (Melkonian, 1949) şudur:

$$\sigma_0 = 20,36 + 0,05 b \quad (108)$$

O halde, singlet tesir kesiti şu limitler arasında olmalıdır:

$$68 b < \sigma_{0s} < 73 b \quad (109)$$

Singlet tesir kesiti olağanüstü büyüktür, ve bu da yalnız $|a_s|$ nin çok büyük olmasıyla mümkündür, yâni $|a_s| \gg a_t$ olmalıdır. Filhakika (109) dan $|a_s| \cong 24$ fm bulunur.

(III.6) DÖTERONUN SİNGLET HÂLİ

Bu kısımda döteronun bağlı bir singlet hâli olup olmadığı araştırılacaktır. Eğer böyle bir hâl mevcutsa, bu hâlin B_s enerjisi döteronun temel hâl enerjisinden daha yüksek olmalıdır, çünkü temel hâlin bir triplet hâl olduğu deneyden bilinmektedir. Mevcut olduğu takdirde, bağlı bir singlet hâlin enerjisi (103) ile verilir. Deneysel sonuçlar $|B_s| \cong 100$ keV olduğunu göstermektedir.

Bağlı bir singlet S-hâli için radyal dalga denklemi

$$\left. \begin{array}{l} r < R_s \text{ için : } \frac{d^2u}{dr^2} + (k_{0s}^2 - \alpha_s^2) u = 0 \\ r > R_s \text{ için : } \frac{d^2u}{dr^2} - \alpha_s^2 u = 0 \end{array} \right\} \quad (110)$$

şeklindedir. α_s çok küçük olduğu için, ilk yaklaşıklıkla ihmal edilebilir, ve (110) un çözümü

$$\left. \begin{array}{l} r < R_s \text{ için : } u = A_1 \sin k_{0s} r \\ r > R_s \text{ için : } u = A_2 (r - c) \end{array} \right\} \quad (111)$$

şeklinde olur.

Eğer bağlı hâl yerine singlet hâlde bulunan alçak enerjili saçılma göz önüne alınır, bu takdirde dalga denklemi (110) da α_s^2 yerine $-k^2$ koyulmakla elde edilir. Alçak enerji limitinde, yani $k \rightarrow 0$ için, çözüm gene (111) den ibarettir. Dalga fonksiyonunun $r = c$ için birinci düğüm noktası elde edildiğinden, c singlet saçılma uzunluğu olmalıdır, yani $c = a_s$ olmalıdır ve böylece (111) çözümü

$$\left. \begin{array}{l} r < R_s \text{ için : } u = A_1 \sin k_{0s} r \\ r > R_s \text{ için : } u = A_2 (r - a_s) \end{array} \right\} \quad (111')$$

şeklini alır. Süreklilik şartları olan

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \sin k_{0s} R_s = A_2 (R_s - a_s) \\ A_1 k_{0s} \cos k_{0s} R_s = A_2 \end{array} \right\}$$

bağıntılarından

$$k_{0s} R_s \cotg k_{0s} R_s = - \frac{R_s}{a_s - R_s}$$

elde edilir. Bu denklemin yaklaşık çözümü (81') ne benzer şekilde

$$k_{0s} R_s \cong \frac{\pi}{2} + \frac{2 R_s}{\pi(a_s - R_s)}, \quad |a_s| > R_s \quad (112)$$

olur. Buradan, $k_{0s} = \frac{2\pi}{\lambda_{0s}}$ koyarak

$$R_s \cong \frac{1}{4} \lambda_{0s} \left[1 + \frac{4 R_s}{\pi^2 (a_s - R_s)} \right], \quad |a_s| > R_s \quad (112')$$

elde edilir. $a_s > 0$ ve $a_s < 0$ olmak üzere iki hâl mevcuttur. Birinci halde $R_s \geq \frac{1}{4} \lambda_{0s}$, yani, dalganın dörtte birinden biraz fazlası potansiyel kuyusunun içindedir; böylece dalganın maksimumu kuyunun içinde olduğundan, kuyu sınırında dalga fonksiyonunun eğimi negatiftir. O hâlde $A_2 < 0$ olur ve $u = A_2 (r - a_s)$ doğrusu, ya üstel olarak azalan bir fonksiyonun $\alpha_s \rightarrow 0$ için limiti, ya da bir sinüs dalgasının $k \rightarrow 0$ için limitidir. Bunlardan birincisi bağlı bir hâl, ikincisi de serbest bir hâl tekabül eder. İkinci halde ise, (112') ne göre $R_s \leq \frac{1}{4} \lambda_{0s}$, yani, dalganın dörtte birinden biraz azı potansiyel kuyusunun için-

dedir; böylece dalganın maksimumu kuyunun dışında olduğundan, kuyu sınırında dalga fonksiyonunun eğimi pozitifdir. O hâlde, $A_2 > 0$ olur ve $u = A_2 (r - a_s)$ doğrusu, ya üstel olarak artan bir fonksiyonun $a_s \rightarrow 0$ için limiti, ya da bir sinüs dalgasının $k \rightarrow 0$ için limitidir. Üstel olarak artan bir dalga fonksiyonu fiziksel bakımdan kabul edilemeyeceğinden, bağlı hiç bir hâl yoktur, fakat şüphesiz serbest bir hâl mevcuttur. $|a_s|$ çok büyük olduğundan, döteron singlet halde ya uç uca bağlı, ya da uç uca bağlı değildir.

(102) bağıntısı, prensip itibariyle, $a_s > 0$ ile $a_s < 0$ arasında bir ayırım yapılabilmesini sağlar. Fakat bu iki hale ait sonuçlar arasındaki fark o kadar küçüktür ki, $n-p$ saçılması deneyleri ile ikisi arasında bir ayırım yapılabilmesi imkânsızdır. Bundan sonraki kısımda daha iyi bir metod açıklanacaktır; ve bu metod yardımı ile gerçekte hiç bir singlet bağlı hâlin mevcut olmadığı görülecektir. Fakat döteronun singlet hâli bağlı bir hal olmaya o kadar yakındır ki, bazen zahiri bağlı hâl adı da verilir.

(III.7) NÖTRONLARIN MOLEKÜLLERE BAĞLI PROTONLAR TARAFINDAN KOHERENT SAÇILMASI

(III.7a) Saçılmada koherentlik, inkoherentlik

Eğer bir hedef çekirdek üzerine gelen nötronların enerjisi çok aşağı bir değerde ise, yani, dalga boyu çok büyükse, hedefteki komşu çekirdeklerden saçılan nötronlar arasında bir koherentlik meydana gelir. Böyle alçak enerjilere sahip nötronlara termal nötronlar adı verilir, çünkü bunların enerjileri hedefi çevreleyen ortamın $T^\circ K$ sıcaklığı (temperatürü) ile denge halindedir. Termal nötronların enerjisi çok kere $E = kT$ bağıntısı ile sıcaklık cinsinden ifade edilir, burada k Boltzmann sabitidir. Böylece, E enerjisi eV cinsinden olmak üzere

$$T = 11\,600 E^\circ K \quad (113)$$

yazılabilir.

Çok küçük enerjiler için (101') bağıntısına göre $a(k) \cong a$ yazılabileceğinden, (94) bağıntısı

$$f \cong -a$$

şeklini alır. Böylece (38) bağıntısından saçılmış dalganın asimptotik ifadesi olarak

$$\psi_{sc} \cong -\frac{1}{r} a e^{ikr}$$

bulunur. Hedefteki bütün çekirdeklerden saçılmış dalgaların süperpozisyonu (birbirlerinin üzerine binmesi)

$$\Psi_{sc} \cong - \sum_j \frac{1}{r_j} a_j e^{ikr_j}$$

ile ifade edilebilir; burada r_j , hedefteki j numaralı çekirdeğin gözlem noktasına uzaklığı ve a_j de saçılma uzunluğudur, ve toplama, hedef nümunesindeki bütün çekirdekler üzerine yapılmıştır. Saçılan nötronların r_j yörünge uzunlukları arasındaki farklar r_j ler yanında ihmal edilebildiğinden, $kr_j = \varphi_j$ olmak üzere

$$\Psi_{sc} \cong - \frac{1}{r} \sum_j a_j e^{i\varphi_j} \quad (114)$$

veyâ

$$\Psi_{sc} \cong - \frac{1}{r} A \quad (114')$$

yazılabilir; burada

$$A = \sum_j a_j e^{i\varphi_j}$$

bileşke saçılma genliğidir. O halde, toplam saçılma tesir kesiti

$$\sigma = 4\pi |A|^2$$

şeklinde olur; buradan $k(r_j - r_k) = \varphi_j - \varphi_k = \varphi_{jk}$ vaz edilerek

$$\sigma = 4\pi \sum_j \sum_k a_j a_k e^{i(\varphi_j - \varphi_k)}$$

veyâ

$$\sigma = 4\pi \sum_i a_j^2 + 4\pi \sum_{j \neq k} a_j a_k \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi_{jk}} + e^{-i\varphi_{jk}} \right)$$

veyâ

$$\sigma = 4\pi \sum_j a_j^2 + 4\pi \sum_{j \neq k} a_j a_k \cos \varphi_{jk} \quad (115)$$

sonucu elde edilir. Görülüyor ki, toplam tesir kesiti sadece münferit çekirdeklerin tesir kesitlerinin toplamı olmayıp, fazla olarak, çapraz terimlerin üzerine yapılmış ikinci bir toplam ihtiva eder. İşte bu ikinci toplam interferens veya koherentlik tesirleri ifade eder.

Nötron saçılması deneyleri, saçılma tesir kesitindeki bu ikinci interferens teriminin çok kere çok iyi bir takribiyetle ihmâl edilebileceğini göstermiştir. Bu takdirde çekirdeklerin inkohherent olarak saçılma yaptıkları söylenir ve nümunesinin toplam tesir kesiti sâdece çekirdeklerin ayrı ayrı tesir kesitlerinin toplamından ibâret olur. Bu normâl tip saçılmayı üç örnek vererek açıklayalım :

(i) **Bir monoatomik gaz veya bir monoatomik gazlar karışımı tarafından saçılma** : Atomların tamamen gelişigüzel dağılımlarından olayı, muhtelif atomlardan saçılan dalgalar arasındaki $\varphi_j - \varphi_k = \varphi_{jk}$ faz farkları da gelişigüzel dağılırlar. Nümunenin ihtiva ettiği atomların sayısı daima çok büyük olduğundan,

$\sum_{j \neq k} \sum_{k \neq j} a_j a_k \cos \varphi_{jk}$ toplamındaki terimlerin pozitif ve negatif değerler al-

ması ihtimâli aynıdır ve bu sebepten $\sum_j a_j^2$ toplamından pek çok daha küçüktür. Nümunede saçılmayı meydana getiren atomların (yâni, atom çekirdeklerinin) sayısı N olduğuna göre küçüklük oranı yaklaşık olarak

$$\sum_{j \neq k} \sum_{k \neq j} a_j a_k \cos \varphi_{jk} / \sum_j a_j^2 \cong 1 / \sqrt{N}$$

kadardır.

(ii) **Tamâmen amorf bir katı tarafından saçılma**: Bu örnek öncekinden sâdece atomlar arasındaki ortalama uzaklığın kayda değer derecede daha küçük oluşu ve atomların izafî yerlerinin zamanla değişmeşi ile ayırır. Buna rağmen atomların uzayda gelişi güzel dağılmış olmaları saçılma tesir kesitindeki interferens teriminin ihmal edilebilecek kadar küçük olmasını temin için yeter. Bununla beraber, gerçekten amorf olan bir katı cisimle göze sanki amorf imiş gibi görüldüğü halde gerçekte gelişigüzel dağılmış pek küçük kristallerden ibaret olan bir katı cismi ayırt etmek gerekir. Tabii bu sonuncu tip için koherentlik tesirleri gözlenir.

(iii) **Atomlar arası uzaklıklara nazaran çok küçük dalga boyuna sahip nötronların muntazam bir atom dizisi (yani kristal) tarafından saçılması**: Eğer kristal mutlak olarak mükemmel olsaydı ve çekirdekler uzayda tam olarak sâbit kalabilselerdi, farklı atomlardan saçılma daima koherent olacaktı ve tesir kesitindeki interferens terimi asla ihmal edilemeyecekti. Fakat çok küçük dalga boyuna sahip nötronlar için atomların mükemmel tarzda sıralandıkları yerlerden (rastgele olarak) çok küçük sapmaları bile tesir kesitindeki çapraz terimler toplamının sıfır olması sonucunu verir. Böyle rastgele sapmalar, kristalin mükemmel olmayışından ve atomların denge konumlarının etrafındaki termik hareketlerinden ileri gelir. Mutlak sıfır sıcaklığında bulunan mükemmel bir kristalde bile atomlar sıfır noktası titreşimlerinden ($h\nu/2$) dolayı denge konumlarının civarına dağılırlar; böylece nötronların dalga boyları bu titreşimlerin genliğine nazaran küçük kaldıkça saçılma inkoherent olacaktır.

Tamâmen tersine olarak, atomlar arası uzaklıklara nazaran büyük dalga boylarına sahip nötronlar için saçılma tamamen koherenttir.

Bir çok hallerde de saçılma ne tamâmen koherent, ne de tamâmen inkoherenttir. Meselâ, poliatomik moleküllere sahip bir gaz tarafından bu moleküllerin boyutlarına nazaran daha büyük dalga boylarına sahip nötronların saçıldığı

düşünülsün. Belirli bir molekülün atomlarından saçılma koherent olduğu halde muhtelif moleküllerden saçılma inkoherenttir. Diğer bir örnek uzun dalga boylarına sahip nötronların bir sıvı tarafından saçılmasıdır. Burada komşu atomlardan saçılma koherent olduğu halde, birbirlerinden uzak atomlardan saçılma inkoherenttir. Bu iki örnek, "kısa aralıktaki intizam" ile "uzun aralıktaki intizamsızlığı" göstermektedir.

(III. 7b) Bir hidrojen molekülünden koherent saçılma

Çok uzun dalga boylarına sahip, yani çok alçak enerjilerdeki nötronların deneylerde kullanılması singlet saçılma ile triplet saçılmanın ayırd edilmesini mümkün kılar. Bir hidrojenin molekülü (H_2) iki temel halde bulunabilir; bu hallerden birinde iki protonun spinleri paraleldir (orto-hidrojen) ve diğerinde de anti-paraleldir (para-hidrojen). Orto-hidrojenin enerjisi daha büyük olmakla beraber, para-hidrojene dönüşüm çok yavaştır ve âdi oda sıcaklığında hidrojen gazı bu ikisinin 3 : 1 oranında karışımından ibâettir. Çok aşağı sıcaklıklarda (yaklaşık olarak $20^\circ K$), hidrojen gazı hemen hemen saf para-hidrojen hâlinindedir. $20^\circ K$ de bir nötronun de Broglie dalga uzunluğu $\lambda = 7 \times 10^{-8}$ cm dir; bu uzunluk bir hidrojen molekülündeki atomların arasındaki uzaklıktan ($0,74 \times 10^{-8}$ cm) kayda değer derecede daha büyüktür. O halde, böyle nötronlar para-hidrojen tarafından saçılırlarsa, moleküldeki iki proton tarafından saçılan dalgalar koherenttir ve bunlar arasında interferens olayı meydana gelir. Saf orto-hidrojene ait sonuçlar, daha yüksek sıcaklıklarda hidrojen tarafından inkoherent saçılma deneylerinden elde edilebilir. Orto-hidrojen ve para-hidrojene ait sonuçlar tamamen farklı olur, çünkü para-hidrojen tarafından saçılma bir proton için triplet ve diğeri için singlet bir saçılmadır, hâlbuki orto-hidrojen tarafından saçılma her iki proton için de triplet veyâ her iki proton için de singlet bir saçılmadır.

Nötron ve proton için Pauli spin operatörleri σ_n ve σ_p olsun. O halde, nötron ve protonun spinleri $s = \frac{1}{2} \hbar \sigma_n$ ve $s_p = \frac{1}{2} \hbar \sigma_p$ olur. Şimdi moleküldeki protonlardan birinin üzerine bir nötron düşsün. Protonlardan birinin üzerine düşen nötronla bu protonun spinleri toplamı olan açısız momentum

$$s = s_n + s_p$$

şeklinindedir. (II.75) ve (II.76) da olduğu gibi $\sigma_n \cdot \sigma_p$ operatörünün özdeğerleri $2s(s+1) - 3$ tür; triplet saçılma için ($s = 1$) bu özdeğer 1 ve singlet saçılma ($s = 0$) için de -3 tür. Böylece, triplet ve singlet saçılmalara ait saçılma uzunlukları tek bir formül halinde ifade edilebilir:

$$a_{t,s} = \frac{1}{4} \{ (3a_t + a_s) + (a_t - a_s) [2s(s+1) - 3] \}$$

Eğer sembolik olduğu kaydı ile

$$\sigma_n \cdot \sigma_p = 2s(s+1) - 3$$

yazarsak, yukardaki formül

$$a_{t,s} = \frac{1}{4} [(3a_t + a_s) + (a_t - a_s) \sigma_n \cdot \sigma_p]$$

şeklini alır. Eğer I ile birim operatör gösterilirse, daha doğru olarak

$$a_{t,s} I = \frac{1}{4} [(3a_t + a_s) I + (a_t - a_s) \sigma_n \cdot \sigma_p] \quad (116)$$

yazılabilir. Moleküldeki protonların spin operatörlerini σ_{p1} ve σ_{p2} şeklinde indislersek, iki protondan saçılan nötronların dalgaları interferens yaptıklarından bu protonların saçılma uzunlukları toplanabilir ve moleküle ait saçılma uzunluğu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$aI = \frac{1}{4} [2(3a_t + a_s) I + (a_t - a_s) \sigma_n \cdot (\sigma_{p1} + \sigma_{p2})] \quad (117)$$

Diğer yandan, hidrojen molekülünün toplam açısal momentumu

$$\mathbf{S}_H = \mathbf{s}_{p1} + \mathbf{s}_{p2} = \frac{1}{2} \hbar (\sigma_{p1} + \sigma_{p2}) \quad (118)$$

olduğundan (117)

$$aI = \frac{1}{2} [(3a_t + a_s) I + \frac{1}{\hbar} (a_t - a_s) \sigma_n \cdot \mathbf{S}_H] \quad (117')$$

şeklini alır. Bu operatör denkleminin her iki yanının karesini alarak

$$a^2 I = \frac{1}{4} [(3a_t + a_s)^2 I + \frac{2}{\hbar} (3a_t + a_s) (a_t - a_s) \sigma_n \cdot \mathbf{S}_H + \frac{1}{\hbar^2} (a_t - a_s)^2 (\sigma_n \cdot \mathbf{S}_H)^2] \quad (119)$$

bulunur.

\mathbf{A} ve \mathbf{B} vektörleri veya vektör operatörleri σ ile komütatif olmak şartı ile

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) &= (\sigma_x A_x + \sigma_y A_y + \sigma_z A_z)(\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z) \\ &= \sigma_x^2 A_x B_x + \sigma_y^2 A_y B_y + \sigma_z^2 A_z B_z + \sigma_y \sigma_z A_y B_z + \sigma_z \sigma_y A_z B_y + \\ &+ \sigma_z \sigma_x A_z B_x + \sigma_x \sigma_z A_x B_z + \sigma_y \sigma_x A_y B_x + \sigma_x \sigma_y A_x B_y \end{aligned}$$

yazılabilir. (II.69') bağıntılarını kullanarak

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) I + \\ &+ i [\sigma_x (A_y B_z - A_z B_y) + \sigma_y (A_z B_x - A_x B_z) + \sigma_z (A_x B_y - A_y B_x)] \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) I + i \sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (120)$$

sonucuna varılır; bu sonuca Dirac özdeşliği adı verilir.

Dirac özdeşliğinin kullanılması ile ($\mathbf{S}_H \times \mathbf{S}_H = i\hbar \mathbf{S}_H$)

$$\frac{1}{\hbar^2} (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{S}_H)^2 = \frac{1}{\hbar^2} S_H^2 - \frac{1}{\hbar} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{S}_H = S_H(S_H + 1) I - \frac{1}{\hbar} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{S}_H \quad (121)$$

bulunur. \mathbf{S}_H molekül spinleri gazın içinde gelişigüzel dağıldığından, $\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{S}_H$ nin formüllere ortalaması girer, ve âşikâr olarak

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{S}_H \rangle_{\text{ortal.}} = 0 \quad (122)$$

olur. (121) ve (122) nin yardımı ile (119)

$$a^2 = \frac{1}{4} [(3a_t + a_s)^2 + (a_t - a_s)^2 S_H(S_H + 1)] \quad (123)$$

sonucunu verir. Bu bağıntıda orto-hidrojen için $S_H=1$, ve para-hidrojen için $S_H=0$ konulmalıdır. $\sigma_{\text{orto}} = 4\pi a_{\text{orto}}^2$ ve $\sigma_{\text{para}} = 4\pi a_{\text{para}}^2$ olduğuna dikkat edilirse

$$\sigma_{\text{orto}} = \pi (3a_t + a_s)^2 + 2\pi (a_t - a_s)^2 \quad (124)$$

$$\sigma_{\text{para}} = \pi (3a_t + a_s)^2 \quad (125)$$

$$\sigma_{\text{orto}} = \sigma_{\text{para}} + 2\pi (a_t - a_s)^2 \quad (126)$$

bağıntıları elde edilir. σ_t ve σ_s yi veren (107) ve (109) deneysel değerlerinden

$$a_t \cong 5 \text{ fm}, \quad |a_s| \cong 24 \text{ fm} \quad (127)$$

elde edilir. $a_s < 0$ olduğu zaman $|3a_t + a_s| \ll |a_t - a_s|$, ve $a_s > 0$ olduğu zaman da $|3a_t + a_s| \gg |a_t - a_s|$ olacağından

$$a_s < 0 \text{ için: } \sigma_{\text{para}} \ll \sigma_{\text{orto}}, \quad a_s > 0 \text{ için: } \sigma_{\text{para}} \cong \sigma_{\text{orto}} \quad (128)$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlar iki hâl arasında bir ayırma yapmayı mümkün kılar. Filhakika deneysel sonuçlar (SUTTON 1947)

$$\sigma_{\text{para}} = 4,0 b, \quad \sigma_{\text{orto}} = 125 b \quad (129)$$

olduğundan, $a_s < 0$ olmalıdır ve döteronun singlet hâli zâhiridir.

(124) ile (125) bağıntılarını deneyle daha doğru bir şekilde karşılaştırmak için bu bağıntılarda bazı düzeltmeler yapılmalıdır. Bu düzeltmeler, protonlar moleküllere bağlı olduğu zaman indirgenmiş kütlelerin değişmesi ve molekülün hızı ile ilgilidir.

(129) deneysel sonuçları böylece

$$a_t = 5,2 \text{ fm}, \quad a_s = -23,4 \text{ fm} \quad (130)$$

sonuçlarına götürür ve bu sonuçlar (127) ye çok iyi uymaktadır. Daha sonra kullanacağımız bir büyüklük, para-hidrojenin saçılma uzunluğudur; ve (125) ten

$$a_{\text{para}} = \frac{1}{2} (3a_t + a_s) \quad (131)$$

yazılabilir. Önceki deneysel sonuçlardan

$$a_{\text{para}} = -3,93 \text{ fm} \quad (132)$$

bulunur.

a_{para} nın değerini veren iki metot daha vardır. Birincisi kristallerdeki hidrojen atomları tarafından nötronların saçılmasına dayanır, ve X-ışınlarının difraksiyonuna benzer şekilde Bragg kanununa uyan nötron difraksiyonu metodudur. İkincisi de protonları ihtiva eden bir sıvı aynadan nötronların tam yansımalarına dayanır. Bu ikinci metot en doğru metoddur ve şu sonucu verir (*BURGY* 1951):

$$a_{\text{para}} = -(3,78 \pm 0,02) \text{ fm.} \quad (132')$$

(132) ile (132') sonuçları arasındaki mübâenet, (132) nin bulunuşunda küçük bir miktar orto-hidrojenin para-hidrojene karışmasından ileri gelmektedir. a_{para} için bir ağırlıklı ortalama değer sonradan *WILSON* (1963) tarafından verilmiştir ve bunu en iyi değer olarak kullanacağız :

$$a_{\text{para}} = -(3,744 \pm 0,010) \text{ fm.} \quad (133)$$

(129) sonuçları aynı zamanda nötronun spininin $\frac{1}{2}$ olduğunu da ispat eder.

Çünkü eğer $s_n = \frac{3}{2}$ olsaydı, $s = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = 1$ ve 2 , ve

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}_p &= \frac{1}{2} [\mathbf{s}^2 - \mathbf{s}_n^2 - \mathbf{s}_p^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[s(s+1) - \frac{15}{4} - \frac{3}{4} \right] \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[s(s+1) - \frac{18}{4} \right] \hbar^2 \end{aligned}$$

bağıntısına göre de

$$s = 1 \text{ için : } \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}_p = -\frac{5}{4} \hbar \text{ (triplet), } s = 2 \text{ için : } \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}_p = \frac{3}{4} \hbar^2 \text{ (kentuplet)} \quad (134)$$

elde edilirdi. Böylece (116) bağıntısı yerine

$$a_{r,q} = \frac{1}{8} (3a_t + 5a_q) + \frac{1}{2} (a_q - a_t) \frac{1}{\hbar^2} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}_p \quad (135)$$

ve (123) bağıntısı yerine de

$$a^2 = \frac{1}{16} (3a_t + 5a_q)^2 + \frac{1}{16} (a_q - a_t)^2 S_H (S_H + 1) \quad (136)$$

gelirdi. Burada gene $S_H = 0$ para ve $S_H = 1$ orto halini verir. a_s yerine a_q koymak şartıyla (127) gene doğrudur. Böylece, $a_q > 0$ veya $a_q < 0$ için $|3a_t + 5a_q| \gg |a_q - a_t|$ olur. O halde $\sigma_{orto} \cong \sigma_{para}$ elde edilirdi ki, bu da deneysel sonuçlarla çelişir.

Şimdi sonuçları toparlayalım. Bütün problem dört uzunluğu bulmaya indirgenir. Bunlardan ikisi a_t ve a_s saçılma uzunluklarıdır, ve bağlı hallerin bağ enerjileri ile birlikte V_t ve V_s potansiyel derinliklerinin tayinini mümkün kılar. Diğer ikisi de potansiyellerin R_t ve R_s menzilleridir, ve bunların aynı olması gerekmez.

Böylece dört deneysel sonuç gereklidir. Üçü için yukarda geçen şu sonuçlar alınacaktır:

(a) Döteronun bağ enerjisi,

$$B_t = 2,2245 \pm 0,0002 \text{ MeV} \quad (73)$$

(b) İnkohherent sıfır-enerjili saçılma tesir kesiti,

$$\sigma_0 = 20,36 \pm 0,05 \text{ b} \quad (108)$$

(c) Para-hidrojenin saçılma uzunluğu,

$$a_{para} = - (3,744 \pm 0,010) \text{ fm.} \quad (133)$$

Dördüncüsü için de yüksek enerjilerdeki n - p saçılmasına ait bir tesir kesiti alınacaktır. Böyle bir tesir kesiti, 4,75 MeV (lab. sisteminde) enerjisindeki nötronlar için HAFNER (1953) tarafından büyük bir doğrulukla tayin edilmiştir.

(d) 4,75 MeV de saçılma tesir kesiti (lab. sistemi),

$$\sigma = 1,690 \pm 0,008 \text{ b.} \quad (137)$$

(106) ve (131) bağıntıları şöyle yazılabilir:

$$3a_t^2 + a_s^2 = \frac{\sigma_0}{\pi} \quad (106')$$

$$3a_t + a_s = 2a_{para} \quad (131')$$

Bu denklemlerden $a_s < a_t$ şartını sağlamak üzere a_s ve a_t çözümlürse

$$a_t = \frac{1}{2} \left[a_{\text{para}} + \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_0}{\pi} - a_{\text{para}}^2 \right)} \right]$$

$$a_s = \frac{1}{2} \left[a_{\text{para}} - 3 \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_0}{\pi} - a_{\text{para}}^2 \right)} \right]$$

elde edilir. Bu ifâdelerde (b) ve (c) deki değerler konulursa

$$(e) \quad a_t = 5,397 \text{ fm.} \quad (138)$$

$$(f) \quad a_s = -23,68 \text{ fm.} \quad (139)$$

sonuçlarına varılır. (a) ile birlikte (e) değerleri (76) ve (100') bağıntılarından R_t ve V_{ot} nin elde edilmesinde kullanılabilir:

$$R_t = 2,0755 \text{ fm, } V_{ot} = 34,392 \text{ MeV} \quad (140)$$

Bundan sonra R_s ve V_{os} hesaplanabilir. 4,75 MeV deki (lab. sistemi) triplet tesir kesiti (91) ve (98) veya (99) bağıntılarından hesaplanabilir. Burada $E_{cm} = \frac{1}{2} E_{lab} = 2,375 \text{ MeV}$ alınmalıdır. $\hbar^2/M = 41,47 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$ olduğuna dikkat ederek ve (140) değerlerini kullanarak, (96) dan $k = 0,239 \text{ fm}^{-1}$, $K = 0,941 \text{ fm}^{-1}$, $kR_t = 0,497$ ve $KR_t = 1,954$ bulunur. Ayrıca $K/k = 3,934$ dür. Bu değerler (99) da yerlerine yazılırsa $\cotg \delta \cong -0,562$ bulunur. Böylece, (91) bağıntısından $\sigma_t \cong 1,668 b$ elde edilir; (106) bağıntısında bu değeri ve (d) yi kullanarak $\sigma_s \cong 1,76 b$ sonucuna varılır. Singlet tesir kesitinin bu değeri kullanılırsa (91) bağıntısı müteakbil faz kaymasını verir. Bu singlet faz kayması ile (f) yi kullanarak (98) ve (100') bağıntılarından R_s ile V_{os} çözülebilir:

$$R_s = 2,5215 \text{ fm, } V_{os} = 14,814 \text{ MeV} \quad (141)$$

Son olarak da, zâhirî singlet halin bağ enerjisi (76) ve (100') bağıntılarından hesaplanabilir:

$$|B_s| = 67 \text{ keV} \quad (142)$$

(141) bağıntısının dışında hatalar yüzde birkaçtan fazla değildir; fakat (141) de, hesap deneysel değerlerdeki küçük değişikliklere çok hassas olduğundan, hata muhtemel olarak yüzde 20 den fazladır.

Bu hesaplardan çıkarılan en önemli sonuç, çekirdek kuvvetlerinin spine bağlı olmasıdır, çünkü $R_t \neq R_s$ ve $V_{ot} \neq V_{os}$ tir.

(III.8) PROTON-PROTON SAÇILMASI

Protonların gene protonlar tarafından saçılması matematik bakımından $n-p$ saçılmasından oldukça daha karışıktır, çünkü (a) protonlardaki elektrik yükünden ileri gelen Coulomb saçılması nükleer saçılmaya eklenir, ve (b) artık bir öz-

deş parçacıklar problemi bahis konusudur. $p-p$ saçılmasını özellikle ilginç kılan bu iki husustur. Coulomb saçılmasının nükleer saçılma ile girişimi (interferens yapması) çekirdek potansiyelinin parametrelerinin tayininde çok daha büyük büyük bir hassasiyet sağlar. Diğer yandan, protonlar dışarılama (*exclusion*) ilkesine uyan özdeş parçacıklar olduklarından, simetrik bir dalga fonksiyonuna sahip bir halde bulunamazlar. Bu sebepten, saçılmanın nükleer kısmının saf bir S -dalgası olduğu enerjiler için, nükleer etkileşme yalnız singlettir. Böylece, $n-p$ saçılmasındaki iki tip (singlet ve triplet) faz kayması yerine $p-p$ saçılmasında sadece bir tip (singlet) faz kayması bahis konusudur; ve bu tek saçılmada yalnız toplam saçılma tesir kesiti değil, bütün saçılma açılarına ait diferansiyel saçılma tesir kesitleri ölçülmeli ve teorik formüllere uygulanmalıdır, çünkü Coulomb ve çekirdek kuvvetlerinin bir arada meydana getirdikleri saçılma kesin olarak küresel bir simetriye sahip değildir, yani izotropik değildir. Fazla olarak, $p-p$ saçılması $n-p$ saçılmasından çok daha doğru olarak ölçülebilir, çünkü iyi kolime edilmiş (yani paralel) monokromatik proton huzmeleri kolaylıkla elde edilebilir ve saçılmış protonlar iyonizasyon tesirlerinden ötürü kolaylıkla detekte edilebilirler.

Evvelâ saf bir Coulomb alanının meydana getirdiği saçılmayı inceleyelim. Bu konu Mott ve Massey'in "Theory of Atomic Collisions" adlı kitabının 3. bölümünde tam olarak incelenmiştir. Eğer (48) radyal denkleminde $U(r) = \frac{M}{\hbar^2} \frac{e^2}{r}$ olarak alınır, $r \rightarrow \infty$ için $r U(r) = \frac{M}{\hbar^2} e^2 \neq 0$ olur. Bu sebepten, (52) bağıntısı

$$\psi \cong \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} B_l (2l+1) i^l \sin(kr - \gamma \ln 2kr - \frac{1}{2} l\pi + \alpha_l) P_l(\cos \theta) \quad (143)$$

şeklinde yazılabilir; burada $\gamma = \frac{e^2}{\hbar v}$, v izâfî hız, $Mv = 2\hbar k$, $\alpha_l = \arg \Gamma(l+1+i\gamma)$ ve $B_l = e^{i\alpha_l}$ dir. Buradan uzun hesaplardan sonra, (54) bağıntısına tekabül eden bir bağıntı bulunabilir; $l=0$ için bu bağıntı

$$f_c(\theta) = \frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + i\pi + 2i\alpha_0} \quad (144)$$

şeklinindedir; burada $\frac{\gamma}{2k} = \frac{e^2}{Mv^2}$ ve $\alpha_0 = \arg \Gamma(1+i\gamma)$ dir. Çekirdek potansiyeli yalnız S -dalgasına tesir ettiğinden, (54) bağıntısında sadece ilk terim alınmalı ve Coulomb potansiyelinin tesirini ifâde etmek üzere $e^{2i\alpha_0}$ ile çarpılmalıdır; böylece

$$f(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} e^{2i\alpha_0} (e^{2i\delta_0} - 1) \quad (145)$$

elde edilir. $\gamma \rightarrow 0$ için $\alpha_0 \rightarrow 0$ ve $f_c(\theta)$ sıfır olduğundan, (145) bağıntısı (90) bağıntısına indirgenir (saf nükleer saçılma); ayrıca, $\delta_0 \rightarrow 0$ için $f(\theta) \rightarrow f_c(\theta)$ olur (saf Coulomb saçılması). (145) bağıntısından diferansiyel tesir kesiti hesaplanabilir.

Buraya kadar iki protonun özdeş parçacıklar oluşu nazar-ı itibara alınmadı; eğer bu da hesaba katılırsa, sistem bir antisimetrik dalga fonksiyonu ile tasvir edilmelidir. Eğer protonlar antiparalelse, yani, bir singlet halde bulunuyorlarsa, spin dalga fonksiyonu antisimetriktir ve böylece (bütün dalga fonksiyonunun antisimetrik olmasını sağlamak üzere) uzay dalga fonksiyonu simetrik olmalıdır ve

$$\psi(\mathbf{r}) + \psi(-\mathbf{r})$$

ile verilir, burada \mathbf{r} protonların izâfi yervektörüdür. Benzer şekilde, protonlar paralelse, yani, bir triplet halde bulunuyorlarsa, spin dalga fonksiyonu simetrik- tir ve böylece uzay dalga fonksiyonu antisimetrik olmalıdır ve

$$\psi(\mathbf{r}) - \psi(-\mathbf{r})$$

ile verilir. O halde, saçılma problemleri için

$$\psi(\mathbf{r}) = G_+ + Sf(\theta), \quad \psi(-\mathbf{r}) = G_- + Sf(\pi - \theta) \quad (146)$$

fonksiyonları kullanılmalıdır; burada G ve S gelen düzlem dalga ve saçılan dalga- nın radyal kısmıdır. Böylece, triplet saçılmanın singlet saçılmanın üç katı olduğu inkoherent saçılma için saçılma şiddeti, yâni, diferansiyel saçılma tesir kesiti

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta) = \frac{3}{4} |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \quad (147)$$

şeklindedir. Bu bağıntı

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \text{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)] \quad (147')$$

şeklinde de yazılabilir; burada

$$\text{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)] = \frac{1}{2} [f^*(\theta) f(\pi - \theta) + f(\theta) f^*(\pi - \theta)]$$

olup, $f^*(\theta) f(\pi - \theta)$ nin reel kısmını ifâde etmektedir. Eğer (144) bağıntısı (145) bağıntısında ve (145) bağıntısı da (147) bağıntısında yerlerine yazılırsa, uzun kısalt- malarından sonra, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{\gamma^2}{4k^2} \left[\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{\cos \left(\gamma \ln \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right] - \\ & - \frac{\gamma}{2k^2} \sin \delta_0 \left[\frac{\cos \left(\delta_0 + \gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos \left(\delta_0 + \gamma \ln \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right] + \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 \end{aligned} \quad (148)$$

Bu ifâdedeki ilk terim saf Coulomb saçılmasıdır, üçüncü terim saf nükleer saçılmasıdır ve ikinci terim de ikisinin girişiminden meydana gelen interferans saçılmasıdır; ikinci terim δ_0 a yaklaşık olarak lineer bağlıdır. Bu lineer bağlılıktan dolayı, saçılma deneylerinden δ_0 ın işareti ve dolayısıyla δ_0 a tekabül eden saçılma uzunluğunun işareti bulunabilir. Bu işaret negatif olarak çıktığından, p - p sisteminin hiç bir bağlı hali yoktur. (Nötronların serbest protonlar tarafından saçılması sâdece δ_0^2 yi verdiği için, singlet saçılma uzunluğunun işaretinin bulunabilmesi için nötronların moleküllere bağlı protonlar tarafından saçılmasına ait deneylerden faydalanmak gerekmişti.)

(148) bağıntısındaki Coulomb terimi daha yakından incelenebilir. Bu terim üç kısıman ibarettir; birinci kısım iyi bilinen Rutherford saçılmasıdır, ve özdeş olmayan parçacıkların saçılmasını verir. Bu sonuç ,başlangıçta Rutherford tarafından klâsik olarak çıkarılmıştır, fakat kuvantum mekaniğinde de aynı derecede doğrudur. İkinci kısım da gene klâsik olarak ortaya çıkar, çünkü özdeş parçacıklar halinde saçılan parçacıkla hedef parçacığın geri tepmesi arasında deneysel olarak bir ayırma yapmak imkânsızdır. (c.m. sisteminde iki parçacık arasındaki açı 180° dir.) Son kısım saf kuvantum mekaniği ile ilgilidir ve iki özdeş parçacığın dalgaları arasındaki girişimden (interferensten) meydana gelir.

Deneysel olarak ölçülen büyüklük lab. sistemindeki diferansiyel tesir kesitidir ve (148) bağıntısı ile verilen c.m. sistemindeki diferansiyel tesir kesitine evvelce çıkarılan

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = 4 \cos \theta_{\text{lab}} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cm}} \quad (45)$$

veya

$$\sigma_{\text{lab}}(\theta_{\text{lab}}) = 4 \cos \theta_{\text{lab}} \sigma_{\text{cm}}(2\theta_{\text{lab}}) \quad (45')$$

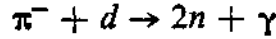
bağıntısı ile bağlıdır. (Bu bağıntı yalnız özdeş parçacıklar için doğrudur. $m_1 \neq m_2$ için (44) bağıntısı câridir). Böylece (148) i lab. sistemine çevirmek için, θ yerine 2θ koyulmalı ve sonra da sonuç $4 \cos \theta$ ile çarpılmalıdır.

(148) formülü âşikâr olarak dayandığı teoremin doğruluğunun çok hassas kontrol imkânını sağlar; ve bütün saçılma açıları için deneysel olarak elde edilen diferansiyel tesir kesitlerinin tek bir δ_0 parametresi ile teoriye gerçekten uygulanabilmesi teori için sağlam bir ispattır. Bir kare kuyu için menzil ve derinlik (JAKSON ve BLATT, 1950)

$$R = 2,58 \text{ fm}, V_0 = 13,3 \text{ MeV} \quad (149)$$

olarak bulunmuştur ve bu sonuçlar yüzde birkaç hatâ ile doğrudur. Bu değerler (141) ile karşılaştırılabilir, ve âşikâr olarak n - p ve p - p kuvvetlerine ait değerler pek az farklıdır. Bundan da, çekirdek kuvvetlerinin hiç değilse alçak enerjilerde yükten müstakil olduğu faraziyesi (hipotezi) çıkarılabilir.

Haddock ve arkadaşları tarafından (Phys. Rev. Let., **14**, 318 (1965))



reaksiyonunun kullanılması ile nötron-nötron saçılma uzunluğu ölçülmüştür. Sonuç şudur:

$$a_{nn} = (16,4 \pm 1,9) \text{ fm.}$$

Bu değerle singlet nötron-proton saçılma uzunluğu $a_s = -23,68 \text{ fm}$ arasındaki fark çekirdek kuvvetlerinin yükten tamamen müstakil olmadığını göstermektedir.

(III.9) ÇEKİRDEK POTANSİYELİNİN ŞEKİL BAĞIMSIZLIĞI

Buraya kadar çekirdek potansiyeli için bir kare kuyu şekli kabul edildi. Bu, fiziksel doğruluk için değil, matematiksel basitlik için yapıldı. Bu şeklin seçilmesinin fiziksel geçerliliği, elde edilen sonuçların yüksek bir doğruluk derecesinde seçilen şekilden müstakil olmasına bağlıdır.

Şimdi burada, alçak enerjiler için çekirdek potansiyelinin şeklinin sonuçları etkilemediği gösterilecektir.

İki E_1 ve E_2 enerjisine tekabül eden radyal fonksiyonlar u_1 ve u_2 olsunlar. Böylece, (48) denklemi $l = 0$ için

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + k_1^2 u_1 - U(r) u_1 = 0 \quad (150)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} + k_2^2 u_2 - U(r) u_2 = 0 \quad (151)$$

şekillerinde yazılabilir; burada $U = \frac{M}{\hbar^2} V$ yazılmıştır ve $V(r)$ çekirdek potansiyelidir. (150) yi u_2 ile ve (151) i u_1 ile çarparak taraf tarafa çıkarırsak

$$u_2 \frac{d^2 u_1}{dr^2} - u_1 \frac{d^2 u_2}{dr^2} = (k_2^2 - k_1^2) u_1 u_2$$

bulunur. Diğer yandan

$$\frac{d}{dr} \left(u_2 \frac{du_1}{dr} - u_1 \frac{du_2}{dr} \right) = u_2 \frac{d^2 u_1}{dr^2} - u_1 \frac{d^2 u_2}{dr^2}$$

özdeşliğinden faydalanarak

$$\frac{d}{dr} \left(u_2 \frac{du_1}{dr} - u_1 \frac{du_2}{dr} \right) = (k_2^2 - k_1^2) u_1 u_2$$

elde edilir. Bu denklemin her iki yanı 0 dan ∞ a kadar integre edilirse

$$\left[u_2 u_1' - u_1 u_2' \right]_0^\infty = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty u_1 u_2 dr \quad (152)$$

elde edilir. Bundan sonra, u nun asimptotik davranışını temsil eden bir v fonksiyonu ithâl edelim :

$$v_1 = A_1 \sin(k_1 r + \delta_1). \quad (153)$$

Eğer A_1 normalizasyon çarpanını $v_1(0) = 1$ olacak şekilde seçersek

$$v_1 = \frac{\sin(k_1 r + \delta_1)}{\sin \delta_1} \quad (154)$$

elde edilir, ve v_2 de benzer şekilde tarif edilebilir. (152) ve benzer şekilde

$$\left[v_2 v_1' - v_1 v_2' \right]_0^\infty = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty v_1 v_2 dr \quad (155)$$

yazılabilir. Şimdi (155) ten (152) yi taraf tarafa çıkaralım. $r = 0$ için u_1 ve u_2 sıfırdır ve bunların asimptotik şekilleri v_1 ve v_2 nin asimptotik şekillerine eşittir. O halde

$$\left[v_1 v_2' - v_2 v_1' \right]_{r=0} = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (v_1 v_2 - u_1 u_2) dr \quad (156)$$

veya

$$v_2'(0) - v_1'(0) = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (v_1 v_2 - u_1 u_2) dr \quad (156')$$

elde edilir. Şimdi

$$v = \frac{\sin(kr + \delta)}{\sin \delta}$$

fonksiyonunun türevi alınırsa

$$v' = k \frac{\cos(kr + \delta)}{\sin \delta}$$

$$v'(0) = k \cotg \delta = -\frac{1}{a(k)}$$

bulunur. O halde (156') bağıntısı

$$k_2 \cotg \delta_2 - k_1 \cotg \delta_1 = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^{\infty} (v_1 v_2 - u_1 u_2) dr \quad (157)$$

şeklini alır. Eğer (92) bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{1}{a(k_1)} - \frac{1}{a(k_2)} = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^{\infty} (v_1 v_2 - u_1 u_2) dr \quad (157')$$

bulunur. Şimdi

$$\frac{1}{2} \rho(E_1, E_2) = \int_0^{\infty} (v_1 v_2 - u_1 u_2) dr \quad (158)$$

tarifini yapalım. O halde (157') bağıntısı

$$\frac{1}{a(k_1)} - \frac{1}{a(k_2)} = \frac{1}{2} (k_2^2 - k_1^2) \rho(E_1, E_2) \quad (159)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $k_1 = 0$ özel halini inceleyelim ve $k_2 = k$ koyalım:

$$\frac{1}{a} + k \cotg \delta = + \frac{1}{2} k^2 \rho(0, E)$$

veyâ

$$k \cotg \delta = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 \rho(0, E) \quad (160)$$

elde edilir; burada

$$\frac{1}{2} \rho(0, E) = \int_0^{\infty} (v_0 v - u_0 u) dr \quad (161)$$

dir. Burada indissiz fonksiyonlar E enerjisine, ve 0 indisi de sıfır enerjisine teka-bül eder.

Buraya kadar hiç bir yaklaşıklık yapılmadı. u ve v yalnız çekirdek kuvvetlerinin menzili içerisinde farklıdır. Bu sebepten, (161) deki integrant kuvvet menzilin dışında sıfır olur. Menzilin içinde, dalga fonksiyonları hemen hemen enerjiden bağımsızdır, çünkü bahis konusu bütün enerjiler için potansiyelin derinliği sistemin enerjisinden çok daha büyüktür. (Kare kuyu dalga fonksiyonu için (97) ye bakınız, bu durumu (97) iyi açıklar). Bu sebepten u ile v yerine u_0 ile v_0 koymak iyi bir yaklaşıklık olacaktır. Böylece

$$\frac{1}{2} \rho(0, E) \cong \frac{1}{2} \rho(0, 0) \cong \frac{1}{2} r_0 = \int_0^{\infty} (v_0^2 - u_0^2) dr \quad (162)$$

elde edilir. Sâbit olan r_0 büyüklüğüne **etkin menzil** adı verilir. Bunu (160) da yerine yazarsak

$$k \cotg \delta \cong -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 \quad (163)$$

elde edilir. Kare kuyu için (163) bağıntısı tamamen (101) bağıntısına eşdeğerdir, yani, kare kuyu için

$$r_0 = R - \frac{R^3}{3a^2} - \frac{1}{k_0^2 a}$$

olur. $a \rightarrow \infty$ için, yâni $a \rightarrow 0$ için, $r_0 \rightarrow R$ olur. Bu sebepten, bağlı hâlin bağ enerjisinin sıfır limiti için etkin menzil kare kuyu menziline eşittir. Singlet ve triplet $n-p$ saçılması için r_0 ın değerleri (73), (108), (133), ve (137) deneysel sonuçlarından çıkartılabilir. Noyes (1963) tarafından bulunan sonuçlar şöyledir:

$$r_{os} = 2,51 \pm 0,11 \text{ fm}, \quad r_{ot} = 1,727 \pm 0,014 \text{ fm}$$

Singlet etkin menzil, $p-p$ saçılmasına ait olan (NOYES, 1964)

$$r_{pp} = 2,746 \pm 0,014 \text{ fm}$$

değerinden kesinlikle farklıdır. Bu sebepten, çekirdek kuvvetleri tamamen yükten bağımsız değildir.

Bu yaklaşıklık içerisinde herhangi bir enerjideki saçılma tesir kesiti iki parametre ile verilir : a **Fermi saçılma uzunluğu** ve r_0 **etkin menzili**. Böylece deney sonuçları, iki parametre ile verilen herhangi bir şekildeki potansiyele yüksek bir doğruluk derecesinde uygulanabilir. Bu iki parametreye genellikle potansiyelin derinliği ve menzili adı verilir.

En çok kullanılan potansiyeller şunlardır:

$$\text{Kare kuyu,} \quad r < R_K, V = -V_K; \quad r > R_K, V = 0 \quad (164)$$

$$\text{Gausyen kuyu,} \quad V = -V_G e^{-\frac{r^2}{R_G^2}} \quad (165)$$

$$\text{Üstel kuyu,} \quad V = -V_U e^{-\frac{r}{R_U}} \quad (166)$$

$$\text{Yukawa kuyusu,} \quad V = -V_Y \frac{R_Y}{r} e^{-\frac{r}{R_Y}} \quad (167)$$

Bunlar arasında yalnız Yukawa kuyusunun teorik bir değeri vardır, diğerleri matematiksel basitliklerinden dolayı seçilmişlerdir. İlk ikisine kısa kuyruklu potansiyeller adı verilir, yâni bunlar $R > r$ için çok çabuk azalırlar, diğer ikisi uzun kuyruklu potansiyellerdir.

Yukardaki ifâdelerdeki sâbitler aynı saçılma uzunluğu ile aynı etkin menzili verecek şekilde ayarlanmalıdır. Bu ayarlama Fermi saçılma uzunluğunun bir fonksiyonudur. Aşağıda bağlı hâlin sıfır bağ enerjisine tekabül eden sonsuz bir saçılma uzunluğu için hesaplanan değerler verilmiştir. Bu, singlet hâl için çok iyi bir yaklaşıktır ve triplet hâl için de oldukça iyidir. Bahis konusu değerler kare kuyu sâbitleri cinsinden şöyledir:

$$\begin{aligned} V_G &= 2,24 V_K, & R_G &= 0,706 R_K \\ V_U &= 7,36 V_K, & R_U &= 0,282 R_K \\ V_Y &= 3,07 V_K, & R_Y &= 0,472 R_K \end{aligned} \quad (168)$$

Sıfır enerjili parçacıkların saçılması yalnız bir parametreye, yâni sadece, saçıcı potansiyelin şeklinden bağımsız olan saçılma uzunluğuna bağlı olduğundan; çok küçük enerjiler göz önüne alındığı zaman potansiyelin derinliği ile menzili arasında, şeklinden bağımsız olan bir bağıntı olmalıdır. Bunu göstermek için, (150) dalga denklemini yazalım:

$$u'' + k^2 u - U(r) u = 0 \quad (169)$$

ve bunu aynı enerjideki

$$u_0'' + k^2 u_0 = 0 \quad (170)$$

serbest parçacık denklemi ile karşılaştıralım. Bu dalga fonksiyonlarına ait sınır şartları şöyledir:

$$u(0) = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad (171)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ için : } u(r) \cong A \sin(kr + \delta), \quad u_0(r) \cong A \sin kr$$

(169) u u_0 ile ve (170) i u ile çarpıp taraf tarafa çıkaralım:

$$u_0 u'' - u u_0'' = u_0 U u$$

Bu denklemin her iki yanını 0 dan ∞ a kadar integre edelim:

$$\int_0^{\infty} u_0 U u dr = \left[u_0 u' - u u_0' \right]_0^{\infty}$$

Sınır şartlarını da kullanırsak

$$\int_0^{\infty} u_0 U u dr = A^2 k \sin [kr - (kr + \delta)]$$

$$\int_0^{\infty} u_0 U u dr = -A^2 k \sin \delta \quad (172)$$

elde edilir.

Buraya kadar yaklaşıklık yapılmadı. r artarken hızla $U(r) \rightarrow 0$ olduğundan, $u(r)$ ve $u_0(r)$ nin yalnız küçük r lere ait değerlerini bilmek yeter. Eğer sadece küçük enerjiler göz önüne alınırsa, âşikâr olarak $r \cong 0$ civarında $u_0(r) \cong Akr$ alınabilir. Diğer yandan, ortalama potansiyel için:

$$\text{Ort. } U(r) = \frac{M}{\hbar^2} \text{Ort. } V(r) \cong -\frac{M}{\hbar^2} V_0 = -k_0^2 \text{ veyâ } k_0 \cong [-\text{Ort. } U(r)]^{1/2}$$

olduğundan; (97) ye bakarak ve küçük enerjiler için $K \cong k_0$ olduğundan

$$u(r) \cong A' \sin k_0 r$$

veyâ küçük r ler için

$$u(r) \cong A' k_0 r$$

yazılabilir. u dalgası bir birleşme uzaklığından sonra u_0 serbest dalgası ile birleşir; bu birleşme uzaklığı çeyrek dalga boyundan biraz daha fazladır, yâni, birleşme uzaklığında (82) de olduğu gibi $k_0 r \cong \frac{\pi}{2}$ yazılabilir. Şimdi kuvvet menzilin Fermi saçılma uzunluğundan çok daha küçük olduğunu farz edelim; bu kabul singlet saçılma için iyi bir yaklaşıklık olmakla beraber triplet saçılma için kaba bir yaklaşıklıktır, ve bu durum (141) ile (139) un ve (140) ile (138) in karşılaştırılmasından görülebilir. O halde, $r \ll |a|$ veyâ $kr \ll |ka|$ yazılabilir. (93') bağıntısına göre $\delta \cong -ka$ veyâ $|\delta| \cong |ka|$ olduğundan $kr \ll |\delta|$ elde edilir. Diğer yandan, birleşme uzaklığı için

$$A' \sin k_0 r = A \sin (kr + \delta)$$

yazılabilir; burada yukarıda görüldüğü gibi $k_0 r \cong \frac{\pi}{2}$ ve $kr \ll \delta$ koyulacak olursa

$$A' \cong A \sin \delta$$

elde edilir, yani, $u(r) \cong Ak_0 r \sin \delta$ dır. Bu ve $u_0(r) \cong Akr$ ifâdesi (172) de yerlerine yazılırsa

$$A^2 k k_0 \sin \delta \int_0^{\infty} r^2 U(r) dr = - A^2 k \sin \delta$$

veyâ

$$\int_0^{\infty} r^2 U(r) dr = - \frac{1}{k_0} \quad (173)$$

sonucuna varılır. Böylece, alçak enerjilere ait saçılma, saçılma potansiyelinin hacim integralini tayin eder; veyâ başka bir deyimle, saçılmış dalganın potansiyelin içindeki ortalama dalga boyunu tayin eder. Bu sonuçlar (168) deki muhtelif potansiyeller için ve singlet hâl için kontrol edilebilir. Bu yapılmış ve iyi bir uygunluk bulunmuştur.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

III.1. Eğer döteronlar protonlar tarafından saçılırlarsa maksimum saçılma açısının laboratuvar sisteminde 30° ve kütle merkezi sisteminde 120° olduğunu gösteriniz. Fakat protonlar döteronlar tarafından saçılırlarsa maksimum saçılma açısının her iki sistemde de 180° olduğunu gösteriniz.

III.2. (79) bağıntılarını kullanarak, bir döterondaki iki nükleonun birbirlerinin kuvvet menzilleri içerisinde bulunma ihtimâlinin yaklaşık olarak 0,368 olduğunu gösteriniz. Bu hesabın yapılmasında (73) ve (140) deneysel değerlerini kullanınız ve $\hbar^2/M = 41,47 \text{ MeV} \times \text{fm}^2$ olduğuna dikkat ediniz.

III.3. (83) denklemini $l = 1$ için küresel Bessel fonksiyonları cinsinden çözerek ve saçılmaya ait sınır şartlarını kullanarak, bir kare kuyu potansiyeli için

$$\begin{aligned} r < R \text{ için : } u &= A_1 [(Kr)^{-1} \sin Kr - \cos Kr], \\ r > R \text{ için : } u &= A_2 [(kr)^{-1} \sin (kr + \delta_1) - \cos (kr + \delta_1)], \end{aligned} \quad (174)$$

radial dalga fonksiyonunun P -dalga saçılmasını temsil ettiğini gösteriniz. Aynı zamanda, $r = R$ için süreklilik şartının

$$K^2 [kR \cotg (kR + \delta_1) - 1] = k^2 [KR \cotg KR - 1] \quad (175)$$

olduğunu gösteriniz.

III.4. (98), (140) ve (175) bağıntılarını kullanarak saçılma enerjilerinin $E_{\text{cm}} = 0 - 10 \text{ MeV}$ aralığındaki değerleri için δ_0 ve δ_1 faz kaymalarını hesaplayınız. Böylece

$$\sigma_{l=0} = 4\pi k^{-2} \sin^2 \delta_0 \quad \text{ve} \quad \sigma_{l=1} = 12\pi k^{-2} \sin^2 \delta_1$$

in E_{cm} nin bir fonksiyonu olarak grafiğini çiziniz, ve $\sigma_{l=1}$ in toplam tesir kesiti- nin yüzde biri olduğu enerjiyi bulunuz.

III.5. (162) ve (163) bağıntıları yardımı ile (101) bağıntısını gerçekleştiriniz.

III.6. Döteronun temel halinin izo-spininin $T = 0$ olduğunu ispatlayınız. (Yol gösterme: Döteronun dalga fonksiyonunun simetri özelliğini kullanınız.)

III.7. Döteronun bağ enerjisinin kullanılması ile triplet $n-p$ potansiyelinin hacim integralinin tayin edilebileceğini gösteriniz. (Yol gösterme: (81') bağıntısını ve (168) bağıntısından sonra ileri sürülen gerekçeleri kullanınız.)

III.8. İki parçacıklı bir sistem için izafî hareketin momentumunun kütle merkezi sisteminde parçacıklardan herbirinin sahip olduğu momentuma eşit olduğunu gösteriniz.

III.9. Döteronun temel halini belirleyen Schrödinger denkleminin radyal kısmı olan (71) denkleminin $u(0) = 0$ sınır şartına uygun çözümü, $\alpha > \beta$ olmak üzere,

$$u(r) = \exp(-\beta r) - \exp(-\alpha r)$$

ile verilmiştir.

a) Bu dalga fonksiyonunun tekabül ettiği merkezî potansiyeli ve döteronun bağ enerjisini α ve β cinsinden bulunuz.

b) Bahis konusu potansiyelin etkin menzilini α ve β cinsinden bulunuz. Döteron için sayısal uygulama olarak, $\beta^{-1} = 4,28$ fm için α/β oranı ne olmalıdır ki etkin menzilin değeri $r_0 = 1,70$ fm olsun? Buna göre, döteronun bağ enerjisinin sayısal değeri nedir?

IV. BÖLÜM

ÇEKİRDEK MODELLERİ

İki cisimli sistemin incelenmesinden kazanılan çekirdek kuvvetleri hakkındaki ayrıntılı bilgi, çok büyük matematiksel güçlüğünden dolayı, çok cisimli sisteme doğrudan doğruya uygulanamaz. Bu problem şüphesiz yalnız çekirdek fiziğine özel değildir, ve meselâ, bir sıvı damlasının, bir hacmi dolduran gazın, ağır bir atomun, gezegenler sisteminin ve daha başka birçok hallerin incelenmesinde de ortaya çıkar. Bu hallerden bazılarında, meselâ yukarıda zikredilenlerin ilk ikisinde, parçacıkların sayısı o kadar büyüktür ki *statistik metotlar kullanılabilir* ve çok iyi sonuçlar verir. Diğer hallerde, meselâ yukarıda zikredilenlerin son ikisinde, bir kuvvet merkezi vardır ve bu merkezle sisteme ait parçacıkların arasındaki kuvvetler parçacıklardan herhangi ikisi arasındaki kuvvetlerden çok daha kuvvetlidir, ve bu sonuçlar sonradan esas kuvvet üzerindeki küçük pertürbasyonlar halinde incelenebilir. Bir çekirdekte *statistik bir inceleme için çok az sayıda parçacık vardır*, ve nükleonlar arasındaki kuvvetlerin küçük pertürbasyonlar hâlinde incelenebilmesini sağlayan hiç bir olağanüstü kuvvet merkezi yoktur. Bu sebepten fizikçiler çekirdek modelleri metodunu kullanmak zorunda kalmışlardır. Bu modellerde çekirdek "sanki" bir gaz, bir sıvı damlası, bir atom veya herhangi bir başka şey imiş gibi incelenmiştir. Hiç bir model tek başına çekirdekler hakkında bilinen bütün özellikleri açıklayamaz, ve bu sebepten bu modellerin bir kısmı sırası ile incelenecektir.

(IV. 1) DEJENERE GAZ MODELİ

Eğer nükleon çiftlerinin arasındaki kuvvetler ihmal edilirse, ve nükleonlardan her birine tesir eden toplam kuvvet, bütün nükleonların belirli V hacmine sahip $R = r_0 A^{1/3}$ yarı çapındaki bir küre içine hapsedilmiş olması ile belirlenirse, bu takdirde çekirdek kendisini teşkil eden parçacıkların bahis konusu küresel kap içerisinde serbestçe hareket edebildiği bir gaz olarak incelenebilir. Böyle bir inceleme ile çekirdek tamamen dejenere bir gaz olarak ortaya çıkar ve klâsik

$$\left. \begin{aligned} 2ME &= p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ p_x &= \hbar k_x, \quad p_y = \hbar k_y, \quad p_z = \hbar k_z, \quad p = \hbar k \\ \frac{2M}{\hbar^2} E &= k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

bağıntıları kullanılırsa (1) denklemini

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \psi = 0 \quad (1')$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer (1') denkleminde

$$\psi(x, y, z) = u(x) v(y) w(z)$$

koyulacak ve her iki taraf ψ ye bölünecek olursa

$$\left(\frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dx^2} + k_x^2 \right) + \left(\frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dy^2} + k_y^2 \right) + \left(\frac{1}{w} \frac{d^2 w}{dz^2} + k_z^2 \right) = 0$$

değişkenlere ayrılmış denklemini bulunur. Böylece aşağıdaki âdî diferansiyel denklemler ve genel çözümleri elde edilir:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k_x^2 u = 0 \rightarrow u = B_1 \cos k_x x + B_2 \sin k_x x$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + k_y^2 v = 0 \rightarrow v = C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + k_z^2 w = 0 \rightarrow w = D_1 \cos k_z z + D_2 \sin k_z z$$

Böylece (1') denkleminin genel çözümü

$$\psi = A(B \cos k_x x + \sin k_x x) (C \cos k_y y + \sin k_y y) (D \cos k_z z + \sin k_z z)$$

şeklinde yazılabilir, şüphesiz daima $A \neq 0$ olmalıdır. Parçacıklardan her biri kübün içerisine hapsedilmiş olduğundan, dalga fonksiyonu kübün altı duvarının herbirinde sıfır olmalıdır:

$$\psi(0, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, y, 0) = 0$$

$$\psi(L, y, z) = \psi(x, L, z) = \psi(x, y, L) = 0$$

Bu sınır şartlarından ilk üçü kullanılırsa

$$0 = \psi(0, y, z) = AB(C \cos k_y y + \sin k_y y) (D \cos k_z z + \sin k_z z) \rightarrow B = 0$$

$$0 = \psi(x, 0, z) = AC(B \cos k_x x + \sin k_x x) (D \cos k_z z + \sin k_z z) \rightarrow C = 0$$

$$0 = \psi(x, y, 0) = AD(B \cos k_x x + \sin k_x x) (C \cos k_y y + \sin k_y y) \rightarrow D = 0$$

elde edilir. O halde (1') nün çözümü

$$\psi = A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z \quad (3)$$

şeklini alır. Şimdi de yukardaki sınır şartlarından son üçü kullanılırsa

$$0 = \psi(L, y, z) = A \sin k_x L \sin k_y y \sin k_z z \rightarrow \sin k_x L = 0 \rightarrow k_x L = \pi n_x$$

$$0 = \psi(x, L, z) = A \sin k_x x \sin k_y L \sin k_z z \rightarrow \sin k_y L = 0 \rightarrow k_y L = \pi n_y$$

$$0 = \psi(x, y, L) = A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z L \rightarrow \sin k_z L = 0 \rightarrow k_z L = \pi n_z$$

veyâ

$$k_x = \frac{\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{L} n_z \quad (4)$$

elde edilir, ve burada n_x, n_y, n_z pozitif tam sayılardır. (Negatif tam sayılar yeni çözümler vermez). (4) bağıntıları (2) bağıntılarının sonuncusunda yerine yazılırsa gazın

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ML^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (5)$$

şeklindeki kuvantize enerji seviyeleri elde edilir. Enerjileri E den veyâ momentumları p den veyâ dalga sayıları k dan küçük olan haller

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 < k^2, \quad \text{yâni} \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 < \frac{L^2}{\pi^2} k^2 \quad (6)$$

ile verilir. Bu eşitsizliği sağlayan farklı (n_x, n_y, n_z) kombinasyonlarının sayısı, yarıçapı $\frac{L}{\pi} k$ olan bir kürenin bir oktanının (yâni sekizde birinin) içinde bulunan birim aralıklı bir kübik kafesin köşe noktalarının sayısı ile verilir; buradaki oktan $n_x, n_y, n_z > 0$ oluşundan ortaya çıkar. Fakat bahis konusu kübik kafesin köşe noktalarının sayısı (n_x, n_y, n_z) uzayında oktanın hacminden ibarettir. Şimdi (n_x, n_y, n_z) uzayında kartezyen koordinatlar demek olan (n_x, n_y, n_z) yerine (r, θ, φ) küresel koordinatlarını ithâl edelim :

$$n_x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad n_y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad n_z = r \cos \theta$$

Böylece

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 \quad (7)$$

yazılabilir. O hâlde (6) bağıntısı,

$$r < \frac{L}{\pi} k \quad (6')$$

şeklinde de yazılabilir. Bahis konusu oktan içerisinde bulunan ve yarıçapları r ile $r + dr$ arasında olan küre oktanları arasındaki kafes noktalarının sayısı, bu küre oktanları arasındaki hacma eşit olacağından,

$$N(r) dr = \frac{1}{8} d\left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) = \frac{1}{2} \pi r^2 dr \quad (8)$$

yazılabilir. (7) bağıntısı kullanılarak (5) bağıntısı

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ML^2} r^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntıdan

$$E^{1/2} = \frac{\pi \hbar}{2^{1/2} M^{1/2} L} r, \quad dE = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ML^2} r dr$$

bağıntıları, ve dolayısı ile

$$E^{1/2} dE = \frac{\pi^3 \hbar^3}{2^{1/2} M^{3/2} L^3} r^2 dr = \frac{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3}{M^{3/2} L^3} \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 dr$$

bağıntısı yazılabilir. Bu son bağıntı (8) bağıntısı ile karşılaştırılırsa

$$E^{1/2} dE = \frac{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3}{M^{3/2} L^3} N(r) dr$$

elde edilir. Yarıçapları r ile $r + dr$ arasında olan oktanlar arasındaki kafes noktalarının sayısı, enerjileri E ile $E + dE$ arasında olan parçacıkların sayısına eşit olmalıdır. Çünkü sistemin dejenereliği, (5) bağıntısı gereğince muhtelif (n_x, n_y, n_z) kombinasyonları için aynı bir E enerjisinin elde edilebilmesine dayanır; ve böyle belirli bir E enerjisi de belirli bir r yarı çapı verir. O hâlde

$$N(r) dr = N(E) dE$$

yazılabilir ve (9) bağıntısından

$$N(E) dE = \frac{M^{3/2} V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} E^{1/2} dE \quad (10)$$

elde edilir; burada $V = L^3$ bağıntısı kullanılmıştır.

(6) bağıntısındaki k dalga sayısı maksimum bir k_{\max} dalga sayısını ifade etmektedir ve $k^2 < k_{\max}^2$ veyâ

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 < k_{\max}^2$$

yazmak daha doğrudur. Bu maksimum k_{\max} dalga sayısına tekabül eden (maksimum) enerjiye Fermi enerjisi adı verilir ve E_f ile gösterilir. O hâlde

$$E_f = \frac{\hbar^2 k_{\max}^2}{2M}$$

yazılabilir. Her bir enerji hâlinde $\frac{1}{2}$ spinine sahip iki parçacık bulunabildiğini hatırlıyarak, E_f maksimum enerjisine kadar bütün enerjilere sahip parçacıkların toplam sayısı şöyle bulunabilir :

$$N = \int_0^{E_f} 2N(E) dE = 2 \frac{M^{3/2} V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_f} E^{1/2} dE = \frac{2^{1/2} M^{3/2} V}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{2}{3} E_f^{3/2}$$

$$N = \frac{2^{3/2} M^{3/2} V}{3 \pi^2 \hbar^3} E_f^{3/2}. \quad (10')$$

Buradan

$$\frac{N}{V} = \frac{2^{3/2} M^{3/2}}{3 \pi^2 \hbar^3} E_f^{3/2},$$

veyâ

$$E_f = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2M} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (11)$$

elde edilir. Burada $\frac{N}{V}$, parçacıkların sayısal yoğunluğudur. Şimdi sistemdeki parçacıkların toplam enerjisini bulalım; şüphesiz toplam enerji, parçacık başına ortalama \bar{E} enerjisi ile parçacıkların N toplam sayısının çarpımıdır :

$$N\bar{E} = \int_0^{E_f} 2N(E) E dE = \frac{2^{1/2} M^{3/2} V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_f} E^{3/2} dE = \frac{2^{1/2} M^{3/2} V}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{2}{5} E_f^{5/2}$$

$$E_f = N\bar{E} = \frac{2^{3/2} M^{3/2} V}{3 \pi^2 \hbar^3} E_f^{3/2} \cdot \frac{3}{5} E_f.$$

Buradan, (10') bağıntısından faydalanarak,

$$N\bar{E} = N \cdot \frac{3}{5} E_f$$

elde edilir. O hâlde, parçacık başına ortalama enerjinin ifâdesi

$$\bar{E} = \frac{3}{5} E_f \quad (12)$$

şeklinde olur. Buraya kadar sadece bir cins parçacığa ait hesaplar yapıldı. Parçacıkların toplam sayısı N olduğuna göre bu parçacıkların nötronlar oldukları söylenebilir. N yerine Z alınmak sûretiyle protonlar için de benzer formüller yazılabilir.

$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$ olduğundan, (11) bağıntısı

$$E_f = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2M} \frac{1}{\left(\frac{4}{3} \pi\right)^{2/3} r_0^2} \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3}$$

veyâ

$$E_f = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2Mr_0^2} \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $C = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2Mr_0^2}$ koyacak olursak nötronlara ve protonlara ait Fermi enerjileri

$$E_{fn} = C \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3}, \quad E_{fp} = C \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3}, \quad (13)$$

ve toplam enerjiler de

$$E_{in} = \frac{3}{5} NE_{fn} = \frac{3}{5} C \frac{N^{5/3}}{A^{2/3}}, \quad E_{ip} = \frac{3}{5} ZE_{fp} = \frac{3}{5} C \frac{Z^{5/3}}{A^{2/3}} \quad (14)$$

şeklinde olur. Burada $C \cong 52$ MeV dir.

Artık bir çekirdeğin $E(N, Z)$ toplam kinetik enerjisini veren formülü yazabiliriz:

$$E(N, Z) = E_{in} + E_{ip} = \frac{3}{5} \frac{C}{A^{2/3}} (N^{5/3} + Z^{5/3}). \quad (15)$$

Şimdi verilmiş bir A için minimum toplam kinetik enerjiyi arayalım. $N + Z = A$ olduğunu hatırlayarak

$$\delta E = \frac{3}{5} \frac{C}{A^{2/3}} \left(\frac{5}{3} N^{2/3} \delta N + \frac{5}{3} Z^{2/3} \delta Z \right)$$

veyâ

$$\delta E = \frac{C}{A^{2/3}} (N^{2/3} \delta N + Z^{2/3} \delta Z), \quad \delta N + \delta Z = 0$$

yazılabilir. Böylece,

$$\delta E = \frac{C}{A^{2/3}} (N^{2/3} - Z^{2/3}) \delta N = 0$$

şartı $N = Z = \frac{A}{2}$ şartını verir. O halde

$$E_{\min} = E\left(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}A\right) = \frac{3}{5} \frac{C}{A^{2/3}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \cong \frac{3}{5} 2^{1/3} C \frac{A}{2} \cong \frac{3}{5} \frac{C}{2^{2/3}} A \quad (16)$$

veyâ

$$E_{\min} \cong 20 A \text{ MeV} \quad (16')$$

elde edilir. Böylece, minimum toplam kinetik enerji hâlinde çekirdekteki bir nükleonun ortalama kinetik enerjisi 20 MeV olur. Diğer yandan, (13) ve (14) bağıntılarına nazaran $E_{fn} = E_{fp} = E_f$ ve $E_{in} = E_{ip} = \frac{1}{2} E_t$ olacağından, $E(N, Z) \cong E_t = \frac{3}{5} A E_f$ ve gene $\bar{E} = \frac{3}{5} E_f$ olur. O hâlde, nükleon başına maksimum kinetik enerji $E_f = \frac{5}{3} \bar{E} = \frac{100}{3} \cong 33 \text{ MeV}$ olur. Bu sonuç, dalga boylarını düşünerek elde edilen sonuçlardan biraz daha büyüktür. [(II.9) bağıntısına bakınız]. Orta ve ağır çekirdeklerde son nükleonun bağ enerjisinin 8 MeV kadar olduğuna dikkat edilirse, ortalama potansiyel kuyusunun derinliği yaklaşık olarak 41 MeV olur.

Yukardaki hesaplar bir izobara ait minimum toplam kinetik enerji için yapıldı. Minimum toplam kinetik enerji için çekirdek en kararlı hâldedir ve $Z = N = \frac{A}{2}$ için gerçekleşir; o hâlde, nötron veya proton fazlalığı olmadığı zaman çekirdek en kararlı hâlde bulunur. Eğer bir nötron veya proton fazlalığı varsa toplam kinetik enerji minimum toplam kinetik enerjiden itibaren bir miktar artar. Şimdi bu artmayı verilmiş bir izobar için, yâni, verilmiş bir A için hesaplayalım. Eğer bahis konusu artma f_A ile gösterilirse

$$f_A = E(N, Z) - E_{\min} = E(N, Z) - \left(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}A\right)$$

yazılabilir; bu ifâdede (15) ve (16) bağıntıları yerlerine yazılırsa

$$f_A = \frac{3}{5} \frac{C}{A^{2/3}} \left[N^{5/3} + Z^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \right]$$

elde edilir. Şimdi nötron fazlalığını D ile gösterelim; o hâlde $D = \frac{1}{2}(N-Z)$ yazılabilir. Bu bağıntı ile $A = N + Z$ bağıntısından N ve Z çözümlerse

$$N = \frac{1}{2}A + D, \quad Z = \frac{1}{2}A - D$$

bulunur. O hâlde,

$$f_A = \frac{3}{5} \frac{C}{A^{2/3}} \left[\left(\frac{1}{2} A + D \right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2} A - D \right)^{5/3} - 2 \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} \right]$$

sonucuna varılır. Herhangi bir gerçek çekirdek için D küçük olduğundan, f_A yı D^2 ye kadar seriye açabiliriz. Eğer

$$F(t) \equiv t^{5/3}$$

$$\left(\frac{1}{2} A + D \right)^{5/3} \equiv F \left(\frac{1}{2} A + D \right)$$

vaz edilirse, F fonksiyonu $\frac{1}{2} A$ civarında Taylor serisine açılabilir:

$$F \left(\frac{1}{2} A + D \right) \equiv F \left(\frac{1}{2} A \right) + DF' \left(\frac{1}{2} A \right) + \frac{1}{2} D^2 F'' \left(\frac{1}{2} A \right)$$

Diğer yandan,

$$F(t) = t^{5/3}, \quad F'(t) = \frac{5}{3} t^{2/3}, \quad F''(t) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{-1/3}$$

olduğundan,

$$\left(\frac{1}{2} A + D \right)^{5/3} \equiv \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} + D \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} A \right)^{2/3} + \frac{1}{2} D^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} A \right)^{-1/3}$$

ve benzer şekilde

$$\left(\frac{1}{2} A - D \right)^{5/3} \equiv \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} - D \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} A \right)^{2/3} + \frac{1}{2} D^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} A \right)^{-1/3}$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\frac{1}{2} A + D \right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2} A - D \right)^{5/3} \equiv 2 \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} + D^2 \cdot \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2} A \right)^{-1/3}$$

veyâ

$$\left(\frac{1}{2} A + D \right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2} A - D \right)^{5/3} - 2 \left(\frac{1}{2} A \right)^{5/3} \equiv \frac{10}{9} \left(\frac{1}{2} A \right)^{-1/3} D^2 \equiv \frac{10 \cdot 2^{1/3}}{9} \frac{D^2}{A^{1/3}}$$

bulunur. O hâlde,

$$f_A \equiv \frac{3 \cdot 10 \cdot 2^{1/3}}{5 \cdot 9} \cdot \frac{C}{A^{2/3}} \cdot \frac{D^2}{A^{1/3}}$$

veyâ

$$f_A \equiv \frac{1}{3} \cdot 2^{4/3} C \frac{D^2}{A}$$

veyâ

$$f_A \cong \frac{1}{3} \cdot 2^{4/3} C \frac{\left(\frac{1}{2} A - Z\right)^2}{A} \cong 44 \frac{\left(\frac{1}{2} A - Z\right)^2}{A} \text{ MeV} \quad (17)$$

elde edilir. f_A daima pozitiftir, yâni, E_{\min} gerçekten minimum toplam kinetik enerjidir. Diğer yandan, potansiyel kuyusunun derinliği N , Z ve A dan bağımsız olduğu için, $N=Z=\frac{A}{2}$ şartını sağlayan çekirdek en küçük enerjiye sahip olan izobardır.

D nin ifadesi ile (II.83') karşılaştırılacak olursa $T_3 = -D$ ilginç sonucu elde edilir. O halde (17) bağıntısı

$$f_A = 44 \frac{T_3^2}{A} \quad (17')$$

şeklinde de yazılabilir, yani, minimum enerjiye nazaran artmalar izo-spinin karesiyle orantılıdır.

Buraya kadar protonlar arasındaki Coulomb etkileşmesi ihmal edildi. Üni-form olarak elektrikle yüklü çekirdek yarıçapı R olan bir küre şeklinde ise, çekirdek içerisindeki protonlardan her biri

$$V = \frac{Z e}{2 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

elektrostatik potansiyeli altında hareket eder. Bu da proton kuyusunun dibini nötron kuyusunun dibine nazaran eV kadar yükseltir. $R = r_0 A^{1/3}$ olduğunu hatırlayarak

$$eV = \frac{Z e^2}{2 r_0 A^{1/3}} \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2 A^{2/3}} \right) \quad (18)$$

yazılabilir. Ağır bir çekirdek için bu fark oldukça büyüktür. Meselâ, ^{208}Pb için elektrostatik potansiyel merkezde 25 MeV den çekirdek yüzeyinde 16 MeV e kadar değişir. Bu sebepten ağır bir çekirdekte protonların sayısı nötronların sayısından daha azdır.

(IV.2) YARI-AMPİRİK KÜTLE FORMÜLÜ

Bir çekirdeğin toplam kütesini veyâ toplam bağ enerjisini veren yarı-ampirik formül çıkarılırken şu esaslar göz önünde tutulur:

- Çekirdek maddesi sıkıştırılmaz ve üniform bir yoğunluğa sahiptir.
- Çekirdek kuvvetleri spinlerden ve yüklerden bağımsızdır.
- Herhangi bir nükleona ait çekirdek kuvveti yalnız en yakın komşusuna bir etki yapabilir, yani kısa menzillidir.

(c) ye göre bir çekirdekdeki toplam çekirdek kuvvetleri enerjisi nükleonların toplam sayısı ile, yâni A ile orantılıdır. Halbuki çekirdek kuvvetleri uzun menzilli olsaydı toplam nükleer enerji $\frac{1}{2} A (A - 1)$ ile orantılı olacaktı, yâni öncesinden çok daha büyük olacaktı. Çekirdek kuvvetlerinin kısa menzilli oluşları ile ilgili olan bu özelliğe doyma özelliği adı verilir, ve bu özellik bir sıvıdaki moleküller arası kuvvetlerin özelliklerine çok benzer. Böylece, bir çekirdeğin toplam enerjisini veren bir formül, en önemli terimleri bir sıvı damlasına benzerlikten ve daha ince ayrıntıları da çekirdeğin kuvantum tabiatına dayanan gaz modelinden elde edilerek çıkarılabilir. Böyle bir formülde birkaç sayısal sabitin, formülün deneysel sonuçlara uygulanması ile tayini gerekir. Bununla, beraber, bu sabitler dahi hiç değilse büyüklük mertebeleri bakımından teoriden çıkarılabilir.

Sıvı damlasına benzerlik, formülün ilk üç terimini verir. İlk terim toplam kütle enerjisidir (burada gene yüksüz atomların kütleleri göz önüne alınacak ve atomik kütle birimi cinsinden ifade edilecektir):

$$M_1 = M_p Z + M_n (A - Z) = 1,008658 A - 0,000839 Z. \quad (19)$$

Bundan, çekirdekdeki parçacıkların sayısı ile orantılı olan nükleonların bağ enerjisi (sıvı damlasının yoğunlaşma ısısı) çıkarılmalıdır ve bu da ikinci terimidir:

$$M_2 = - a_1 A. \quad (20)$$

M_2 düzeltmesi gerçekte olduğundan daha büyüktür, çünkü yüzeye yakın nükleonlar çekirdek hacminin iç kısmındakilere nazaran daha gevşek bağlanmışlardır. Bu yüzey geriliminin enerjisi toplam çekirdek yüzeyinin alanı (yüz ölçümü) ile orantılıdır, pozitifdir ve üçüncü terimi verir:

$$M_3 = a_2 A^{2/3}. \quad (21)$$

Bundan sonra gelen dördüncü terim protonların elektrostatik itme enerjisidir. Çekirdeğin içerisinde yük dağılımının homogen olduğu farz edilirse, yük yoğunluğu sabit bir ρ değerine sahip olur ve çekirdeğin içindeki herhangi bir noktadaki elektrostatik potansiyel

$$V = \frac{2\pi}{3} \rho R^2 \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

olur. O hâlde, çekirdeğin elektrostatik potansiyel enerjisi

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int V \rho d\tau = \frac{1}{2} \rho \int_0^R \frac{2\pi}{3} \rho R^2 \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi^2}{3} \rho^2 R^2 \int_0^R \left(3r^2 - \frac{r^4}{R^2} \right) dr \end{aligned}$$

$$E_c = \frac{4\pi^2}{3} \rho^2 R^2 \left(R^3 - \frac{1}{5} R^3 \right)$$

$$= \frac{16\pi^2}{15} \rho^2 R^5$$

olur. Diğer yandan yük yoğunluğu

$$\rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$$

şeklindedir. Buradan

$$\rho^2 = \frac{9Z^2 e^2}{16\pi^2 R^6}, \quad \frac{16\pi^2}{15} \rho^2 = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R^6}$$

bulunur ve yerine yazarak

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R}$$

elde edilir. O hâlde, $R = r_0 A^{1/3}$ olduğunu hatırlıyarak,

$$M_4 = a_3 \frac{Z^2}{A^{1/2}} \quad (22)$$

elde edilir, burada

$$a_3 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \quad (23)$$

vaz edilmiştir. a_3 ü veren ifade şöyle de yazılabilir:

$$a_3 = \frac{3}{5} \frac{1}{r_0} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{\hbar}{m_e c} \cdot \frac{m_e}{M} \cdot Mc^2$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{386}{1.2} \cdot \frac{1}{1837} u$$

$$\cong 0,000767 u \quad (24)$$

Burada aşağıdaki sabitler kullanılmıştır:

$$\text{ince yapı sabiti: } \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$\text{indirgenmiş Compton dalga boyu: } \frac{\hbar}{m_e c} = 386 \text{ fm.}$$

$$\text{nükleonun kütlesinin elektronun kütlesine oranı: } \frac{M}{m_e} = 1837.$$

Formülün son iki terimi gaz modelinden çıkarılabilir. $N = Z = \frac{1}{2} A$ için çekirdeğin izobarlarının arasında en kararlı olanının elde edildiğini görmüştük. O hâlde, nötron veya proton fazlalığı için bir düzeltme terimi eklenmelidir. Böylece (17) ye benzer şekilde beşinci terim şöyle yazılabilir:

$$M_5 = a_4 \frac{\left(\frac{1}{2} A - Z\right)^2}{A} \quad (25)$$

Buraya kadar bütün terimlerin N ve Z nin sürekli fonksiyonları oldukları görülmektedir. Bununla beraber, eğer çekirdekte tek sayıda nötron varsa, en yüksek enerji hâli tam dolu değildir, ve böylece müteakip nötron bu hâli doldurmaya gidecektir. Yâni, sürekli (yumuşak) artmalara nazaran, bir çift-çift çekirdeğin daha az enerjisi ve bir tek-tek çekirdeğin daha fazla enerjisi olacaktır. Böylece, altıncı terim aşağıdaki gibi enerjinin süreksiz (basamaklı) artmalarını verecektir:

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} +f(A) ; A \text{ çift, } Z \text{ tek ise (tek-tek çekirdek)} \\ 0 ; A \text{ tek ise (çift-tek veya tek-çift çekirdek)} \\ -f(A) ; A \text{ çift, } Z \text{ çift ise (çift-çift çekirdek)} \end{cases} \quad (26)$$

$f(A)$ nın muhtemel bir şekli tabii olarak gaz modelinden elde edilebilir. Âşikâr olarak, bir (N, Z) çift-çift çekirdeğinin enerjisi, $(N-1, Z)$ tek-çift çekirdeğinin enerjisine nazaran mutlak değerce

$$E_{fn}(N) - E_{fn}(N-1)$$

kadar daha fazla olacaktır ve bu da $f(A)$ nın ifâdesidir. (13) bağıntılarından birincisini kullanarak

$$f(A) = \frac{C}{A^{2/3}} N^{2/3} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{2/3} \right]$$

elde edilir; yuvarlak parantezi $N \gg 1$ için birinci mertebeden seriye açarak

$$f(A) \cong \frac{C}{A^{2/3}} N^{2/3} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{1}{N} \right) \right]$$

veyâ

$$f(A) \cong \frac{2}{3} \frac{C}{A^{2/3}} \frac{1}{N^{1/3}} \quad (27)$$

bulunur. $N \cong \frac{1}{2} A$ olduğundan

$$f(A) = \frac{1}{3} \cdot 2^{4/3} \frac{C}{A} = \frac{44}{A} \text{ MeV} \quad (28)$$

sonucuna varılır. O hâlde

$$f(A) = \frac{a_5}{A} \quad (29)$$

olması beklenir. Fakat bu kadar ince bir düzeltmenin gaz modeli tarafından doğru olarak verilmesi beklenemez, ve bu sebepten deneysel sonuçlara yalnız a_5 sabiti uygulanmaz, fakat ampirik olarak bütün $f(A)$ fonksiyonu uygulanır.

Bütün terimlerin bir araya getirilmesi ile yarı-ampirik kütle formülü adı ile bilinen şu formül elde edilir:

$$M(A, Z) = M_n A - (M_n - M_p) Z - a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{\left(\frac{1}{2} A - Z\right)^2}{A} + \delta(A, Z) \quad (30)$$

Artık buradan itibaren a_1, a_2, a_3, a_4 sabitleri ile $f(A)$ fonksiyonu deney sonuçlarına uygulanabilir. Aşağıda verilen sayısal değerler Green (1954) tarafından hesaplanmıştır.

Verilmiş bir A için $M(A, Z)$ nin, Z nin bir fonksiyonu olarak minimumu kararlı izobara tekabül eder. O halde, kararlı izobarlar

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = 0 = -(M_n - M_p) + 2a_3 \frac{Z}{A^{1/3}} - a_4 \frac{A - 2Z}{A} \quad (31)$$

bağıntısı ile verilir. (17) ye göre $a_4 \cong 44 \text{ MeV} \cong 0,047 u$ ve (24) e göre de $2a_3 \cong 0,001534 u$ olduğundan, $M_n - M_p \cong 0,00084 u$ ihmal edilebilir. Böylece,

$$\frac{2a_3}{a_4} \frac{Z}{A^{1/3}} = 1 - 2 \frac{Z}{A}$$

veyâ

$$\frac{2a_3}{a_4} A^{2/3} = \frac{A}{Z} - 2$$

veyâ

$$Z = \frac{A}{2 + \frac{2a_3}{a_4} A^{2/3}} \quad (32)$$

elde edilir. Kararlı izotoplara ait deneysel (A, Z) değerleri (32) denkleminde (en küçük kareler metodu ile) uygulanırsa

$$\frac{2a_3}{a_4} = 0,014989 \quad (33)$$

elde edilir.

Geri kalan a_1 , a_2 , ve a_4 sabitleri, tek A lı kararlı çekirdeklere ait deneysel sonuçların (30) denkleminde uygulanması ile tayin edilebilir ve u cinsinden aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$a_1 = 0,0169172, \quad a_2 = 0,019115, \quad a_3 = 0,0007626, \quad a_4 = 0,10175. \quad (34)$$

a_3 için elde edilen değer (24) değerine iyi uymaktadır; halbuki (24) değeri, çekirdeğin üniform bir yük dağılımına sahip olduğu ve $r_0 = 1,2$ fm olduğu kabul edilerek bulunmuştu.

Bundan sonra çift A lı kararlı çekirdeklere ait deneysel sonuçların kullanılması ile $f(A)$ tayin edilebilir. Eğer $f(A)$, (29) şeklinde ise,

$$a_5 = 0,140 u \quad (35)$$

elde edilir. Fakat eğer fonksiyonun kendisi deneysel sonuçlara uygulanırsa, aşağıdaki sonuçlardan biri elde edilir:

$$f(A) = \frac{0,010}{A^{1/2}} u \quad (36)$$

veyâ

$$f(A) = \frac{0,036}{A^{3/4}} u \quad (37)$$

O halde, $M(A, Z)$ nin bütün ifâdesi şöyle olur:

$$M(A, Z) = 1,008658 A - 0,000839 Z - 0,016917 A + 0,019115 A^{2/3} + \\ + 0,0007626 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + 0,10175 \frac{\left(\frac{1}{2} A - Z\right)^2}{A} + \delta(A, Z) \quad (38)$$

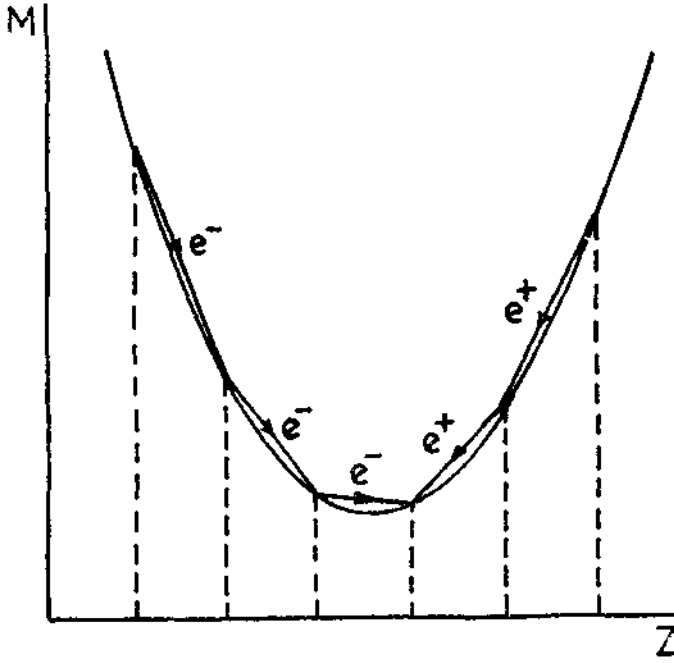
Bazen bağ enerjisini veren formül daha faydalıdır. (II.1) ile verilen

$$B(A, Z) = c^2 [M_n A - (M_n - M_p) Z - M(A, Z)]$$

bağıntısını hatırlıyarak MeV cinsinden

$$B(A, Z) = 15,753 A - 17,804 A^{2/3} - 0,7103 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 94,77 \frac{\left(\frac{1}{2} A - Z\right)^2}{A} - \delta(A, Z) \quad (39)$$

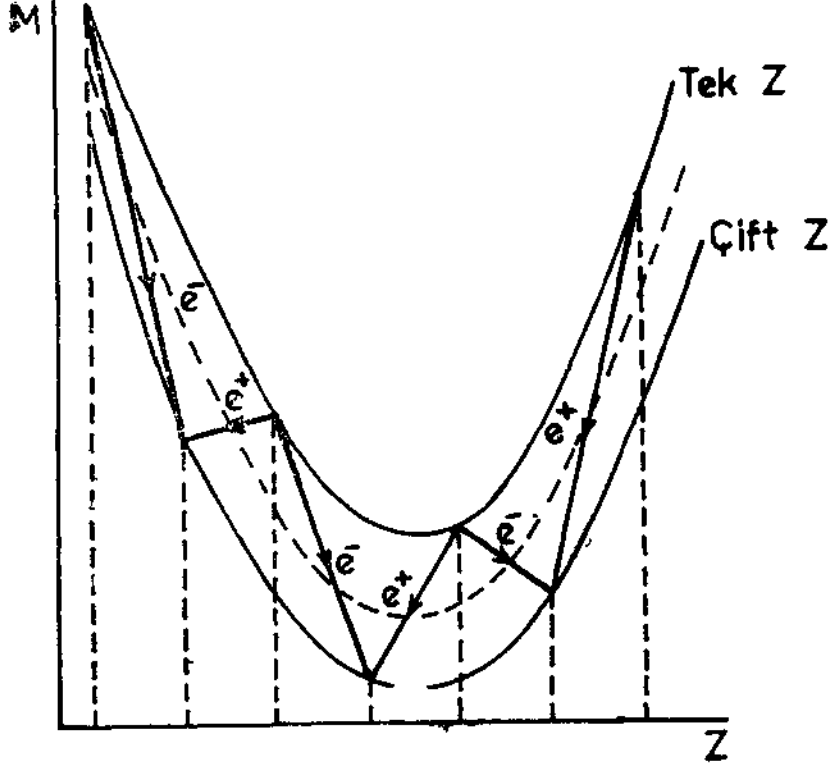
bulunur; burada $\delta(A, Z) = \pm \frac{33,6}{A^{3/4}}$ veya 0 dır. Âşikâr olarak (39) formülünü deney sonuçları ile karşılaştırmak (38) i karşılaştırmaktan daha uygundur, çünkü deneyle olan küçük farklar (38) deki ilk iki büyük terim tarafından örtülür. (39) formülünün $A > 15$ için deneysel değerlere yüzde 1 den daha az bir farkla uyduğu bulunmuştur, ve birbirlerinden A kütle sayıları bakımından çok farklı olmayan çekirdeklerin bağ enerjileri arasındaki fark yüzde 0,1 den daha az bir hatâ ile verilir.



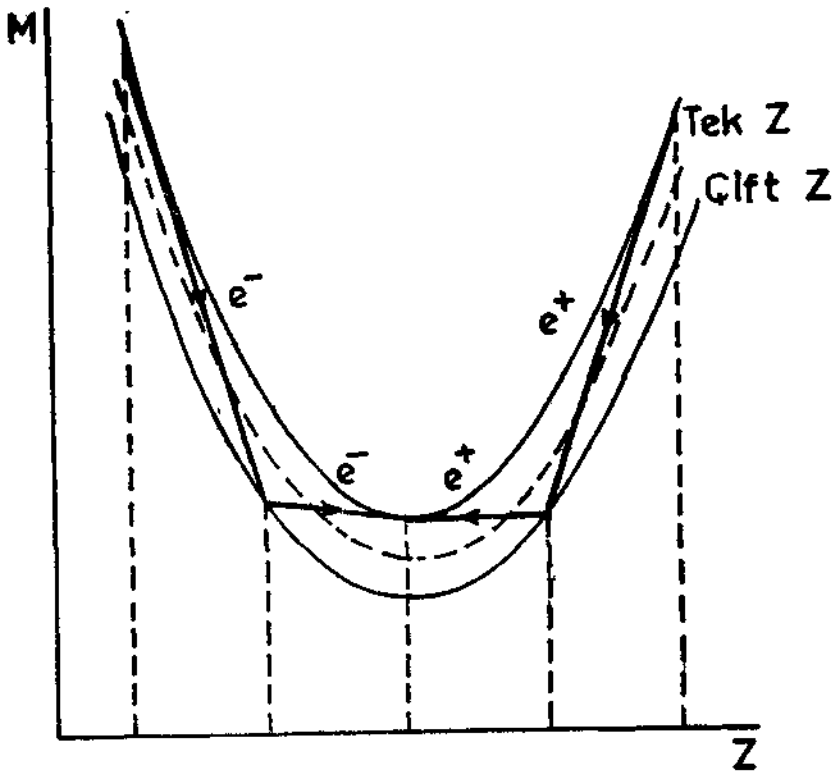
Şekil : IV.1 — Tek A lı izobarların kütleleri. Yalnız bir izobar kararlı olabilir.

$\delta(A, Z)$ terimi aynı zamanda, verilmiş bir çift A için birden fazla kararlı izobarın varlık imkânını ve verilmiş bir tek A için de yalnız bir kararlı izobarın varlık imkânını ortaya koyar. Bu durum Şekil : IV. 1 ve 2 den görülebilir. Şekil : IV.1 de (30) bağıntısı kullanılarak tek A için $M(A, Z)$ nin Z ye göre değişimi çizilmiştir; A tek olduğu için $\delta(A, Z) = 0$ dır ve $M(A, Z)$, Z nin ikinci dereceden bir fonksiyonu olduğu için eğri bir parabolüdür. İzobarlardaki kararlılık genellikle β -parçalanması verir, ve çekirdeğin kütlesi, yani A , aynı kalarak Z bir artar veyâ bir eksilir; Z nin bir artması bir e^- ve bir eksilmesi de bir e^+ neşredilmesi ile olur. Her elektron veyâ pozitron neşredilmesi ile çekirdeğin kütlesi veyâ bağ enerjisi (parabolün üzerinde kalmak şartı ile) azalır; fakat bu azalma parabolik değişimden ötürü sonsuz olarak devam etmez ve bir Z yük sayısına tekabül eden izobar için minimum olur. Bu minimum bağ enerjisine tekabül eden izobar kararlıdır. $A = N + Z = \text{sâbit}$ olduğundan, Z bir arttığı veyâ bir eksildiği zaman N de mütakabilen bir eksilir veyâ bir artar ve böylece A hep tek kalır ve arka arkaya çift-tek veyâ tek-çift izobarlar ortaya çıkar. Şekil : IV. 2 de ise,

gene (30) bağıntısı kullanılarak çift A için $M(A, Z)$ nin Z ye göre değişimi çizilmiştir; A çift olduğu için $\delta(A, Z)$, tek Z ler için $+f(A)$ ve çift Z ler için de $-f(A)$



Şekil : IV.2 — Çift A lı izobarların kütleleri. Burada üç çift-çift izobar kararlı olabilir.



Şekil : IV.3 — Çift A lı izobarların kütleleri. Yalnız bir tek-tek izobar kararlı olabilir.
(Bu hâl tabiatta yoktur).

değerlerini alır ve böylece iki parabol eğrisi elde edilir, bu paraboller şekilde sürekli çizgilerle çizilmiştir. Şekil : IV. 2 de aynı zamanda $M(A, Z) - \delta(A, Z)$ parabolü de kesikli çizgi ile çizilmiştir. Z nin, bir artması veyâ bir eksilmesi ile tekliği çiftliği değiştiğinden, ve tek Z li parabol daha yüksek bir enerjiye tekabül etmek üzere çift Z li parabolden daha yukarda olduğundan, elektron veyâ pozitron neşredilmesi ile izobarlar üst parabolden alt parabole geçerler. Âşikâr olarak, bu geçişler tek değildir ve her biri ayrı bir kararlı izobarla son bulur. Böylece, tek A için yalnız bir izobar kararlı olabildiği hâlde, çift A için iki veyâ daha fazla izobar kararlı olabilir.

Şekil : IV.2 sadece çift-çift izobarların kararlılığını göstermektedir; bu hâle tabiatta sık sık rastlanır, çünkü enerjinin azalması şartı ile enerjisi yüksek parabolden enerjisi alçak parabole geçiş kolaylıkla gerçekleştirilebilir. Şekil : IV.3 ise tek-tek izobarların kararlılığını göstermek üzere çizilmiştir. Fakat enerjinin azalması şartı ile enerjisi alçak parabolden enerjisi yüksek parabole geçiş kolaylıkla gerçekleştirilemez; bunun için parabollerin birbirlerine yakın olmaları gerekir. $A > 15$ için tabiatta tek-tek çekirdeklere (hemen hemen hiç) rastlanmadığından, paraboller arasında böyle bir hâle imkân vermeyecek kadar açıklık sağlamak üzere $\delta(A, Z)$ ye bir alt sınır konulmuştur.

Şekil : IV. 2 aynı zamanda, hem elektron hem de pozitron neşreden çekirdeklerin varlığını da göstermektedir.

(IV.3) SIVI DAMLASI MODELİ

Yarı-ampirik kütle formülünün başarısından dolayı sıvı damlası modeli üzerinde biraz daha durmaya değer. Bu model, görüldüğü gibi, çekirdek enerjilerini ve çekirdeğin kararlılığını incelemeye elverişlidir. Buraya kadar çekirdeklerin sadece temel halleri bahis konusu edildi. Böyle bir halde sıvı damlası şüphesiz tam bir küre şeklindedir. Sıvı damlası modeli, aynı zamanda çekirdeklerin bazı uyarılmış hallerini incelemek için de kullanılır. Fakat burada yalnız sıvı damlasının ne çeşit deformasyonlar altında nükleer fisyon olayını meydana getirdiği incelenecektir.

Temel halde çekirdeğin yarıçapı R olan (keskin yüzeyli) bir küre olduğu farz edilebilir. Uyarılmış bir halde bulunan çekirdeğin küre şekli bozulur (deforme olur). Bu deformasyonun çok küçük olduğu farz edilirse, $|q| \ll 1$ olmak üzere, kürenin yarıçapı qR kadar değişir. Kürenin küresel koordinatlardaki denklemi $r = R$ olduğundan, deformasyondan sonra çekirdek yüzeyinin denklemi $r = R + qR$ veyâ $r = R(1 + q)$ olur. Şüphesiz küresel koordinatlarda çekirdek yüzeyinin denklemi $r = r(\theta, \varphi)$ şeklinde olmalıdır ve dolayısıyla $q = q(\theta, \varphi)$ olmalıdır. $q(\theta, \varphi)$ küresel harmonikler cinsinden

$$q(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (40)$$

şeklinde açılabilir, burada q_{lm} ler komplekstir ve $|q| \ll 1$ olabilmesi için $|q_{lm}| \ll 1$ olmalıdır. Eğer deformasyon zamanla değişiyorsa q_{lm} ler zamanın bir fonksiyonu olmalıdır. Kararlı bir çekirdekte yüzey deformasyonlarının değişiminin harmonik titreşimler hâlinde olduğu ve q_{lm} lerin zamana bağlılığının

$$\ddot{q}_{lm} + \omega_l^2 q_{lm} = 0 \quad (41)$$

diferansiyel denklemini ile belirlendiği gösterilebilir; burada ω_l , titreşimin açısal frekansıdır. Üniform bir yük dağılımına sahip ve yüzey gerilim katsayısı α olan bir sıvı damlası için titreşim frekansının

$$\omega_l^2 = \frac{l(l-1)}{\rho R^3} \left[\alpha(l+2) - \frac{3}{2\pi} \frac{Z^2 e^2}{R^3} \frac{1}{2l+1} \right] \quad (42)$$

bağıntısı ile verildiği gösterilebilir; burada Ze sıvı damlasının toplam elektrik yükü, ρ sıvı damlasının kütle yoğunluğu ve R de titreşimin denge durumunda damlanın küresel yüzeyinin yarıçapıdır.

Çekirdek yüzeyinin denklemini (40) a göre

$$r = R \left[1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] \quad (43)$$

veyâ

$$r = R \left[1 + \frac{q_{0,0}}{\sqrt{4\pi}} + \sum_{m=-1}^1 q_{1m} Y_{1m}(\theta, \varphi) + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] \quad (43')$$

şeklinde yazılabilir. (43') de parantezin içindeki ikinci terim çekirdeğin toplam hacminin değişimine bağlıdır ve eğer çekirdeğin toplam hacminin deformasyon esnasında sabit kaldığı farz edilirse $q_{0,0} = 0$ olur. Üçüncü terim ise, çekirdeğin bir bütün hâlinde yaptığı öteleme hareketini verir. Burada bizi öteleme hareketi değil, sadece saf çekirdek deformasyonları ilgilendirdiğinden $q_{1m} = 0$ alınmalıdır. Filhakika, (42) ile verilen, çekirdeğin yüzeyinin saf deformasyonlarına ait titreşim frekansları $l = 0$ ve $l = 1$ için sıfır olur. Buraya kadar bahis konusu edilen sonuçlar saf klâsik mekaniğe dayanır ve ispatları çok uzun olduğundan verilmeyecektir.

En alçak seviyedeki uyarılmış haller $l > 2$ için $q_{lm} = 0$ ve $q_{2m} \neq 0$ ile verilir ve (43') bağıntısı

$$r = R \left[1 + \sum_{m=-2}^2 q_{2m} Y_{2m}(\theta, \varphi) \right] \quad (44)$$

şeklini alır; (44) bağıntısı ile ifade edilen deformasyonlara kuvadrupol deformasyonlar adı verilir. Diğer yandan (42) bağıntısı da $l = 2$ için

$$\omega_2^2 = \frac{2}{\rho R^3} \left[4\alpha - \frac{3}{10\pi} \frac{Z^2 e^2}{R^3} \right] \quad (45)$$

şeklini alır. Çekirdeğin kararlı kalabilmesi için, yüzey deformasyon hareketlerinin harmonik titreşimlerden ibaret, yâni, periyodik olması gerekir. Bu da ancak ω_2 nin reel veya ω_2^2 nin pozitif olması ile mümkündür. Çünkü (41) denkleminin

$$q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{-i\omega_2 t} \quad \text{veyâ} \quad q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{i\omega_2 t}$$

şeklindeki çözümünde μ reel ve pozitif bir büyüklük olmak üzere $\omega_2 = i\mu$ yazılırsa

$$q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{+\mu t} \quad \text{veyâ} \quad q_{2m} = (q_{2m})_0 e^{-\mu t}$$

elde edilir; bu da çekirdek yüzeyinin bazı kısımlarının devamlı dışarı doğru, bazı kısımlarının da devamlı içeri doğru harekete başladığını ifâde eder, yâni, çekirdek bölünmeye başlamış demektir. O halde çekirdeğin kararlılık şartı

$$4\alpha - \frac{3}{10\pi} \frac{Z^2 e^2}{R^3} > 0$$

veyâ

$$\frac{Z^2 e^2}{R^3} < \frac{40}{3} \pi \alpha \quad (46)$$

şeklinde ifâde edilebilir. $R^3 = r_0^3 A$ olduğunu hatırlayarak ve (23) bağıntısını kullanarak

$$\frac{Z^2 e^2}{R^3} = \frac{Z^2}{A} \cdot \frac{e^2}{r_0^3} = \frac{5}{3} a_3 \frac{Z^2}{A} \cdot \frac{1}{r_0^2}$$

yazılabilir. Diğer yandan, yüzey gerilimi enerjisi, (21) i kullanarak

$$a_2 A^{2/3} = \alpha \cdot 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 \alpha A^{2/3}$$

şeklinde yazılabilir; o hâlde

$$a_2 = 4\pi r_0^2 \alpha$$

bulunur. Böylece, (46) kararlılık şartı

$$\frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{5}{3} a_3 \frac{Z^2}{A} < \frac{40}{3} \pi \frac{a_2}{4\pi r_0^2}$$

veyâ

$$\frac{5}{3} a_3 \frac{Z^2}{A} < \frac{10}{3} a_2$$

veyâ

$$\frac{Z^2}{A} < \frac{2a_2}{a_3} \quad (47)$$

şeklini alır. (39) bağıntısına göre $a_2 = 17,804$ MeV ve $a_3 = 0,7103$ MeV olduğundan

$$\frac{2a_2}{a_3} = \frac{35,608}{0,7103} \cong 50,13$$

bulunur ve kararlılık şartı olarak

$$\frac{Z^2}{A} < 50,13 \quad (47')$$

sonucuna varılır. Şüphesiz

$$\frac{Z^2}{A} > 50,13$$

şartı da kendiliğinden fisyon yapma şartıdır. Bu şart sağlandığı zaman, fisyon yalnız kendiliğinden olmakla kalmaz aynı zamanda ânî olur.

En ağır çekirdeklerin bu limite yaklaşması ilginçtir. ^{238}U için $\frac{Z^2}{A} = 35,563$ tür. (47') şartı, gözlenenlerden daha ağır çekirdeklerin mevcut olmayışının esas sebebi olarak düşünülebilir. (47') nün kullanılması ile, $Z \cong 140$ ve $A \cong 390$ oluncaya kadar ânî fisyonun meydana gelebileceği bulunabilir.

(IV.4) KABUK MODELİ

Bir atomdaki elektronların durumuna benzer şekilde bir çekirdekteki nükleonların belirli enerji ve açısal momentum hallerinde buldukları, ve böylece bazı çekirdeklerin olağanüstü kararlılıklarının bir nötron veya bir proton kabuğunun dolmasından ileri geldiği düşünülebilir; tıpkı bir elektron kabuğunun dolmasından ileri gelen nâdir gazların kararlılığı gibi. İki nedenden ötürü çekirdeklerde durum daha katışıktır:

(a) Çekirdeklerdeki merkezî potansiyel gerçekte bir ortalama potansiyeldir ve fazladan bir nükleonun ilâvesi bu potansiyeli değişikliğe uğratar, ve bu değişiklik fazladan bir elektronun ilâvesi ile bir atomdaki merkezî potansiyelin uğradığı değişiklikten çok daha fazladır.

(b) Protonların Coulomb itmesinden dolayı, en hafiflerin dışında bütün çekirdeklerde nötronlarla protonların sayıları yaklaşık olarak bile aynı değildir. Bu sebepten, kapalı bir kabuk sayısı kadar nötrona sahip olan bir çekirdek çok kere kapalı bir kabuk sayısı kadar protona sahip olamaz, ve bunun tersi de mümkün değildir. Böylece, kapalı kabukların kararlılık özellikleri atomlardaki kadar belirli değildir.

Aşağıdaki sayılarda nötronların veya protonların özel bir kararlılık gösteren çekirdeklerde bulunduğu anlaşılmıştır:

2, 8, (14), 20, 28, 50, 82, 126.

14 e tekabül eden kararlılık diğer sayılara tekabül eden kararlılık kadar belirli değildir. Bu sayılara sihirli sayılar adı verilir ve bunların varlığına ait deneysel deliller gerçekten çok kuvvetlidir. Böylece, ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$ ve ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ nın en kararlı çekirdekler olması gerekir. Bu sihirli sayıları teorik olarak elde edebilmek için çekirdek içerisindeki ortalama potansiyelin uygun bir ifâdesini seçmek suretiyle muhtelif teşebbüsler yapılmıştır. Seviyelerin sırası potansiyel kuyusunun şekline karşı çok duyarlı değildir. Çekirdek kuvvetlerinin kısa menzilli oluşundan dolayı, ortalama potansiyel çekirdek içerisinde hemen hemen sabit olmalıdır ve çekirdek yüzeyi civarında hızla sıfıra düşmelidir. Bu şartları sağlayan herhangi bir potansiyel kabaca aynı sırada seviyeler verir. Bu sıra, atomdaki müteakıl sıradan tamamen farklıdır. Çünkü atomda merkezî potansiyel koordinat başlangıcı civarında sabit değildir, hızla değişir ve başlangıçta (orijinde) sonsuz olur.

Başlangıçta denenen potansiyeller, matematiksel basitliklerinden dolayı, sonsuz derinlikteki küresel kuyu, sonlu derinlikteki küresel kuyu ve üç boyutlu izotropik harmonik osilâtör potansiyelidir. Bu potansiyeller sırasıyla aşağıda verilmiştir :

(a) Sonsuz küresel kuyu

$$r < R \text{ için } V = -V_0, r > R \text{ için } V = +\infty,$$

(b) Sonlu küresel kuyu

$$r < R \text{ için } V = -V_0, r > R \text{ için } V = 0, \quad (48)$$

(c) Osilâtör

$$V = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2.$$

Bu potansiyellerden sonuncusu paraboliktir ve büyük bir geçiş bölgesi verir.

Osilâtör potansiyeli,

$$n = 2(n_r - 1) + l; \quad n_r = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

olmak üzere,

$$E = -V_0 + \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde enerji seviyeleri verir; burada n_r radyal kuvantum sayısı ve l açıl momentum kuvantum sayısıdır. Burada enerji seviyeleri dejeneredir, çünkü aynı enerjiyi veya n toplam kuvantum sayısını veren muhtelif (n_r, l) kombinezonları vardır. Aynı zamanda l kuvantum sayısını vermek üzere $2l + 1$ manyetik kuvan-

tum sayısı m_l vardır ve kuvantum sayılarının her (n_r, l, m_l) kombinezonu için iki $m_s = \pm \frac{1}{2}$ spin hâli vardır. Böylece her bir E enerjisine sahip bir kabuğa ait (n_r, l, m_l, m_s) kuvantum sayılarının $(n+1)(n+2)$ tane kombinezonunu veren kuvantum hâli vardır, yâni $n\hbar\omega$ enerjisine tekabül eden bir kabuk $(n+1)(n+2)$ sayıda nötron veya protonla doldurulabilir. O hâlde, osilâtörün verdiği sihirli sayılar, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere,

$$S_n = \sum_{t=0}^n (t+1)(t+2) = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3)$$

bağıntısı ile bellidir. Sonsuz kuyunun verdiği sihirli sayıların bulunması daha karışıktır. Sonuçlar şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{Osilâtör} & : 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168 \\ \text{Sonsuz kuyu} & : 2, 8, 20, 34, 40, 58, 92, 132, 138 \end{aligned} \quad (49)$$

Daha doğru bir teorinin osilâtör ile sonsuz kuyu tarafından verilen seviyeler arasında kalan seviyeler vereceği düşünülebilir. Böylece, seviyeler arasındaki uzaklık ve hattâ seviyelerin sırası biraz değişir. Osilâtöre ait seviyeler aşağıdaki gibidir:

Seviye	1s	1p	1d	2s	1f	2p	1g	2d	3s	1h	2f	3p
Seviyedeki sayı	2	6	10	2	14	6	18	10	2	22	14	6
Kabuktaki sayı	2	6	12		20		30			42		
Toplam sayı	2	8	20		40		70			112		

Eğer 1g ile 2d seviyeleri ve 3s ile 2f seviyeleri aralarında değiştirilirse aşağıdaki durum elde edilir:

Seviye	1s	1p	1d	2s	1f	2p	2d	1g	2f	1h	3s
Seviyedeki sayı	2	6	10	2	14	6	10	18	14	22	2
Kabuktaki sayı	2	6	12		30			32			
Toplam sayı	2	8	20		50			82			

Şüphesiz tamâmen keyfî olan bu değiştirmelerin hiç bir teorik dayanağı yoktur. Aynı zamanda sırf bu çeşit değiştirmelerle 14 ve 28 sihirli sayılarını elde etmeğe imkân yoktur.

Probleme değişik bir çözüm tarzı, bir yandan Mayer tarafından ve diğer yandan Haxel, Jensen ve Suess tarafından öne sürüldü (Mayer ve Jensen 1955). Bu çözüm tarzı, bir seviyedeki parçacığın spin açısai momentumu s ile yörünge açısai momentumu l nin paralel veya anti-paralel oluşu ile ilgilidir. Eğer Hamiltonyene spin-yörünge birleşmesi adı verilen $l \cdot s$ ile orantılı bir terim eklenirse, her enerji seviyesi, l ile s nin paralel veya anti-paralel oluşuna göre, ikiye ayrılır. Böyle bir spin-yörünge terimi, rölâivistik dalga denkleminin incelenmesinde de, bir $V(r)$ merkezî potansiyeli kullanıldığı takdire, ortaya çıkar ve Thomas terimi adı ile bilinir. Bu terimin ifâdesi şöyledir:

$$\frac{1}{2M^2 c^2 r} \frac{dV}{dr} l \cdot s \quad (50)$$

Çekirdekdeki nükleonlar için bu terim çok küçüktür, ve gerekli ayrılmayı verebilmesi için işareti değiştirilmelidir. Bu da, kabuk modelindeki spin-yörünge teriminin rölâivistik bir düzeltme sonucu ortaya çıkmadığını, fakat çekirdek kuvvetinin tamamlayıcı bir parçası olduğunu gösterir. Böylece spin-yörünge terimi (50) ile verilen şekilde kullanılmaz, fakat deneysel sonuçlara uydurulmak üzere işareti değiştirilir ve değerini büyültmek üzere de bir λ parametresi ile çarpılır. $V(r)$ nin radyal değişimi, çekirdeğin merkezî bölgesinde potansiyel sâbit ve negatif olacak ve yüzey civarında da tedricen sıfıra yükselecek şekilde seçilir.

Potansiyel fonksiyonunun en çok kullanılan şekli, ilk defa Saxon ile Woods tarafından kullanılmış olan şu şekildedir:

$$V(r) = -V_0 f(r); \quad \text{burada} \quad f(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}} \quad (51)$$

Burada, c çekirdeğin yarıçapı mertebesinde, ve a , potansiyelin sıfıra yükseldiği geçiş bölgesinin genişliğinin bir ölçüsünü verir. Böylece, bütün kabuk modeli potansiyeli şu şekili alır:

$$V_{KM}(r) = -V_0 f(r) + \frac{\lambda V_0}{2M^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{df}{dr} l \cdot s \quad (52)$$

$f(r)$ pozitif ve monoton olarak azalan bir fonksiyon olduğundan, $\frac{df}{dr}$ her yerde negatiftir. Tek bir parçacığın yörünge açısai momentumu l ve spin açısai momentumu s olduğuna göre toplam açısai momentumu

$$j = l + s$$

olur. Buradan

$$21. s = j^2 - l^2 - s^2$$

bulunur. Bu ifâde öz değerler cinsinden

$$21. s = \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

veyâ

$$21. s = \hbar^2 \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]$$

şeklinde yazılabilir. j kuvantum sayısı ancak $l \pm \frac{1}{2}$ değerlerini alabilir.

$$\begin{aligned} j = l + \frac{1}{2} \text{ için : } j(j+1) &= \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(l + \frac{3}{2} \right) = l^2 + 2l + \frac{3}{4} \\ &= l(l+1) + \frac{3}{4} + l \end{aligned}$$

$$j = l - \frac{1}{2} \text{ için : } j(j+1) = \left(l - \frac{1}{2} \right) \left(l + \frac{1}{2} \right) = l^2 - \frac{1}{4}$$

$$j(j+1) - \frac{3}{4} = l^2 - 1$$

$$j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = l^2 - 1 - l^2 - l = -(l+1)$$

olduğundan

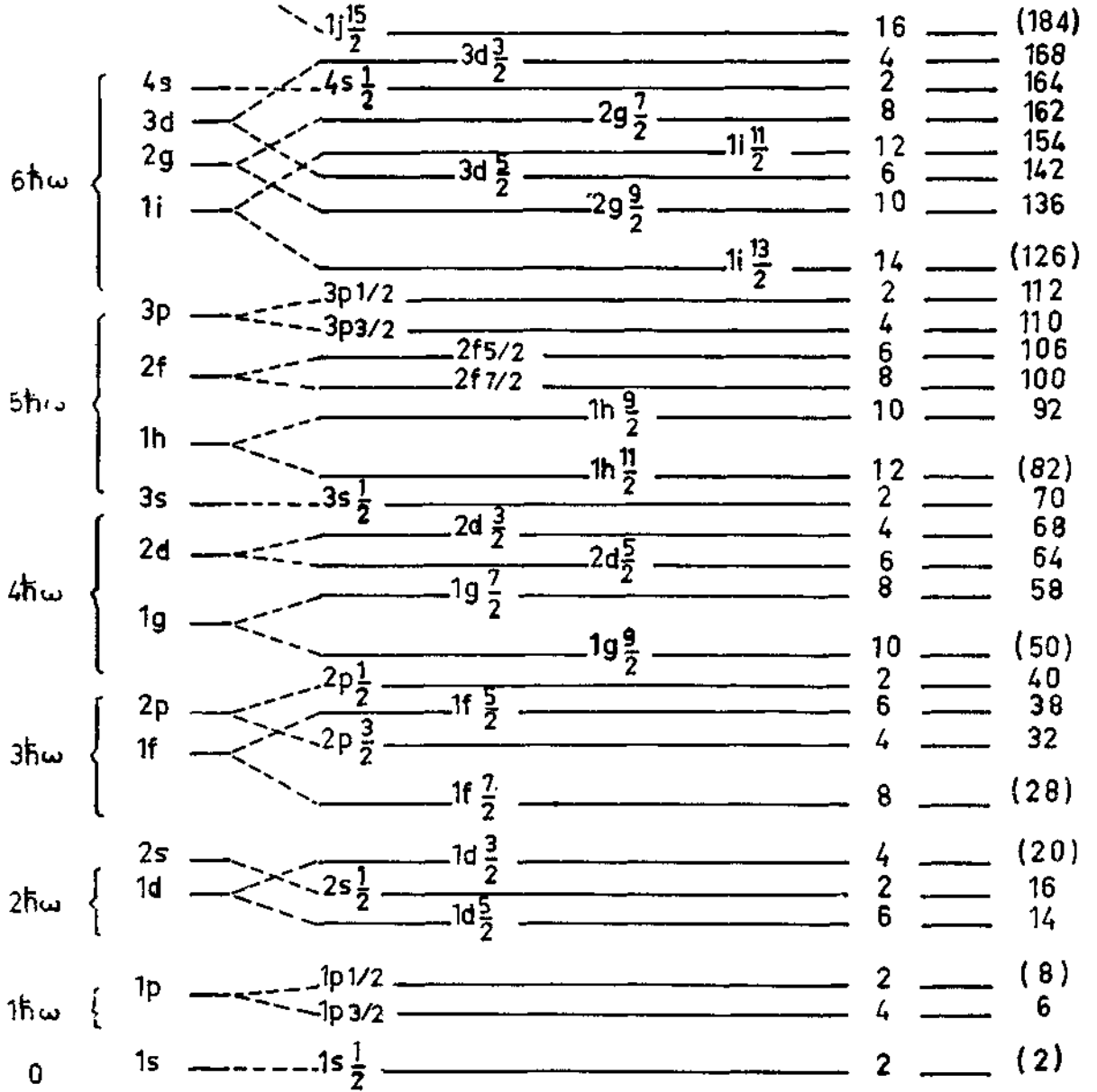
$$j = l + \frac{1}{2} \text{ için : } 21. s = \hbar^2 l; \text{ ve } j = l - \frac{1}{2} \text{ için : } 21. s = -\hbar^2(l+1)$$

sonuçları elde edilir. Deneysel sonuçlara göre, $j = l + \frac{1}{2}$ seviyesi $j = l - \frac{1}{2}$

seviyesinin altındadır. $\frac{df}{dr} < 0$ olduğuna göre, (52) formülü bu deneysel şartı

sağlar. Deneyle ilgili gerektirdiği büyüklükte bir ayrılma elde edilebilmesi için, λ parametresi 30 mertebesinde olmalıdır. $1. s$ operatörünün özdeğerleri arasındaki fark $2l + 1$ ile orantılı olduğundan, bir seviyenin ayrılma miktarı l nin lineer bir fonksiyonu olarak artar. Böylece, $V_{KM}(r)$ nin verdiği seviye yapısı Şekil : IV.4 deki gibidir. Tam seviye dizisi a , c , ve λ parametrelerinin seçimine bağlıdır; fakat (52) potansiyeli bütün sihirli sayıları verir.

Buraya kadar özeti verilen model, tamamen kapalı kabuklardan ibaret olan çekirdeklerin ve aynı zamanda kapalı kabuklardan bir fazla veya bir eksik parçacık ihtiva eden çekirdeklerin açısal momentumlarının hesabını mümkün kılar. Dışarılama ilkesinden dolayı, birinci tip çekirdeklerin açısal momentumları sıfırdır, ve diğerlerinin açısal momentumları da son kabuktan fazla parçacığın veya "deliğin" açısal momentumundan ibarettir. Böylece, meselâ $^{16}_8\text{O}_8$, $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$,



Şekil : IV.4 — Bir nükleonun enerji seviyeleri. Sol taraftakiler osilatör seviyelerini, sağ taraftakiler de gerçek seviyeleri göstermektedir.

$^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ nin açısal momentumları sıfır olmalıdır ve öyledir; diğer yandan, $^{15}_7\text{N}_8$, $^{17}_8\text{O}_9$, $^{39}_{19}\text{K}_{20}$, $^{207}_{82}\text{Pb}_{125}$ ve $^{209}_{83}\text{Bi}_{126}$ nin açısal momentumları mütakabilen $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{9}{2}$ olmalıdır ve öyledir. Bazen açısal momentum hakkındaki bilgi, bir çekirdeğin enerji seviyelerini doğru olarak sıralamayı mümkün kılar. Meselâ, $^{209}_{83}\text{Bi}_{126}$ nin açısal momentumunun $\frac{9}{2}$ oluşu, $1h \frac{9}{2}$ seviyesinin, hiç değilse protonlar için, $2f \frac{7}{2}$ seviyesinin altında oldu-

ğunu gösterir. Coulomb itmesinden dolayı, proton seviyelerinin sırası nötron seviyelerinin sırasından çok az farklı olabilir.

Bütün çift-çift çekirdeklerin sıfır açısal momentumuna sahip olduklarını deneysel sonuçlar göstermektedir. Bu sebepten şu hipotezi vaz ediyoruz: bir çekirdekdeki benzer nükleonlar birbirlerinin açısal momentumlarını yok etmek üzere çiftler teşkil ederler. Bir tek-A lı çekirdeğin açısal momentumu çiftlerin dışında kalan sonuncu tek nükleondan dolayıdır.

Sonuncu parçacığın verilmiş bir j açısal momentumu mümkün iki $l = j \pm \frac{1}{2}$ yörünge açısal momentumundan meydana gelebilir. Bunlar arasındaki fark 1 olduğundan zıt paritelere sahiptirler. (II.50) bağıntısı \mathcal{P} parite operatörünün öz değerlerinin $(-1)^l$ şeklinde olduğunu gösterir; ve böylece l çiftse parite çift, l tekse parite tek olur ve farkları 1 olan l lere zıt pariteler tekabül eder. Bu sebepten, eğer bütün çekirdeğin açısal momentumu son parçacığın açısal momentumundan ibaretse, bu takdirde çekirdeğin bütün dalga fonksiyonunun paritesi son parçacığın kabuk modeli ile hesaplanan yörünge açısal momentumundan tayin edilir. Meselâ, bir $d \frac{5}{2}$ seviyesinde bulunan son parçacıktan ileri gelen çekirdek hâli $\frac{5^+}{2}$ ile gösterilir, $\frac{5^-}{2}$ hâli de son parçacığın bir $f \frac{5}{2}$ seviyesinde bulunmasına tekabül eder.

Buraya kadar bütün nükleonların merkezî bir potansiyel altında hareket ettiklerini ve birbirleriyle etkileşmediklerini kabul ettik. Bu kabul yalnız bir ilk yaklaşıklıkla doğru olabilir. Kapalı kabukların dışında bulunan nükleonlar, kapalı kabukların meydana getirdiği merkezî potansiyel altında hareket etmekle beraber birbirleriyle de etkileşirler, ve aynı yörünge üzerinde bulunan nükleonlar birbirleriyle diğer nükleonlara nazaran daha kuvvetle bağlıdır. Çift enerjisi adı verilen bu etkileşmenin etkisi ile, bir seviye çift sayıda nükleon ihtiva ettiği zaman, tek sayıda nükleon ihtiva ettiği zamankine nazaran yer değiştirir. Bütün bunlar deneyle gerçekleşmiştir ve ayrıca yörünge açısal momentumunun artması ile bu etkinin de arttığı bulunmuştur. Böylece eğer tek-A lı çekirdekler arasında 58 in üzerindeki tek-N ye sahip olanlara bakılırsa bunlar $\frac{7}{2}$ veya $\frac{11}{2}$ açısal momentumuna sahip olmalıdır. Halbuki bunlar $\frac{1}{2}$ açısal momentumuna sahiptir ve bu da $1g \frac{7}{2}$ ve $1h \frac{11}{2}$ seviyelerinin çift sayıda nükleonla dolu oldukları zaman $3s \frac{1}{2}$ seviyesinin altına doğru yer değiştirdiklerini gösterir.

Tek-teker çekirdekler hakkında çok az şey söylenebilir. Burada toplam açısal momentum sonuncu proton ile sonuncu nötronun açısal momentumlarından ileri gelmektedir, ve şüphesiz bu açısal momentumlar çok farklı şekillerde birleşebilirler; ve ancak kesin hesaplar sonucunda en kararlı hâl bulunabilir.

Şimdi de tek- A lı çekirdeklerin manyetik momentlerini hesaplayalım (çift-çift çekirdeklerin açısal momentumları sıfır olduğundan, manyetik momentleri de sıfırdır). Böyle bir çekirdeğin manyetik momenti eğer tamamen sonuncu nükleonun manyetik momentinden ileri geliyorsa, o hâlde

$$\boldsymbol{\mu} = (g_l \mathbf{l} + 2g_s \mathbf{s}) \frac{1}{\hbar} \quad (53)$$

yazılabilir; burada bir proton için $g_l = 1$ ve bir nötron için $g_l = 0$ dir, ve bir proton için $g_s = 2,7927$ ve bir nötron için $g_s = -1,9131$ dir. Diğer yandan,

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$$

bağıntısından

$$\mathbf{j}^2 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{j}$$

elde edilir. Eğer

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = a_l \mathbf{j}^2 \quad \text{ve} \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{j} = a_s \mathbf{j}^2$$

vaz edilirse

$$\mathbf{j}^2 = (a_l + a_s) \mathbf{j}^2$$

veyâ

$$a_l + a_s = 1$$

bulunur. a_l ve a_s katsayıları \mathbf{l} ve \mathbf{s} vektörlerinin \mathbf{j} vektörü üzerindeki izdüşümleri ile orantılıdır. (53) bağıntısının her iki yanını \mathbf{j} ile skaler olarak çarparak

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{j} = (g_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} + 2g_s \mathbf{s} \cdot \mathbf{j}) \frac{1}{\hbar}$$

veyâ

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{\hbar} (g_l a_l + 2g_s a_s) \mathbf{j}^2$$

elde edilir. Diğer yandan $\boldsymbol{\mu}$ vektörünün \mathbf{j} doğrultusunda olması gerektiğinden

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\lambda}{\hbar} \mathbf{j}$$

veyâ

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{j} = \frac{\lambda}{\hbar} \mathbf{j}^2$$

yazılabilir. Böylece $\lambda = g_l a_l + 2g_s a_s$ olmalıdır ve (53) bağıntısı

$$\mu = \frac{1}{\hbar} (g_l a_l + 2g_s a_s) j \quad (53')$$

şeklını alır. Buradan

$$\mu_z = \frac{1}{\hbar} (g_l a_l + 2g_s a_s) m\hbar$$

veyâ $-j \leq m \leq j$ olduğunu hatırlayarak ve maksimum μ_z yi μ ile göstererek

$$\mu = (g_l a_l + 2g_s a_s) j \quad (54)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$s = j - l \quad \text{ve} \quad l = j - s$$

denklemlerinin her iki yanlarının skaler karelerini alarak

$$s^2 = j^2 + l^2 - 2l \cdot j \quad \text{ve} \quad l^2 = j^2 + s^2 - 2s \cdot j$$

veyâ

$$2l \cdot j = j^2 + l^2 - s^2 \quad \text{ve} \quad 2s \cdot j = j^2 + s^2 - l^2$$

veyâ

$$2a_l j^2 = j^2 + l^2 - s^2 \quad \text{ve} \quad 2a_s j^2 = j^2 - (l^2 - s^2)$$

bulunur. Sonucu bağıntılardan da

$$2a_l j(j+1) = j(j+1) + [l(l+1) - s(s+1)]$$

$$2a_s j(j+1) = j(j+1) - [l(l+1) - s(s+1)]$$

veyâ, $s = \frac{1}{2}$ veyâ $s(s+1) = \frac{3}{4}$ olduğuna dikkat ederek

$$a_l = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{l(l+1) - \frac{3}{4}}{j(j+1)} \right], \quad a_s = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{l(l+1) - \frac{3}{4}}{j(j+1)} \right] \quad (55)$$

bağıntıları bulunur; bu bağıntılar beklendiği gibi $a_l + a_s = 1$ şartını sağlarlar. Diğer yandan,

$$l = j - \frac{1}{2} \text{ için: } l(l+1) = \left(j - \frac{1}{2}\right) \left(j + \frac{1}{2}\right) = j^2 - \frac{1}{4};$$

$$l(l+1) - \frac{3}{4} = j^2 - 1 = (j+1)(j-1)$$

$$l = j + \frac{1}{2} \text{ için: } l(l+1) = \left(j + \frac{1}{2}\right) \left(j + \frac{3}{2}\right) = j^2 + 2j + \frac{3}{4};$$

$$l(l+1) - \frac{3}{4} = j(j+2)$$

olduğundan

$$l = j - \frac{1}{2} \text{ için : } a_l = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{j-1}{j} \right] \equiv 1 - \frac{1}{2j}, \quad a_s = \frac{1}{2j}$$

$$l = j + \frac{1}{2} \text{ için : } a_l = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{j+2}{j+1} \right] \equiv \frac{j + \frac{3}{2}}{j+1}, \quad a_s = -\frac{1}{j+1}$$

bulunur; bu değerler (54) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\left. \begin{aligned} l = j - \frac{1}{2} \text{ için : } \mu &= \left(j - \frac{1}{2} \right) g_l + g_s \\ l = j + \frac{1}{2} \text{ için : } \mu &= \frac{j}{j+1} \left[\left(j + \frac{3}{2} \right) g_l - g_s \right] \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

sonuçlarına varılır. (56) bağıntıları bir proton ve bir nötron için aşağıdaki şekilleri alırlar :

$$\text{proton için : } \left\{ \begin{aligned} l = j - \frac{1}{2} \text{ için : } \mu &= j - \frac{1}{2} + 2,7927 \equiv j + 2,2927 \\ l = j + \frac{1}{2} \text{ için : } \mu &= \frac{j}{j+1} \left[j + \frac{3}{2} - 2,7927 \right] \equiv \\ &= \frac{j}{j+1} (j - 1,2927) \equiv j - 2,2927 \frac{j}{j+1} \end{aligned} \right.$$

$$\text{nötron için : } \left\{ \begin{aligned} l = j - \frac{1}{2} \text{ için : } \mu &= -1,9131 \\ l = j + \frac{1}{2} \text{ için : } \mu &= 1,9131 \frac{j}{j+1} \end{aligned} \right.$$

burada $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}$ değerlerini alır.

μ nün bu değerleri Schmidt değerleri olarak bilinir. Deneysel değerler bu değerlere iyi uymaz. Bununla beraber, $l = j - \frac{1}{2}$ ve $l = j + \frac{1}{2}$ ye tekabül eden Schmidt değerlerinin grafiği iki ayrı çizgi verir ve deneysel değerler hemen hemen istisnasız olarak Schmidt çizgileri adı verilen bu iki teorik çizgi arasında bulunur. Genellikle deneysel değerler bu çizgilerden birine diğerinden daha yakın bulunur. Eğer, bir ilk yaklaşıklıkla, deneysel değerlerin daha yakın buldukları çizginin üzerinde oldukları kabul edilirse; çekirdeğin deneysel olarak ölçülen j toplam açısai momentumu ile μ manyetik momentinin değerlerinden sonuncu nükleonun l yörünge açısai momentum kuvantum sayısını tayin etmek mümkündür.

Deneysel μ değerlerinin her zaman iki Schmidt değerinin arasında oluşu izaha muhtaçtır. Çekirdek hâlinin sonuncu nükleonun bulunduğu $l = j - \frac{1}{2}$ ile $l = j + \frac{1}{2}$ hallerinin bir karışımı olduğu söylenemez, çünkü bu haller zat paritelere sahiptir. Açısal momentumların ve manyetik momentlerin kabuk modeli ile hesaplanmasında çok önemli bir fark olduğuna dikkat edilmelidir. Açısal momentumlar kuvantizedir, ve bu sebepten hesaplar deneye ya uyar ya da uymaz; genellikle uyar. Kabuk modelinde yapılan temel basitleştirici kabul, yâni, tek-A lı çekirdeklerde gözlenebilir olayların yalnız sonuncu nükleondan ileri gelmesi eğer tamamen doğru değilse bu, açısal momentum değerlerine etki etmeyecektir, ve sadece aynı açısal momentuma sahip olan hallerin bir karışımı ile karşı karşıya bulunduğumuzu gösterir. Manyetik momentler için durum tamamen farklıdır; çünkü manyetik momentler kuvantize değildir, ve böylece hallerin farklı karışımları farklı manyetik momentler verir. Yâni, manyetik momentlerin bir kaide olarak Schmidt çizgilerinin üzerinde bulunmayışı, hallerin karışımının varlığını ispat eder; ve manyetik momentlerin genellikle Schmidt çizgilerinin çok uzağında bulunmayışı da kabuk modelinin tek parçacık hâlinin karışımındaki hallerin en önemlisi olduğunu gösterir.

Kabuk modeli aynı zamanda bir tek-A, tek-Z li çekirdeğin elektrik kuvadrupol momentini, bunun çekirdekdeki sonuncu protondan ileri geldiği faraziyesi altında, hesaplamayı mümkün kılar. Deneysel olarak ölçülen kuvadrupol moment genellikle verilmiş bir j için teorik olarak mümkün olan değerlerin en büyüğüdür, yâni sonuncu protonun bu değere ait manyetik kuvantum sayısı $m_j = j$ dir. Böylece, l ile s nin paralel olduğu $\left(j = l + \frac{1}{2} \right)$ hâl için $m_l = l$ ve $m_s = + \frac{1}{2}$ olmalıdır. Böylece, protonun

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) \chi(m)$$

şeklindeki dalga fonksiyonu

$$\psi = \frac{u(r)}{r} Y_{ll}(\theta, \varphi) \alpha \quad (57)$$

şeklini alır; burada α , (II.60) ile târif edilen spin dalga fonksiyonudur. (II.34) bağıntısına göre, tek protonun meydana getirdiği elektrik kuvadrupol moment,

$$Q = \int r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) |\psi(\mathbf{r})|^2 d\tau$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Küresel harmoniğin genel ifâdesi

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

olduğundan

$$|Y_{ll}|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{1}{(2l)!} [P_l^l(\cos \theta)]^2$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$Q = \int [u(r)]^2 (3 \cos^2 \theta - 1) |Y_{ll}(\theta, \varphi)|^2 d\tau$$

olduğundan, $d\tau = r^2 dr d\Omega$ olduğuna dikkat ederek,

$$Q = \int_0^\infty r^2 [u(r)]^2 dr \int (3 \cos^2 \theta - 1) |Y_{ll}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$$

elde edilir. Protonun yörünge yarıçapının karesinin ortalaması \bar{r}^2 ile gösterilirse

$$\bar{r}^2 = \int_0^\infty r^2 [u(r)]^2 dr \quad (58)$$

yazılabilir. Böylece

$$Q = \bar{r}^2 \left[3 \int \cos^2 \theta |Y_{ll}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega - 1 \right]$$

elde edilir; burada küresel harmoniğin normalize olmasının sonucu olan $\int |Y_{lm}|^2 d\Omega = 1$ bağıntısı kullanılmıştır. $|Y_{ll}|^2$ nin yukardaki ifadesini yerine yazarak ve $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ olduğuna dikkat ederek

$$Q = \bar{r}^2 \left[3 \cdot \frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{1}{(2l)!} \cdot 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \theta [P_l^l(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta - 1 \right]$$

veya $x \equiv \cos \theta$ vaz ederek

$$Q = \bar{r}^2 \left[\frac{3(2l+1)}{2(2l)!} \int_{-1}^1 [x P_l^l(x)]^2 dx - 1 \right]$$

elde edilir. Kitaplarda Legendre fonksiyonlarının

$$(2l+1)x P_l^m(x) = (l-m+1) P_{l+1}^m(x) + (l+m) P_{l-1}^m(x), \quad (59)$$

ve, $P_{l-1}^l(x) \equiv 0$ olduğu için,

$$(2l + 1) x P_l(x) = P_{l+1}(x) \quad (59')$$

bağıntılarını sağladığı gösterilir. Böylece (59') yardımı ile

$$Q = \bar{r}^2 \left[\frac{3}{2(2l)! (2l + 1)} \int_{-1}^1 [P_{l+1}(x)]^2 dx - 1 \right]$$

veyâ

$$Q = \bar{r}^2 \left[\frac{3}{2(2l + 1)!} \int_{-1}^1 [P_{l+1}(x)]^2 dx - 1 \right]$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2l + 1} \cdot \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \quad (60)$$

olduğundan

$$\int_{-1}^1 [P_{l+1}(x)]^2 dx = \frac{2(2l + 1)!}{2l + 3}$$

yazılabilir ve böylece

$$Q = \left[\frac{3}{2(2l + 1)!} \cdot \frac{2(2l + 1)!}{2l + 3} - 1 \right] \bar{r}^2$$

veyâ

$$Q = \left(\frac{3}{2l + 3} - 1 \right) \bar{r}^2$$

veyâ

$$Q = -\frac{2l}{2l + 3} \bar{r}^2, \quad j = l + \frac{1}{2} \quad (61)$$

sonucuna varılır. (61) de $l = j - \frac{1}{2}$ koyulursa

$$Q = -\frac{2j - 1}{2j + 2} \bar{r}^2 \quad (61')$$

elde edilir.

Eğer l ve s antiparalel ise, (61) denkleminin tekabül eden bağıntısının çıkarılması daha karışıktır. Protonun (57) dalga fonksiyonu "açık" konfigürasyon için $\left(j = l + \frac{1}{2}\right)$ yazılmış olduğundan basittir, çünkü $m_j = j$ yalnız $m_l = l$ ve $m_s = +\frac{1}{2}$ değerlerinden elde edilebilir. "Kapalı" konfigürasyon hâlinde $\left(j = l - \frac{1}{2}\right)$ $m_j = j$ hem $m_l = l$, $m_s = -\frac{1}{2}$ ve hem de $m_l = l - 1$, $m_s = +\frac{1}{2}$ değerlerinden elde edilebilir. Böylece protonun doğru dalga fonksiyonu bu iki hâle ait dalga fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonudur. Burada bu bağıntıyı ayrıntıları ile çıkarmıyacağız. Sonuç (61') bağıntısı ile aynıdır. (61') bağıntısında $j = l - \frac{1}{2}$ koyulursa

$$Q = -\frac{2l-2}{2l+1} \bar{r}^2, \quad j = l - \frac{1}{2} \quad (62)$$

sonucuna varılır.

Verilmiş bir açısal momentum için, hallerin farklı karışımından dolayı farklı manyetik momentlerin ortaya çıktığı yukarıda söylenmişti. Şüphesiz kuvadrupol momentler için de aynı şey doğrudur, ve kuvadrupol momentler tek parçacığa ait hallerin farklı karışımlarına çok daha duyarlıdır. Karışımlar kapalı bir kabuğun dışındaki bir protona veya kapalı bir kabukta bir proton deliğine sahip çekirdekler için en az olmalıdır. (61) ve (62) ye göre kapalı bir kabuğun dışında bir protona sahip bir çekirdeğin kuvadrupol momenti negatif ve kapalı bir kabuğunun içinde bir proton deliğine sahip bir çekirdeğin kuvadrupol momenti pozitifdir.

Kuvadrupol momentlerin deneysel değerlerinin kullanılması ile \bar{r}^2 hesaplanabilir.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

IV.1. Kütlesi M olan bir parçacığın yarıçapı R olan küresel bir kutu içerisindeki en aşağı enerji seviyesinin $4,935 \frac{\hbar^2}{MR^2}$ olduğunu gösteriniz. Diğer yandan, bu kutu ile aynı $\frac{4}{3} \pi R^3$ hacmine sahip kübik bir kutu içerisinde bulunan ve kütlesi gene M olan bir parçacığın en aşağı enerji seviyesinin $1,9 \frac{\hbar^2}{MR^2}$ olduğunu gösteriniz. İki hâl arasındaki bu farkın sebebi nedir?

IV.2. Küresel bir kutu aşağıdaki potansiyelle târif edilebilir :

$$r < R \text{ için : } V = 0 ; r > R \text{ için : } V = + \infty .$$

Spinleri $\frac{1}{2}$ olan parçacıklar böyle bir kutu içerisinde bağımsız olarak hareket etmektedirler. E enerjisine ve l açısai momentine sahip bir parçacığın kutu içerisindeki dalga fonksiyonunun

$$\Psi_l = A_l j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

olduğunu gösteriniz; burada $k^2 = 2ME/\hbar^2$ dir. $kR < 9,5$ için $j_l(kR) = 0$ denkleminin çözümlerini düşünerek kutunun içerisinde enerjileri $E_{\max} = 45 \frac{\hbar^2}{MR^2}$ enerjisinden küçük olan 92 parçacık olduğunu gösteriniz.

IV.3. Yarı-ampirik kütle formülünü kullanarak ^{235}U in (a) bir proton, (b) bir nötron, (c) bir α -parçacığı neşretmeye karşı kararlılığını araştırınız. (^{235}U , deney sonuçlarına göre 4,56 MeV enerjisinde olan α -parçacıkları neşreder).

IV.4. Yarı-ampirik kütle formülünü kullanarak $A = 64$ kütle sayısına sahip izobarların β -parçalanmasına karşı kararlılığını araştırınız.

IV.5. (IV.48.a) ile verilen sonsuz küresel kuyuda l açısai momentine sahip n -ninci enerji seviyesinin

$$E_{nl} = -V_0 + \frac{\hbar^2 w_{nl}^2}{2MR^2}$$

bağıntısı ile belli olduğunu gösteriniz; burada w_{nl} ile $j_l(w) = 0$ denkleminin n -ninci kökü gösterilmektedir. S -hâlleri için de

$$E_{n0} = -V_0 + \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2MR^2}$$

olduğunu gösteriniz.

IV.6. (IV.48.b) ile verilen sonlu küresel kuyuda bir S -hâline ait n -ninci enerji seviyesinin

$$E_n = -V_0 + \frac{\hbar^2 x_n^2}{2MR^2}$$

bağıntısı ile belli olduğunu gösteriniz; burada x_n ,

$$x \cotg x = - \left(\frac{2MR^2}{\hbar^2} V_0 - x^2 \right)^{1/2}$$

denkleminin n -ninci köküdür.

$V_0 = 42$ MeV, $R = 7$ fm için ilk üç S -hâlinin enerjilerini hesaplayınız ve bu enerjileri sonsuz küresel kuyuya ait mütekabil enerjilerle karşılaştırınız. (Problem IV.5 e bakınız).

IV.7. (IV.56) bağıntılarını kullanarak 3H , 3He , ${}^{15}N$, ${}^{17}O$, ${}^{39}K$, ${}^{207}Pb$, ve ${}^{209}Bi$ un manyetik momentlerini hesaplayınız. Niçin bu haller için deneylere uygunluk beklenir?

V. BÖLÜM

ÇEKİRDEK REAKSİYONLARI

Evvelce de görüldüğü gibi (I.5. kısımda), $X(a, b)Y$ şeklindeki bir çekirdek reaksiyonu yalnız a bombardıman parçacığı ve X hedef çekirdeği ile belli olmaz; fakat verilmiş bir X ile a ya bütün bir, kalan Y çekirdekleri ile b neşredilen parçacıkları serisi tekabül eder. Yalnız kalan çekirdekleri birbirlerinden ayırt etmek yetmez, fakat aynı zamanda aynı bir kalan çekirdeğin muhtelif kuvantum hallerini birbirlerinden ayırt etmek gerekir; böylece her kalan çekirdeğin her bir kuvantum hâlini farklı bir harf ile göstermek uygundur. Meselâ, bir inelâstik saçılma meydana gelmişse, o halde Y çekirdeği X çekirdeği ile aynıdır, fakat uyarılmış bir haldedir, ve b parçacığı da a parçacığı ile aynıdır, fakat daha alçak bir enerjiye sahiptir. Böylece herhangi bir mümkün çift (B, b) , (C, c) ile gösterilir ve bir reaksiyon kanalı adını alır ve mütekabil β, γ, \dots Grek harfi ile gösterilir. α kanalına giriş kanalı adı verilir. Her bir kanala belirli bir $E = E_\alpha$ toplam enerjisi tekabül eder. Kanal fikri dalga kavşaklarından alınmıştır. Aynı şekilde bir kanaldan bir kavşağa giren bir dalga, kavşağın bütün kanallarının içinden kanallar tarafından tayin edilen bir tarzda uzaklaşır; böylece, bir a parçacığı tarafından bombardıman edilen bir X çekirdeği, yaratılma ihtimallerine dayanan belirli oranlarda (B, b) , $(C, c), \dots$ şeklindeki kalan çekirdekler ile neşredilen parçacıkları meydana getirir. Bütün diğerlerinden birçok bakımlardan farklı olan özel bir hâl elâstik saçılma hâlidir, bu halde reaksiyon kanalı giriş kanalına çakışır, yani gelen dalga kavşak tarafından giriş kanalına geri yansıtılır.

(V.1) SAÇILMA VE REAKSİYON TESİR KESİTLERİNİN GENEL İFÂDELERİ

(III.59) ve (III.69) bağıntıları saçılma ve reaksiyon tesir kesitlerinin genel ifâdeleridir :

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) |1 - \eta_l|^2 \quad (1)$$

$$\sigma_{re} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) \quad (2)$$

Saçılma ve reaksiyon tesir kesitlerinin toplamına toplam tesir kesiti adı verilir ve σ ile gösterilir. O halde :

$$\sigma = \sigma_{sc} + \sigma_{re} \quad (3)$$

(1) ve (2) ifâdelerindeki toplamların her bir terimi, bir l açısal momentum ku-
vantum sayısına tekabül eden bir kısmî dalgaya ait tesir kesiti olup kısmî tesir
kesiti adını alır ; bu tesir kesitleri saçılma, reaksiyon ve toplam için mütেকabilen
 $\sigma_{sc,l}$, $\sigma_{re,l}$ ve σ_l ile gösterilir. O halde

$$\sigma_{sc} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{sc,l}, \quad \sigma_{re} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{re,l}, \quad \sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \quad (4)$$

ve

$$\sigma_l = \sigma_{sc,l} + \sigma_{re,l} \quad (5)$$

yazılabilir. (4) bağıntılarının (1) ve (2) bağıntıları ile karşılaştırılmasından

$$\sigma_{sc,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - \eta_l|^2 \quad (6)$$

$$\sigma_{re,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) \quad (7)$$

yazılabilir. (III.56) bağıntısı η_l çarpışma fonksiyonunu δ_l faz kayması cinsinden
ifâde eder :

$$\eta_l = e^{2i\delta_l}, \quad (8)$$

Eğer δ_l faz kayması reelse $\sigma_{re,l} = 0$ olur. Reaksiyonun mevcut olabilmesi için δ_l
faz kayması kompleks olmalıdır :

$$\delta_l = \lambda_l + i\mu_l.$$

(9) bağıntısını (8) bağıntısında yerine koyarak

$$\eta_l = e^{2i(\lambda_l + i\mu_l)}$$

veyâ

$$\eta_l = e^{2i\lambda_l} e^{-2\mu_l} \quad (10)$$

elde edilir. O halde, bir yandan

$$|1 - \eta_l|^2 = (1 - \eta_l^*)(1 - \eta_l) = 1 + |\eta_l|^2 - (\eta_l^* + \eta_l)$$

$$|1 - \eta_l|^2 = 1 + e^{-4\mu_l} - e^{-2\mu_l} (e^{-2i\lambda_l} + e^{2i\lambda_l})$$

$$\begin{aligned}
|1 - \eta_l|^2 &= 1 + e^{-4\mu_l} - 2 e^{-2\mu_l} \cos 2\lambda_l \\
&= e^{-2\mu_l} (e^{2\mu_l} + e^{-2\mu_l} - 2 \cos 2\lambda_l) \\
&= 2 e^{-2\mu_l} (\cosh 2\mu_l - \cos 2\lambda_l)
\end{aligned}$$

ve diğer yandan

$$\begin{aligned}
1 - |\eta_l|^2 &= 1 - e^{-4\mu_l} \equiv e^{-2\mu_l} (e^{2\mu_l} - e^{-2\mu_l}) \\
&= 2 e^{-2\mu_l} \sinh 2\mu_l
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (6) ve (7) bağıntılarından

$$\sigma_{sc,l} = \frac{2\pi}{k^2} (2l + 1) e^{-2\mu_l} (\cosh 2\mu_l - \cos 2\lambda_l) \quad (11)$$

$$\sigma_{re,l} = \frac{2\pi}{k^2} (2l + 1) e^{-2\mu_l} \sinh 2\mu_l \quad (12)$$

sonuçları elde edilir. Diğer yandan

$$\cosh 2\mu_l + \sinh 2\mu_l \equiv e^{2\mu_l}$$

olduğundan,

$$\sigma_{sc,l} + \sigma_{re,l} = \frac{2\pi}{k^2} (2l + 1) e^{-2\mu_l} (e^{2\mu_l} - \cos 2\lambda_l)$$

veyâ

$$\sigma_l = \frac{2\pi}{k^2} (2l + 1) (1 - e^{-2\mu_l} \cos 2\lambda_l) \quad (13)$$

sonucuna varılır.

Şimdi $\sigma_{sc,l}$ ve $\sigma_{re,l}$ nin maksimum değerlerini arayalım. Bunun için (11) ve (12) bağıntılarını

$$\sigma_{sc,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) 2 e^{-2\mu_l} \left[\frac{1}{2} (e^{2\mu_l} + e^{-2\mu_l}) - \cos 2\lambda_l \right]$$

$$\sigma_{re,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) 2 e^{-2\mu_l} \frac{1}{2} (e^{2\mu_l} - e^{-2\mu_l})$$

veyâ

$$\sigma_{sc,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) (1 + e^{-4\mu_l} - 2 e^{-2\mu_l} \cos 2\lambda_l) \quad (11')$$

$$\sigma_{re,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) (1 - e^{-4\mu_l}) \quad (12')$$

şekillerinde yazalım. Diğer yandan

$$y \equiv \frac{\sigma_{sc,l}}{\frac{\pi}{k^2} (2l+1)}, \quad x \equiv \frac{\sigma_{re,l}}{\frac{\pi}{k^2} (2l+1)}, \quad t \equiv e^{-2\mu_l}, \quad \alpha \equiv \cos 2\lambda_l$$

vaz edelim. O halde, (11') ve (12') bağıntıları

$$y = 1 + t^2 - 2\alpha t$$

$$x = 1 - t^2$$

şekillerini ahırlar. Bu iki denklem arasında t parametresi yok edilirse,

$$y = 1 + (1-x) \pm 2\alpha \sqrt{1-x}$$

$$(x+y-2)^2 = 4\alpha^2(1-x)$$

$$(x+y)^2 - 4(x+y) + 4 = 4\alpha^2(1-x)$$

$$(x+y)^2 - 4(1-\alpha^2)x - 4y + 4(1-\alpha^2) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklem, (x, y) düzleminde α parametresine bağılı bir parametrelili bir parabol ailesinin denklemdir. Bu parabol ailesinin

$$1 \geq x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq \alpha^2 \leq 1, \quad \mu_l \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

şartlarını sağılayan kısımları fiziksel mânaya sahiptir. Yukardaki denklem, α ne olursa olsun $x = 1, y = 1$ için sağılanır, yâni, aileye ait bütün paraboller $(1,1)$ noktasından geçerler. Parabollerden her birinin eksen denklemi

$$x + y = 2 - \alpha^2,$$

tepe teğıetinin denklemi

$$x - y = \frac{1}{2} \alpha^2,$$

ve tepe noktasının koordinatları da

$$\left(1 - \frac{1}{4} \alpha^2, 1 - \frac{3}{4} \alpha^2\right)$$

dir. Diğeri yandan,

$$x = 2(1 - \alpha^2) - y + 2\alpha \sqrt{y - (1 - \alpha^2)}$$

$$\frac{dx}{dy} = -1 + \frac{\alpha}{\sqrt{y - (1 - \alpha^2)}}, \quad \frac{dy}{dx} = -1 \mp \frac{\alpha}{\sqrt{1-x}}$$

bağıntılarına göre, $y = 1$ için daima $\frac{dx}{dy} = 0$ elde edilir ve bu α nın değıerine

bağılı değıildir, ve $x_{\max} = 1$ verir. $\frac{dy}{dx} = 0$ için y nin maksimumu elde edilemez.

y nin maksimumu için

$$y = 1 + t^2 - 2\alpha t$$

bağıntısında $t = 1$ ve $\alpha = -1$ koymak yeter ve $y_{\max} = 4$ bulunur. Böylece

$$\mu_l = 0 \text{ ve } \lambda_l = \frac{\pi}{2} \text{ için : } \sigma_{sc,l,\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \quad (14)$$

$$\mu_l = \infty \text{ için : } \sigma_{re,l,\max} = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) \quad (15)$$

sonuçlarına varılır.

Yukarda elde edilen formüllerini önemli bir tatbikatı, çok yüksek enerjili parçacıkların R yarıçaplı mükemmel absorplayıcı bir küre tarafından saçılmasıdır. Bu takdirde sâdece $l < kR$ şartını sağlayan ilk l kısmî tesir kesitini göz önüne almak yeter; yâni, $l > kR$ için $\lambda_l = 0$ dır. [(III.61) e bakınız]. Böylece $\alpha = 1$ olacağından,

$$y = (1 - t)^2, \quad x = 1 - t^2$$

elde edilir. Bu sonuç genellikle yalnız yaklaşık olarak doğrudur, ve $k \rightarrow \infty$ için tam olarak doğrudur. Mükemmel absorplayıcı bir küre için benzer şekilde $l < kR$ için $\mu_l = \infty$, $t = 0$ ve $l > kR$ için $\mu_l = 0$, $t = 1$ olur. Böylece:

$l < kR$ için : $y = 1$, $x = 1$ ve $l > kR$ için : $y = 0$, $x = 0$ dır. Bu sonuçları (3), (4) ve (5) bağıntılarına y ve x in târiflerini göz önüne alarak uygulayacak olursak, aşağıdaki sonuçlar elde edilir :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sc} &= \sum_{l=0}^{kR} \sigma_{sc,l} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kR} (2l + 1) = \pi R^2 \\ \sigma_{re} &= \sum_{l=0}^{kR} \sigma_{re,l} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kR} (2l + 1) = \pi R^2 \\ \sigma &= \sigma_{sc} + \sigma_{re} = 2\pi R^2 = 2 \times \text{geometrik tesir kesiti.} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Fakat çok yüksek enerjiye sahip parçacıkların dalgaboyu saçıcı kürenin yarıçapından çok daha küçük olduğundan, tesir kesitinin geometrik tesir kesitinden ibaret olması, yani $\sigma = \sigma_{re} = \pi R^2$ ve $\sigma_{sc} = 0$ olması beklenirdi. Yukardaki paradoksal sonuç, çok yüksek enerjilerde bile saçılmanın saf klâsik olmadığını gösterir. Daima dalga mekaniksel bir difraksiyon saçılması vardır ve değeri πR^2 dir.

Son olarak $y = 0$, yâni $\sigma_{sc,l} = 0$ olma şartlarını arayalım. $y = t^2 - 2\alpha t + 1$ ikinci derece ifadesinin diskriminantı $\alpha^2 - 1 \leq 0$ şartını sağladığından, yalnız $\alpha = \pm 1$ için $y = 0$ olabilir. Bu takdirde, $y = (t \mp 1)^2$ olacağından, ve $0 \leq t \leq 1$ olduğundan, sadece $\alpha = 1$ ve $t = 1$ için $y = 0$ olur. $y = 0$ için, yâni $t = 1$ için, $x = 0$, yâni $\sigma_{re,l} = 0$ olur. Yâni, saçılma yoksa, kesin olarak

reaksiyon da yoktur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Çünkü $\sigma_{re,l} = 0$, yâni $x = 0$ için $t = 1$ olmalıdır ve bu da $y = 2(1 - \alpha)$ sonucunu verir. O halde reaksiyon yoksa, $\alpha \neq 1$ oldukça daima saçılma vardır, ve hattâ $\alpha = -1$ için $y = 4$ değerine kadar yükselir.

(V.2) TERS REAKSİYONLAR

α giriş kanalı ve β reaksiyon kanalı olmak üzere $\sigma(\alpha \rightarrow \beta)$ toplam tesir kesiti ile $\sigma(\beta \rightarrow \alpha)$ toplam tesir kesiti arasındaki genel bağıntının bulunması ilginçtir. Burada $\sigma(\alpha \rightarrow \beta)$ reaksiyona ait toplam tesir kesitini ve $\sigma(\beta \rightarrow \alpha)$ ters reaksiyona ait toplam tesir kesitini göstermektedir; şüphesiz ikinci halde giriş kanalı β ve reaksiyon kanalı da α dır.

Hacmi V olan büyük bir kutunun içerisinde keyfi sayılarda X , B , x ve b parçacıkları bulunsun. $X + x \rightleftharpoons B + b$ reaksiyonlarının her ikisi birden meydana gelsin. Statistlik mekaniğin denge ilkesi olarak bilinen bir temel teoreme göre, bir sistem dinamik olarak dengede olduğu zaman enerji bakımından mümkün bütün haller eşit ihtimalle işgal edilirler. İki özel hal ile, yâni α ve β reaksiyon kanalları ile ilgileniyoruz. Böylece yukardaki teoreme göre, kutu içerisindeki kanalların sayısı, verilmiş bir enerji aralığında bulunan mümkün kanalların sayısı ile orantılıdır. (IV.10) bağıntısına göre E_α ile $E_\alpha + dE$ enerji aralığında bulunan α kanallarının sayısı

$$N_\alpha(E_\alpha) dE = \frac{M^{3/2} V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} E_\alpha^{1/2} dE$$

bağıntısı ile bellidir. Diğer yandan

$$E_\alpha = \frac{1}{2} M v_\alpha^2, \quad \frac{1}{2^{1/2}} E_\alpha^{1/2} = \frac{1}{2} M^{1/2} v_\alpha$$

$$\frac{1}{2^{1/2}} M^{3/2} E_\alpha^{1/2} = \frac{1}{2} M^2 v_\alpha, \quad M^2 v_\alpha^2 = p_\alpha^2, \quad M^2 v_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{v_\alpha}$$

$$\frac{1}{2^{1/2}} M^{3/2} E_\alpha^{1/2} = \frac{p_\alpha^2}{2v_\alpha}$$

olduğundan

$$N_\alpha(E_\alpha) dE = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{p_\alpha^2}{v_\alpha} dE \quad (17)$$

elde edilir. $N_\beta(E_\beta) dE$ için de benzer bir bağıntı bulunur. Her iki kanal için de dE enerji aralığı şüphesiz aynıdır. O halde

$$\frac{N_\alpha}{N_\beta} = \frac{p_\alpha^2 v_\beta}{p_\beta^2 v_\alpha} \quad (18)$$

bulunur. Eğer bir saniyedeki $\alpha \rightarrow \beta$ geçişlerinin sayısı bir saniyedeki $\beta \rightarrow \alpha$ geçişlerinin sayısına eşitse, sistem dinamik denge hâindedir. Bu şart gerekli

olmamakla beraber, genellikle deneysel olarak gerçekleşir. Buna **ayrıntılı denge ilkesi** adı verilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \text{Bir saniyedeki } \alpha \rightarrow \beta \text{ geçişlerinin sayısı} &= \\ &= \text{Kutudaki } \alpha \text{ kanallarının sayısı} \times w(\alpha \rightarrow \beta) \end{aligned} \quad (19)$$

yazılabilir; burada $w(\alpha \rightarrow \beta)$ ile $\alpha \rightarrow \beta$ reaksiyonu için bir saniyedeki geçiş ihtimali gösterilmektedir. O halde, ayrıntılı denge ilkesine göre

$$N_\alpha(E_\alpha) dE \times w(\alpha \rightarrow \beta) = N_\beta(E_\beta) dE \times w(\beta \rightarrow \alpha)$$

veyâ (18) bağıntısını kullanarak

$$p_\alpha^2 v_\beta w(\alpha \rightarrow \beta) = p_\beta^2 v_\alpha w(\beta \rightarrow \alpha) \quad (20)$$

yazılabilir.

Son olarak, $w(\alpha \rightarrow \beta)$ geçiş ihtimali ile $\sigma(\alpha \rightarrow \beta)$ tesir kesiti arasında bir bağıntı bulmamız gerekmektedir. Geçiş ihtimali, V hacmi içerisinde v hızı ile hareket etmekte olan bir parçacığın bir saniyedeki saçılma ihtimalidir. Bir parçacığın birim hacim içerisinde bulunma ihtimali $\frac{1}{V}$ dir ve birim yüzeyden bir saniyede geçme ihtimali $\frac{v}{V}$ dir. Diğer yandan, w , parçacığın σ yüzeyinden birim zamanda geçiş ihtimalidir. Böylece σ yüzeyi, diğer bir ihtimal ölçüsü olup tesir kesitini gösterir. O halde, parçacığın birim yüzeyden bir saniyede geçme ihtimali $\frac{w}{\sigma}$ olur ve

$$\frac{w}{\sigma} = \frac{v}{V}$$

veyâ

$$\sigma = \frac{V}{v} w \quad (21)$$

yazılabilir. Bu ifade $\alpha \rightarrow \beta$ geçişi için

$$\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = V \frac{w(\alpha \rightarrow \beta)}{v_\alpha} \quad (21')$$

şeklinde yazılabilir. (20) bağıntısı da

$$p_\alpha^2 \frac{w(\alpha \rightarrow \beta)}{v_\alpha} = p_\beta^2 \frac{w(\beta \rightarrow \alpha)}{v_\beta} \quad (20')$$

şeklinde yazılabilir. (20') bağıntısı (21') bağıntısı ile karşılaştırılırsa ve $k = \frac{p}{\hbar}$ konulursa

$$k_a^2 \sigma(\alpha \rightarrow \beta) = k_b^2 \sigma(\beta \rightarrow \alpha) \quad (22)$$

sonucuna varılır ki bu da aranan bağıntıdır.

Buraya kadar parçacıkların iç açısal momentumlarının sıfır oldukları kabul edildi. Parçacıklardan herhangi birinin iç açısal momentumu I ise, (17) bağıntısında buna tekabül eden hallerin N yoğunluğu $2I + 1$ ile çarpılmalıdır. Böylece aşağıdaki daha genel formül elde edilir :

$$(2I_x + 1) (2I_x + 1) k_a^2 \sigma(\alpha \rightarrow \beta) = (2I_b + 1) (2I_b + 1) k_b^2 \sigma(\beta \rightarrow \alpha) \quad (23)$$

Bu formülde tesir kesitlerinin ilk iç açısal momentum hallerine nazaran ortalaması alınmış ve son iç açısal momentum hallerine nazaran da toplamı alınmıştır. Bu, genellikle deneysel olarak yapılan şeydir, çünkü gelen huzmeler genellikle polarize değillerdir ve saçılmış huzmeler de farklı iç açısal momentumlarına nazaran ayrılamazlar. Bununla beraber, eğer ilk ve son haller belirli açısal momentumlara sahipler, (22) formülü kullanılabilir.

(V.3) BİLEŞİK ÇEKİRDEK

(1936 da) N. Bohr tarafından bir çekirdek reaksiyonunun iki aşamada olduğu öne sürüldü: Önce, gelen parçacığın hedef çekirdek tarafından tutularak bir bileşik çekirdeğin oluşması, ve sonra da bileşik çekirdeğin parçalanması. Böylece bir çekirdek reaksiyonu şematik olarak

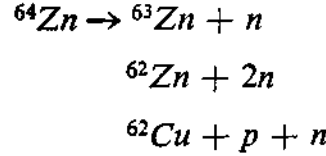


şeklinde gösterilebilir. Bir C ara hâlinin oluşmasına neden, gelen parçacık ile hedef çekirdeğin nükleonları arasındaki kuvvetli etkileşmedir. Bohr'a nazaran, gelen parçacığın enerjisi, bu kuvvetli etkileşmeden ötürü hızla sistemdeki bütün nükleonlar arasında paylaşılır ve ancak bir nükleon üzerinde tekrar yeter enerji toplandıktan sonra bileşik çekirdek bu nükleonun neşredilmesiyle parçalanabilir. Bu da çekirdek zaman eşeline göre oldukça uzun bir zaman alır. (Çekirdekteki zaman eşeli çekirdeğin karakteristik zaman ölçüsü olan ve bir nükleonun çekirdeği bir uçtan diğer uca kat etmesi için gerekli olan zaman ile bellidir, büyüklüğü de $10^{-12} \text{ cm}/10^9 \text{ cm sn}^{-1} = 10^{-21} \text{ sn.dir.}$) Böylece bileşik çekirdek, parçalanması için gerekli olan zaman içerisinde nasıl oluştuğunu unutacaktır. Böylece Bohr'un bileşik çekirdek hakkındaki faraziyesi ortaya çıkar: Bileşik çekirdeğin parçalanması kendisinin oluşma şekline bağlı olmayıp sâdece enerjisine, açısal momentumuna ve paritesine bağlıdır. Bu sebepten, bileşik çekirdeğin oluşmasını ve parçalanmasını birbirinden tamamen bağımsız işlemler olarak inceleyeceğiz.

Bileşik çekirdeğin oluşması ve parçalanması işlemlerinin bağımsızlığı uygun durumlarda deneysel olarak gerçekleştirilebilir. GHOSHAL (1950 de) aşağıdaki iki şekilde oluşabilen ^{64}Zn bileşik çekirdeğini inceledi:



${}^{60}\text{Ni}$ ile ${}^{63}\text{Cu}$ çekirdekleri arasındaki enerji farkından dolayı, α -parçacığının enerjisinin protonunkinden 7 MeV daha büyük olması gereklidir. Bu gerçekleştiği zaman bileşik çekirdek her iki halde de aynı uyarılma hâlinde oluşur. Sonradan parçalanmanın aşağıdaki üç reaksiyon kanalında olduğu bulundu :



Bağımsızlık hipotezine göre bu parçalanmalara ait tesir kesitlerinin oranları oluşma şeklinden bağımsız olmalıdır. Bu, 3 MeV den 33 MeV ye kadar olan proton enerjileri için gerçekleşmiştir.

Şimdi bir çekirdek reaksiyonuna ait tesir kesiti

$$\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = \sigma_c(\alpha) G_c(\beta) \quad (25)$$

şeklinde yazılabilir; burada $\sigma_c(\alpha)$, C nin α kanalında oluşmasına ait tesir kesiti-dir ve $G_c(\beta)$, C nin β kanalında parçalanması ihtimalidir. Problemin sadeliğini sağlamak için $G_c(\beta)$ nın açısız moment ile pariteye bağlılığını ihmal edeceğiz. Bu ihmalin önemli hatâlar meydana getirmediği gösterilebilir (Blatt ve Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, Bölüm VIII, kısım 10). Böylece $G_c(\beta)$, sadece bileşik çekirdeğin E_c uyarılma enerjisine bağlıdır. Heisenberg'in belirsizlik prensibinden ötürü, sadece kararlı çekirdekler kesin olarak belirli enerjilere sahip olabildiklerinden, E_c enerjisi kesin olarak belirli bir büyüklük değildir. E_c deki belirsizlik, belirsizlik prensibinden ötürü, bileşik çekirdeğin β kanalındaki $\tau_\beta(E_c)$ parçalanma zamanı ile ters orantılı olan bir $\Gamma_\beta(E_c)$ büyüklüğü ile ölçülür, ve aşağıdaki denklem ile târif edilir :

$$\Gamma_\beta(E_c) \tau_\beta(E_c) = \hbar. \quad (26)$$

Böylece Γ/\hbar büyüklüğü bir parçalanma ihtimalidir. Eğer bileşik çekirdeğin toplam parçalanma ihtimali $\Gamma(E_c)/\hbar$ ise, o halde aşağıdaki bağıntı yazılabilir :

$$\Gamma(E_c) = \sum_{\beta} \Gamma_{\beta}(E_c). \quad (27)$$

Diğer yandan, $G_c(\beta)$, bileşik çekirdeğin β kanalındaki parçalanma ihtimali olduğundan

$$G_c(\beta) = \frac{\Gamma_{\beta}(E_c)}{\Gamma(E_c)} \quad (28)$$

yazılabilir. Eğer şimdi (25) ile (28) i (22) deki yerlerine yazarsak

$$\frac{k_{\alpha}^2 \sigma_c(\alpha) \Gamma_{\beta}(E_c)}{\Gamma(E_c)} = \frac{k_{\beta}^2 \sigma_c(\beta) \Gamma_{\alpha}(E_c)}{\Gamma(E_c)}$$

veyâ α ve β indislerine göre ayırırsak

$$\frac{k_{\alpha}^2 \sigma_c(\alpha)}{\Gamma_{\alpha}(E_c)} = \frac{k_{\beta}^2 \sigma_c(\beta)}{\Gamma_{\beta}(E_c)} = U(E_c) \quad (29)$$

elde ederiz; burada $U(E_c)$ yalnız bileşik çekirdeğin enerjisine bağlı olan, fakat kanallardan hiçbirine bağlı olmayan bir fonksiyondur. (29) bağıntısından, (27) yi kullanarak

$$\frac{k_{\beta}^2 \sigma_c(\beta)}{\Gamma_{\beta}(E_c)} = \frac{\sum_{\gamma} k_{\gamma}^2 \sigma_c(\gamma)}{\sum_{\gamma} \Gamma_{\gamma}(E_c)} = \frac{\sum_{\gamma} k_{\gamma}^2 \sigma_c(\gamma)}{\Gamma(E_c)}$$

elde ederiz. (28) bağıntısını kullanarak β kanalındaki parçalanma ihtimalini yazabiliriz :

$$G_c(\beta) = \frac{k_{\beta}^2 \sigma_c(\beta)}{\sum_{\gamma} k_{\gamma}^2 \sigma_c(\gamma)} \quad (30)$$

Böylece, bir kere mümkün kanallarda C bileşik çekirdeğinin oluşmasına ait tesir kesiti bilinince, C nin verilmiş bir kanaldaki parçalanma ihtimalini hesaplamak mümkündür.

(V.4) REZONANS SAÇILMA VE REZONANS REAKSİYON TESİR KESİTLERİ

III. Bölüm 2. kısımda tesir kesiti tarifinin j ihtimaliyet akımı yoğunluğu ile yakından ilgili olduğunu gördük.

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

bağıntısı ile târif edilen bir parçacığa ait ihtimaliyet akımı yoğunluğu, bu parçacığa ait

$$P = \psi^* \psi$$

ihtimâl yoğunluğu ile birlikte

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

süreklilik denklemini sağlar. Süreklilik denklemi, parçacığa ait ihtimâlin korunumunu gösterir. Bunun manâsı da, parçacığın hiç kaybolmadan uzayda hareketine devam etmesi demektir. Süreklilik denklemi, bahis konusu parçacığa ait

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(r) \psi$$

Schrödinger denkleminin sonucudur. Schrödinger denklemi, bu hâliyle parçacığın $V(r)$ merkezî potansiyeli tarafından saçılmasını verir. Şimdi reel merkezî potansiyel yerine

$$V(r) + iW(r) \quad (31)$$

şeklindeki bir kompleks merkezî potansiyeli alalım. Bu takdirde Schrödinger denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi + \frac{V}{i\hbar} \psi + \frac{W}{\hbar} \psi$$

Bu denklemin kompleks eşleniği de şöyledir:

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi^* - \frac{V}{i\hbar} \psi^* + \frac{W}{\hbar} \psi^*$$

Bu denklemlerden birincisini soldan ψ^* ile, ikincisini de ψ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) + \frac{2W}{\hbar} \psi^* \psi$$

veyâ

$$\frac{\partial(\psi^* \psi)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right] + \frac{2W}{\hbar} \psi^* \psi$$

veyâ

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{2W}{\hbar} P$$

süreklilik denklemi elde edilir. Süreklilik denkleminin bu son şekli parçacığa ait ihtimâlin korunmadığını gösterir. Potansiyel zamana bağlı olmadığı için zamana bağlı Schrödinger denkleminin çözümü

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$$

şeklindedir ve Schrödinger denklemi de

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (V + iW) \psi$$

veyâ

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V - iW) \psi = 0 \quad (32)$$

şeklini alır. Böylece ihtimâl yoğunluğu

$$P = \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r})$$

şeklindedir ve zamana bağlı değildir. Şimdi duraklı hâl için süreklilik denkleminin iki yanının kapalı bir hacim üzerinden integralini alalım :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, d\tau = \int_V \frac{2W}{\hbar} P \, d\tau .$$

Sol taraftaki integral, Gauss teoremi vasıtasıyla kapalı hacmi çevreleyen yüzey üzerinden bir integrale dönüştürülebilir :

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{2W}{\hbar} P \, d\tau .$$

Sol taraftaki integral, kapalı hacme giren parçacıkların sayısı ile çıkan parçacıkların sayısı arasındaki farkı verir. Duraklı hâl için bu farkın sıfır olması gerekirdi; fakat eğer kapalı hacim içerisinde parçacıklardan bir kısmı çekirdek reaksiyonları sonucu yutulursa negatif olur. Böylece parçacıkların yutulmaları (absorpsiyonu) hâlinde $W(r) < 0$ olur, ve $\frac{2W}{\hbar} P$ büyüklüğü bir parçacığın birim hacimde birim zamanda yutulma ihtimalidir.

Şimdi (32) denklemini $l = 0$ açılal momentine sahip nötronlar ve bir kompleks kare kuyu potansiyeli için çözelim. Kompleks kare kuyu aşağıdaki bağıntılarla târif edilir :

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}, \quad W(r) = \begin{cases} -W_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (33)$$

(32) denkleminin radyal kısmı

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} u(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

konularak elde edilir:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - V - iW) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0. \quad (34)$$

$l = 0$ olduğundan

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V - iW) u = 0 \quad (35)$$

bulunur. Şimdi de (33) ile târif edilen kompleks kare kuyu potansiyeli (35) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } \frac{d^2 u}{dr^2} + K^2 u = 0 \\ r > R \text{ için : } \frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0 \end{array} \right\} \quad (36)$$

bulunur; burada aşağıdaki kısaltmalar yapılmıştır :

$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0 + iW_0), \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E.$$

(36) denklemleri, $r < R$ için $u(0) = 0$ sınır şartının kullanılması ile ve $r > R$ için de (III.55') asimtotik çözümü $l = 0$ şartına uyarak gerçekleştirilecek şekilde çözülebilir :

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } u = A \sin Kr \\ r > R \text{ için : } u = B(e^{-ikr} - \eta_0 e^{ikr}) \end{array} \right\} \quad (37)$$

Süreklilik şartını kullanabilmek için

$$f = \left(\frac{R}{u} \frac{du}{dr} \right)_{r=R}$$

boyutsuz büyüklüğünü târif ediyoruz. f büyüklüğünü evvelâ $r > R$ bölgesine ait dalga fonksiyonundan hesaplayalım:

$$f = R \frac{-ik e^{-ikR} - \eta_0 ik e^{ikR}}{e^{-ikR} - \eta_0 e^{ikR}}$$

elde edilir. Eğer

$$\alpha = kR$$

vaz edersek yukardaki denklem

$$f = i\alpha \frac{\eta_0 e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{\eta_0 e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}$$

şeklini alır. Bu denklemden η_0 aşağıdaki gibi çözülebilir :

$$\eta_0 = \frac{f + i\alpha}{f - i\alpha} e^{-2i\alpha} \quad (38)$$

f büyüklüğünü şimdi de $r < R$ bölgesine ait dalga fonksiyonundan hesaplayalım :

$$f = KR \cotg KR$$

bulunur. Eğer

$$\omega = KR$$

vaz edersek bu bağıntı

$$f = \omega \cotg \omega \quad (39)$$

şeklini alır. Şimdi de

$$\beta^2 = \frac{2m R^2}{\hbar^2} (E + V_0) \quad \text{ve} \quad \gamma^2 = \frac{2m R^2}{\hbar^2} W_0$$

vaz edelim. O hâlde

$$\omega^2 = \beta^2 + i\gamma^2 \quad (40)$$

bağıntısı elde edilir. (39) ve (40) denklemlerine göre; $W_0 \neq 0$ ise, yâni yutulma varsa f büyüklüğü reel değil komplekstir. Diğer yandan f , parçacığın E enerjisinin bir fonksiyonudur. Şimdi $f(E)$ kompleks fonksiyonunu aşağıdaki gibi reel ve imajiner kısımlarına ayıralım:

$$-\frac{f}{\alpha} = X + i(Y - 1), \quad (41)$$

burada X ve Y , E nin reel fonksiyonlarıdır. Eğer (41) bağıntısı (38) bağıntısında yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca varılır :

$$\eta_0 = \frac{X + i(Y - 2)}{X + iY} e^{-2i\alpha} \quad (42)$$

$l = 0$ için saçılma ve reaksiyon tesir kesitleri (6) ve (7) bağıntılarından hesaplanabilir :

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta_0|^2$$

$$\sigma_{re} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta_0|^2)$$

Şimdi evvelâ saçılma tesir kesitini (42) bağıntısını kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} |1 - \eta_0|^2 &= \left| \frac{X + i(Y - 2)}{X + iY} e^{-2i\alpha} - 1 \right|^2 \\ &= \left| \frac{X + i(Y - 2)}{X + iY} - 1 + 1 - e^{2i\alpha} \right|^2 \\ &= \left| \frac{-2i}{X + iY} + 1 - e^{2i\alpha} \right|^2 \end{aligned}$$

$\alpha \ll 1$ olduğundan, $1 - e^{2i\alpha} \cong -2i\alpha$ alınabilir. Böylece

$$\sigma_{sc} = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{1}{X + iY} + \alpha \right|^2 \quad (43)$$

bulunur. Reaksiyon tesir kesiti için de benzer bir hesap yapılabilir :

$$\begin{aligned}
|\eta_0|^2 &= \frac{X^2 + (Y-2)^2}{X^2 + Y^2} = \frac{X^2 + Y^2 - 4(Y-1)}{X^2 + Y^2} \\
&= 1 - \frac{4(Y-1)}{X^2 + Y^2} \\
\sigma_{re} &= \frac{4\pi}{k^2} \cdot \frac{Y-1}{X^2 + Y^2} \quad (44)
\end{aligned}$$

bulunur. (43) ve (44) bağıntıları ile verilen saçılma ve reaksiyon tesir kesitlerinin $X(E) = 0$ olduğu zaman ortaya çıkan maksimumu civarındaki, yâni herhangi bir özel rezonans civarındaki değişimini incelemek ilginçtir.

$$X(E_0) = 0 \quad (45)$$

denklemini sağlayan bir E_0 enerjisinin varlığını farz edelim. O halde, $X(E)$ yi E_0 civarında aşağıdaki gibi seriye açabiliriz :

$$X(E) = (E - E_0) X'(E_0) + \dots \quad (46)$$

Şimdi

$$\Gamma_n = \frac{2}{X'(E_0)}, \quad \Gamma = \frac{2Y(E_0)}{X'(E_0)}, \quad \Gamma_\gamma = \Gamma - \Gamma_n = \frac{2[Y(E_0) - 1]}{X'(E_0)} \quad (47)$$

büyükliklerini ithal edelim ve (46) bağıntısı ile verilen $X(E)$ yi, (43) ve (44) denklemlerinde yerine yazalım. Böylece, rezonans saçılma ve rezonans reaksiyon tesir kesitlerini veren Breit-Wigner formüllerini elde ederiz :

$$\sigma_{sc} = \frac{4\pi}{k_0^2} \left| \frac{\Gamma_n}{2(E - E_0) + i\Gamma} + k_0 R \right|^2, \quad (48)$$

$$\sigma_{re} = \frac{4\pi}{k_0 k} \frac{\Gamma_\gamma \Gamma_n}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2} \quad (49)$$

$\Gamma_\gamma = 0$ için $\sigma_{re} = 0$ olur ve (48) bağıntısı saf saçılma rezonansını verir; rezonansın yarı değer genişliği de Γ_n ile ölçülür. Eğer

$$\sigma_T = \sigma_{re} + \sigma_{sc} \quad (50)$$

bağıntısı ile toplam rezonans tesir kesiti târif edilirse Γ büyüklüğü de bu toplam rezonansın yarı değer genişliği olur, ve rezonansın toplam genişliği adını alır. Γ_γ büyüklüğüne de rezonansın radyasyon genişliği denir. Dnş. (48) deki $k_0 R$ terimi potansiyel saçılmayı temsil eder; filhakika, bu yarıçapı R olan bir katı kürenin meydana getirdiği saçılmadır. (48) ve (49) bağıntıları sadece bir reaksiyon kanalının mevcut bulunduğu özel hâle ait Breit-Wigner formülleridir.

Şimdi (47) bağıntıları yardımı ile rezonans genişliklerinin açık ifadelerini bulabiliriz. $W_0 \ll V_0$ olduğundan, $\gamma^2 \ll \beta^2$ yaklaşıklığı içerisinde (40) bağıntısı

$$\omega = \beta \left(1 + i \frac{\gamma^2}{\beta^2} \right)^{1/2} \cong \beta \left(1 + i \frac{\gamma^2}{2\beta^2} \right) \cong \beta + i \frac{\gamma^2}{2\beta}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $\omega \cotg \omega$ eğer $\omega = \beta$ civarında Taylor serisine açılırsa, γ^2 terimi yaklaşıklığında

$$\omega \cotg \omega \cong \beta \cotg \beta + i \frac{\gamma^2}{2\beta} [\cotg \beta - \beta (1 + \cotg^2 \beta)]$$

bulunur. (39) ve (41) bağıntıları yardımı ile

$$X + i(Y - 1) = -\frac{1}{\alpha} \omega \cotg \omega$$

veyâ

$$X + i(Y - 1) \cong -\frac{\beta}{\alpha} \cotg \beta - i \frac{\gamma^2}{2\alpha\beta} [\cotg \beta - \beta(1 + \cotg^2 \beta)]$$

elde edilir. Bu kompleks denklem aşağıdaki gibi iki reel denkleme ayrılabilir:

$$X = -\frac{\beta}{\alpha} \cotg \beta, \quad (51)$$

$$Y = 1 - \frac{\gamma^2}{2\alpha\beta} [\cotg \beta - \beta(1 + \cotg^2 \beta)]. \quad (52)$$

Diğer yandan, $X'(E_0)$, türev alma kurallarına göre

$$X'(E_0) = \alpha'(E_0) X'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) + \beta'(E_0) X'_\beta(\alpha_0, \beta_0)$$

şeklinde yazılabilir, burada X'_α ve X'_β , $X(\alpha, \beta)$ fonksiyonunun α ve β ya nazaran kısmî türevleridir. Önceki târiflerden aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\alpha^2 = \frac{2m R^2}{\hbar^2} E, \quad \beta^2 = \frac{2m R^2}{\hbar^2} (E + V_0),$$

$$\alpha'(E_0) = \frac{m R^2}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha_0}, \quad \beta'(E_0) = \frac{m R^2}{\hbar^2} \frac{1}{\beta_0}.$$

O hâlde,

$$X'(E_0) = \frac{m R^2}{\hbar^2} [X'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) / \alpha_0 + X'_\beta(\alpha_0, \beta_0) / \beta_0] \quad (53)$$

sonucuna varılır. Şimdi (51) denkleminde, (45) bağıntısı yardımı ile türevleme işlemlerini yapalım:

$$X(E_0) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0} \cotg \beta_0 = 0, \quad \cotg \beta_0 = 0,$$

$$X'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \cotg \beta_0 = 0,$$

$$X'_\beta(\alpha_0, \beta_0) = -\frac{1}{\alpha_0} [\cotg \beta_0 - \beta_0 (1 + \cotg^2 \beta_0)],$$

$$X''_\beta(\alpha_0, \beta_0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0}.$$

Bu sonuçları (53) bağıntısında yerlerine yazarak

$$X'(E_0) = \frac{m R^2}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha_0} \quad (54)$$

ve (52) denkleminde de

$$Y(E_0) = 1 + \frac{\gamma^2}{2\alpha_0} \quad (55)$$

sonuçlarına varılır. (54) ve (55) ifâdelerini (47) bağıntılarında yerlerine yazarak

$$\Gamma_n = \frac{\hbar^2}{m R^2} 2 k_0 R, \quad (56)$$

$$\Gamma_\gamma = \frac{\hbar^2}{m R^2} 2\alpha_0 \frac{\gamma^2}{2\alpha_0} = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{m R^2} = 2W_0$$

$$\Gamma_\gamma = 2W_0 \quad (57)$$

$$\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n \quad (58)$$

elde edilir, (57) bağıntısı, radyasyon genişliğinin, kompleks kare kuyu potansiyelinin imajiner kısmının iki katına eşit olduğunu ifâde etmektedir. Böylece süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\Gamma_\gamma}{\hbar} P \quad (59)$$

şeklini alır. (33) bağıntısına nazaran, çekirdek hacmi içerisinde $\Gamma_\gamma \neq 0$ olabilir. (59) denkleminin çekirdek hacmi üzerinden integralini alalım, ve sol taraftaki hacim integralini Gauss teoremi aracılığıyla çekirdek yüzeyi üzerinden alınmış bir yüzey integraline çevirelim :

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\Gamma_\gamma}{\hbar} \int_V P d\tau$$

bulunur. Çekirdek içerisinde dalga fonksiyonu genellikle bire normalize edildiğinden

$$\int_{\nu} P d\tau = 1$$

yazılabilir. Yukardaki denklemin sol yanı, nötronun birim zamanda çekirdek içerisinde yutulma ihtimalini gösterdiğinden $-\frac{1}{\tau}$ ya eşittir. Burada τ nötronun çekirdek içerisindeki ortalama ömrüdür ve yukardaki denklem gereğince

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Gamma_{\tau}}{\hbar} \quad (60)$$

sonucuna varılır. Bu da (26) denkleminde olduğu gibi belirsizlik prensibinin ifâdesidir.

Buraya kadar, önemli bir basitleştirme yaptık: Gerek gelen nötronun, gerekse hedef çekirdeğin açısal momentlerinin (spinlerinin) sıfıra eşit olduğunu kabul ettik. Halbuki, gelen huzme çeşitli dalgaların birleşmesinden meydana gelmiştir; bu dalgalardan her biri gelen nötron ile hedef çekirdeğin spinlerinin birbirlerine nazaran aldıkları farklı bir doğrultuya tekabül eder.

Eğer gelen nötronla hedef çekirdeğin spinleri sıfırsa, toplam açısal moment gelen nötronun l yörünge açısal momentinden ibarettir. İşte bu sebepten tesir kesitlerini l nin münferit değerlerine tekabül eden kısımlara ayırmıştık. Eğer spinler sıfırdan farklı ise, \mathbf{J} toplam açısal momentini üç farklı açısal momentin bileşkesi olur: l yörünge açısal momentini, gelen nötronun s spini, ve çekirdeğin I spini. Bunların hepsi de \hbar birimi cinsinden ifade edilir. I ve s nin \mathbf{S} vektörel toplamını târif etmek faydalıdır. \mathbf{S} ye kanal spini adı verilir. Dolayısıyla \mathbf{J} , I ve \mathbf{S} nin vektörel toplamıdır: $\mathbf{J} = I + \mathbf{S}$. Bu takdirde J , sâdece

$$|I - S| \leq J \leq I + S \quad (61)$$

olacak şekildeki değerleri alabilir.

Nötronlar için $s = 1/2$ olduğundan, kanal spini yalnız

$$S = I + \frac{1}{2}, \quad S = I - \frac{1}{2}$$

değerlerini alabilir, fakat $I = 0$ istisnâî hâlinde sâdece ilk değeri alabilir. Kanal spininin her S değeri için uzayda $2S + 1$ farklı doğrultusu vardır, bu doğrultular, $m_S = S, S - 1, \dots, -S$ olmak üzere, m_S manyetik kuvantum sayısı ile tâyin edilirler. Böylece kanal spininin toplam olarak

$$\left[2 \left(I + \frac{1}{2} \right) + 1 \right] + \left[2 \left(I - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] = 2(2I + 1)$$

farklı hâli vardır.

Çekirdeğe çarpmak üzere gelen nötronların meydana getirdiği polarize olmayan bir demet artık tek bir giriş kanalı ile temsil edilemez. Böyle bir demet daha ziyâde $2(2I + 1)$ sayıdaki bütün giriş kanallarındaki gelen dalgaların inkoherent bir karışımı olarak düşünülmelidir. Gelen nötron ile hedef çekirdeğin her muhtemel spin doğrultuları takımı, sistemin farklı bir kuvantum hâline teka-bül eder. Polarize olmayan bir demette her böyle bir hâlin

$$[2(2I + 1)]^{-1}$$

şeklinde *a priori* bir ihtimali vardır. Bu münferit kuvantum halleri birbirlerine inkoherent olarak eklenirler, çünkü bunların aralarındaki faz bağıntıları geliş güzelidir. S kanal spininin her bir değeri ile ilgili olarak $2S + 1$ elemanter hâl vardır. Böylece, polarize olmayan bir demet hâlinde, gelen nötronlarla hedef çekirdeklerin S kanal spinine sahip olması için izafî ihtimal

$$g(S) = \frac{2S + 1}{2(2I + 1)} \quad (62)$$

şeklinde olur. Bu, S kanal spininin statistik ağırlığıdır.

Benzer şekilde, toplam açısal momentin her J değeri için uzayda $2J + 1$ farklı doğrultusu vardır; bu doğrultular, $m_J = J, J - 1, \dots, -J$ olmak üzere, m_J manyetik kuvantum sayısı ile tayin edilirler. Böylece toplam açısal momentin toplam olarak

$$\sum_{J=|l-S|}^{l+S} (2J + 1) = (2l + 1) (2S + 1)$$

farklı hâli vardır. l yörünge açısal momentine sahip bütün gelen nötronlar hedef çekirdek ile birlikte spini J olan bir hal teşkil etmezler. Bunun olması için $p(J)$ izafî ihtimâli şöyledir :

$$p(J) = \frac{(2J + 1)}{(2l + 1) (2S + 1)}$$

Ayrıca s ve l nin S kanal spinini vermesi için $g(S)$ izafî ihtimâli Dnk. (62) ile verilmektedir. Böylece $g(J, l)$ statistik ağırlığını aşağıdaki gibi $p(J)$ yi $g(S)$ ile çarpmak suretiyle elde ederiz:

$$g(J, l) = \frac{2J + 1}{2(2I + 1) (2l + 1)} \quad (63)$$

Biz burada s -dalgalı nötron rezonanslarını incelediğimizden, (61) bağıntısında $l = 0$ konulmalıdır ve böylece $J = S$ elde edilir. O hâlde, (62) veyâ (63) bağıntısından, aşağıdaki statistik ağırlık çarpanı bulunur :

$$g(J) = \frac{2J + 1}{2(2I + 1)}. \quad (64)$$

Şüphesiz burada $J = I \pm \frac{1}{2}$ dir. Bu statistik ağırlık çarpanını kullanarak (48) ve (49) formüllerini aşağıdaki gibi yazabiliriz :

$$\sigma_{sc} = g(J) \frac{4\pi}{k_0^2} \left| \frac{\Gamma_n}{2(E - E_0) + i\Gamma} + k_0 R \right|^2 + [1 - g(J)] 4\pi R^2, \quad (48')$$

$$\sigma_{re} = g(J) \frac{4\pi}{k_0 k} \frac{\Gamma_\gamma \Gamma_n}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2}. \quad (49')$$

Dnk. (48') deki ikinci terim saçılmanın rezonans dışı olan kısmını temsil eder. Bu denklemler de aşağıdaki şekilleri alırlar :

$$\sigma_{sc} = \frac{\sigma_{n0} \Gamma^2 + \mathcal{G} \cdot (E - E_0)}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2} + \sigma_p, \quad (65)$$

$$\sigma_{re} = \frac{\sigma_{r0} \Gamma^2}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2} \sqrt{\frac{E_0}{E}}, \quad (66)$$

buradaki parametreler arasında aşağıdaki bağıntılar vardır :

$$\sigma_{r0} = g(J) \frac{4\pi}{k_0^2} \frac{\Gamma_\gamma \Gamma_n}{\Gamma^2}, \quad (67)$$

$$\sigma_{n0} = g(J) \frac{4\pi}{k_0^2} \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma^2}, \quad (68)$$

$$\mathcal{G} = g(J) \frac{16\pi}{k_0} R \Gamma_n, \quad (69)$$

$$\sigma_p = 4\pi R^2, \quad (70)$$

burada \mathcal{G} interferans teriminin katsayısıdır ve σ_p potansiyel saçılma tesir kesitidir. (50) ile verilen toplam tesir kesitinin ifadesi de

$$\sigma_T = \frac{\left[\sigma_{r0} \sqrt{\frac{E_0}{E}} + \sigma_{n0} \right] \Gamma^2 + \mathcal{G} \cdot (E - E_0)}{4(E - E_0)^2 + \Gamma^2} + \sigma_p \quad (71)$$

şeklindedir. Diğer yandan, rezonansın toplam maksimum tesir kesitini

$$\sigma_0 = \sigma_{r0} + \sigma_{n0} \quad (72)$$

ile tarif ederek ve (58), (67) ve (68) denklemlerini kullanarak

$$\sigma_0 = g(J) \frac{4\pi}{k_0^2} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \quad (73)$$

elde ederiz. Dnk. (73) ten Γ_n yi çözerek ve k_0 in tarifini kullanarak

$$\Gamma_n = \frac{C}{g(J)} E_0 \sigma_0 \Gamma \quad (74)$$

elde ederiz, burada $C = 0,3841 \times 10^{-6}$ dir. (68) ve (73) denklemlerini taraf tarafa oranlayarak

$$\sigma_{n0}/\sigma_0 = \Gamma_n/\Gamma \quad (75)$$

bulunur. Rezonans parametreleri arasında son bir bağıntı olarak da (69), (70) ve (73) denklemlerinden

$$\mathcal{G} = 4[g(J) \sigma_0 \Gamma \sigma_p \Gamma_n]^{1/2} \quad (76)$$

bulunur.

(71) Breit-Wigner formülü özellikle yavaş nötronlara ait (n, γ) reaksiyonları için deneysel olarak büyük bir doğrulukla gerçekleşmiştir.

ALİŞTIRMALAR VE PROBLEMLER

V.1. Enerjinin sıfır limiti için (43) denklemi ile verilen saçılma tesir kesiti- nin sonlu kaldığını, fakat (44) denklemi ile verilen reaksiyon tesir kesitinin k^{-1} ile orantılı olarak sonsuz olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme: (V.51) ve (V.52) yaklaşık bağıntılarını kullanınız).

V.2. (III.54) ve (III.59') bağıntılarını kullanarak toplam saçılma tesir kesiti σ_{sc} nin ileriye doğru saçılma genliği $f(0)$ a

$$\sigma_{sc} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} \{f(0)\}$$

bağıntısı ile bağlı olduğunu gösteriniz. Bu bağıntıya optik teoremi adı verilir.

VI. BÖLÜM

ALFA PARÇALANMASI

(VI.1) NÜKLEER KARARSIZLIK

Kısım I.4 te açıklandığı gibi, eğer bir çekirdeğin bağ enerjisi parçalarının bağ enerjilerinin toplamından daha büyükse, bu çekirdek bahis konusu parçalarına ayrılmaya karşı kararlıdır. Tersine, kararsız bir çekirdek kendiliğinden parçalanır ve parçaların kinetik enerjileri şeklinde bir miktar enerji açığa çıkar. (IV.39) yarı-ampirik formülü aracılığıyla bu açığa çıkan enerjiyi hesaplayabiliriz. Kütle sayısı A ve yük sayısı Z olan bir çekirdeğin kütle sayıları αA ve $(1-\alpha)A$ olan ve yük sayıları da βZ ve $(1-\beta)Z$ olan iki parçaya ayrıldığı hâli düşünelim. (IV.39) formülündeki $\delta(A, Z)$ terimini çok küçük olduğu için ihmal edebiliriz. Böylece, ilk çekirdek ile parçalanmadan sonra meydana gelen iki çekirdek arasındaki bağ enerjisi farkı aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned}\Delta B = & 17,8 A^{2/3} [1 - \alpha^{2/3} - (1 - \alpha)^{2/3}] + \\ & + 0,71 Z^2 A^{-1/3} [1 - \beta^2 \alpha^{-1/3} - (1 - \beta^2) (1 - \alpha)^{-1/3}] + \\ & + 95 Z^2 A^{-1} [1 - \beta^2 \alpha^{-1} - (1 - \beta)^2 (1 - \alpha)^{-1}]\end{aligned}$$

ΔB nin $\alpha = \beta = 1/2$ için maksimum olduğu gösterilebilir, ve

$$\Delta B_{\max} = -4,6 A^{2/3} + 0,26 Z^2 A^{-1/3}$$

elde edilir. Eğer $\Delta B > 0$ ise parçalanma mümkündür. Bu şart

$$Z^2 > 17,7 A$$

şartını verir. Buraya kadar incelenen parçalanma, kendiliğinden ve sonlu zamanda parçalanma şeklindedir, fakat bu sonlu zaman hesaplanamaz, çünkü kullanılan esaslar klâsiktir. Bununla beraber, bundan sonraki kısımlarda kuvantum mekaniğin **tünel olayı** incelenecek ve böylece enerji bakımından mümkün olan parçalanmalara ait sonlu zaman hesaplanacaktır.

(VI.2) WKB YAKLAŞIKLIĞI

Tünel olayını ayrıntıları ile incelemeğe başlamadan önce dalga denkleminin klâsik yaklaşıklık içerisindeki çözümlerini araştıracağız. Bu yaklaşıklık ilk olarak Jeffreys tarafından ortaya konulmuş ve sonradan da Wentzel, Kramers ve Brillouin tarafından da birbirlerinden bağımsız olarak kuvantum mekaniğindeki problemlere uygulanmıştır. Bu sebepten dolayı, bu yaklaşıklık metoduna çok kere WKB metodu adı verilir. Metodun esası dalga denkleminin çözümünün \hbar nin üsleri cinsinden bir seriye açılmasıdır. Tekabül prensibine göre klâsik mekanik $\hbar \rightarrow 0$ için kuvantum mekaniğinin limitidir, ve böylece açılımın ilk terimi klâsik çözümü verir. \hbar mertebesindeki terimleri muhafaza ettiğimiz takdirde WKB yaklaşıklığı hemen hemen klâsik olan problemler için çok kullanışlıdır.

(III.83) şeklindeki radyal dalga denklemi ile işe başlıyoruz:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u = 0. \quad (1)$$

Eğer

$$k^2(r) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (2)$$

vaz edecek olursak (1) denklemi

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k^2(r) u = 0 \quad (3)$$

şeklini alır. (3) denklemini WKB yaklaşıklığını uygulamaya elverişli bir şekle sokmak için

$$u(r) = A e^{\frac{i}{\hbar} S(r)} \quad (4)$$

vaz edelim. O hâlde

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{i}{\hbar} \frac{dS}{dr} A e^{\frac{i}{\hbar} S}, \\ \frac{d^2u}{dr^2} &= \frac{i}{\hbar} \frac{d^2S}{dr^2} A e^{\frac{i}{\hbar} S} - \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{dS}{dr} \right)^2 A e^{\frac{i}{\hbar} S}, \\ &= \left[\frac{i}{\hbar} \frac{d^2S}{dr^2} - \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{dS}{dr} \right)^2 \right] u, \end{aligned}$$

bağıntıları yazılabilir. Sonuncu bağıntı yardımı ile (3) denklemi

$$i\hbar \frac{d^2 S}{dr^2} - \left(\frac{dS}{dr} \right)^2 + \hbar^2 k^2 = 0 \quad (5)$$

şeklini alır. Şimdi $S(r)$ yi \hbar nin üsleri cinsinden seriye açalım :

$$S(r) = S_0(r) + \hbar S_1(r) + \frac{1}{2} \hbar^2 S_2(r) + \dots \quad (6)$$

O hâlde

$$S' = S_0' + \hbar S_1' + \frac{1}{2} \hbar^2 S_2' + \dots,$$

$$S'' = S_0'' + \hbar S_1'' + \frac{1}{2} \hbar^2 S_2'' + \dots,$$

$$S'^2 = S_0'^2 + 2\hbar S_0' S_1' + \hbar^2 (S_1'^2 + S_0' S_2') + \dots,$$

bağıntıları yazılabilir. Son iki bağıntı yardımı ile (5) denklemini \hbar nin üslerine nazaran kısımlara ayırılır. Yalnız (2) bağıntısına bakarak k nin \hbar^{-1} inci mertebeden olduğuna dikkat edilmelidir. Her mertebeden \hbar nin katsayısı sifıra eşittir.

$$- S_0'^2 + \hbar^2 k^2 = 0, \quad (7)$$

$$iS_0'' - 2S_0' S_1' = 0, \quad (8)$$

$$iS_1'' - (S_1'^2 + S_0' S_2') = 0, \text{ v.b.} \quad (9)$$

Eğer sadece \hbar ye nazaran birinci mertebeden terimleri kullanacak olursak (7) ve (8) denklemlerini integre etmek yeter. Böylece aşağıdaki bağıntılar yazılabilir :

$$S_0' = \pm \hbar k, \quad S_1' = i \frac{S_0''}{2S_0'} = i \frac{k'}{2k},$$

$$S_0 = \pm \hbar \int k(x) dx, \quad S_1 = \frac{1}{2} i \ln k. \quad (10)$$

(10) bağıntılarındaki keyfî integrasyon sâbitleri (4) denklemindeki A nın içerisine katılmışlardır. Diğer yandan

$$u \equiv A e^{\frac{i}{\hbar} S_0} e^{iS_1}$$

olduğundan ve (10) bağıntıları da

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_0} = \exp \left\{ \pm i \int k(x) dx \right\}, \quad e^{iS_1} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

şekillerinde yazılabileceğinden, $[k(r)]^2 > 0$ şartı ile

$$u(r) = \frac{A}{\sqrt{k(r)}} \exp \left\{ \pm i \int^r k(x) dx \right\}, \quad [k(r)]^2 > 0 \quad (11)$$

sonucuna varılır. Eğer $[k(r)]^2 < 0$ ise, $K(r) = ik(r)$ koyarak

$$u(r) = \frac{B}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ \pm \int^r K(x) dx \right\}, \quad [K(r)]^2 > 0 \quad (12)$$

bulunur.

Şimdi de *WKB* yaklaşıklığının ne zaman iyi bir yaklaşıklık olduğunu araştıralım. Eğer (5) denklemini, sıfırıncı mertebe yaklaşıklığı olan ve (7) denklemin-den elde edilen

$$\left(\frac{dS_0}{dr} \right)^2 = \hbar^2 k^2$$

ile karşılaştırırsak, $S(r) \cong S_0(r)$ çözümünün (5) denklemindeki ilk terimin ih-mâl edilmesiyle bulunabileceğini görürüz. O hâlde birinci mertebe yaklaşıklığı

$$\left| i\hbar \frac{d^2 S}{dr^2} \right| \ll \left| \left(\frac{dS}{dr} \right)^2 \right| \quad (13)$$

şartı sağlandığı zaman geçerlidir. Bu şart, $S \cong S_0$ yaklaşıklığı kullanılarak

$$|\hbar S_0''| \ll |S_0'|^2$$

şeklinde, ve (7) denklemini yardımı ile de

$$\left| \frac{k'}{k^2} \right| \ll 1 \quad (14)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$-\frac{k'}{k^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\lambda}{dr} \quad (15)$$

bağıntısı yazılabilir; burada $\lambda/2\pi = 1/k$ indirgenmiş lokal de Broglie dalgaboyudur. Dalgaboyu için lokal (yerel) deyimi kullanılmıştır, çünkü âşikâr olarak noktadan noktaya değişir. Böylece, belirli bir bölgede *WKB* yaklaşıklığının geçerliliği için şart, indirgenmiş dalgaboyunun bu bölge içerisindeki değişiminin bölgenin bo-yutlarından çok daha küçük olmasıdır. Benzer şekilde, $k^2 < 0$ olduğu zaman, yaklaşıklığın geçerliliğine ait kriteriyum

$$\left| \frac{K'}{K^2} \right| \ll 1 \quad (16)$$

şeklini alır, fakat şüphesiz bu şartı dalgaboyu cinsinden yorumlamaya olanak yoktur.

(1) denklemindeki u nun katsayısı çok kere r nin r_0 gibi bir değeri için işaret değiştirir. Belirliliği sağlamak üzere, bu katsayı ifâdesinin $r > r_0$ için pozitif, ve $r < r_0$ için de negatif olduğunu kabul edelim. O hâlde, (1) denkleminin $u(r)$ çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} r \gg r_0 \text{ için : } u(r) &= \frac{A}{\sqrt{k(r)}} \exp \left\{ \pm i \int^r k(x) dx \right\} \\ r \ll r_0 \text{ için : } u(r) &= \frac{B}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ \pm \int^r K(x) dx \right\} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$r = r_0$ civarında yaklaşıklık geçerli değildir, çünkü, $r = r_0$ için lokal dalgaboyu sonsuz olur ve dolayısı ile de değişimi çok hızlı olur. Bununla beraber, dalga fonksiyonununun $r \ll r_0$ bölgesine ait değerini $r \gg r_0$ bölgesine ait değere birleştiren birleştirme formüllerini bulmak mümkündür (Örneğin, Schiff'in Kuantum Meکانiği'nin VII inci Bölümüne bakınız). Bu formüller aşağıdadır:

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ - \int_r^{r_0} K(x) dx \right\} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{k(r)}} \cos \left\{ \int_{r_0}^r k(x) dx - \frac{\pi}{4} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ + \int_r^{r_0} K(x) dx \right\} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{k(r)}} \cos \left\{ \int_{r_0}^r k(x) dx + \frac{\pi}{4} \right\} \quad (19)$$

Bu formüllerdeki okların yalnız gösterilen yönlerde kullanılması önemlidir. Böylece eğer (19) formülündeki oku ters yönde kullanacak olursak, bu takdirde negatif üs terimine küçük bir ilâve terim gelir, ve bu da sol tarafta tamamen ihmal edilebilir, fakat sağ tarafta küçük ve bilinmeyen bir δ faz kayması meydana getirir. Böylece $|\delta|$ çok küçük olmak üzere

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ + \int_r^{r_0} K(x) dx \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k(r)}} \cos \left\{ \int_{r_0}^r k(x) dx + \frac{\pi}{4} + \delta \right\} \quad (19)$$

yazılabilir.

(VI.3) ALFA PARÇALANMASI

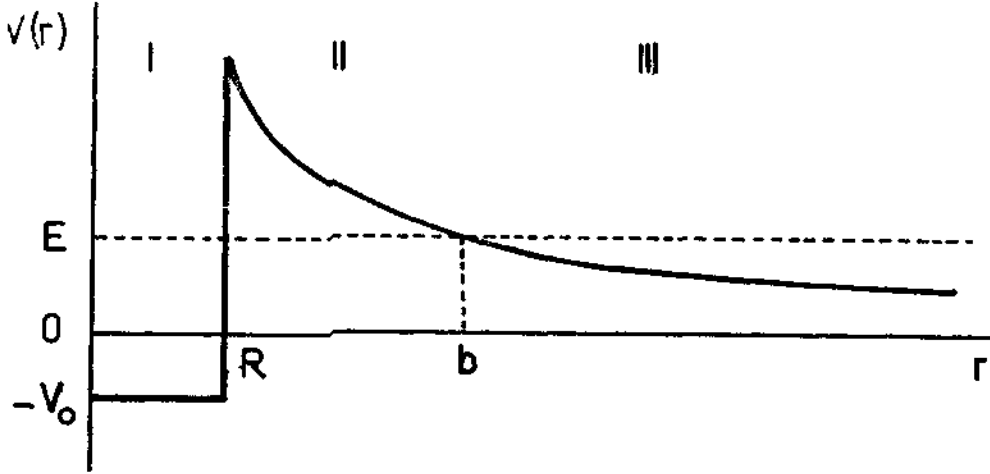
α -parçalanmasının bir modelini elde etmek için α parçacığının parçalanmadan sonraki çekirdeğin potansiyel alanında hareket ettiğini farz ediyoruz. Bu potansiyel alanı çekirdeğin içinde bir kare kuyu çekirdek potansiyeli ile Coulomb potansiyelinin toplamıdır :

$$V = -V_0 + \frac{Ze^2}{R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Burada $Ze^2/R \ll V_0$ olduğundan ikinci terim ihmal edilebilir. Böylece bahis konusu potansiyel

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } V = -V_0 \\ r > R \text{ için : } V = \frac{2Ze^2}{r} \end{array} \right\} \quad (20)$$

ile verilir; burada Z parçalanmadan sonraki çekirdeğin atom numarasıdır. Diğer yandan V_0 , tek nükleona ait olan haldekinden çok daha küçük olmalıdır, çünkü α parçacığının potansiyel kuyusundaki en aşağı hâli bile bağlı olmayan bir haldir. İyi bir rastlantı sonucu, çıkarılan sonuçlar V_0 'ın büyüklüğüne duyarlı olarak



Şekil : VI.1 — Alfa parçalanması için tek parçacık potansiyeli.

bağlı değildir ve $V_0 \cong 10$ MeV alacak olursak çok yanlış bir şey yapmış olmayız. α parçacığının verilmiş bir E enerjisi için, uzay üç bölgeye ayrılır:

- I. bölge : $r < R$, $[k(r)]^2 > 0$, $[k(r)]^2 = p^2 = \text{sabit}$,
- II. bölge : $R < r < b$, $[k(r)]^2 < 0$, $-[k(r)]^2 = [K(r)]^2 > 0$,
- III. bölge : $b < r$, $[k(r)]^2 > 0$,

buradaki b uzaklığı

$$[k(b)]^2 = 0 \quad (21)$$

bağıntısı ile verilir. Burada gene sadece S -dalgalarını göz önüne alacağız, çünkü daha yüksek değerdeki açısal momentler kayda değer derecede farklı sonuçlar vermezler. (2) denkleminde $l = 0$ koyarak

$$[k(r)]^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \quad (2a)$$

bulunur, ve böylece (21) denklemi de

$$V(b) = E \quad (21a)$$

şeklini alır. Şekil : VI.1 de $R < b$ olduğu görülmektedir. O halde, (20) denklemi ile verilen potansiyel ifâdesini kullanarak yukarıda târif ettiğimiz üç bölge için aşağıdaki gibi (2a) bağıntısını yazabiliriz :

$$\left. \begin{array}{l} r < R \text{ için : } p^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0), \\ R < r < b \text{ için : } [K(r)]^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{2Ze^2}{r} - E \right), \\ b < r \text{ için : } [k(r)]^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{2Ze^2}{r} \right). \end{array} \right\} \quad (22)$$

Diğer yandan, (20) bağıntısına göre (21a) denklemi

$$\frac{2Ze^2}{b} = E$$

şeklinde yazılabildiğinden :

$$b = \frac{2Ze^2}{E} \quad (23)$$

sonucuna varılır. (22) bağıntılarındaki m ile, α parçacığı ile parçalanmadan sonraki çekirdeğin oluşturduğu sistemin indirgenmiş kütlesi gösterilmektedir :

$$m = \frac{m_\alpha m_A}{m_\alpha + m_A}. \quad (24)$$

Eğer (3) diferansiyel denkleminde $[k(r)]^2$ nin üç bölge için değerleri yazılırsa

$$\left. \begin{array}{l} u''_I + p^2 u_I = 0, \\ u''_{II} - [K(r)]^2 u_{II} = 0, \\ u''_{III} + [k(r)]^2 u_{III} = 0 \end{array} \right\} \quad (25)$$

denklemleri elde edilir.

(25) diferansiyel denklemlerinden birincisi $u_I(0) = 0$ sınır şartına göre integre edilirse

$$u_I = A \sin pr \quad (26)$$

bulunur. İkinci denklem ise, $r \geq R$ civarında (16) yaklaşıklık şartı sağlandığından, *WKB* metodu ile çözülebilir. Böylece, (17) yaklaşık çözümlerinden ikincisi aranan çözümdür :

$$u_{II} = \frac{B_+}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ \int_R^r K(x) dx \right\} + \frac{B_-}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ - \int_R^r K(x) dx \right\}. \quad (27)$$

Her zamanki gibi $u_I(R) = u_{II}(R)$ ve $u'_I(R) = u'_{II}(R)$ süreklilik şartlarını yazalım ve bu maksatla $u'_{II}(r)$ türevini teşkil edelim :

$$\begin{aligned} u'_{II} = & B_+ \sqrt{K(r)} \exp \left\{ \int_R^r K(x) dx \right\} - B_- \sqrt{K(r)} \exp \left\{ - \int_R^r K(x) dx \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{K'(r)}{[K(r)]^2} B_+ \sqrt{K(r)} \exp \left\{ \int_R^r K(x) dx \right\} - \frac{1}{2} \frac{K'(r)}{[K(r)]^2} B_- \sqrt{K(r)} \times \\ & \times \exp \left\{ - \int_R^r K(x) dx \right\} \end{aligned}$$

Yukardaki türev ifâdesinin ikinci satırı, (16) şartına göre

$$\left| \frac{K'(R)}{[K(R)]^2} \right| \ll 1 \quad (16')$$

olduğundan, birinci satır yanında ihmal edilebilir. O halde, aranan süreklilik şartları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} A \sin pR &= \frac{1}{\sqrt{K(R)}} (B_+ + B_-), \\ A p \cos pR &= \sqrt{K(R)} (B_+ - B_-). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Şimdi de (18) ve (19) birleştirme formüllerini $r = b$ civarında kullanarak $r \ll b$ bölgesinden $r \gg b$ bölgesine geçebiliriz. Önce (18) birleştirme formülünü yazalım :

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ - \int_r^b K(x) dx \right\} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{k(r)}} \cos \left[\int_b^r k(x) dx - \frac{\pi}{4} \right]$$

Bu formül,

$$- \int_r^b = - \int_R^b + \int_R^r$$

olduğuna dikkat ederek

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ \int_R^r K(x) dx \right\} \rightarrow \exp \left\{ \int_R^b K(x) dx \right\} \frac{2}{\sqrt{k(r)}} \times$$

$$\times \cos \left[\int_b^r k(x) dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (29)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, (19) birleştirme formülünü yazalım:

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ \int_r^b K(x) dx \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k(r)}} \cos \left[\int_b^r k(x) dx + \frac{\pi}{4} + \delta \right]$$

Bu formül de

$$\int_r^b = \int_R^b - \int_R^r$$

olduğuna dikkat ederek

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} \exp \left\{ - \int_R^r K(x) dx \right\} \rightarrow \exp \left\{ - \int_R^b K(x) dx \right\} \frac{1}{\sqrt{k(r)}} \times$$

$$\times \cos \left[\int_b^r k(x) dx + \frac{\pi}{4} + \delta \right] \quad (30)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi

$$\alpha(r) = \int_b^r k(x) dx, \quad \frac{d\alpha}{dr} = k(r), \quad (31)$$

$$\beta(r) = \int_R^r K(x) dx, \quad \frac{d\beta}{dr} = K(r), \quad (32)$$

$$s = \beta(b) = \int_R^b K(x) dx \quad (33)$$

târiflerini yapalım. Bu târiflere göre (27), (29) ve (30) bağıntıları aşağıdaki şekilleri alırlar :

$$u_{II} = \frac{B_+}{\sqrt{K(r)}} e^{\beta(r)} + \frac{B_-}{\sqrt{K(r)}} e^{-\beta(r)} \quad (27')$$

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} e^{\beta(r)} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{k(r)}} e^s \cos \left[\alpha(r) - \frac{\pi}{4} \right] \quad (29')$$

$$\frac{1}{\sqrt{K(r)}} e^{-\beta(r)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k(r)}} e^{-s} \cos \left[\alpha(r) + \frac{\pi}{4} + \delta \right] \quad (30')$$

(29') ve (30') birleştirme formülleri aracılığı ile u_{II} çözümünden u_{III} çözümüne geçebiliriz :

$$u_{III} = \frac{1}{\sqrt{k(r)}} \left[2B_+ e^s \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + B_- e^{-s} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} + \delta \right) \right]. \quad (34)$$

Şimdi de u_{III} çözümünü (25) denklemlerinden üçüncüsünü integre ederek yazmaya çalışalım. $r \gg b$ için (14) yaklaşıklık şartı sağlandığından, bahis konusu denklem *WKB* metodu ile çözülebilir. Böylece, (17) yaklaşık çözümlerinden birincisi aranan çözümdür :

$$u_{III} = \frac{C_+}{\sqrt{k(r)}} \exp \left\{ + i \int_b^r k(x) dx \right\} + \frac{C_-}{\sqrt{k(r)}} \exp \left\{ - i \int_b^r k(x) dx \right\} \quad (35)$$

veyâ

$$u_{III} = \frac{1}{\sqrt{k(r)}} [C_+ e^{i\alpha(r)} + C_- e^{-i\alpha(r)}]. \quad (35')$$

Şüphesiz (34) ve (35') çözümleri özdeş olmalıdır. Şimdi u_{III} dalga fonksiyonunun asimtotik durumunu inceleyelim. (22) bağıntılarından üçüncüsüne bakarak

$$k = \lim_{r \rightarrow \infty} k(r) = \left(\frac{2m}{\hbar^2} E \right)^{1/2} \quad (36)$$

yazabiliriz. O halde, $\alpha(r)$ fonksiyonunun asimtotik şekli aşağıdaki gibidir:

$$\alpha(r) = k \int_b^r dx = k(r - b) \quad (37)$$

Bu sonucu (35') bağıntısında yerine yazarak u_{III} fonksiyonunun asimtotik şeklini buluruz :

$$u_{III} = \frac{1}{\sqrt{k(r)}} [C_+ e^{-ikb} e^{ikr} + C_- e^{ikb} e^{-ikr}] . \quad (38)$$

(38) bağıntısının sağ yanındaki birinci terim giden dalgayı, ikinci terim ise gelen dalgayı göstermektedir. Halbuki, diğer bir sınır şartı da sonsuzda sadece giden dalgaların bulunmasıdır. O halde $C_- = 0$ olmalıdır. Şimdi de (34) denklemini (35') şeklinde yazalım.

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &\equiv \frac{1}{2} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\alpha} + e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\alpha} \right) \\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4} + \delta\right) &\equiv \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\delta} e^{i\alpha} + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\delta} e^{-i\alpha} \right) \end{aligned}$$

özdeşliklerinden faydalanarak (34) denklemini aşağıdaki şekillerde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} u_{III} = \frac{1}{\sqrt{k(r)}} &\left[\left(B_+ e^s e^{-i\frac{\pi}{4}} + B_- e^{-s} \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\delta} \right) e^{i\alpha} + \right. \\ &\left. + \left(B_+ e^s e^{i\frac{\pi}{4}} + B_- e^{-s} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\delta} \right) e^{-i\alpha} \right] \end{aligned}$$

veyâ

$$\begin{aligned} u_{III} = \frac{1}{\sqrt{k(r)}} &\left[\left(B_+ e^{-i\frac{\pi}{4}+s} + \frac{1}{2} B_- e^{i\frac{\pi}{4}+i\delta-s} \right) e^{i\alpha(r)} + \right. \\ &\left. + \left(B_+ e^{i\frac{\pi}{4}+s} + \frac{1}{2} B_- e^{-i\frac{\pi}{4}-i\delta-s} \right) e^{-i\alpha(r)} \right] . \quad (39) \end{aligned}$$

Eğer (39) denklemini (35') denklemini ile karşılaştıracak olursak C_+ ve C_- sâbitlerinin değerlerini B_+ , B_- , s ve δ sâbitleri cinsinden bulabiliriz :

$$C_+ = B_+ e^{-i\frac{\pi}{4}+s} + \frac{1}{2} B_- e^{i\frac{\pi}{4}+i\delta-s} , \quad (40)$$

$$C_- = B_+ e^{i\frac{\pi}{4}+s} + \frac{1}{2} B_- e^{-i\frac{\pi}{4}-i\delta-s} . \quad (41)$$

Buradaki δ faz kayması, (19) birleştirme formülü yazılırken belirtildiği gibi küçüktür. $C_- = 0$ sınır şartı, (41) denklemini aracılığı ile

$$B_+ + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\delta} e^{-2s} B_- = 0 ,$$

veyâ $e^{-i\frac{\pi}{2}} \equiv -i$ olduğuna dikkat ederek

$$B_+ = \frac{1}{2} i e^{-is} e^{-2s} B_- \quad (42)$$

şeklinde yazılabilir. (28) denklemleri ile birlikte (42) denklemi A , B_+ ve B_- parametrelerine nazaran lineer homogen bir denklem sistemi teşkil ederler. Bu sistemin sıfırdan farklı bir çözümü olabilmesi için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır; böylece

$$\begin{vmatrix} \sin pR - \frac{1}{\sqrt{K(R)}} & -\frac{1}{\sqrt{K(R)}} \\ p \cos pR - \sqrt{K(R)} & \sqrt{K(R)} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} i e^{-is} e^{-2s} \end{vmatrix} = 0,$$

veyâ

$$\begin{vmatrix} \sin pR & -1 & -1 \\ p \cos pR & -K(R) & K(R) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} i e^{-is} e^{-2s} \end{vmatrix} = 0,$$

veyâ

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} i e^{-is} e^{-2s} & 0 \\ +1 & -1 & \sin pR \\ +K(R) & K(R) & p \cos pR \end{vmatrix} = 0$$

veyâ

$$K(R) \sin pR + p \cos pR + \frac{1}{2} i e^{-is} e^{-2s} [p \cos pR - K(R) \sin pR] = 0$$

veyâ

$$K(R) \sin pR + p \cos pR = [K(R) \sin pR - p \cos pR] \frac{1}{2} i e^{-is} e^{-2s} \quad (43)$$

sonucuna varılır. Bu denklem, α parçacığının Coulomb bariyeri içindeki enerji seviyelerini verir. $s \gg 1$ olduğundan, enerji seviyeleri ilk yaklaşıklıkta

$$K_0(R) \sin p_0 R + p_0 \cos p_0 R = 0 \quad (44)$$

denklemleri ile verilir. (44) denkleminin verdiği enerji değeri E_0 olduğuna göre daha iyi bir yaklaşıklık (43) denkleminde

$$E = E_0 + \Delta E \quad (45)$$

konulmakla elde edilebilir; şüphesiz burada $|\Delta E| \ll E_0$ şartı sağlanmaktadır. (22) bağıntılarına nazaran (45) denklemi

$$p = p_0 + \Delta p, \quad K(R) = K_0(R) + \Delta K(R), \quad k(R) = k_0(R) + \Delta k(R) \quad (46)$$

bağıntılarına eşdeğerdir. (22) bağıntıları kullanılarak

$$\Delta p = \frac{m}{\hbar^2} \frac{\Delta E}{p_0} \quad (47a)$$

$$\Delta K(R) = -\frac{m}{\hbar^2} \frac{\Delta E}{K_0(R)} \quad (47b)$$

$$\Delta k(R) = \frac{m}{\hbar^2} \frac{\Delta E}{k_0(R)} \quad (47c)$$

sonuçlarına varılır. Bahis konusu olan ΔE ye göre birinci mertebeden yaklaşımın vereceği sonuçları çıkaralım. Önce

$$\left. \begin{aligned} \sin pR &\cong \sin p_0R + (R \cos p_0R) \Delta p \\ \cos pR &\cong \cos p_0R - (R \sin p_0R) \Delta p \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

yazılabilir. (46) ve (48) denklemlerinin yardımı ile (43) denkleminin sol tarafının yaklaşık ifadesi bulunabilir :

$$\begin{aligned} &K(R) \sin pR + p \cos pR \cong \\ &\cong [K_0(R) + \Delta K(R)] [\sin p_0R + (R \cos p_0R) \cdot \Delta p] + (p_0 + \Delta p) [\cos p_0R - (R \sin p_0R) \cdot \Delta p] \\ &\cong K_0(R) \sin p_0R + p_0 \cos p_0R + (\sin p_0R) \Delta K(R) + [R K_0(R) \cos p_0R] \cdot \Delta p + \\ &\quad + (\cos p_0R - R p_0 \sin p_0R) \cdot \Delta p \end{aligned}$$

Eğer (44) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} &K(R) \sin pR + p \cos pR \cong \\ &\cong (\sin p_0R) \cdot \Delta K(R) - \left[(1 + R K_0(R)) \frac{K_0(R)}{p_0} \sin p_0R + R p_0 \sin p_0R \right] \cdot \Delta p \\ &\cong \left\{ \Delta K(R) - \left[[1 + R K_0(R)] \frac{K_0(R)}{p_0} + p_0R \right] \cdot \Delta p \right\} \sin p_0R \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi de (47a) ve (47b) bağıntıları yardımı ile

$$\begin{aligned} &K(R) \sin pR + p \cos pR \cong \\ &\cong -\frac{m}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{K_0(R)} + \left[[1 + R K_0(R)] \frac{K_0(R)}{p_0} + p_0R \right] \frac{1}{p_0} \right\} (\sin p_0R) \cdot \Delta E \\ &\cong -\frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{K_0(R)} + [1 + R K_0(R)] \frac{K_0(R)}{p_0^2} + R \right] (\sin p_0R) \cdot \Delta E \\ &\cong -\frac{m}{\hbar^2} [1 + R K_0(R)] \left[\frac{K_0(R)}{p_0^2} + \frac{1}{K_0(R)} \right] (\sin p_0R) \cdot \Delta E \quad (49) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan (43) denklemi

$$K(R) \sin pR + p \cos pR \cong [K_0(R) \sin p_0R - p_0 \cos p_0R] \frac{1}{2} i e^{-is} e^{-2s}$$

veyâ (44) bağıntısı yardımı ile

$$K(R) \sin pR + p \cos pR \cong i e^{-is} e^{-2s} K_0(R) \sin p_0R \quad (43')$$

şeklinde yazılabilir. (43') denkleminin sol tarafına yukarıda hesapladığımız (49) ifâdesini yazalım :

$$\frac{m}{\hbar^2} [1 + R K_0(R)] \left[\frac{1}{p_0^2} + \frac{1}{[K_0(R)]^2} \right] \Delta E \cong -i e^{-is} e^{-2s} \quad (50)$$

sonucuna varılır.

Şimdi (22) denklemlerinden ikincisinin her iki yanının r ye nazaran logaritmik türevini alalım :

$$\ln K(r) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2Ze^2}{r} - E \right)$$

$$\frac{K'(r)}{K(r)} = \frac{-Ze^2}{r^2} \frac{1}{\frac{2Ze^2}{r} - E}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\frac{2Ze^2}{R} \gg E$$

olduğundan

$$\frac{K'(R)}{K(R)} \cong \frac{-1}{2R},$$

veyâ

$$\frac{K'(R)}{[K(R)]^2} \cong -\frac{1}{2} \frac{1}{R K(R)}$$

bulunur. O halde (16) veyâ (16') yaklaşıklık şartı

$$R K_0(R) \gg 1 \quad (51)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşıklığa göre (50) denkleminde ΔE çözümlerse

$$\Delta E = -i \frac{\hbar^2}{m} \frac{p_0^2 [K_0(R)]^2}{R K_0(R) \{p_0^2 + [K_0(R)]^2\}} e^{-is} e^{-2s} \quad (52)$$

bulunur. $|\delta| \ll 1$ olduğundan, (52) nin sağ tarafındaki faz çarpanı ihmâl edilebilir. Şimdi eğer

$$\Gamma = \frac{2\hbar^2}{m} \frac{p_0^2 [K_0(R)]^2}{R K_0(R) \{p_0^2 + [K_0(R)]^2\}} e^{-2s} \quad (53)$$

vaz edecek olursak, (52) denklemini

$$\Delta E = -\frac{1}{2} i \Gamma(E_0) \quad (54)$$

şeklinde ve (45) denklemini de

$$E = E_0 - \frac{1}{2} i \Gamma(E_0) \quad (55)$$

şeklinde yazılabilir. Görülüyor ki, (44) denkleminin çözümü olan E_0 enerjisi reel bir büyüklük olduğu halde, (43) veyâ (43') denkleminin çözümü olan E enerjisi kompleks bir büyüklüktür.

Kompleks enerji seviyelerinin varlığı biraz açıklanmak ister. Hesaplarımızın başlangıcını oluşturan (3) dalga denklemi zamandan bağımsız Schrödinger denklemdir ve ancak duraklı hâllere ait problemlerin çözümüne elverişlidir. Bir radyoaktif parçalanma şüphesiz bir duraklı hâl problemi değildir ve dolayısıyla zamana bağlı olan

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad (56)$$

denklemini kullanmamız gerekirdi. Eğer sistemin enerjisi E ise

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (57)$$

yazabiliriz ve (56) denklemini

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (58)$$

denklemine indirgenir. $r\psi(\mathbf{r}) = \sum_t u_t(r) P_t(\cos \theta)$ yazdığımız takdirde de (58)

denklemini (1) veya (3) denklemine indirgenir.

Eğer, çok kere rastlandığı gibi, E reelse (57) denklemini

$$|\psi(\mathbf{r}, t)| = |\psi(\mathbf{r})|$$

sonucunu verir, böylece parçacığın herhangi bir yerde bulunma ihtimâli zamana göre sâbit olur. Eğer E kompleks ise, artık bu doğru değildir. Bu takdirde, E , meselâ (55) bağıntısı ile verilebilir. (55) bağıntısında E_0 ve Γ reel ve pozitiftir. (55) bağıntısı aracılığıyla (57) denklemini

$$\int_{\Omega} \psi^* \psi d\tau = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t} \int_{\Omega} \psi^* \psi d\tau \quad (59)$$

sonucunu verir ve bu sonuca nazaran parçacığın herhangi bir verilmiş Ω hacmi içerisinde bulunma ihtimâli, bir radyoaktif parçalanmada olması gerektiği gibi,

zamanla üstel olarak azalır. Pek açıktır ki, (55) denkleminde mutlaka $\Gamma > 0$ olmalıdır, aksi takdirde ihtimal zamanla artardı. I. bölüm 6. kısımda târif edilen radyoaktif parçalanma sabiti λ

$$\lambda = \frac{\Gamma}{\hbar} \quad (60)$$

bağıntısı ile verilir. Bir önceki bölümde bileşik çekirdeğin incelenmesinden anlaşılacağı üzere, enerji seviyeleri tamamen belirli değildir, çünkü sistemin sonlu bir parçalanma ihtimâli vardır. Bir enerji seviyesindeki (V.26) bağıntısı ile verilen belirsizlik

$$\Gamma(E_0) = \hbar\lambda \quad (60')$$

şeklindeki bir seviye genişliğine götürür. O halde, parçacığın bir E_0 enerji seviyesindeki ömrü

$$\tau(E_0) = \frac{1}{\lambda} \quad (61)$$

olacaktır.

Eğer (60) bağıntısı (53) bağıntısı ile karşılaştırılacak olursa

$$\lambda = \frac{2\hbar}{m} \frac{p_0^2 [K_0(R)]^2}{R K_0(R) \{ p_0^2 + [K_0(R)]^2 \}} e^{-2s} \quad (62)$$

elde edilir. Artık 0 indislerini kaldırabiliriz ve E_0 reel enerjisini E ile gösterebiliriz. Böylece (62) denklemini (22) bağıntıları yardımı ile kısaltalım :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\hbar}{m} \frac{\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \left(\frac{2Ze^2}{R} - E \right)}{\left[\frac{2mR^2}{\hbar^2} \left(\frac{2Ze^2}{R} - E \right) \right]^{1/2} \left[E + V_0 + \frac{2Ze^2}{R} - E \right]} e^{-2s}, \\ \lambda &= \frac{4(E + V_0) \left(\frac{2Ze^2}{R} - E \right)}{\left[2mR^2 \left(\frac{2Ze^2}{R} - E \right) \right]^{1/2} \left(\frac{2Ze^2}{R} + V_0 \right)} e^{-2s} = \\ &= \frac{4(E + V_0)}{\left(\frac{2Ze^2}{R} + V_0 \right)} \left(\frac{\frac{2Ze^2}{R} - E}{2mR^2} \right)^{1/2} e^{-2s} \quad (63) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Şimdi (33) integrali ile verilen s büyüklüğünü hesaplayalım. Eğer (22) deki $[K(r)]^2$ ifâdesini

$$[K(r)]^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \left(\frac{2Ze^2}{Er} - 1 \right)$$

şeklinde yazarsak, (23) denkleminin verilen b nin târifi ve (36) denkleminin verilen k nin târifi yardımı ile bunu

$$[K(r)]^2 = k^2 \left(\frac{b}{r} - 1 \right)$$

veyâ

$$K(r) = k \sqrt{\frac{b}{r} - 1} \quad (64)$$

şeklinde kısaltabiliriz. O halde, (33) integrali aşağıdaki şekli alır :

$$s = \int_R^b K(r) dr = k \int_R^b \sqrt{\frac{b}{r} - 1} dr .$$

Bu integral

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{b}{r} - 1}$$

değişken değiştirmesiyle hesaplanabilir :

$$r = \frac{b}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = b \cos^2 x$$

$$dr = 2b \cos x (-\sin x) dx = -2b \sin x \cos x dx$$

$$\sqrt{\frac{b}{r} - 1} dr = -2b \frac{\sin x}{\cos x} \sin x \cos x dx = -2b \sin^2 x dx .$$

İntegralin limitlerini de değiştirelim :

$$\lim_{r \rightarrow R} x = a , \quad \lim_{r \rightarrow b} x = 0 ,$$

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{b}{R} - 1} , \quad R = b \cos^2 a .$$

O halde :

$$\begin{aligned} s &= -2bk \int_a^0 \sin^2 x dx = 2bk \int_0^a \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = bk \left[\int_0^a dx - \int_0^a \cos 2x dx \right] \\ &= bk \left([x]_0^a - \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^a \right) = bk \left(a - \frac{1}{2} \sin 2a \right) = \frac{1}{2} kb (2a - \sin 2a) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan :

$$\frac{1}{2} \sin 2a \equiv \frac{\operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\sqrt{\frac{b}{R} - 1}}{1 + \left(\frac{b}{R} - 1\right)} \equiv \frac{R}{b} \sqrt{\frac{b}{R} - 1}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2a = \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}}, \quad a = \arccos \sqrt{\frac{R}{b}}$$

olduğundan

$$s = kb \left(\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right) \quad (65)$$

sonucuna varılır.

Şimdi radyoaktif parçalanma sâbitini veren (63) formülünü ve özellikle bu formülde bulunan üstel çarpandaki s büyüklüğünü inceleyelim. (23) bağıntısına göre, E enerjisindeki bir artma b büyüklüğünde bir azalma meydana getirecektir:

$$\Delta b = -b \frac{\Delta E}{E}$$

Diğer yandan,

$$s = kb \left(a - \frac{1}{2} \sin 2a \right), \quad R = b \cos^2 a$$

bağıntılarından

$$\Delta s = ka \Delta b$$

sonucuna varılır. O halde

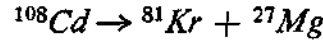
$$\Delta s = -kb a \frac{\Delta E}{E}$$

elde edilir. Böylece, $\exp(-2s)$ çarpanı ve dolayısıyla λ , E nin son derece duyarlı bir fonksiyonudur. Filhakika hesaplar, E enerjisi iki katına çıkarıldığında λ nın 10^{15} kadar arttığını göstermektedir. λ nın diğer çarpanlarının değişimi, üstel çarpanın bu son derece büyük değişimi yanında ihmâl edilebilir. Bu durum iyi bir rastlantıdır; çünkü, kuvantum mekaniğine ve çekirdek fizikine ait çeşitli kitaplarda diğer çarpanlar birbirlerinden farklı olduğu halde, üstel çarpan daima aynıdır.

Bilindiği gibi, α -parçalanmasında çıkan parçacıkların enerjilerinin küçük değişimlerine parçalanma ömürlerinin büyük değişimleri tekabül etmektedir ve bu olayın başarılı bir açıklaması Gamow tarafından yapılmıştır ve bu açıklama dalga mekaniğinin ilk büyük zaferlerinden biridir. Gamow aynı zamanda göstermiştir ki, çeşitli radyoaktif parçalanmalara ait deneysel λ ve E değerleri (65) denklemi yardımı ile (63) denkleminde yerlerine yazılacak olursa, her seferinde R nin hemen hemen tamamen aynı değeri elde edilir.

ALIŖTIRMALAR VE PROBLEMLER

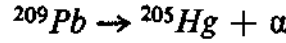
VI.1. Kısım VI.1. deki ΔB yi veren fonksiyonun $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ için maksimum olduğunu gösteriniz. $\alpha = \beta$ ve $\Delta B = 0$ için, Z nin α nın bir fonksiyonu olarak grafiğini çiziniz, ve



fisyon reaksiyonunun enerji bakımından mümkün olduğunu gösteriniz.

VI.2. Bağ enerjisini veren (IV.39) yarı-ampirik formülünü kullanarak $A > 180$ şartını sağlayan çekirdekler için α -parçalanmasının mümkün olduğunu, fakat bilinen en ağır çekirdekler için bile proton veyâ nötron parçalanmasının mümkün olmadığını gösteriniz. (Yarı-ampirik formülün α -parçacığı için uygun olmadığına ve $A > 120$ için $Z \cong 0,4 A$ olduğuna dikkat ediniz.)

VI.3. Çekirdeklerin deneysel kütlelerini kullanarak



reaksiyonundan çıkan enerjiyi hesaplayınız. Bu parçalanmanın ömrünün gözlenemeyecek kadar uzun olduğunu gösteriniz.

VI.4. ^{226}Ra ve ^{226}Th nın parçalanmalarından çıkan α -parçacıklarının enerjileri mütekaabilen 4,9 ve 6,5 MeV dir. Bu iki çekirdeğin yarıçaplarının aynı olduğu kabul edilirse, ömürlerinin oranının yaklaşık olarak $2,5 \times 10^7$ olduğunu gösteriniz.

VI.5. Problem VI.4 teki parçalanmaların yarı ömürleri mütekaabilen 1600 yıl ve 31 dakikadır. Bu iki çekirdeğin α -parçalanması yarıçaplarını bulunuz, ve ve bu iki yarıçap değerinin birbirlerinden sâdece yüzde birkaç birim kadar fark ettiğini gösteriniz.

ERRATA

(* işaretli satırlar sayfanın altından itibaren sayılacaktır.)

Sayfa	Satır	Y a n l ı ş	D o ğ r u
12	15*	...= 68 mc	(12) ...= 68 mc
13	14*	...→ e ⁺ + ¹ ₀ n	...→ e ⁺ + ¹ ₀ n (12)
16	16*	Gerçekten	Gerçekte
46	2*	yarıçapı c ile.....gösterilsin. (noktalı yerler atlanmış.)	...ve yoğunluğun maksimum de- ğerin yüzde 90 ından yüzde 10 una düştüğü geçiş bölgesini oluşturan kabuğun kalınlığı da s ile
58	13*	(II.2)	(III.2)

BİBLİYOGRAFYA

- H.A. Bethe and P.Morrison, "**Elementary Nuclear Theory**" (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1956).
- J.M Blatt and V.F. Weisskopf, "**Theoretical Nuclear Physics**" (John Wiley and Sons, Inc , New York, 1952).
- M.A. Preston, "**Physics of the Nucleus**" (Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts, 1962).
- L. R.B. Elton, "**Introductory Nuclear Theory**" (Pitman and Sons, Ltd., London, 1966).
- N.F. Mott and H.S. W. Massey, "**The Theory of Atomic Collisions**" 2nd edition (Oxford University Press, 1949).
- P. Marmier and E. Sheldon, "**Physics of Nuclei and Particles**" Volume I, II, III (Academic Press, 1970).
- L.I. Schiff, "**Quantum Mechanics**" (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955).
- Fahir Yeniçay, "**Çekirdek Fiziği**" Cilt II, 2. baskı (İstanbul Üniversitesi Yayınları No. 1657, İstanbul 1971).
- Haro Von Buttlar, "**Nuclear Physics (An Introduction)**" (Academic Press, Inc., New York, 1968).
- Ahmed Yüksel Özemre, "**Fizikte Matematik Metotlar**" (İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi No. 826, İstanbul 1971).
- Ahmed Yüksel Özemre, "**Çağdaş Fiziğe Giriş**" (İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi No. 809, İstanbul 1970).
- Ahmed Yüksel Özemre ve Şehsuvar Zebitay, "**Çağdaş Fiziğe Giriş Çözümlü Problem Kitabı**" İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi No. 795, İstanbul, 1970).

REFERANSLAR

- ANDERSON, C.D., and NEDDERMEYER, S.H., *Phys. Rev.* **51**, 884 (1937).
AUFFRAY, J.P., *Phys. Rev. Let.* **6**, 120 (1961).
AWSHALOM, M., *Phys. Rev.* **101**, 1041 (1956).
BOHR, N., *Nature*, **137**, 344 (1936).
BURGY, M.T., et al., *Phys. Rev.* **84**, 1160 (1951).
CHAMBERLAIN, O., et al., *Phys. Rev.* **100**, 947 (1955).
CORK, B., et al., *Phys. Rev.* **104**, 1193 (1956).
COWAN, C.L., and REINES, F., *Science* **124**, 103 (1956).
GHOSHAL, S.N., *Phys. Rev.* **80**, 939 (1950).
GREEN, A.E.S., *Phys. Rev.* **95**, 1006 (1954).
HAFNER, E.M., et al., *Phys. Rev.* **89** 204 (1953).
JACKSON, J.D., and BLATT, J.M., *Rev. Mod. Phys.* **22**, 77 (1950)
KNOWLES, J.W., *Canad. J. Phys.* **40**, 257 (1962).
LATTES, C.M.G., OCCHIALINI, G.P.S., and POWELL, C.F., *Nature* **159**, 186 (1947).
MAYER, M.G., and JENSEN, T.H.D., "Elementary Theory of Nuclear Shell Structure" (London, Wiley, 1955).
MELKONIAN, E., *Phys. Rev.* **76**, 1744 (1949).
NOYES, H.P., *Phys. Rev.* **130**, 2025 (1963).
NOYES, H.P., *Phys. Rev. Let.* **12**, 171 (1964).
PETRZHAK, J.S., and FLEROV, G.N., *J. Phys. U.S.S.R.*, **3**, 275 (1940).
RUTHERFORD, E., *Phil. Mag.* **21**, 669 (1911).
SUTTON, R.B., et al., *Phys. Rev.* **72**, 1147 (1947).
THOMSON, J.J., "Rays of Positive Electricity" (London, Longmans, 1913).
WIGNER, E.P., *Phys. Rev.* **43**, 252 (1933).
WILKINSON, D.H., *Phys. Rev.* **109**, 1603 (1958).
WILSON, R., , "The Nucleon-Nucleon Interaction" (London, Interscience, 1963).
WU, C.S., et al , *Phys Rev.* **105**, 1413 (1957).
YUKAWA H. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935).

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	VII
-------------	-----

I. BÖLÜM

ÇEKİRDEKLERİN NİTEL ÖZELLİKLERİ

(I.1) Elemanter parçacıklar	1
(I.2) Çekirdeğin büyüklüğü, kütlesi ve elektrik yükü	3
(I.3) Bağ enerjisi	4
(I.4) Kararlılık	6
(I.5) Çekirdek reaksiyonları	8
(I.6) Kararsız çekirdekler	9
(I.7) Çekirdek kuvvetleri	14
(I.8) Mezonlar	15
(I.9) Parçacıklar ve anti-parçacıklar	15
Alıştırmalar ve problemler	17

II. BÖLÜM

ÇEKİRDEKLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

(II.1) Bağ enerjisi	18
(II.2) Çekirdeğin yarıçapı	21
(II.3) Açısal momentum ve manyetik moment	23
(II.4) Elektrik kuvardrupol moment	27
(II.5) Özdeş parçacıklar	31
(II.6) Parite	36
(II.7) Spin operatörleri	38
(II.8) İzospin	43
Alıştırmalar ve problemler	46

III. BÖLÜM

ALÇAK ENERJİLERDE İKİ NÜKLEONLU SİSTEMLER

(III.1)	Kütle merkezi ve lâboratuvar sistemleri	48
(III.2)	Bir parçacıklar demetinin bir kuvvet merkezi tarafından saçılması	58
(III.3)	Bir parçacıklar demetinin bir çekirdek tarafından absorpsiyonu, reaksiyon tesir kesiti	74
(III.4)	Döteronun temel hâli	77
(III.5)	Nötronların serbest protonlar tarafından saçılması	85
(III.6)	Döteronun singlet hâli	93
(III.7)	Nötronların moleküllere bağlı protonlar tarafından koherent saçılması	95
(III.8)	Proton-proton saçılması	103
(III.9)	Çekirdek potansiyelinin şekil bağımsızlığı	107
	Alıştırmalar ve problemler	113

IV. BÖLÜM

ÇEKİRDEK MODELLERİ

(IV.1)	Dejenere gaz modeli	115
(IV.2)	Yarı-ampirik kütle formülü	124
(IV.3)	Sıvı damlası modeli	132
(IV.4)	Kabuk modeli	135
	Alıştırmalar ve problemler	148

V. BÖLÜM

ÇEKİRDEK REAKSİYONLARI

(V.1)	Saçılma ve reaksiyon tesir kesitlerinin genel ifâdeleri	151
(V.2)	Ters reaksiyonlar	156
(V.3)	Bileşik çekirdek	158
(V.4)	Rezonans saçılma ve rezonans reaksiyon tesir kesitleri	160
	Alıştırmalar ve problemler	171

VI. BÖLÜM**ALFA PARÇALANMASI**

(VI.1)	Nükleer kararsızlık	172
(VI.2)	WKB yaklaşıklığı	173
(VI.3)	Alfa parçalanması	176
	Alıştırmalar ve problemler	190
ERRATA	191
BİBLİYOGRAFYA	192
REFERANSLAR	193
İÇİNDEKİLER	194
