Fizikte Matematik Metotlar

KÂMURAN'a ve FEZÂ'ya

YAZARIN ESERLERİ

* **Çözülmüş Atom ve Reaktör Fiziği Problemleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1962 (Çeviri).
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 2. Cild**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1963.
* **Geometrik Eşitsizlikler**; Türk Matematik Derneği, 1963 (Çeviri).
* **Contributions à la Théorie de la Diffusion des Neutrons Dépendant du Temps**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1964.
* **Kuvantum Mekaniği Matematiğine Giriş**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1965 (Çeviri).
* **Reaktör Kritikliğinin Nötronların Difüzyon Teorisine Göre Analitik Vecheleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
* **Hızlı Reaktörlerin Fiziksel Analizine Giriş**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1966 (Çeviri).
* **Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. Cild** (düzeltilmiş ikinci baskı); İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969.
* **Nükleer Reaktörler Fiziğinin Matematik Temelleri**; İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü, 1969 (Çeviri).
* **Çağdaş Fiziğe Giriş - Çözümlü Problem Kitabı (Şehsuvar Zebitay ile birlikte)**; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
* **Çağdaş Fiziğe Giriş - Ders Kitabı**, 1. Cild; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1970.
* **Fizikte Matematik Metotlar - Ders Kitabı**; İTÜ Elektrik Fakültesi, 1971.

HAZIRLANMAKTA OLANLAR

* **Çağdaş Fiziğe Giriş - Ders Kitabı, 2. Cild.**
* **Nükleer Mühendisler İçin Çekirdek Fiziği (Çeviri).**
* **Nötronların Transport Teorisine Giriş (Çeviri; Ş. Zebitay ile birlikte).**
* **Özel Rölâtivite Teorisi - Ders Kitabı.**
* **Genel Relâtivite Teorisi - Ders Kitabı.**
* **Kozmoloji - Ders Kitabı.**
* **Nükleer Sözlük (A. Dalfes, S. Kakaç ve A. Tapucu ile birlikte).**
* **Tasavvufun ve Taoizmin Felsefî Ana Kavramlarının Karşılaştırmalı İncelemesi** (2 cild; çeviri).

T.C İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ KÜTÜPHANESİ: Sayı: 826

Fizikte Matematik Metotlar

DERS KİTABI

Prof. Dr. rer. nat.
AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

İSTANBUL — 1971

MATBAA TEKNİSYENLERİ KOLL. ŞTİ. — İSTANBUL 1971

DÜZELTME

105. sayfada 8. satırda

$$A_{p:qr} = \frac{\partial A_{p:q}}{\partial x^q} - \ldots$$

yerine

$$A_{p:q} = \frac{\partial A_{p:q}}{\partial x^r} - \ldots$$

okunmalıdır.

ÖNSÖZ

Bu kitap 1965-1966 ders yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsünde 1. yarıyıl haftada 3 saat ders ve 1 saat tatbikat, 2. yarıyıl da haftada 4 saat ders ve 2 saat tatbikat olmak üzere okuttuğum «**Fizikte Matematik Metotlar**» dersinin, öğrencilerime dağıtmış olduğum, teksir edilmiş metninin derlenip toparlanmasıyla meydana gelmiştir.

Bu kitabın basılmasında azîz öğrencilerimin dersi tâkib hususunda gösterdikleri şevkin bu tarihe kadar sürmesinin ve her vesileyle beni bu kitabı bir an önce çıkarmaya teşviklerinin (ve âdetâ zorlamalarının) cesâret verici çok büyük katkısı olmuştur. Hepsine burada teşekkür ve minnetlerimi arzederim.

Bu konuda: «**Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, 2 cild, Springer Verlag,** (1924 ve 1937; en yeni baskısı 1968)» veyâ «**Morse-Feshbach: Methods of Theoretical Physics, 2 cild; Mc Graw Hill Book Comp. Inc.,** (1953)» gibi devâsâ iki referans kitabı varken ve bunların yanında da son yirmi-yirmibeş yıl içinde sayıları ve kaliteleri gitgide artan hatırı sayılır hacımda eserler dünya literatürünü zenginleştirirken bu mütevâzî kitap (bütün eksikliklerine rağmen) fizik, mühendislik ve bilhassa teorik fizik öğrencilerine Üniversitelerimizde ilk senelerde okutulan Analiz Derslerinin kapsamı dışında kalan bazı matematik metotlar hakkında ancak bir fikir verme gâyesini güden ilk türkçe telif eser olmak iddiasındadır.

Esâsında her bölümde işlenen konu hakkında literatürde cildlerce kitap bulunurken bu bölümlerin burada eksiksiz işlendiği iddia olunamaz. Eser de zâten eksiksiz bir referans kitabı olmak iddiasında değildir. Meselâ kompleks değişkenli fonksiyonları konu alan III. Bölümde **konform tasvir,** ve pertürbasyonlar teorisine giriş başlıklı V. Bölümde **soysuzlaşmış hâle tekaabül eden pertürbasyon** kavramlarına hiç temas edilmemiştir. **Fiziğin Özel Fonksiyonları** ve **İntegral Dönüşümler** bahisleri de yeteri kadar geniş tutulmuş değildir.

Eğer bütün bu eksiklikler bu konuda daha tam, daha geniş, daha didaktik ve daha mükemmel türkçe bir eser vermek yönünde bir başkası için tahrik ve teşvik vesilesi olurlarsa bu kitap işte asıl o zaman ana hedefine ulaşmış olacaktır.

212-219. sayfalarda takdim edilen ve N boyutlu bir uzayda yazılmış, **HELMHOLTZ denkleminin** ortonormal fonksiyon aileleri yardımıyla sonsuz bir seri şeklindeki çözümünü bulmaya mâtuf metot hâriç, kitabın bir orijinallik arzettiğini sanmıyorum.

Kitapta, fırsat buldukça, operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları konusuna bir **leitmotiv** havası verilmeye, bu çok önemli kavramlar üzerinde gerektiği kadar titizlikle durulmaya dikkat edilmiştir. Ancak, kitap fizik ve mühendislik öğrencileri için yazılmış bir **ders kitabı** mâhiyetinde olduğundan, takdimde, **N. BOURBAKİ** ekolü tarzında zerâfet ve kesinlik aramaya kalkışacak olanların beyhûde zahmet etmiş olacaklarını da peşinen beyânda fayda görmekteyim.

Bu kitabı yazmamı lûtfeden **ALLAH**'a hamd ve şükrederim. Kitabın önce 1965-1966 da ders notu olarak kaleme alınışı safhasında ve sonra da 1970-1971 de baskıya hazırlanışı sırasında anlayış ve sabırlarıyla büyük mânevî destek olan azîz eşime ve azîz kızıma; ve ısrarlı talepleriyle kitabın vücûd bulmasını hızlandıran azîz öğrencilerime alenen teşekkürlerimi arzederim.

Ve nihâyet, aylarca bu kitabın ağır dizgi zahmetini hârikulâde bir şuurla yüklenerek emsalsiz bir titizlikle dizgi ve baskısını gerçekleştiren başmürettip Mehmet Dizenler; mürettip Ahmet Koşan, Halil Tokay ve Yılmaz Aral; baskı teknisyenleri Şâkir Ertürk ve Hakkı Uğur'a gösterdikleri anlayış, sabır, tahammül ve bilhassa güleryüzlülüklerinden dolayı da ayrıca teşekkürlerimi arzetmeyi bir borç bilirim.

Kadıköy, Mart 1971 Prof. Dr. Ahmed Yüksel Özemre

I. Bölüm

VEKTÖREL UZAYLAR

(I.1) MATRİSLER

Bu bölümde vektör ve lineer bağımsızlık kavramlarının, vektörlerin (lineerlik vs. gibi) basit özelliklerinin ve kezâ vektörler ile determinantlar üzerindeki elemanter cebirsel işlemlerin bilindiklerini kabul edeceğiz.

Âdi üç boyutlu herhangi bir vektör, bu uzayda bir kereye mahsûs olmak üzere seçilmiş **K** gibi bir koordinat sistemindeki *eksenler üzerindeki izdüşümlerin* (=*bileşenlerin*) verilmesiyle tanımlanmış olur.

Bir $\vec{x}$ vektörünü ya birim vektörler yardımıyla

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_2=\sum_{p=1}^{3}x_p\vec{e}_p=x_p\vec{e}_p \qquad (I.1.1)$$

şeklinde, ya da

$$\vec{x}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

şeklinde göstereceğiz. x_p büyüklükleri $\vec{x}$ in *bileşenlerini*, $\vec{e}_p$ ler ise **K** nın eksenleri üzerindeki *birim taban-vektörlerini* göstermektedirler:

$$\vec{e}_1=\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \vec{e}_2=\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \vec{e}_3=\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

(I.1.1) in sağ yanı *Einstein* toplama kuralına uyularak yazılmış bulunmaktadır. Buna göre, bir ifâdedeki terimler eğer çarpanlardan müteşekkilse ve bu çarpanlara ait bir indis mükerrer ise bu, indisin alabildiği bütün değer takımı üzerinden toplam yapılacağına delâlet edecektir. Bu mükerrer indise *sessiz indis* ya da *toplam indisi* adı verilir. Böylelikle Σ toplam işaretlerinden vaz geçerek ifâdeleri daha kısa ve yoğun bir tarzda yazmak olanağı doğmaktadır.

Analitik geometri, üç boyutlu bir uzayda biribirlerinden bağımsız olarak seçilebilecek vektörlerin maksimum sayısının ancak üç olduğunu öğretmektedir. Başka bir deyişle, üç boyutlu bir uzayda üçten fazla herhangi n adet $\vec{v}_p$ vektörü daimâ lineer bağımlı olurlar, yâni bunlar arasında daimâ, $\lambda_p \neq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{p=1}^{n>3} \lambda_p \vec{v}_p = 0$$

şeklinde bağıntılar bulmak mümkündür.

Lineer bağımsız vektörler kavramına dayanarak, formel bir tarzda, herhangi bir tam sayıda boyutu haiz vektör uzayları tanımlamak mümkündür. Bu soyut tanımın doğurduğu sonuçlar somut bir şekilde göz önüne getirilemeseler bile, bunun yardımıyla geliştirilen formalizm birçok problemin daha zarif ve sâdece geometrik terimler çerçevesi içinde anlaşılabilmelerini mümkün kılan bir kalıba bürünmelerini ve bunun sonucu olarak da kolaylıkla çözülebilmelerini temin eder.

Bu itibarla ne zaman bir problemde n adet bağımsız değişken varsa bunlara

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}$$

şeklindeki bir vektörün n boyutlu bir tabana nisbetle bileşenleri gözüyle bakılabilir. Bu n boyutlu tabanın birim vektörleri de

$$\vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix}, \; \ldots\ldots\ldots, \; \vec{e}_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Vmatrix}$$

bağıntılarıyla tanımlanırlar. Bu takdirde

$$\vec{x} = x_p \vec{e}_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

yazılabileceği âşikârdır.

Fiziğin pekçok kolunda üçten fazla boyutu haiz uzay kavramlarına rastlamak kaabildir. Bunlara somut iki örnek vermiş olmak için önce Özel Rölâtivite Teorisini göz önüne alalım. Bu teori, ışığın bütün referans sistemlerinde eşyönlü (=izotrop) şekilde ve sâbit bir hızla yayıldığı ilkesine dayanarak fiziksel olayların zaman ve uzay bakımından bağlantılarını incelemekte ve her bir fiziksel olaya bunun vukuu bulduğu yerin üç koordinatıyla, vukuu bulduğu ânı tekaabül ettirmektedir. Şu hâlde her bir fiziksel olay bağımsız dört değişken yardımiyle tasvir edilebilmektedir. Bu ise, yukarıda sözü edilen imkâna dayanarak, her fiziksel olayın

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix}$$

gibi dört bileşeni haiz bir vektör aracılığıyla dört boyutlu *formel* bir uzayın (*MİNKOWSKİ uzayının*) bir noktası imiş gibi telâkkî olunabilmesini mümkün kılmaktadır.

Özel Rölâtivite Teorisinde karşımıza çıkan bu dört boyutlu uzayın elle tutulur, gözle görülür, resmi çizilir, bilfiil fiziksel olarak somut bir tarzda inşâ edilir bir nesne olduğu kanısına kapılmamak gerekir. Bu, olsa olsa, fiziksel olayları belirli bazı ilkelerin çerçevesi içinde kesin bir geometrik terminoloji yardımıyla incelemek üzere uygun ve toplayıcı, birleştirici matematik bir modelden başka bir şey değildir. Bu geometrik modele göre, göz önüne alınan bu dört boyutlu uzay (bu *uzay-zaman*) fiziksel olaylara yataklık eden bir *substratum* olarak telâkkî edilebilmektedir; çünkü her fiziksel olay bu *substratum*un bir noktasına tekaabül ettiği gibi, tersine olarak, uzay-zamanın her noktasına da bir olay tekaabül etmektedir. Böylelikle fiziksel olaylarla uzay-zamanın noktaları arasında bire-bir bir tekaabüliyet kurulmuş bulunmaktadır.

Özel Rölâtivite Teorisi ortaya çıktığı zaman, bunun getirdiği dört boyutlu uzay-zaman kavramına çok kişi içyüzü esrârengiz fiziksel bir gerçek gözü ile bakmış ve günlük yaşantılarımızın bizi karşı karşıya bıraktığı fiziksel uzayın bir «*ide*» (bir *fikir*) olarak değil de gerçekten de dört boyutlu ontolojik bir yapısı olduğu zannına kapılmışlardır.

Günlük hayatımızda kullandığımız ondalık (desimal) sayı sistemini göz önüne alalım. Bunun, hesap işlemleri bakımından bizler için uygun ve kolay bir «model» teşkil ettiği, tartışılması gereksiz bir açıklıktadır. Diğer taraftan modern elektronik hesap makinaları için ikidelik (biner) sistemin ise çok daha uygun ve kolay bir model olduğu da mâlûmdur. Nasıl ki bu iki modelden hangisinin daha gerçek olduğunu araştırmak abes ise, aynı şekilde, fiziksel olayları birleştirici bir görüşle incelememizi mümkün kılan uzay-zaman modelinin gerçekliğinden bahsetmek de o kadar abes olur. Uzay-zaman kavramı da fizikteki daha başka birçok matematik model gibi, fiziksel olaylara ustalıkla giydirilmiş bir elbise modelini andırmaktadır. Bu elbise modeli zamanla daralır da çekerse, giyenin sırtında güdük kalırsa ya da moda (!) değişirse yerini daha uygun, vücûdu çok daha tatminkâr şekilde saran bir başka elbise modeline bırakır. Bu itibarla matematik bir modeli bir diğerine tercih ettiren özellik modelin daha güçlü, daha uygun ve daha kullanışlı oluşudur.

Fizikteki çok boyutlu uzaylara başka bir örnek de istatistik mekaniğin dayanağı olan «*faz uzayı*» dır.

Çok sayıda tânecik kapsayan izole bir sistem göz önüne alalım. Bu sistemdeki her bir tâneciğin kendi başına hareketini dinamiğin kanunları çerçevesi içinde inceleyerek bunlardan sistemin bir bütün olarak dinamik davranışını çıkarmak pratik olarak imkânsızdır. Bu itibarla dinamik kanunlarıyla istatistiksel metotları uzlaştırmak sûretiyle oluşturulmuş olan istatistik mekanik, bu türlü sistemlerin makroskopik davranışları hakkında bilgi vermekle görevli bir bilim kolu olup gazların kinetik teorisine, kimyasal çözeltilerin fiziğine, fotonların ya da yüklü tâneciklerin toplumsal hareketlerine, katıhâl fiziğine, plâzma problemlerine ilh... başarıyla uygulanmaktadır.

Şimdi n adet tânecikten olunmuş dinamik bir toplulukta belirli bir t ânında her bir tâneciğin dinamik hâli, haiz olduğu yer koordinatları ve impuls vektörünün bileşenleri ile, yâni toplam olarak 6 adet bağımsız değişken yardımıyla belirlenir. Buna göre sistemin t ânındaki dinamik durumunu belirlemek için de $6n$ adet bağımsız değişken lâzım gelmektedir. Buna göre eğer, bileşenleri

$$q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, \ldots, q_{n1}, q_{n2}, q_{n3}, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, \ldots, p_{n1}, p_{n2}, p_{n3}$$

olan $6n$ bileşeni haiz bir vektör tanımlarsak n tânecikten oluşmuş sistemin t ânındaki dinamik hâli, «*faz uzayı*» denilen $6n$ boyutlu uzayda bu vektörün, yervektörü rolünü oynadığı tek bir nokta ile gösterilebilecektir. İşte bu faz uzayının da fiziksel bir gerçekten ziyâde sâdece bir *«ide»* olarak var olan, fakat bir takım olayların birleştirici bir açıdan incelenmesini mümkün kılan *iktisadî bir model* olduğu aşikârdır.

Bu bölümün sonunda sonsuz boyutlu uzaylara da değineceğiz.

Şimdi n boyutlu bir $(\mathbf{E}_n)$ vektörel uzayında n bileşeni haiz bir $\vec{x}$ vektörü göz önüne alalım. Bu vektörün bileşenleri $(\mathbf{E}_n)$ deki muayyen bir **K** dik kartezyen sistemine göre belirlenmiş olsun. $(\mathbf{E}_n)$ de başka bir **K'** kartezyen koordinat sistemi göz önüne alalım ve bir **K** $\to$ **K'** dönüşümünde **K'** deki $\vec{y}$ vektörüne dönüşen $\vec{x}$ in bu yeni sistemdeki bileşenlerini tesbit etmeğe çalışalım.

Bu dönüşümün fiziksel bir anlamı olabilmesi için yâni **K** daki her vektöre **K'** de tek bir vektör ve tersine **K'** deki her vektöre **K** da tek bir vektör tekaabül etmesi için, ve özellikle hem **K** $\to$ **K'** de ve hem de **K'** $\to$ **K** da her iki sistemin koordinat sistemlerinin biribirlerine tekaabül etmeleri için, göz önüne alınan dönüşümün *«lineer bir dönüşüm»* olması gerektiği âşikârdır. Aksi hâlde, meselâ, **K** da bir cismi etkileyen bir kuvvet sırf **K** $\to$ **K'** dönüşümü yüzünden **K'** de farklı yön ve şiddetleri haiz birden fazla kuvvet olarak karşımıza çıkabilecek, ya da **K** daki her eksene **K'** de birden fazla eksen tekaabül edecektir. Şu hâlde $\vec{x} \in \mathbf{K}$ nın $\vec{y} \in \mathbf{K'}$ ye dönüşebilmesi için $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ nin biribirlerine lineer olarak bağlı olmaları yâni $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ nin bileşenlerinin

$$\begin{array}{l} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + A_{1n}x_n = y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + A_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \;.\;.\;.\;.\;.\; + A_{nn}x_n = y_n \end{array} \qquad (\text{I}.1.2)$$

bağıntılarını gerçeklemeleri lâzımdır. Bu dönüşüm takımının katsayıları

$$\underset{\sim}{A} = (A_{pq}) = \left\| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \ldots\ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{array} \right\|$$

şeklinde çift girişli bir tablo teşkil ederler. Böyle bir tabloya $(n\times n)$-li bir «matris» adı verilir. Daha genel olarak $(n\times m)$-li yâni n satır ve m sütûndan oluşmuş matrisler de (I.1.3) tanımına benzer şekilde tanımlanabilirler. Bu bakımdan bir vektör de $(n\times 1)$-li bir matris olarak düşünülebilir.

Matrisler üzerinde bir takım cebrik işlemler tanımlanır. Bu arada $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ gibi iki matrisin *toplamı* veyâ *farkı*, elemanları

$$C_{pq}=A_{pq}\pm B_{pq}$$

şeklinde olan bir $\mathfrak{C}$ matrisiyle tanımlanırlar. Her iki işlemin de bir anlamı haiz olabilmesi için $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ nin aynı sayıda satırları ve aynı sayıda sütûnları haiz olmaları elzemdir. Matrislerin toplamının *ortaklaştırıcı* (*=asosyatif*) ve *yerdeğiştirici* (*=komütatif*) oldukları, yani

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})$$

ve

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$$

bağıntılarını gerçekledikleri âşikârdır.

$\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ gibi iki matrisin çarpımı, elemanları

$$C_{pq}=A_{ps}\,B_{sq}$$

ile belirlenen bir $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ matrisidir. Bu işlemin de bir anlamı olabilmesi için $\mathfrak{A}$ nın sütûn sayısının $\mathfrak{B}$ nin satır sayısına eşit olması gerekir.

Matrislerin çarpımı, genellikle, yerdeğiştirici değildir:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\neq\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

Matrisler ancak bazı özel hâllerde çarpım bakımından yerdeğiştiricilik özelliği gösterirler. Çarpımda, bir kural olarak, çarpanlar her zaman sessiz toplam indisleri yanyana gelecek şekilde düzenlenirler. Buna göre

$$A_{ps}B_{sq}=B_{sq}A_{ps}$$

demektir ama bu eşitliğin sağ yanına bakıp da bu matris çarpımının $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ şeklinde olduğu söylenemez zirâ burada s toplam indisleri peşpeşe değildirler. Buna karşılık eşitliğin sol yanında s indisleri peşpeşe bulunmakta ve bu da çarpımın $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ şeklinde olduğuna delâlet etmektedir.

Matris çarpımının *ortaklaştırıcı* ve *dağıtıcı* (*=distribütif*) olduğu yâni

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C}=\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$$

ve

$$\mathbb{A}(\mathbb{B}+\mathbb{C})=\mathbb{A}\mathbb{B}+\mathbb{A}\mathbb{C}$$

bağıntılarının geçerli olduğu kolayca gösterilebilir.

I ile gösterilen birim matris, elemanları *Kroenecker* sembolleri olan, yâni

$$\delta_{pq}=\begin{cases} 1 \text{ eğer } p=q \text{ ise} \\ 0 \text{ eğer } p\neq q \text{ ise} \end{cases}$$

bağıntılarını gerçekleyen matristir. Sıfır matrisi ise bütün elemanları sıfır olan matristir.

Bir matrisi bir skaler ile çarpmak onun bütün elemanlarını o skalerle çarpmağa denktir.

Köşegen matris diye de, matrisin sol üst köşesinden sağ alt köşesine inmekte olan «*esas köşegeni*» üzerindekiler hariç olmak üzere, diğer bütün elemanları sıfır olan matrise denir. Bir matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanların toplamına «matrisin izi» adı verilir:

$$iz\mathbb{A}=\sum_{p=1}^{n}A_{pp}=\delta_{pq}A_{qp}.$$

Determinantların tanımını göz önünde bulundurarak ancak satır ve sütûnlarının sayıları biribirlerine eşit olan matrislere, yâni ancak kare matrislere, determinantlar tekaabül ettirilebileceği anlaşılır. Diğer taraftan, bir $|\mathbb{A}|$ determinantının A_{pq} elemanına tekaabül eden *kofaktörünü* A^{qp} ile gösterirsek, $|\mathbb{A}|\neq 0$ olması hâlinde $|\mathbb{A}|$ nın tersi olan $|\mathbb{A}^{-1}|$ determinantının p-ninci satır ve q-nuncu sütûnundaki elemanın

$$|\mathbb{A}^{-1}|_{pq}=\frac{A^{qp}}{|\mathbb{A}|}$$

ile verildiği ve A_{pq} ya tekaabül eden A^{qp} kofaktörünün ise $|\mathbb{A}|$ nın satır ve sütûnlarını aralarında değiş-tokuş ederek elde edilen «transpoze» determinantının p-ninci satırı ile q-nuncu sütûnunu sildikten sonra elde edilen minör determinantın $(-1)^{p+q}$ ile çarpımına eşit olduğu bilinmektedir. Fakat

$$|\underset{\sim}{A}|\times|\underset{\sim}{A}^{-1}|=\mathbf{I} \quad \text{veyâ} \quad |\underset{\sim}{A}^{-1}|\times|\underset{\sim}{A}|=\mathbf{I} \tag{I.1.4}$$

olacağından buna göre $|\underset{\sim}{A}|$ ve $|\underset{\sim}{A}^{-1}|$ in elemanları arasında da

$$A_{ps}(A^{-1})_{sq}=A_{ps}\frac{A^{qs}}{|\underset{\sim}{A}|}=\delta_{pq} \quad \text{veyâ} \quad (A^{-1})_{ps}A_{sq}=\frac{A^{sp}}{|\underset{\sim}{A}|}A_{sq}=\delta_{pq} \tag{I.1.5}$$

bağıntısı geçerli olacaktır. Bu itibarla elemanları

$$(A^{-1})_{sp}=\frac{A^{qs}}{|\underset{\sim}{A}|}$$

ile verilen bir matrise $\underset{\sim}{A}$ matrisinin *«ters matrisi»* adı verilir ve bu $\underset{\sim}{A}^{-1}$ ile gösterilir. $\underset{\sim}{A}$ ve $\underset{\sim}{A}^{-1}$ in biribirlerinin tersi olmaları için bunların çarpımının **I** birim matrisini vermeleri yeter. Gerçekten de (I.1.4) ve (I.1.5) bağıntıları bunu doğrulamaktadırlar.

Matrisler, elemanlarının bazı bağıntıları gerçeklemelerine göre değişik isim alırlar. Bu çeşit matrislerin bir takım özelliklerinin incelenmesi ufak problemler hâlinde bölümün sonunda okuyucunun ilgisine sunulmuş bulunmaktadır.

Cetvel: I.1 de bu özel matrislerin tanımları sinoptik bir şekilde takdim edilmiştir.

CETVEL: I.1

Matrisin ismi	Matris bağıntısı	Matris elemanları arasındaki bağıntılar
Transpoze matris	$\tilde{\underset{\sim}{A}}$	$A_{pq}=(\tilde{A})_{qp}$
Bakışımlı* matris	$\underset{\sim}{A}=\tilde{\underset{\sim}{A}}$	$A_{pq}=A_{qp}$
Çarpık bakışımlı* matris	$\underset{\sim}{A}=-\tilde{\underset{\sim}{A}}$	$A_{pq}=-A_{qp}$; $A_{pp}=0$
Dik matris	$\underset{\sim}{A}=\tilde{\underset{\sim}{A}}^{-1}$	$A_{sp}A_{sq}=\delta_{pq}$
Reel matris	$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}^{*}$	$A_{pq}=A^{*}_{pq}$
Sırf sanal matris	$\underset{\sim}{A}=-\underset{\sim}{A}^{*}$	$A_{pq}=i\,B_{pq}$; B_{pq} : reel
Hermitsel matris	$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}^{+}$	$A_{pq}=A^{*}_{qp}$
Çarpık hermitsel matris	$\underset{\sim}{A}=-\underset{\sim}{A}^{+}$	$A_{pq}=-A^{*}_{qp}$; $A_{pp}=0$
Birimsel matris	$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}^{+})^{-1}$	$A_{sp}A^{*}_{sq}=\delta_{pq}$

* Bakışımlı = simetrik.

Bu alt-bölümü kapamadan önce

$$\vec{x}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad \vec{y}=\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix}$$

gibi iki karmaşık (=kompleks) vektörün skaler çarpımının

$$\vec{x}^{+}.\vec{y}=\|x^*_1\,x^*_2\cdots\cdot x^*_n\|.\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix}=x^*_p y_p \tag{I.1.6}$$

şeklinde tanımlandığına işâret edelim. Buna göre bir vektörün mutlak uzunluğunun karesi yâni *normu*

$$\vec{x}^{+}.\vec{x}=x^*_p x_p \tag{I.1.7}$$

olacaktır. Göz önüne alınan vektörler eğer reel iseler skaler çarpımın

$$\widetilde{\vec{x}}.\vec{x}=x_p x_p \tag{I.1.8}$$

den ibâret olacağı âşikârdır.

İki vektör göz önüne alındığında bunların «*diyadik*» çarpımları da

$$(\vec{x}\,\vec{y})=\begin{Vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2\cdots\cdots & x_1\,y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2\cdots\cdots & x_2\,y_n \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ x_ny_1 & x_ny_2\cdots\cdots & x_n\,y_n \end{Vmatrix}$$

olarak tanımlanır ve âşikâr olarak

$$(\vec{x}\,\vec{y}) \neq (\vec{y}\,\vec{x})$$

dir. Bununla beraber diyadik çarpımın da *ortaklaştırıcı* ve *dağıtıcı* olduğu kolaylıkla gerçeklenebilir.

(I.2) ÂDÎ KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

$\underset{\smile}{A}$ belirli bir $(n \times n)$-li matris olmak üzere n boyutlu bir uzaydaki n adet reel bileşeni haiz bir $\vec{x}$ vektörünün bir $\vec{x}'$ vektörüne dönüşümünün

$$\underset{\smile}{A}\vec{x} = \vec{x}' \quad \text{ya da} \quad A_{mp}x_p = x'_m \tag{I.2.1}$$

şeklinde verildiğini gördük.

Eğer böyle bir dönüşümde $\vec{x}$ vektörünün boyunun sâbit kalması yâni

$$\vec{x}\,.\,\vec{x} = \vec{x}'\,.\,\vec{x}'$$

ya da

$$\delta_{pq}x_px_q = \delta_{ms}x'_mx'_s = \text{bir skaler} \tag{I.2.2}$$

kalması isteniyorsa acaba $\underset{\smile}{A}$ dönüşüm matrisi ne gibi bir özelliğe sahip olmalıdır, onu araştıralım. (I.2.1)den faydalanarak

$$A_{mp}x_p = x'_m$$
$$A_{sq}x_q = x'_s$$

ve bunları taraf tarafa çarparak

$$A_{mp}A_{sq}x_px_q = x'_mx'_s$$

ya da her iki yanı $\delta_{pq}\,\delta_{ms}$ ile çarparak ve birim matrisin herhangi bir başka matrisle çarpımının *yerdeğiştirici* olmasından faydalanarak

$$\delta_{ms}A_{mp}A_{sq}\,(\delta_{pq}x_px_q) = \delta_{pq}\,(\delta_{ms}x'_mx'_s) \tag{I.2.3}$$

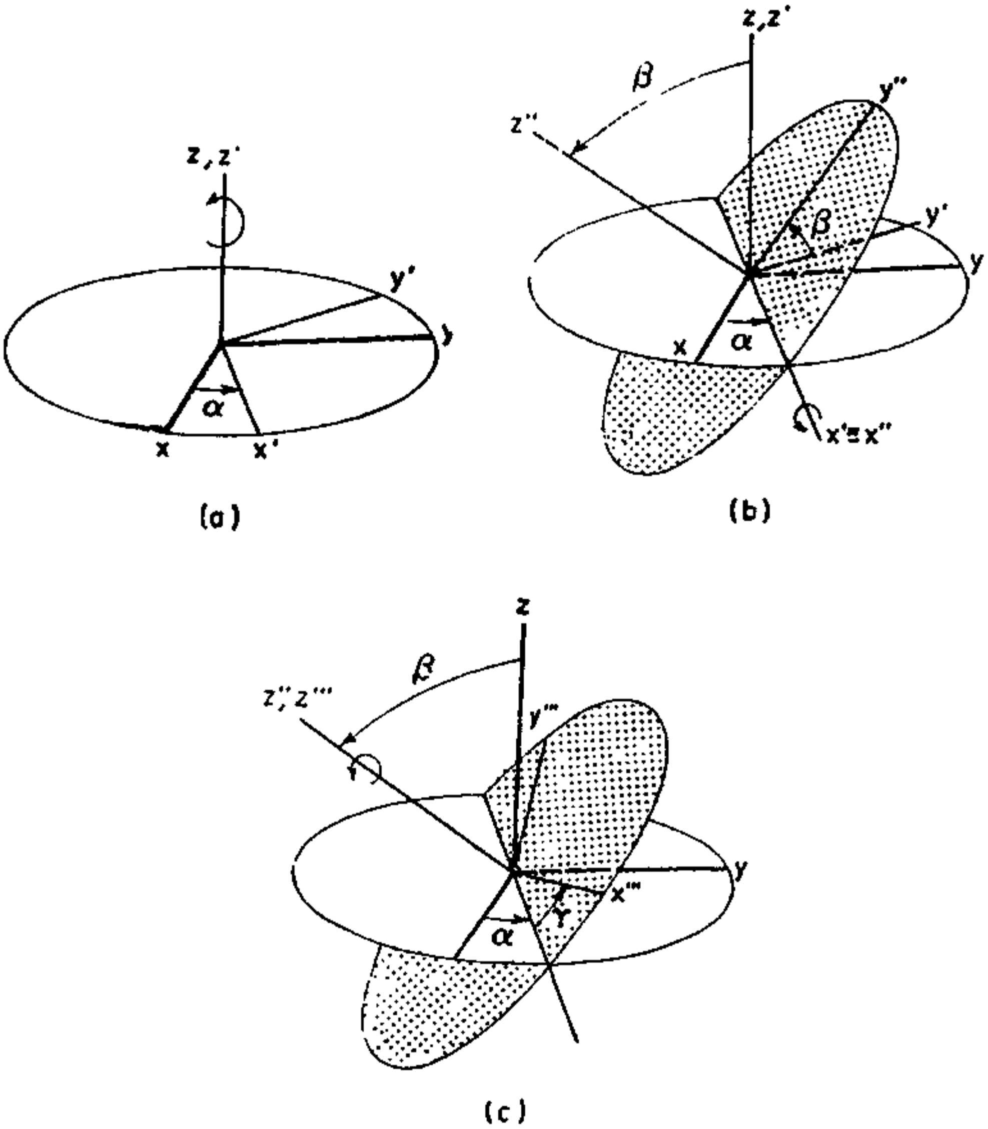
bulunur. (I.2.2)ye göre bu eşitlikte parantez içinde bulunan ifâdeler birer skaler olup biribirlerine eşittirler. Bu itibarla (I.2.3) ifâdesi basitleşerek

$$A_{sp}\,A_{sq} = \delta_{pq} \tag{I.2.4}$$

bağıntısı elde edilmiş olur. Bu bağıntı vektörlerin uzunluklarını invaryant bırakan dönüşümü nitelendirmektedir. Bu çeşit dönüşümlere *dik dönüşümler* adı verilir. İki koordinat ekseninin üçüncüsü etrafındaki rotasyonunu gösteren

$$\underset{\sim}{A} = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

dönüşümü de bu özelliği haizdir. Üç boyutlu âdî *ÖKLİT* (*EUKLİDES*) uzayında *Euler* açıları aracılığıyla tanımlanan bir rotasyonun da dik dönüşüm özelliğini haiz olduğu gösterilebilir. α, β ve γ *Euler açıları* Şekil: I.1 deki gibi tanımlanırlar.



Şekil : I.1 Euler açıları.

Birinci şekildeki dönüşüm z ekseni etrafında α açısı kadar bir rotasyona, ikinci şekildeki dönüşüm x' ekseni etrafında β açısı kadar bir rotasyona ve üçüncü şekildeki dönüşüm de z'' ekseni etrafında γ açısı kadar bir rotasyona tekaabül etmektedir. Buna binâen **K** sistemindeki bir $\vec{r}$ vektörü **K'** sisteminde

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right\| = \vec{r}' = \mathfrak{T}_\alpha \vec{r} = \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$$

vektörüne; $\vec{r}'$ vektörü de **K''** sisteminde

$$\left\| \begin{matrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{matrix} \right\| = \vec{r}'' = \mathfrak{T}_\beta \vec{r}' = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right\|$$

vektörüne; $\vec{r}''$ vektörü de **K'''** sisteminde

$$\left\| \begin{matrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{matrix} \right\| = \vec{r}''' = \mathfrak{T}_\gamma \vec{r}'' = \left\| \begin{matrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{matrix} \right\|$$

vektörüne dönüşecektir. Böylece $\vec{r}$ ile $\vec{r}'''$ arasında

$$\vec{r}''' = \mathfrak{T}_\gamma \vec{r}'' = \mathfrak{T}_\gamma \mathfrak{T}_\beta \vec{r}' = \mathfrak{T}_\gamma \mathfrak{T}_\beta \mathfrak{T}_\alpha \vec{r} = \mathfrak{T} \vec{r}$$

şeklinde bir bağıntı bulunacaktır. Bu dönüşümde

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\gamma \mathfrak{T}_\beta \mathfrak{T}_\alpha$$

ile belirlenen dönüşüm matrisinin açık şekli ve bunun gerçekten de bir dik matris olduğunun gösterilmesi bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır. (Bk. Problem: I.11).

(I.3) LİNEER CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİ

(I.2.1) şeklindeki koordinat dönüşümleri bizi, hâliyle, cebirsel denklem sistemlerinin çözümleri üzerine eğilmeğe sevketmektedir.

$$\underset{\sim}{A} \vec{x} = \vec{y} \qquad \text{(I.3.1)}$$

şeklindeki bir matris denklemini formel olarak çözmek ve buradan, $\vec{y}$ bilindiği takdirde, $\vec{x}$ vektörünü belirlemek kolaydır. Gerçekten de (I.3.1)i her iki taraftan soldan $\underset{\sim}{A}^{-1}$ ile çarparak

$$\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A}\vec{x}=\vec{x}=\underset{\sim}{A}^{-1}\vec{y} \quad \text{veyâ} \quad x_p=\frac{A^{qp}y_q}{|\underset{\sim}{A}|} \tag{I.3.2}$$

bulunur. Eğer $\underset{\sim}{A}$ matrisi *tekil* (=*sengüler*) değilse, yâni $|\underset{\sim}{A}| \neq 0$ ise, $\underset{\sim}{A}^{-1}$ mevcuttur ve bu takdirde (I.3.2), bilinen *Cramer* formüllerinden başka bir şey değildir.

Şimdi kendisine belirli bir $\underset{\sim}{A}$ dönüşümü uygulanmak sûretiyle sıfır vektörüne dönüştürülen bir $\vec{x}$ vektörünün bileşenlerini belirlemeğe çalışalım. Şu hâlde

$$\underset{\sim}{A}\vec{x}=\vec{0} \tag{I.3.3}$$

matris denkleminin, ya da buna tekaabül eden

$$A_{pq}x_q=0 \tag{I.3.4}$$

cebirsel denklem sisteminin çözümlerini arıyoruz demektir.

(I.3.2) denkleminin $\underset{\sim}{A}^{-1}$ in var olması şartı altında bir çözümü olduğunu gördük; fakat (I.3.4) denklemi için durum biraz daha karışıktır. Bunu daha kolaylıkla görebilmek için (I.3.3)e tekaabül eden (I.3.4) sistemine ait iki örnek göz önüne alalım.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

homogen sisteminin $x=0$ ve $y=0$ dan başka bir çözümü olmamasına karşılık

$$\begin{cases} x+\ \ y=0 \\ ax+ay=0 \end{cases}$$

homogen sisteminin $y=-x$ olacak şekilde sonsuz çözüme sâhip olduğu hemen görülmektedir. Birinci hâlde sistemin katsayıları matrisinin tekil olmamasına karşılık ikinci hâlde sistemin katsayılar matrisi tekil bir matristir. Bu, genel bir kural teşkil etmektedir, yâni (I.3.4) şeklindeki homogen bir cebirsel denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümlere sâhip olması için (ya da başka bir deyimle, bir $\vec{x}$ vektörünün belirli bir $\mathbb{A}$ dönüşümünde sıfır vektörüne dönüşmesi için) gerek ve yeter şart katsayılar matrisinin determinantının, yâni $|\mathbb{A}|$ nın, sıfır olmasıdır. Eğer sistem homogen bir sistem değilse ve $|\mathbb{A}|$ da sıfır ise, bu takdirde ya sistemin denklemleri biribirlerine uygun değildirler ve dolayısıyla hiçbir çözümleri yoktur (meselâ $x+y=1$, $x+y=2$ sisteminde olduğu gibi), ya da biribirlerine uygundurlar, fakat sonsuz adet çözümü haizdirler (meselâ $x+y=1$, $2x+2y=2$ sisteminde olduğu gibi).

$|\mathbb{A}|$ da m satır ve m sütûnu silmek sûretiyle elde edilen alt determinanta $(n-m)$-inci mertebeden bir *«minör»* adı verildiği bilinmektedir. Bu itibarla $(n \times n)$-lik bir matrisin determinantı olan $|\mathbb{A}|$, n-ninci mertebeden bir minör olduğu gibi $|\mathbb{A}|$ nın tek bir elemanı da birinci mertebeden bir minörmüş gibi düşünülebilir. Bir determinantın esas köşegenini esas köşegen olarak kabul eden minörlere *«esas minörler»* denir ve bunlar içinde sol yukarı köşedeki esas minöre de *«baş minör»* adı verilir. Eğer bir matrise tekâbül eden determinantın r-ninci mertebeden büyük bütün minörleri sıfır fakat buna karşılık r-ninci mertebeden minörlerinden hiç değilse biri sıfırdan farklı ise bu matris ve determinantın *«rang»*ının r olduğu söylenir. Sıfırdan farklı bir determinantı haiz $(n \times n)$-lik bir matrisin rangının bu takdirde n olacağı âşikârdır.

Eğer $|\mathbb{A}|$ nın rangı n ise bu, $\mathbb{A}$ nın tekil olmadığına yâni $\mathbb{A}^{-1}$ in varlığına delildir. Bu takdirde (I.3.3)ün her iki yanını $\mathbb{A}^{-1}$ ile soldan çarparak

$$\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\vec{x}=\mathbb{A}^{-1}\vec{0}$$

yâni

$$\vec{x}=\vec{0}$$

bulunur. Şu hâlde eğer dönüşüm matrisi tekil değilse bu dönüşümde bir $\vec{x}$ vektörünün sıfıra dönüşmüş olması ancak $\vec{x}$ in kendiliğinden sıfır vektörü olmasıyla mümkündür. Başka bir deyişle (I.3.4) şeklinde homogen bir cebirsel sisteminin çözümü, eğer katsayılar determinantı sıfırdan farklıysa ancak

$$x_p=0 \qquad (p=1,2,\ldots,n)$$

şeklindedir.

Şimdi $|\mathbb{A}|$ nın rangının $n-1$ olduğunu farzedelim. Bu, $|\mathbb{A}|=0$ olduğunu göstermekle beraber sıfırdan farklı A^{qp} kofaktörleri bulunduğuna da delâlet eder. Sistemin meselâ baş minörü olan $|A^{nn}|$ sıfırdan farklı olsun. Bu böyle olmasa bile denklemleri değiş-tokuş edip, gerekirse bilinmiyenleri yeniden isimlendirerek her zaman baş minörün sıfırdan farklı olması sağlanabilir. Bu takdirde, C ile herhangi bir sâbiti göstermek üzere $x_n=C$ vazedelim ve (I.3.2) *Cramer* formülleri uyarınca ilk $n-1$ denklemden oluşmuş sağ taraflı denklemi $x_1\, x_2, \ldots, x_{n-1}$ için çözelim:

$$x_q=\frac{A^{nq}\,C}{|A^{nn}|} \qquad (p=1,2,\ldots,n-1)\,. \qquad \text{(I.3.5)}$$

Bu çözümün, kendiliğinden, n-ninci denklemi de gerçeklediğini görmek için (I.3.5)i her iki taraftan A_{nq} ile çarpıp q indisi üzerinden toplam yapalım; (I.3.5.)i de göz önünde tutarak ve $|\mathbb{A}|$ nın da tekil olduğunu hatırlıyarak

$$A_{nq}x_q=\frac{C}{|A^{nn}|}\,A_{nq}\,A^{nq}=\frac{C}{|A^{nn}|}\,|\mathbb{A}|=0$$

bulunur ki bu da n-ninci denklemin de (I.3.5) çözümü tarafından sağlandığını göstermektedir.

Şimdi daha genel olarak $\mathbb{A}$ matrisinin rangının r olduğunu farzedelim. Ve gene (I.3.3)ün temsil ettiği denklemlerin, $|\mathbb{A}|$ nın r-ninci mertebeden baş minörü sıfır olmayacak şekilde düzenlenmiş olduklarını kabul edelim. Bu takdirde (I.3.4) sistemi, 1 den n ye kadar geçerli olmayan toplamlar için *Einstein* toplam kuralından vaz geçerek,

$$\sum_{q=1}^{r} A_{pq}x_q=-\sum_{s=r+1}^{n} A_{ps}x_s \qquad (p=1,2,\ldots,r) \qquad \text{(I.3.6)}$$

$$\sum_{q=1}^{n} A_{pq}x_q=0 \qquad (p=r+1,\ldots,n) \qquad \text{(I.3.7)}$$

şeklinde yazılabilir.

(I.3.6) sistemi $s=1, 2,\ldots, r$ olmak üzere x_s lerin herhangi bir keyfî değer takımı için tek bir çözümü haizdir. Filhakika eğer (I.3.6)nın solundaki katsayıların determinantını $|\mathbf{a}|$ ile gösterirsek bu, sıfırdan farklı olduğundan $|\mathbf{a}^{-1}|$ mevcuttur. A_{pq} nun kofaktörünü a^{qp} ile gösterirsek (I.3.6)nın çözümü

$$x_p = -\sum_{p=1}^{r} \frac{a^{pq}}{|\mathbf{a}|} \sum_{s=r+1}^{n} A_{qs} x_s \tag{I.3.8}$$

dir. Bu, (I.3.7)ye yerleştirilecek olursa $p>r$ için

$$\sum_{q=1}^{n} A_{pq} x_q = -\sum_{p=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \frac{a^{qm}}{|\mathbf{a}|} A_{pq} \sum_{s=r+1}^{n} A_{ms} x_s + \sum_{s=r+1}^{n} A_{qs} x_s =$$

$$= \sum_{s=r+1}^{n} \frac{x_s}{|\mathbf{a}|} \left[|\mathbf{a}| A_{ps} - \sum_{p=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} A_{pq} a^{qm} A_{ms} \right] \tag{I.3.9}$$

bulunur. Burada parantez içindeki ifâdenin özdeş olarak sıfır olduğunu ve dolayısıyla (I.3.8) çözümünün (I.3.7) bağıntılarını da gerçeklemekte olduğunu göstermek için $(r+1)$-inci mertebeden olan

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots\cdots A_{1r} & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} \cdots\cdots A_{2r} & A_{2s} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ A_{r1} & A_{r2} \cdots\cdots A_{rr} & A_{rs} \\ A_{p1} & A_{p2} \cdots\cdots A_{pr} & A_{ps} \end{vmatrix}$$

minörünü göz önüne alıp bunu son satırı ve sütûnu cinsinden açalım. Bu açılımda A_{ps} nin katsayısı $|\mathbf{a}|$ olup $A_{pq} A_{ms}$ nin katsayısı da eksi işâretiyle $A_{ps} A_{mq}$ nun katsayısına yâni $-a^{qm}$ ye eşittir. Buna binâen (I.3.9) daki $x_s/|\mathbf{a}|$ nın katsayısı $(r+1)$-inci mertebeden bir minördür. Hâlbuki $\mathbf{A}$ nın rangı r idi. Bu itibarla bu $(r+1)$-inci mertebeden minör özdeş olarak sıfırdır. Bu ise (I.3.9)un sağ yanının sıfır olduğunu yâni (I.3.8) çözüm takımının (I.3.7)yi de gerçeklediğini göstermektedir. Şu hâlde, eğer bir hoomgen cebirsel denklem sisteminde sistemin katsayılar determinantının rangı $r<n$ ise, $(n-r)$ adet bilinmiyen keyfî olarak seçilebilir ve geri kalanlar da bunların lineer fonksiyonları olarak belirlenirler.

Lineer cebirsel denklem sistemlerini matris metoduyla incelemenin bir başka faydası da meselâ (I.3.1) gibi bir sistemi gerçekleyen $x_p (p=1, 2, \ldots, n)$ bilinmiyenleri arasından, göz önüne aldığımız problem bakımından bizi ilgilendirmeyebilen meselâ $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\ldots, x_n$ gibilerini hiç hesaplamadan doğrudan doğruya $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ yı belirliyebilmemiz imkânıdır. Bunu göstermeden önce (I.3.1) denklemine tekaabül eden lineer cebirsel sistemi, denklemlerin yerlerini değiştirmek ve bilinmeyenleri yeniden numaralamak sûretiyle, ilgilendiğimiz k adet bilinmiyenin $\vec{x}$ vektörünün ilk k bileşeni olarak ortaya çıkmasını temin edecek şekilde düzenleyelim. Bu takdirde (I.3.1) sistemi açık olarak

$$\left\|\begin{array}{cccc|cccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} & A_{1,k+1} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} & A_{2,k+1} & \cdots & \cdots & A_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} & A_{k,k+1} & \cdots & \cdots & A_{kn} \\ \hline A_{k+1,1} & \cdots & \cdots & A_{k+1,k} & A_{k+1,k+1} & \cdots & \cdots & A_{k+1,n} \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{n} & A_{n,k+1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \\ \hline x_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \\ \hline y_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{array}\right\| \qquad \text{(I.3.10)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemin $\mathbb{A}$ matrisi: $\mathbb{A}_{(1)}$, $\mathbb{A}_{(2)}$, $\mathbb{A}_{(3)}$, $\mathbb{A}_{(4)}$ gibi 4 alt-matristen; ve $\vec{x}$ ile $\vec{y}$ vektörleri de $\vec{X}_{(1)}$, $\vec{X}_{(2)}$ ve $\vec{Y}_{(1)}$, $\vec{Y}_{(2)}$ gibi alt-vektörlerden oluşmuş gibi düşünülebilir, öyle ki (I.3.10) kısaca

$$\left\|\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{(1)} & \mathbb{A}_{(2)} \\ \hline \mathbb{A}_{(3)} & \mathbb{A}_{(4)} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} \vec{X}_{(1)} \\ \hline \vec{X}_{(2)} \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} \vec{Y}_{(1)} \\ \hline \vec{Y}_{(2)} \end{array}\right\| \qquad \text{(I.3.11)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $\vec{X}_{(1)}$ alt-vektörü, bileşenleri, bizi ilgilendiren $x_1, x_2, \cdots, x_k$ bilinmeyenleri olan, ve $\vec{X}_{(2)}$ vektörü de bilinmesi bizim için gerekli olmayan vektörlerdir. Bu takdirde artık

$$\mathfrak{A}_{(1)}\vec{X}_{(1)}+\mathfrak{A}_{(2)}\vec{X}_{(2)}=\vec{Y}_{(1)}$$

$$\mathfrak{A}_{(3)}\vec{X}_{(1)}+\mathfrak{A}_{(4)}\vec{X}_{(2)}=\vec{Y}_{(2)}$$

olur ve bu sistemden de $\vec{X}_{(2)}$ yok edilirse, basit bir hesapla

$$\mathfrak{A}_{(4)}\vec{X}_{(2)}=\vec{Y}_{(2)}-\mathfrak{A}_{(3)}\vec{X}_{(1)}$$

$$\vec{X}_{(2)}=\mathfrak{A}_{(4)}^{-1}[\vec{Y}_{(2)}-\mathfrak{A}_{(3)}\vec{X}_{(1)}]$$

$$\mathfrak{A}_{(1)}\vec{X}_{(1)}+\mathfrak{A}_{(2)}\mathfrak{A}_{(4)}^{-1}[\vec{Y}_{(2)}-\mathfrak{A}_{(3)}\vec{X}_{(1)}]=\vec{Y}_{(1)}$$

ve sonunda da

$$[\mathfrak{A}_{(1)}-\mathfrak{A}_{(2)}\mathfrak{A}_{(4)}^{-1}\mathfrak{A}_{(3)}]\vec{X}_{(1)}=\vec{Y}_{(1)}-\mathfrak{A}_{(2)}\mathfrak{A}_{(4)}^{-1}\vec{Y}_{(2)} \qquad \text{(I.3.12)}$$

bulunur ki bu, $\mathbf{A}\,\vec{X}_{(1)}=\vec{\mathbf{Y}}$ şeklinde ve bizim ilgilendiğimiz $x_1, \cdots, x_k$ değişkenleri cinsinden lineer bir cebirsel denklem sistemini temsil etmektedir. İlgi duyulmayan $x_{k+1}, \cdots, x_n$ bilinmeyenleri de böylece ortadan kaldırılmış olurlar.

(I.4) MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZVEKTÖRLERİ

$\mathfrak{P}$ ve $\mathfrak{T}$ *düzgün* (=*regüler*), yâni $\mathfrak{P}^{-1}$ ve $\mathfrak{T}^{-1}$ ters matrisleri var olan, iki matris olmak üzere

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{T} \qquad \text{(I.4.1)}$$

denklemini gerçekleyen $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{A}$ matrislerine *eşdeğer matrisler* adı verilir.

1) Eğer $\mathfrak{P}\mathfrak{T}=\mathbf{I}$ ise (I.4.1) dönüşümü

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$$

şeklini alır ve böyle bir dönüşme de *benzerlik dönüşümü* denir.

2) $\mathfrak{P}=\widetilde{\mathfrak{T}}$ olması hâlinde

$$\mathfrak{B}=\widetilde{\mathfrak{T}}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$$

dönüşümü *kongrüent dönüşüm*,

3) $\mathfrak{P}=\mathfrak{T}^{+}$ olması hâlinde

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{T}^{+}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$$

dönüşümü *konjonktif dönüşüm,*

4) $\mathfrak{P}\mathfrak{T}=\mathbf{I}$ ve $\mathfrak{P}=\widetilde{\mathfrak{T}}$ olması hâlinde

$$\mathfrak{B}=\widetilde{\mathfrak{T}}\mathfrak{A}\mathfrak{T}=\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$$

dönüşümü *dik dönüşüm,* ve

5) $\mathfrak{P}\mathfrak{T}=\mathbf{I}$, $\mathfrak{P}=\mathfrak{T}^{+}=\mathfrak{T}^{-1}$ olması hâlinde de

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{T}^{+}\mathfrak{A}\mathfrak{T}=\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$$

dönüşümü ***birimsel dönüşüm*** adını alırlar.

Şimdi

$$\mathfrak{A}\vec{x}=\lambda\vec{x} \tag{I.4.2}$$

şeklinde, yâni $\vec{x}$ vektörüne uygulanan bir $\mathfrak{A}$ dönüşümünün bu vektörü gene kendi doğrultusunda fakat λ misli bir vektöre dönüştürdüğü hâli göz önüne alalım ve $\mathfrak{A}$ dönüşüm matrisi verildiğinde (I.4.3) bağıntısının geçerli olabilmesi için λ nın mümkün değerlerini ve bunlara tekaabül eden $\vec{x}=\vec{x}(\lambda)$ vektörlerini araştıralım.

(I.4.2) yi

$$(\mathfrak{A}-\lambda\mathbf{I})\,\vec{x}=0 \tag{I.4.3}$$

şeklinde de yazabiliriz. Bu, homogen bir denklem sistemine denk olan bir matris denklemi olup $\vec{x}\neq 0$ şeklinde çözümü haiz olması için, (I.3) bölümünden bilindiği gibi,

$$|\mathfrak{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \cdots\cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \cdots\cdots A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots\cdots A_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{I.4.4}$$

olması lâzımdır. (I.4.4) denklemine $\mathbb{A}$ matrisinin *karakteristik denklemi*, bunun köklerine $\mathbb{A}$ matrisinin *özdeğerleri*; $\lambda_{(q)}$ bir özdeğer olmak üzere

$$\mathbb{A}\vec{x}_{(q)} = \lambda_{(q)}\vec{x}_{(q)} \tag{I.4.5}$$

denklemini tahkık eden $\vec{x}_{(q)}$ vektörlerine de $\mathbb{A}$ dönüşümünün *invaryant vektörleri* veyâ $\mathbb{A}$ matrisinin *özvektörleri* adı verilir. Bunların bileşenleri âşikâr olarak (I.4.5) homogen denklemini doğrudan doğruya çözmekle elde edıleceklerdir. (I.4.4) ü gerçekleyen λ özdeğerlerinin hepsi birden $\mathbb{A}$ matrisinin *spektrum*'unu meydana getirirler.

(I.4.4) denklemi, λ nın n - ninci mertebeden bir polinomu olup n adet kökü haizdir. Buna göre, eğer $\mathbb{A}$ nın bütün $\lambda_{(r)}$ özdeğerleri biribirlerinden farklı iseler, $r=1,2,\ldots,n$ olmak üzere her bir $\lambda_{(r)}$ özdeğerine tekaabül eden ve bileşenleri

$$[A_{pq} - \lambda_{(r)}\,\delta_{pq}]\,x_{(r)q} = 0 \qquad (r=1,2,\ldots,n) \tag{I.4.6}$$

şeklindeki homogen sistemlerin çözümleri olan, biribirinden farklı n adet $\vec{x}_{(r)}$ özvektörü elde edilir. Eğer aynı bir özdeğere biribirinden farklı birden fazla özvektör tekaabül ediyorsa, böyle bir özdeğere *«soysuzlaşmış özdeğer»* denir.

$\mathbb{A}$ matrisinin bakışımlı (simetrik) veyâ hermitsel bir matris olması hâlinde $\mathbb{A}$ nın özdeğerleri ve özvektörleri arasında çok önemli bazı bağıtılar vardır. Bunları ortaya koymak için $\vec{x}_{(\lambda)}$ ve $\vec{x}_{(\mu)}$ ile $\mathbb{A}$ nın haiz olduğu biribirinden farklı λ ve μ özdeğerlerine tekaabül eden özvektörleri gösterelim. Bu takdirde

$$\mathbb{A}\vec{x}_{(\lambda)} = \lambda\,\vec{x}_{(\lambda)} \tag{I.4.7}$$

$$\mathbb{A}\vec{x}_{(\mu)} = \mu\,\vec{x}_{(\mu)} \tag{I.4.8}$$

ve (I.4.7) yi soldan $\vec{x}_{(\mu)}$, (I.4.8) i de soldan $\vec{x}_{(\lambda)}$ ile çarpıp

$$\tilde{\vec{x}}_{(\mu)}\mathbb{A}\vec{x}_{(\lambda)} = \lambda\,\tilde{\vec{x}}_{(\mu)}\vec{x}_{(\lambda)}$$

$$\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\mathbb{A}\vec{x}_{(\mu)} = \mu\,\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\vec{x}_{(\mu)} = \mu\,\tilde{\vec{x}}_{(\mu)}\vec{x}_{(\lambda)}$$

sonra da taraf tarafa çıkartarak

$$\tilde{\vec{x}}_{(\mu)}\,\mathfrak{A}\vec{x}_{(\lambda)}-\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\,\mathfrak{A}\vec{x}_{(\mu)}=(\lambda-\mu)\,\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\cdot\vec{x}_{(\mu)} \tag{I.4.9}$$

bulunur. Fakat $\mathfrak{A}$ nın bakışımlı (simetrik) olması yâni

$$\mathfrak{A}=\tilde{\mathfrak{A}}$$

bağıntısını gerçekleyen bir matris olması dolayısıyla, (I.4.9) un her iki yanının simetriğini alırsak

$$\widetilde{\left(\tilde{\vec{x}}_{(\mu)}\,\mathfrak{A}\vec{x}_{(\lambda)}\right)}-\widetilde{\left(\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\,\mathfrak{A}\vec{x}_{(\mu)}\right)}=(\lambda-\mu)\,\tilde{\vec{x}}_{(\mu)}\cdot\vec{x}_{(\lambda)}=(\lambda-\mu)\,\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\cdot\vec{x}_{(\mu)}$$

yâni

$$\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\,\mathfrak{A}\vec{x}_{(\mu)}-\tilde{\vec{x}}_{(\mu)}\,\mathfrak{A}\vec{x}_{(\lambda)}=(\lambda-\mu)\,\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\cdot\vec{x}_{(\mu)} \tag{I.4.10}$$

olur. (I.4.9) ile (I.4.10) taraf tarafa toplanırsa

$$(\lambda-\mu)\,\tilde{\vec{x}}_{(\lambda)}\cdot\vec{x}_{(\mu)}=0 \tag{I.4.11}$$

bulunur ki, $\lambda\neq\mu$ olduğuna göre bu simetrik bir matrisin farklı özdeğerlerine tekaabül eden özvektörlerin biribirlerine dik vektörler olduğunu göstermektedir.

Aynı netice hermitsel bir matris için de, yani $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^{+}$ özelliğini haiz bir matris için de geçerlidir. Bunun ispatı bir alıştırma olmak üzere okuyucuya bırakılmıştır. (Bk. Problem: 24).

Bir dik dönüşüme göre biribirlerine eşdeğer olan matrislerin ortak bir özellikleri, her ikisinin de aynı özdeğerleri haiz olmalarıdır. Gerçekten de

$$(\mathfrak{B}-\lambda\mathbf{I})=(\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}-\lambda\mathbf{I})=(\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}-\lambda\mathfrak{T}^{-1}\mathbf{I}\mathfrak{T})=\mathfrak{T}^{-1}\,(\mathfrak{A}-\lambda\mathbf{I})\mathfrak{T}$$

ve buradan da

$$|\mathfrak{B}-\lambda\mathbf{I}|=|\mathfrak{T}^{-1}|\cdot|\mathfrak{A}-\lambda\mathbf{I}|\cdot|\mathfrak{T}|=|\mathfrak{T}^{-1}|\cdot|\mathfrak{T}|\cdot|\mathfrak{A}-\lambda\mathbf{I}|=|\mathfrak{A}-\lambda\mathbf{I}| \tag{I.4.12}$$

olduğu görülmektedir. Bu önemli özellik, matrislerin uygun dönüşümler aracılığıyla eşdeğer köşegen matrislere indirgenmesinde büyük rol oynar.

Köşegen olmayan bir $\mathfrak{A}$ matrisinin uygun bir $\mathfrak{T}$ dik matrisi (dolayısıyla düzgün bir matris) yardımıyla ve bir benzerlik dönüşümü çerçevesi içinde köşegen bir $\mathfrak{B}$ matrisine dönüştüğünü farzedelim:

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{B}$ köşegen bir matris olduğuna göre bunun özdeğerleri, esas köşegeni üzerindeki terimlerden ibârettir. Gerçekten de $\mathfrak{B}$ nin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} B_{11}-\lambda & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & B_{22}-\lambda & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & B_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \prod_{p=1}^{n}(B_{pp}-\lambda)=0$$

dır. Buna göre, ve (I.4.11) özelliğini göz önünde bulundurarak, $\mathfrak{A}$ nın özdeğerlerinin, $\mathfrak{B}$ köşegen matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanlarından ibâret olduğu anlaşılmaktadır. Şu hâlde *bir $\mathfrak{A}$ matrisi verildiğinde buna eşdeğer köşegen bir matris inşâ etmek için $\mathfrak{A}$ nın özdeğerlerini esas köşegen elemanları olarak kabul eden köşegen bir matris yazmak yeter.*

Bununla beraber bazı hâllerde $\mathfrak{A}$ yı köşegenleştirecek olan $\mathfrak{T}$ matrisini doğrudan doğruya inşâ edebilmek de faydadan uzak değildir.

(*a*) Önce $\mathfrak{A}$ nın simetrik ve bütün özdeğerlerinin biribirlerinden farklı olmaları hâlini göz önüne alalım.

Bu takdirde belirli bir $\mathfrak{T}$ matrisi aracılığıyla öyle bir koordinat dönüşümü yapalım ki eski koordinat sisteminin taban vektörleri olan $\vec{e}_{(p)}$ vektörlerinin dönüşmüşleri yeni koordinat sisteminin $\vec{e}'_{(p)}$ taban vektörleri olsun ve üstelik bu yeni taban vektörleri $\mathfrak{A}$ matrisinin normalize edilmiş özvektörleriyle çakışsın. Buna göre

$$\vec{e}'_{(p)}=\mathfrak{T}\,\vec{e}_{(p)} \qquad \text{(I.4a.1)}$$

$$\mathfrak{A}\vec{e}'_{(p)} = \lambda_{(p)}\vec{e}_{(p)} \qquad \text{(I.4a.2)}$$

bağıntıları geçerli olacaktır. (I.4a.1) den

$$\mathfrak{T}^{-1}\vec{e}'_{(p)} = \vec{e}_{(p)} \qquad \text{(I.4a.3)}$$

bulunur. (I.4a.2) den de

$$\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}\mathfrak{T}^{-1}\vec{e}'_{(p)} = \lambda_{(p)}\mathfrak{T}^{-1}\vec{e}'_{(p)}$$

ya da $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$ olduğunu ve (I.4a.3) bağıntısını göz önünde tutarak

$$\mathfrak{B}\vec{e}_{(p)} = \lambda_{(p)}\vec{e}_{(p)}$$

olur. Bu, eğer $\vec{x}'$ vektörü $\mathfrak{A}$ nın bir özvektörü ise bunun dönüşümü olan $\vec{x} = \mathfrak{T}^{-1}\vec{x}'$ vektörünün de $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$ dönüşüm matrisinin özvektörü olduğunu ve gerek $\mathfrak{A}$ nın $\vec{x}'$ özvektörüne tekaabül eden, gerekse $\mathfrak{B}$ nin $\vec{x}$ özvektörüne tekaabül eden özdeğerlerin de aynı özdeğerler olduğunu göstermektedir.

Şimdi (I.4a.1) in her iki yanını da sağdan diyadik olarak $\vec{e}_{(q)}$ ile çarpalım, böylece

$$(\vec{e}'_{(p)}\vec{e}_{(q)}) = \mathfrak{T}(\vec{e}_{(p)}\vec{e}_{(q)}) = \mathfrak{T}\mathbf{I} = \mathfrak{T} \qquad \text{(I.4a.4)}$$

ya da, bu ifâdeyi soldan $\mathfrak{T}^{-1}$ ile çarparak

$$\mathfrak{T}^{-1}(\vec{e}'_{(p)}\vec{e}_{(q)}) = \mathbf{I}$$

olduğu görülmüş olur.

$\vec{e}'_{(p)}$ vektörleri $\vec{e}_{(q)}$ vektörlerine nisbet edilecek olursa

$$(\vec{e}'_{(p)}\vec{e}_{(q)})$$

diyadik çarpımının elemanlarının $\vec{e}'_{(p)}$ vektörlerinin $\vec{e}_{(q)}$ vektörleri üzerine izdüşümleri yâni bunların eski koordinat sistemine nazaran bileşenleri olduğu görülür. (I.4a.4) e binâen

$$\begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} \cdots\cdots T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} \cdots\cdots T_{2n} \\ \vdots & \\ T_{n1} & T_{n2} \cdots\cdots T_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e'_{(1)1} & e'_{(2)1} \cdots\cdots & e'_{(n)1} \\ e'_{(1)2} & e'_{(2)2} \cdots\cdots & e'_{(n)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e'_{(1)n} & e'_{(2)n} \cdots\cdots & e'_{(n)n} \end{Vmatrix} =$$

$$= (\vec{e}'_{(1)},\ \vec{e}'_{(2)}, \ldots\ldots, \vec{e}'_{(n)}) \tag{I.4a.5}$$

olur ve kezâ $\mathfrak{T}^{-1}$ in de, $\mathfrak{A}$ nın simetrik olması yüzünden özvektörlerinin biribirlerine dik olmaları dolayısıyla,

$$\mathfrak{T}^{-1} = \begin{Vmatrix} e'_{(1)1} & e'_{(1)2} \cdots\cdots & e'_{(1)n} \\ e'_{(2)1} & e'_{(2)2} \cdots\cdots & e'_{(2)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e'_{(n)1} & e'_{(n)2} \cdots\cdots & e'_{(n)n} \end{Vmatrix} \tag{I.4a.6}$$

ile verileceği kolaylıkla tahkik olunur. Özellikle bir matris

$$\mathfrak{C} = \begin{Vmatrix} \lambda e'_{(1)1} & C_{12} \cdots\cdots & C_{1n} \\ \lambda e'_{(1)2} & C_{22} \cdots\cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda e'_{(1)n} & C_{n2} \cdots\cdots & C_{nn} \end{Vmatrix}$$

şeklinde olsa

$$\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{C} = \begin{Vmatrix} \lambda & \bar{C}_{12} \cdots\cdots & \bar{C}_{1n} \\ 0 & \bar{C}_{22} \cdots\cdots & \bar{C}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \bar{C}_{n2} \cdots\cdots & \bar{C}_{nn} \end{Vmatrix} \tag{I.4a.7}$$

olacağına da nazar-ı dikkati çekelim.

Örnek :

$$\underset{\sim}{A}=\begin{Vmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{Vmatrix}$$

matrisine eşdeğer köşegen matrisi ve $\underset{\sim}{A}$ yı köşegenleştiren $\mathfrak{T}$ dönüşüm matrisini açıkça hesaplayınız.

Bu matrise tekaabül karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 10-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+27\lambda^2-180\lambda+324=(\lambda-18)(\lambda-6)(\lambda-3)$$

tür. Bu takdirde $\underset{\sim}{A}$ ya eşdeğer köşegen matris

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{Vmatrix}$$

şeklindedir. $\underset{\sim}{A}$ nın meselâ $\lambda=3$ e tekaabül eden özvektörünü arayalım. Bunu sağlayacak olan denklemler (I.4.6) dolayısıyla

$$8x_1-6x_2+2x_3=0$$
$$-6x_1+7x_2-4x_3=0$$
$$2x_1-4x_2+3x_3=0$$

şeklinde homogen bir cebrisel denklem takımı teşkil ederler. Bunun esas determinantı sıfır olduğuna göre, meselâ, son denklem hiç göz önüne alınmadan ve $x_1=c_3$ vazederek

$$-6x_2+2x_3=-8c_3$$
$$7x_2-4x_3=\ 6c_3$$

ve buradan da $\lambda=3$ özdeğerine tekaabül eden özvektör olarak

$$\vec{e}'_{(1)}=c_3\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

ve benzer şekilde de $\lambda=6$ ve $\lambda=18$ için

$$\vec{e}'_{(2)}=c_2\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}, \qquad \vec{e}'_{(3)}=c_1\begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

elde edilir. Şu hâlde $\mathfrak{A}$ yı köşegenleştirecek olan $\mathfrak{T}$ matrisi de (I.4a.5) e göre

$$\mathfrak{T}=c_1c_2c_3\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

olur. Normalize edilmemiş olan $\vec{e}'_{(p)}$ vektörlerinin, aralarında ikişer ikişer biribirlerine dik oldukları kolaylıkla gerçeklenebilir.

(*b*) Şimdi de $\mathfrak{A}$ nın gene simetrik olmakla berâber bütün özdeğerlerinin biribirlerinden farklı olmadığı ve meselâ $\lambda_{(1)}$ in $\mathfrak{A}$ nın r_1-inci mertebeden bir özdeğeri olduğu soysuzlaşmış hâli göz önüne alalım. $\mathfrak{A}$ nın $\lambda_{(1)}$ özdeğerine tekaabül eden normalize edilmiş bir özvektörünü $\vec{x}_{(1)}$ ile gösterelim:

$$\mathfrak{A}\vec{x}_{(1)}=\lambda_{(1)}\,\vec{x}_{(1)}. \tag{I.4b.1}$$

Şimdi birinci sütûnu $\mathfrak{A}$ nın $\lambda_{(1)}$ e tekaabül eden normalize edilmiş $\vec{x}_{(1)}$ özvektöründen ibâret olan bir $\mathfrak{T}_1$ matrisi göz önüne alalım. Bu takdirde, (I.4b.1) i de göz önünde bulundurarak

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T}_1=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots\cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2}\cdots\cdots & A_{nn} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x_{(1)1} & T_{12}\cdots\cdots & T_{1n} \\ x_{(1)2} & T_{22}\cdots\cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ x_{(1)n} & T_{n2}\cdots\cdots & T_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$=\begin{Vmatrix} A_{1k}\,x_{(1)k} & A_{1k}\,T_{k2}\cdots\cdots \\ A_{2k}\,x_{(1)k} & A_{2k}\,T_{k2}\cdots\cdots \\ \vdots & \\ A_{nk}\,x_{(1)k} & A_{nk}\,T_{n2}\cdots\cdots \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \lambda_{(1)}\,x_{(1)1} & A_{1k}\,T_{k2}\cdots\cdots \\ \lambda_{(1)}\,x_{(1)2} & A_{2k}\,T_{k2}\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_{(1)}\,x_{(1)n} & A_{nk}\,T_{k2}\cdots\cdots \end{Vmatrix}$$

olur. Bu takdirde $\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}_1$ çarpımı teşkil edilecek olursa bunun birinci sütûnu, (I.4a.7) bağıntısına dayanarak,

$$\left\|\begin{matrix} \lambda_1 \cdots\cdots \\ 0 \cdots\cdots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \cdots\cdots \end{matrix}\right\|$$

şeklinde olacaktır.

Eğer $\mathfrak{B}_{(p)}$ ile, $(n-1)$ elemandan müteşekkil tek satırlık bir matrisi ve $\mathfrak{B}_{(pq)}$ ile de $(n-1)$-inci mertebeden bir kare matrisi gösterirsek $\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}_1$ matrisi

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}_1=\left\|\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathfrak{B}_{(p)} \\ \hline 0 & \mathfrak{B}_{(pq)} \end{array}\right\|$$

şeklinde olur. Fakat $\mathfrak{A}$ ile bunun $\mathfrak{T}_1$ matrisine göre eşdeğeri olan $\mathfrak{B}$ matrisi aynı özdeğerleri haiz olduklarından $\mathfrak{B}$ de tıpkı $\mathfrak{A}$ gibi $\lambda_{(1)}$ i r_1-inci mertebeden bir çokkatlı özdeğer olarak kabul eder. Bu itibarla $\mathfrak{B}_{(pq)}$ matrisi için $\lambda_{(1)}$ tam $(r-1)$ katlı bir özdeğerdir.

Bu $\mathfrak{B}_{(pq)}$ matrisi de tıpkı $\mathfrak{A}$ matrisi için yapılan gibi bir işleme tâbî tutularak bunun $\lambda_{(1)}$ özdeğerine tekaabül eden normalize edilmiş bir özvektörü belirlenir, ve ilk sütûnu bu özvektörden ibâret olan $(n-1)$-inci mertebeden bir $\mathfrak{T}_2$ kare matrisi aracılığla ve $m, s=1\cdots,n$ olmak üzere

$$\mathfrak{T}_2^{-1}\mathfrak{B}_{(pq)}\mathfrak{T}_2=\left\|\begin{array}{c|c} 1 & \mathfrak{C}_{(m)} \\ \hline 0 & \mathfrak{C}_{(ms)} \end{array}\right\|$$

olduğu görülür. Böylece

$$\mathfrak{U}=\left\|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{T}_2 \end{array}\right\|, \qquad \mathfrak{U}^{-1}=\left\|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{T}_2^{-1} \end{array}\right\|$$

diye târif olunan matris aracılığıyla $\mathfrak{B}$ dönüştürülecek olursa

$$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{U}=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mathfrak{B}_{(q)}\mathfrak{T}_2 & \\ 0 & \lambda_1 & \mathfrak{C}_{(m)} \\ {}^{r}0 & 0 & \mathfrak{C}_{(ms)} \end{Vmatrix}$$

olur. Aynı işlemler peşpeşe $\mathfrak{C}_{(ms)}$ ve ilh... için $r-2$ kere daha tekrarlanırsa neticede

$$\mathfrak{A}_1=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r_1} \\ 0 & \lambda_1 & a_{23} & & a_{2r_2} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{Vmatrix} \qquad \text{(I.4b.2)}$$

olmak üzere

$$\left\| \overleftarrow{\prod_{k=1}^{r_1}} \mathfrak{T}_k^{-1} \right\| \mathfrak{A} \left\| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{r_1}} \mathfrak{T}_k \right\| = \begin{Vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B} \\ 0 & \mathfrak{E} \end{Vmatrix} \qquad \text{(I.4b.3)}$$

şeklinde bir ifâde elde edilmiş olur. Soldaki ilk (üçüncü) terimde sola (sağa) doğru ok, çarpım terimlerinin sağdan sola (sağdan sola) doğru k nın artan değerlerini izleyerek sıralanacağına işâret etmektedir. Buradaki $\mathfrak{B}$ matrisi r_1 satır ve $n-r_1$ sütûndan, ve $\mathfrak{E}$ matrisi de $n-r_1$ satır ve $n-r_1$ sütûndan müteşekkil matrislerdir. Eğer $\mathfrak{Z}$ ile (I.4b.3) ün ilk r_1 sütûnundan oluşmuş matrisi göz önüne alırsak

$$\mathfrak{Z}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{Z}=\mathfrak{A}_{(1)}$$

olur ve böylelikle $\mathfrak{B}$ matrisinden de kurtulmuş oluruz.

Hesabın bundan sonraki bölümü $\mathfrak{E}$ matrisini tıpkı $\mathfrak{A}_1$ için olduğu gibi köşegen şekle indirgemek ve bütün özdeğerler tüketilinciye kadar bu işleme devam etmektir. Böylelikle sonunda, $\mathfrak{A}_{(k)}$ $(k=1,2,\cdots)$ ile (I.4b.2) gibi üçgen matrisler göstermek üzere, $\mathfrak{A}$ matrisi

$$\mathcal{A}=\left\| \begin{matrix} \mathcal{A}_1 & 0 & & \\ & \mathcal{A}_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathcal{A}_\nu \end{matrix} \right\|$$

gibi bir şekle indirgenmiş olur.

Bu âna kadar bütün özdeğerleri farklı olan bir matrisin ve mükerrer özdeğerli simetrik bir matrisin nasıl köşegenleştirileceklerini gördük. Hermitsel ve birimsel matrisleri de köşegenleştirmek mümkündür. Simetrik, hermitsel ya da birimsel matrisleri köşegenleştiren dönüşümlerin birimsel dönüşümler oldukları gösterilebilir. Buna karşılık tamâmen keyfî bir matrisi düzgün bir $\mathfrak{T}$ matrisi aracılığıyla köşegenleştirmek her zaman mümkün değildir (Bk. Problem: 40).

(I.5) DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

A. Şimdi, sâbit katsayılı birinci mertebeden lineer bir homogen diferansiyel denklem sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}\,x_1(t)+a_{12}\,x_2(t)+\cdots\cdots+a_{1n}\,x_n(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}\,x_1(t)+a_{22}\,x_2(t)+\cdots\cdots+a_{2n}\,x_n(t) \\ &\;\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}\,x_1(t)+a_{n2}\,x_2(t)+\cdots\cdots+a_{nn}\,x_n(t). \end{aligned} \qquad \text{(I.5A.1)}$$

Bu sisteme tekaabül eden başlangıç şartları da

$$x_1(0)=b_1,\quad x_2(0)=b_2,\quad \cdots\cdots,\; x_n(0)=b_n \qquad \text{(I.5A.2)}$$

ile verilmiş olsun. Bu takdirde $\mathcal{A}$ ile sistemin sâbit katsayılar matrisini, $\vec{x}(t)$ ile bileşenleri $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$ ve $\vec{b}$ ile de bileşenleri

b_1 , b_2 , $\cdots$, b_n olan sütûn vektörlerini göstermek üzere (I.5A.1) ve (I.5A.2) kısaca

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \mathfrak{A}\,\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{b} \tag{I.5A.3}$$

şeklinde yazılırlar. Şimdi $\mathfrak{T}$ ile, $\mathfrak{A}$ yı bir benzerlik dönüşümünde köşegenleştiren bir matrisi göstererek $\vec{x} = \mathfrak{T}\vec{y}$ dönüşümünü yapalım. Bunu (I.5A.3) ifâdesine yerleştirip de elde edilen denklemi soldan $\mathfrak{T}^{-1}$ ile çarparsak, $\mathfrak{T}$ nin t ye tâbî olmaması dolayısıyla, sonuç olarak

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = (\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T})\,\vec{y}(t) = \Lambda\,\vec{y}(t); \quad \vec{y}(0) = \mathfrak{T}^{-1}\vec{b} \tag{I.5A.4}$$

bulunur. Λ matrisi $\mathfrak{A}$ nın özdeğerlerinden ibâret köşegen matristen başka bir şey değildir. Böylece:

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{dy_n}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix}$$

ve buradan da

$$\vec{y}(t) = \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_n t} \end{Vmatrix} \mathfrak{T}^{-1}\vec{b}$$

ya da (I.5A.1)—(I.5A.2) nin çözümü olarak artık

$$\vec{x}(t) = \mathfrak{T} \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_n t} \end{Vmatrix} \mathfrak{T}^{-1}\vec{b} \tag{I.5A.5}$$

bulunur.

$\mathbb{A}$ nın elemanlarının sâbitler olması hâlinde (I.5.3) e tekaabül eden homogen denklemin çözümü herhangi bir güçlük göstermez. $\mathbb{A}=\mathbb{A}(t)$ hâline geçmeden önce bu hâli sayısal bir örnekle canlandıralım.

Örnek :

$$\frac{dx_1}{dt}= 11x_1- 6x_2+2x_3+t$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-6x_1+10x_2-4x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt}= 2x_1- 4x_2+6x_3$$

sistemini çözünüz.

Bu sistemi

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{Vmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{Vmatrix} \vec{x}(t) + \begin{Vmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \mathbb{A}\vec{x}(t)+\vec{f}(t)$$

şeklinde yazmak kaabildir. $|\mathbb{A}-\lambda\mathbf{I}| = (\lambda-18)(\lambda-6)(\lambda-3)$ olduğuna göre $\mathbb{A}$ yı köşegenleştirecek $\mathfrak{T}$ matrisinin şeklinin $\lambda=3$, $\lambda=6$, ve $\lambda=18$ özdeğerlerine tekaabül eden

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

özvektörlerinin fonksiyonu olarak

$$\mathfrak{T}= \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathfrak{T}^{-1}=-\frac{1}{27} \begin{Vmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{Vmatrix}$$

olduğu kolaylıkla tesbit edilir. $\vec{x} = \mathfrak{T}\vec{y}$ dönüşümü yapılarak

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{Vmatrix} \vec{y}+\frac{1}{9} \begin{Vmatrix} -t \\ 2t \\ 2t \end{Vmatrix}$$

ve buradan

$$\vec{y}(t)=\begin{Vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Vmatrix}=\frac{1}{27}\begin{Vmatrix} c_1e^{3t}- & (t-1) \\ c_2e^{6t}+ & (t-1) \\ c_3e^{18t}+\frac{1}{3} & (t-1) \end{Vmatrix}$$

bulunur. Bu takdirde verilen denklemin çözümü de

$$\vec{x}(t)=\begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Vmatrix}=\mathfrak{T}\vec{y}=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} y_1+2y_2+2y_3 \\ 2y_1+y_2-2y_3 \\ 2y_1-2y_2+y_3 \end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{27}\begin{Vmatrix} c_1e^{3t}+2c_2e^{6t}+2c_3e^{18t}+\frac{5}{3}(t-1) \\ 2c_1e^{3t}+c_2e^{6t}-2c_3e^{18t}-\frac{5}{3}(t-1) \\ 2c_1e^{3t}-2c_2e^{6t}+c_3e^{18t}-\frac{11}{3}(t-1) \end{Vmatrix}$$

olur; (I.5A.2) göz önüne alınırsa (I.5A.6) daki integrasyon sâbitlerinin kolaylıkla yok edilebilecekleri görülebilir.

B. Şimdi, $\vec{x}(t)$ gene t nin fonksiyonu olan n adet bileşeni haiz bir sütûn vektör ve $\mathbb{A}(t)$ de t nin fonksiyonu olan elemanları haiz olmak üzere $(n\times n)$—li bir matris olmak üzere

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\mathbb{A}\,\vec{x}(t)\,,\quad \vec{x}(0)=\vec{b} \tag{I.5B.1}$$

şeklindeki değişken katsayılı homogen lineer diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım:

$t \geqq 0$ için $\mathbb{A}(t)$ nin sürekli olması şartı altında (I.5B.1) *vektörel* diferansiyel denkleminin tek bir çözümü olduğunu ve bu çözümün de

$$\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt}=\mathbb{A}(t)\,\mathfrak{X}(t)\,,\quad \mathfrak{X}(0)=\mathbf{I} \tag{I.5B.2}$$

matrisel diferansiyel denklemini gerçekleyen $\mathfrak{X}(t)$ matrisi aracılığıyla

$$\vec{x} = \mathfrak{X}\vec{b}$$

şeklinde ifâde edildiğini göstereceğiz.

Bunun için (I.5B.2) yerine, bunun çözümü olan

$$\mathfrak{X} = \mathbf{I} + \int_0^t \mathfrak{A}(s)\,\mathfrak{X}\,ds \tag{I.5B.3}$$

ifâdesini göz önüne alalım. Bundan sonra $\mathfrak{X}_n$ diye

$$\mathfrak{X}_0 = \mathbf{I}$$

$$\mathfrak{X}_{n+1} = \mathbf{I} + \int_0^t \mathfrak{A}(s)\mathfrak{X}_n\,ds \qquad (n=0,1,\ldots.)$$

bağıntıları aracılığıyla tanımlanmış olan bir matris dizisi göz önüne alalım. Buna dayanarak

$$\mathfrak{X}_{n+1} - \mathfrak{X}_n = \int_0^t \mathfrak{A}(s)\,(\mathfrak{X}_n - \mathfrak{X}_{n+1})\,ds \qquad (n=1,2,\ldots)$$

olur. $\mathfrak{A}(s)$ nin $0 \leqq t \leqq t_1$ için maksimumu m olsun. Bu takdirde

$$|\,\mathfrak{X}_{n+1} - \mathfrak{X}_n\,| = \left|\int_0^t \mathfrak{A}(s)\,(\mathfrak{X}_n - \mathfrak{X}_{n+1})\,ds\right| \leqq \int_0^t |\,\mathfrak{A}(s)\,| \cdot |\,\mathfrak{X}_n - \mathfrak{X}_{n+1}\,|\,ds$$

$$\leqq m \int_0^t |\,\mathfrak{X}_n - \mathfrak{X}_{+n1}\,|\,ds \tag{I.5B.4}$$

olur. Fakat aynı $0 \leqq t \leqq t_1$ aralığında

$$|\,\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_0\,| \leqq \int_0^t |\,\mathfrak{A}(s)\,|\,ds \leqq mt$$

olacağından (I.5B.4) rekürans eşitsizliği aracılığıyla $0 \leqq t \leqq t_1$ için

$$|\mathcal{X}_{n+1}-\mathcal{X}_n| \leqq \frac{m^{n+1}\, t^{n+1}}{(n+1)!}$$

bulunur ki bu da $0 \leqq t \leqq t_1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{X}_{n+1}-\mathcal{X}_n)$$

serisinin üniform olarak yakınsak olduğunu göstermektedir. Bu takdirde $\mathcal{X}_n$ de (I.5B.3) ve dolayısıyla (I.5B.1) i gerçekleyen $\mathcal{X}(t)$ matrisine üniform olarak yakınsaktır. (I.5B.1) in, verilen başlangıç şartlarını gerçekleyen çözümünün

$$\vec{x}(t)=\mathcal{X}(t)\,\vec{b} \qquad \text{(I.5B.5)}$$

yâni

$$\vec{x}(t)=\vec{b}+\int_0^t \mathcal{A}(s)\,\vec{x}(s)\, ds \qquad \text{(I.5B.6)}$$

şeklinde olduğu da (I.5B.5) i (I.5B.2) ye yerleştirerek doğrudan doğruya görülebilir. (I.5B.5) çözümünün tekliğini ispatlamak da kaabildir. $t \geqq 0$ için $\mathcal{A}(t)$ sürekli kabul edildiğine göre t_1 istenildiği kadar büyük alınabilir. Bu itibarla (I.5B.6) çözümü bütün $t \geqq 0$ değerleri için cârîdir.

C. Skaler hâlde

$$\frac{du}{dt}=au\,, \quad u(0)=b$$

şeklindeki denklemin çözümünün

$$u(t)=e^{at}\, b$$

olduğu bilinmektedir. Bu skaler hâle benzer şekilde

$$\frac{d\mathcal{X}(t)}{dt}=\mathcal{A}(t)\,\mathcal{X}\,, \quad \mathcal{X}(0)=\mathcal{B}$$

şeklindeki matrisel denklemin çözümünü de

$$\mathcal{X}(t)=e^{\mathcal{A}t}\,\mathcal{B}$$

olarak göstereceğiz. Buradaki üstel matris

$$e^{\mathbb{A}t}=\mathbf{I}+\mathbb{A}t+\cdots\cdots+\frac{\mathbb{A}^p t^p}{p!}+\cdots\cdots$$

şeklinde tanımlanır ve bu matrisel serinin kompleks t düzlemindeki her sonlu bölgede üniform olarak yakınsak olduğu ispatlanır. Kezâ, matrisel fonksiyonun

$$e^{\mathbb{A}s}\,e^{\mathbb{A}t}=e^{\mathbb{A}(s+t)}$$
$$e^{\mathbb{A}(-t+t)}=\mathbf{I}$$

fonksiyonel bağıntılarını gerçeklediğini de göstermek mümkündür. (Bk: Problem: 41)

D. Şimdi $\mathbb{A}$ ile elemanları sâbitler olan bir kare matrisi ve $\vec{f}(t)$ ile de bir vektörü göstermek üzere

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\mathbb{A}\,\vec{x}(t)+\vec{f}(t),\quad \vec{x}(0)=\vec{b} \tag{I.5D.1}$$

denklem sistemini göz önüne alarak

$$e^{-\mathbb{A}t}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}-\mathbb{A}\vec{x}\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{-\mathbb{A}t}\,\vec{x}\right)=e^{-\mathbb{A}t}\,\vec{f}$$

yazılabileceğine, ve buradan da

$$e^{-\mathbb{A}t}\,\vec{x}(t)=\vec{b}+\int_0^t e^{-\mathbb{A}s}\,\vec{f}(s)\,ds$$

yâni

$$x(t)=e^{\mathbb{A}t}\,\vec{b}+\int_0^t e^{\mathbb{A}(t-s)}\,\vec{f}(s)\,ds \tag{I.5D.2}$$

elde edildiğine işâret edelim.

E. Gene (I.5D.1) şeklinde homogen olmayan, fakat bu sefer $\mathbb{A}=\mathbb{A}(t)$ şeklinde t nin fonksiyonu olan bir katsayılar matrisini haiz diferansiyel denklem sistemi ele alalım:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \mathbb{A}(t)\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{b} \tag{I.5E.1}$$

ve $\mathbb{X}(t)$ matrisi

$$\frac{d\mathbb{X}(t)}{dt} = \mathbb{A}(t)\,\mathbb{X}(t), \quad \mathbb{X}(0) = \mathbb{I} \tag{I.5E.2}$$

matrisel denkleminin çözümü olmak şartıyla (I.5E.1) nin $\vec{x}(t) = \mathbb{X}(t)\,\vec{y}(t)$ şeklinde bir çözümü olup olmadığını araştıralım. (I.5E.2) nin (I.5E.1) e yerleştirilmesi sonucu

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt}\vec{y} + \mathbb{X}\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbb{A}(t)\,\mathbb{X}\vec{y} + \mathbb{X}\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbb{A}(t)\,\mathbb{X}\vec{y} + \vec{f}(t)$$

bulunur ki bu ifâde

$$\mathbb{X}\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t)$$

olduğunu göstermektedir. Şu hâlde

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbb{X}^{-1}(t)\,\vec{f}(t)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{b} + \int_0^t \mathbb{X}^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds$$

ve dolayısıyla

$$\vec{x}(t) = \mathbb{X}(t)\,\vec{b} + \int_0^t \mathbb{X}(t)\,\mathbb{X}^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds \tag{I.5E.3}$$

bulunur ki bu da (I.5D.2) nin çok daha genel bir hâlini temsil etmektedir.

F. Şimdi de (I.5D.2) formülünün ilgi çekici bir uygulamasına vesile olsun diye, ε küçük bir sayı olmak üzere, $e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}}$ şeklindeki bir üstel matrisin ε cinsinden

$$e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}}=e^{\mathbb{A}}+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n Q_n(\mathbb{A},\mathbb{B}) \qquad \text{(I.5F.1)}$$

şeklindeki seriye açılımını inceleyeceğiz. Eğer $\mathbb{A}$ ile $\mathbb{B}$ çarpım işlemine göre yerdeğiştirici olan iki kare matris iseler, $e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}}=e^{\mathbb{A}}e^{\varepsilon\mathbb{B}}$ olduğundan (Bk: Problem. 41/c),

$$e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}}=e^{\mathbb{A}}e^{\varepsilon\mathbb{B}}=e^{\mathbb{A}}\left(\mathbb{I}+\varepsilon\mathbb{B}+\cdots\cdots+\frac{\varepsilon^n\mathbb{B}^n}{n!}+\cdots\cdots\right)$$

$$=e^{\mathbb{A}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n e^{\mathbb{A}}\mathbb{B}^n}{n!}$$

elde edilir.

Eğer $\mathbb{A}\mathbb{B}\neq\mathbb{B}\mathbb{A}$ ise bu sefer de

$$e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}}=\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B})^n}{n!}$$

tanım bağıntısından hareketle sağdaki toplamda ε un aynı üslerini bir araya toplamak yoluna gidilebilir. Fakat $\mathbb{A}$ ile $\mathbb{B}$ nin yerdeğiştirici olmamaları bu işin sistematik bir şekilde yürütülebilmesine engeldir. Bu itibarla biraz daha dolambaçlı bir yoldan (I.5F.1) bağıntısının tesisine çalışılır. Bunun için $e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}}$ üstel matrisinin

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt}=(\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B})\mathbb{X}, \quad \mathbb{X}(0)=\mathbb{I} \qquad \text{(I.5F.2)}$$

diferansiyel denkleminin $t=1$ toktasındaki çözümünden başka bir şey olmadığına işâret edelim. Problemi bu şekilde vaz etmek, $\varepsilon\ll 1$ şartı altında,

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt}=\mathbb{A}\mathbb{X}$$

denkleminin

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt}=(\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B})\mathbb{X}$$

şeklindeki bir *bozulumunu* (= *pertürbasyonunu*) hesaplamağa yâni sağ yanındaki fonksiyonda ortaya çıkan $\varepsilon\mathbb{B}\mathcal{X}$ lik bir bozulumun denklemi gerçekleyen $\mathcal{X}$ fonksiyonu üzerinde ne gibi bir etki yapacağını tesbit etmeğe denktir.

(I.5D.2) ye dayanarak, (I.5F.1) in çözümünün

$$\mathcal{X}(t) = e^{\mathbb{A}t} + \varepsilon \int_0^t e^{\mathbb{A}(t-s)} \mathbb{B}\, \mathcal{X}(s) ds \qquad \text{(I.5F.3)}$$

şeklinde olduğu görülür. Bu, $\mathcal{X}$ fonksiyonu cinsinden, *Volterra integrâl denklemi* denilen bir denklemdir. İleride integrâl denklemler bahsinde göreceğimiz gibi böyle bir denklemi çözmek için $\mathcal{X}(s)$ yi şeklen kabaca temsil edebilecek basit bir fonksiyon seçilir. Böylece (I.5F.2) nin sağ yanı hesaplanarak belirli bir $\mathcal{X}_1(t)$ fonksiyonu tesbit edilir. Sonra $\mathcal{X}_1(s)$ gene (I.5F.2) nin sağına yerleştirilerek bir $\mathcal{X}_2\ t)$ fonksiyonu elde edilir. Bu işleme böylece devam edilerek $n \to \infty$ için $\mathcal{X}_n(t)$ nin (I.5F.3) ün tam çözümüne gittiği gösterilir. Neticede (I.5F.3) sonsuz bir seri şeklinde ifâde olunur. Burada da iterasyonun ilk adımı olarak $\mathcal{X}(s) = e^{\mathbb{A}s}$ vazedilirse

$$\mathcal{X}(t) = e^{\mathbb{A}t} + \varepsilon \int_0^1 e^{(\mathbb{A}t-s)} \mathbb{B}\, e^{\mathbb{A}s} ds + \cdots$$

şeklinde olacağı görülür, Fakat $t = 1$ için (I.5F.1) in çözümü olan $\mathcal{X}(t) = e^{(\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B})t}$ sâdece $\mathcal{X}(1) = e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}}$ olacağından

$$e^{\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}} + \varepsilon \int_0^1 e^{\mathbb{A}(1-s)} \mathbb{B}\, e^{\mathbb{A}s} ds + \cdots \qquad \text{(I.5F.4)}$$

bulunur. Bu ifâde, $\varepsilon \ll 1$ olmak üzere, küçük bir $\mathbb{B}$ pertürbasyonuna uğramış olan üstel matrisin argümentinin üstel matrisin değeri üzerine ne gibi bir etki yapmakta olduğunu göstermektedir. (I.5F.4) serisinde ε un birinci kuvvetini haiz terimden sonraki terimleri ihmâl etmeğe «*birinci mertebeden bozulum* (=*pertürbasyon*) *yapmak*» denir. (Bk. Problem: 44).

(I.6) DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN MATRİS DENKLEMLERİNE İNDİRGENMESİ.

Çok kere diferansiyel ve integrâl denklemlerin yaklaşık çözümleriyle yetinilebilir. Bu bölümde bunların matris denklemlerine indirgenmesi için bir metot göreceğiz. Fazla ayrıntılara dalmamak için bu metodu, özellikle *Sturm - Liouville* diferansiyel denklemlerine ve *Volterra* tipi bir integrâl denkleme uygulamak sûretiyle sunacağız. Fakat, prensip itibariyle, bu metodun çok daha genel denklemler için de geçerli olduğunu da söyleyelim.

Sturm-Liouville problemi fıziğin pekçok alanında karşılaşılan bir problem olup

$$u(0)=u(1)=0 \tag{I.6.1}$$

sınır şartları altında ve $\phi(t)$ de, $[0,1]$ aralığında reel, sürekli ve pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\lambda\phi(t)\,u(t)=0 \tag{I.6.2}$$

homogen denkleminin, λ parametresinin hangi değerleri için sıfırdan farklı çözümler verdiğini araştırır (Bk. V. BÖLÜM).

Bu problemi yaklaşık bir şekilde çözebilmek için (I.6.2) yi (I.6.1) sınır şartları altında gerçekleyen bir $u(t)$ fonksiyonu arayacak yerde $N\Delta=1$ ve $k=0,1,,\cdots,N-1$ olacak şekilde $\{u_k=u(k\Delta)\}$ ile belirlenen bir dizi tesbit edelim. Buna göre du/dt yerine

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{\Delta}$$

ve d^2u/dt^2 yerine de

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\Delta^2}$$

ifâdeleri konulacaklardır. Buna göre, ve $\phi_k=\phi(k\Delta)$ vazederek, (I.6.2) denklemi yerine

$$\left.\begin{array}{c} u_2-2u_1+\lambda\Delta^2\phi_1u_1=0 \\ u_3-2u_2+u_1+\lambda\Delta^2\phi_2u_2=0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2u_{N-1}+u_{N-2}+\lambda\Delta^2\phi_{N-1}u_{N-1}=0 \end{array}\right\} \tag{I.6.3}$$

homogen cebirsel sistemi yerleştirilmiş olacaktır. Bunun aracılığıyla u_k dizisinin tesbiti (I.6.2) yi gerçekleyen $u(t)$ fonksiyonunun

$$t=\Delta\ ,\ 2\Delta,\cdots,(N-1)\Delta$$

noktalarında alacağı değerleri yaklaşık olarak verir. (I.6.3) sistemi

$$\underset{\sim}{A}=\left\|\begin{array}{ccccc} -2+\lambda\Delta^2\phi_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2+\lambda\Delta^2\phi_2 & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & -2+\lambda\Delta^2\phi_{N-2} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2+\lambda\Delta^2\phi_{N-1} \end{array}\right\|$$

simetrik matrisi aracılığıyla

$$\underset{\sim}{A}u=0 \tag{I.6.4}$$

şeklinde yazılır. Eğer

$$\mathbf{a}=\left\|\begin{array}{cccc} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & \\ & & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{array}\right\|$$

ve

$$\mathbf{b}=\left\|\begin{array}{ccc} -\Delta^2\phi_1 & & \mathbf{0} \\ & -\Delta^2\phi_2 & \\ & & \\ \mathbf{0} & & -\Delta^2\phi_{N-1} \end{array}\right\|$$

vazedilirse (I.6.2) ü çözmek

$$|\underset{\sim}{A}| = |\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}| = 0$$

eşklinde genel bir özdeğer problemini çözmeğe denk olmaktadır. (Bk. Problem : 27).

Şimdi $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $f(x)$ ile $K(x,x')$ de verilmiş fonksiyonlar olmak üzere

$$\lambda\phi(x)+\int_0^a K(x,x)\phi(x')\,dx'=f(x) \qquad (I.6.5)$$

şeklinde bir integrâl denklem göz önüne alalım. Burada $K(x,x')$ ye integrâl denklemin, *çekirdek fonksiyonu* ya da kısaca *çekirdeği* adı verilir ve λ da bir parametredir. Ancak bu denklem, çok kere, λ nın ancak belirli bazı değerleri için bir çözümü haiz olduğundan, (I.4) bölümüne benzer şekilde, buradaki λ nın (I.6.5) in çözümlerini temin eden mümkün değerleri, (I.6.5) in özdeğerlerini ve bunlara tekaabül eden çözümler de (I.6.5) in özfonksiyonlarını teşkil ederler. İntegrâl denklemin bütün özdeğerleri bunun spektrumunu meydana getirirler.

$[0, a]$ aralığını $N\Delta=a$ olacak şekilde N eşit parçaya bölelim ve $i, k=0,1,\cdots,N-1$ olmak üzere

$$f(x_i)=-f_i, \quad \phi(x_i)=\phi_i, \quad \phi(x'_k)=\phi_k, \quad K(x_i, x'_k)=-K_{ik}$$

vazedelim. Bu takdirde sürekli toplam demek olan integrâl işlemi de âdî anlamda bir toplama dönüşür ve (I.6.5)

$$\lambda\phi_i-\sum_{k=0}^{N}K_{ik}\phi_k=-f_i$$

$$(i=1,2,\cdots,N-1)$$

şeklinde bir denklem sistemine ya da

$$(\mathbb{K}-\lambda\mathrm{I})\vec{\phi}=\vec{f} \qquad (I.6.6)$$

şeklinde bir matris denklemine indirgenmiş olur.

(I.7) SONSUZ BOYUTLU VEKTÖR UZAYLARI; HİLBERT UZAYI.

Şimdiye kadar sâdece sonlu boyutu haiz lineer vektör uzaylarıyla, yâni birim taban vektörlerinin indisleri sonlu sayıda değerler alan lineer vektör uzaylarıyla uğraştık. Bununla beraber teorik fizikte, ve özellikle kuvanta teorisinde pekçok problem sonsuz boyutu haiz ve adına **Hilbert uzayı** denilen özel bir lineer vektör uzayına ihtiyaç gösterir. Hilbert uzayında vektörler kompleks büyüklükler olarak telâkki edilirler. Diğer taraftan boyut sayısının sonsuz olması bu uzayı karakterize eden birim taban vektörlerinin sıralama indislerinin [0, ∞] aralığında ya *münferit tam* değerler olarak *sayılabilen* bir taban, ya da *sürekli* değerler alarak *sayılmayan* bir taban teşkil etmeleri şıklarının ortaya çıkmasına sebep olur.

Hilbert uzayında bir x değişkenine bağlı iki vektörün skaler çarpımı, uzayda sayılabilen bir taban vektörleri takımı bulunması hâlinde,

$$(\varphi_\mu(x),\ \varphi_\nu(x)) = \int_B \varphi^*_\mu(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx \qquad (I.7.1)$$

şeklinde tanımlanır; B ile, x değişkeninin tanım bölgesi gösterilmektedir.

$$(\varphi_\mu(x),\ \varphi_\nu(X)) = \delta_{\mu\nu} \qquad (I.7.2)$$

şeklinde bir bağıntı da $\varphi_\mu(x)$ ve $\varphi_\nu(x)$ vektörlerinin dikliğine delâlet eder. Keyfî bir $f(x)$ vektörü $\varphi_\mu(x)$ $(\mu=1, 2, \cdots, \infty)$ birim taban vektörleri cinsinden, tıpkı sonlu sayıdaki boyutu haiz vektör uzaylarında olduğu gibi,

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu\, \varphi_\mu(x) \qquad (I.7.3)$$

şeklinde ifâde olunacaktır. $f(x)$in, koordinat sistemleri üzerine izdüşümleri demek olan a_μ büyüklüklerini açık bir şekilde ifâde etmek için (I.7.3) ün her iki yanını soldan $\varphi^*_\mu(x)$ ile çarpıp x in tanım bölgesi üzerinden integre edelim; bu takdirde (I.7.2) diklik bağıntılarını da gözönünde tutmak sûretiyle

$$a_\mu = (\varphi_\mu(x),\ f(x)) = \int_B \varphi^*_\mu(x)\, f(x)\, dx \qquad (I.7.4)$$

bulunur.

Hilbert uzayındaki taban vektörlerinin sayılamayan bir takım teşkil etmeleri hâlinde bunların arasındaki diklik bağıntılarının ne şekil alacaklarını tesbit etmek üzere somut bir örnekten hareket edeceğiz.

$[-d, d]$ aralığında $f(x)$ gibi bir fonksiyonun

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \exp\left[\frac{i\nu\pi}{d} x\right] \tag{I.7.5}$$

gibi bir Fourier serisine açılabildiği bilinmektedir. Yukarıda izah olunan usûle binâen a_ν lerin

$$a_\nu = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} \exp\left[-\frac{i\nu\pi}{d} x\right] f(x)\, dx \tag{I.7.6}$$

bağıntısıyla verileceğini görmek kolaydır.

Şimdi $d \to \infty$ yapmak sûretiyle $[-d, d]$ aralığını gitgide büyütelim. Bu takdirde, x de vukuu bulan bir değişimi sâbit tutabilmek için ν nün de d ile birlikte artması lâzımdır. Bu itibarla $d \to \infty$ için (I.7.5) serisi gitgide artan sayıda terim kapsar, ve limitte de bir integrâle gider:

$$f(x) = \lim_{d\to\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \exp\left[\frac{i\nu\pi}{d} x\right] \to \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu \exp\left[\frac{i\nu\pi}{d} x\right] d\nu.$$

Eğer

$$\frac{\nu\pi}{d} = k$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a_\nu d = F(k)$$

konulacak olursa $d \to \infty$ için limitte (I.7.5) açılımı ile (I.7.6) açılımının katsayıları

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dk \tag{I.7.7}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \tag{I.7.8}$$

olur. Bu iki formül ileride ayrıntılarıyla inceleyecek olduğumuz *düz ve ters Fourier dönüşüm formüllerinden* başka bir şey değildir.

Bölümün başındaki tanımlara göre (I.7.5) açılımındaki

$$\exp\left[\frac{i\nu\pi}{d}x\right]$$

fonksiyonlarının, sıralama indisi münferit ve tam değerler alan sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında *sayılabilir bir taban takımı* teşkil eden vektörler olarak düşünülebileceği âşikârdır. Bunlar arasındaki diklik bağıntılarının

$$\int_{-d}^{d} \exp\left[-\frac{i\mu\pi}{d}x\right] \exp\left[\frac{i\nu\pi}{d}x\right] dx = \frac{2d}{\pi}\,\delta_{\mu\nu}$$

şeklinde olduğu kolaylıkla gerçeklenir. $d \to \infty$ için bu ifâdenin sol tarafı, yukarıda yapılan vaz dolayısıyla,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx$$

olur. Sağ tarafı ise $\mu=\nu$ için sonsuz ve $\mu\neq\nu$ için sıfır olur. Öte yandan (I.7.7) ve (I.7.8) aracılığıyla

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k')\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx\right] dk'$$

bulunur. Şimdi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx = \delta(k-k') \qquad \text{(I.7.9)}$$

vazedelim. Buna göre

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k')\,\delta(k-k')\,dk' \qquad \text{(I.7.10)}$$

olur. Bu bağıntı k ve k' ye göre simetriktir. Buna binâen

$$\delta(k-k')=\delta(k'-k)$$

dır. Buna binâen $k'=0$ için

$$\delta(k)=\delta(-k)$$

olduğu yâni bu fonksiyonun çift bir fonksiyon olduğu görülür. Şu hâlde (I.7.10) da k ile k' yü değiş-tokuş edip $k'=0$ vazederek

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,\delta(k)\,dk=F(0) \tag{I.7.11}$$

ve buradan da $F(k)\equiv F(0)\equiv 1$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)\,dk=1 \tag{I.7.12}$$

bulunur. Dolayısıyla $\delta(x)$ fonksiyonu $x\neq 0$ için sıfıra eşit ve $x=0$ için de, $[-\infty, +\infty]$ aralığındaki integrali 1 e eşit olacak şekilde, sonsuz olan (I.7.10) ve (I.7.11) özelliklerini haiz bir nesnedir. Buna *Dirac fonksiyonu* ya da *Dirac distribüsyonu* adı verilir ve bu $\delta_{kk'}$ Kroenecker sembolünün k ve k' indislerinin sürekli değerler aldıkları hâle genelleştirilmesini teşkil eder. Bu itibarla eğer bir Hilbert uzayı *ayrılamayan* bir uzay ise, yâni bu uzaydaki taban vektörleri takımı, sayılamayan bir takım meydana getiriyorlarsa bunlar arasındaki diklik bağıntıları

$$(\varphi(\mu,x),\ \varphi(\nu,x))=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\mu,x)\,\varphi(\nu,x)\,dx=\delta(\mu-\nu) \tag{I.7.13}$$

şeklindedir.

Hilbert uzayının sayılabilen ve sayılamayan taban vektörleri konusuna lineer dıferansiyel ve integrâl operatörlerin özfonksiyonlarını incelediğimiz zaman gene döneceğiz. Bu münasebetle Hilbert uzayındakı dönüşümlerin yâni uzayın kendi kendine tasvirinin hermitsel operatörler aracılığıyla yapıldığını da kaydedelim.

(I.8) DİRAC FONKSİYONU HAKKINDA TAMAMLAYICI BİLGİLER

Dirac fonksiyonu daha genel olarak $x \neq 0$ için sıfır ve $0 \in [a,b]$ olmak üzere $[a,b]$ aralığındaki integrâli 1 e eşit olacak şekilde tanımlanır. Bu itibarla $\delta(x)$ in bütün diğer özellikleri de bu şartlar altında gene geçerli olurlar; ve meselâ $f(x)$ gibi bir fonksiyon verildiğinde

$$\int_a^b f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0), \quad 0 \in [a,b] \tag{I.8,1}$$

dır. Ayrıca bu özellik $[0, b]$ şeklindeki aralıklara da şöyle genelleştirilir:

$$\int_0^b f(x)\, \delta(x)\, dx = -\int_b^0 f(x)\, \delta(x)\, dx = \frac{1}{2} f(0) \tag{I.8.2}$$

Tabiîdir ki bu $x_0 \in [a,b]$ için

$$\int_a^b f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0), \quad x_0 \in [a,b] \tag{I.8.3}$$

ve $[x_0, b]$ şeklindeki aralıklar için de (I.8.2) ye benzer şekilde

$$\int_{x_0}^b f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = \frac{1}{2} f(x_0) \tag{I.8.4}$$

olur. Bütün bu formalizm çok değişkenli fonksiyonlara da kolaylıkla genelleştirilebilir.

Dirac fonksiyonunun önemi bilhassa fizikte noktasal kaynak terimlerinin zarif bir şekilde ifâde olunabilmesini sağlamasındadır. Eğer göz önüne alınan kaynak meselâ (x, y, z) üçyüzlüsünün orijinine yerleştirilmiş olan S şiddetinde noktasal bir kaynaksa bunun bütün uzaydaki $s(x, y, z)$ dağılımını

$$s(x,y,z) = S\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z) \tag{I.8.5}$$

şeklinde göstermek kaabildir. Eğer bu kaynak meselâ noktasal bir nötron kaynağıysa şu hâlde orijinden uzaya cm^3 ve saniye başına S adet nötron dağılıyor demektir. $s(x, y, z)$ ile S arasındaki bağıntının $s(x, y, z)$ nin bütün uzay üzerinden integrâlinin S ye eşit olması şeklinde tezâhür edeceği âşikârdır; gerçekten de (I.8.3) den her iki yanın integrâli alınırsa *Dirac* fonksiyonunun özelliği dolayısıyla

$$\iiint\limits_{\text{Bütün uzay}} s\,(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\text{Bütün uzay}} S\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,dx\,dy\,dz = S \qquad (I.8.6)$$

olduğu görülür.

Eğer bu nötronların dağılımı uzayda herhangi belirli bir yöne bağlı değilse, bu takdirde dağılımın *eşyönlü* (= *izotrop*) olduğu söylenir. Böylece dağılım fonksiyonu $s = s(r)$ şeklinde olup sâdece radyâl uzaklığa bağlı olur ve bunu

$$s(r) = S\,f(r)\,\delta(r) \qquad (I.8.7)$$

şeklinde temsil etmek mümkündür. Buradaki $f(r)$ çarpanı $s(r)$ nin bütün uzay üzerindeki integrâlinin S ye eşit olması şartıyla tâyin edilebilecektir. Küresel eşyönlü (= izotrop) koordinatlarda hacım elemanı $dV = 4\pi r^2 dr$ dir. Buna göre (I.8.2) ve (I.8.7) den

$$S = \int_0^\infty s(r)\,4\pi r^2\,dr = 4\pi S \int_0^\infty r^2\,f(r)\,\delta(r)\,dr = 2\pi S[r^2 f(r)]_{r=0}$$

veyâ

$$f(r) = \frac{1}{2\pi r^2}$$

bulunur; bu ise (I.8.7) ye göre küresel izotrop koordinatlarda

$$s(r) = S\frac{\delta(r)}{2\pi r^2} \qquad (I.8.8)$$

olacağını göstermektedir.

Eğer ortamda silindirik bir bakışım (*simetri*) varsa ve kaynak da eğer Oz ekseni boyunca $-\infty$ ilâ $+\infty$ arasında yerleştirilmişse bunun, cm ve saniye başına S nötron yayınladığı farzedilecektir. $s(r)$ kaynak terimi gene

$$s(r)=S\,f(r)\,\delta(r)$$

şeklinde olup $f(r)$ gene

$$\int s(r)\,dV=S$$

olacak şekilde tâyin edilecektir. Bu hâl için hacım elemanının $dV=2\pi r dr$ olduğu göz önüne alınacak olursa

$$S=\int_0^\infty s(r)\,2\pi r\,dr=2\pi S\int_0^\infty r\,f(r)\,\delta(r)\,dr=\pi S\,[rf(r)]_{r=0}$$

ve dolayısıyla da

$$f(r)=\frac{1}{\pi r}$$

olduğu görülür; şu hâlde

$$s(r)=S\frac{\delta(r)}{\pi r} \tag{I.8.9}$$

dir.

Son olarak eğer sonlu ve birbiçim (homogen) bir dik silindir göz önüne alınırsa bunun bakışım (*simetri*) merkezine yerleştirilen bir kaynak için de bütün ortama şâmil $s(r,z)$ dağılım fonksiyonu ile S kaynak şiddeti arasında

$$s(r,z)=S\,\frac{\delta(r)}{\pi r}\,\delta(z) \tag{I.8.10}$$

bağıntısının mevcûd olduğu yukarıda iki misâldekine benzer basit bir hesapla derhal görülür.

Bu hesaplar bize *Dirac* fonksiyonunun dik kartezyen koordinat sisteminde $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ şeklinde olmasına karşılık, eşyönlü küresel koordinat sisteminde $\delta(r)/2\pi r^2$, sonsuz silindir bakışımını haiz koordinat sisteminde $\delta(r)/\pi r$ ve sonlu silindir bakışımını haiz koordinat sisteminde ise $\delta(r)\delta(z)/\pi r$ şeklini haiz olacağını göstermektedirler.

(I.9) DIRAC NOTASYONU.

Bu bölümde *Hilbert* uzaylarının formel incelenmesi için *Dirac* tarafından ithâl olunan bir notasyona kısaca temas edeceğiz. Bu notasyona göre vektörler $|\varphi>$ şeklinde gösterilmektedir. Bu vektörün kompleks eşleniği ise $|\varphi>^*$ ile gösterilecek yerde $|\varphi>^+ = <\varphi|$ notasyonuyla gösterilmektedir. Birinci şekil vektörlere «*ket*» veyâ «*ket vektörü*», ikinci şekil vektörlere de «*bra*» veyâ «*bra vektörü*» denilmektedir. Bunlar matris cebrinin, sırasıyla, sütûn ve satır vektörlerine tekaabül etmektedirler.

Eğer

$$|\psi> = \lambda_1|\psi_1> + \lambda_2|\psi_2>$$

gibi bir ket vektörü verilirse bunun eşleniği olan bra vektörü de

$$|\psi>^+ = <\psi| = \lambda_1^* <\psi_1| + \lambda_2^* <\psi_2|$$

olur. Kezâ

$$|\psi> = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)|\varphi>\, dx$$

ketinin eşlediği de

$$|\psi>^+ = <\psi| = \int_{x_1}^{x_2} \lambda^*(x) <\varphi|\, dx$$

olacaktır.

İki vektörün Hilbert uzayındaki skaler çarpımı *Dirac* notasyonuna göre

$$(\varphi,\psi) = \int_B \varphi^*\psi\, dx = <\varphi|\psi> \qquad \text{(I.9.1)}$$

şeklinde tanımlanır. *B* ile vektörlerin tanım bölgesi gösterilmektedir. Bu skaler çarpımın

$$<\varphi\,|\,\psi> = <\psi\,|\,\varphi>^+$$

bağıntısını gerçeklediği âşikârdır.

A ile bir $|\psi>$ keti üzerine uygulanan bir operatörü gösterelim. Bunun sonucu $|\psi>$ keti bir $|\chi>$ ketine dönüşür:

$$\mathbf{A}|\psi> = |\chi>$$

Bu dönüşmüş $|\chi>$ ile $<\varphi|$ brasının skaler çarpımı ise

$$(\varphi,\chi) = <\varphi|\chi> = <\varphi|\mathbf{A}|\psi>$$

olacaktır. Bu ifâdenin eşleniği

$$(\varphi,\chi)^{+} = (\chi,\varphi) = <\chi|\varphi> = <\chi|\mathbf{A}^{+}|\varphi>$$

dir.

Eğer **A** nın $|\psi>$ keti üzerine uygulanmasıyla $|\psi>$ nin bir λ katı elde ediliyorsa

$$\mathbf{A}|\psi> = \lambda|\psi> \tag{I.9.2}$$

bağıntısının **A** operatörü için özdeğer probleminin ifâdesini teşkil ettiği söylenir. (I.9.2) yi gerçekleyen ve $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \cdots$ özdeğerlerine tekaabül eden özketler

$$|\psi_1>, \quad |\psi_2>, \ \ldots\ldots, |\psi_m>, \ \ldots\ldots$$

ve özdeğer probleminin eşlenik problemi olan

$$<\psi|\mathbf{A}^{+} = \lambda^{*}<\psi|$$

ifâdesini $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdot, \lambda_m, \cdots\cdot$ özdeğerleri için gerçekleyen özbralar da

$$<\psi_1|, \quad <\psi_2|, \ \ldots\ldots, \ <\psi_m|, \ \ldots\ldots$$

olsunlar. Buna binâen (I.9.2) den

$$\mathbf{A}|\psi_m> = \lambda_m|\psi_m> \tag{I.9.1'}$$

$$\mathbf{A}|\psi_n> = \lambda_n|\psi_n> \tag{I.9.2'}$$

ve birinci denklemi $<\psi_n|$ ile, ikincisini ise $<\psi_m|$ ile skaler olarak çarparak

$$<\psi_n|\mathbf{A}|\psi_m> = \lambda_m<\psi_n|\psi_m> \tag{I.9.3}$$

$$<\psi_m|\mathbf{A}|\psi_n> = \lambda_n<\psi_m|\psi_n> \tag{I.9.4}$$

bulunur. Bu sonucu bağıntının kompleks eşleniğini alacak olursak

$$<\psi_n \mid A^+ \mid \psi_m> = \lambda^*_n <\psi_n \mid \psi_m> \qquad (I.9.5)$$

olur. (I.9.3) ve (I.9.5) in taraf tarafa çıkarılması

$$<\psi_n \mid A \mid \psi_m> - <\psi_n \mid A^+ \mid \psi_m> = (\lambda_m - \lambda^*_n) <\psi_n|\psi_m>$$

verir. Şu hâlde, $\lambda_m \neq \lambda_n^*$ olmak üzere, **A** operatörünün özfonksiyonlarının biribirlerine dik olabilmeleri için yâni

$$<\psi_n \mid \psi_m> = \delta_{nm} \qquad (I.9.6)$$

olabilmesi için

$$<\psi_n \mid A \mid \psi_m> = <\psi_n \mid A^+ \mid \psi_m> = <\psi_m \mid A \mid \psi_n>^+ \qquad (I.9.7)$$

yâni

$$\int \psi_n{}^+ A \psi_m \, dx = \int (A\psi_n)^+ \psi_m \, dx \qquad (I.9.8)$$

olması gereklidir. Bu özelliği haiz operatörlere *«hermitsel operatörler»* denir.

A operatörünün süreksiz bir spektrumu haiz olması hâlinde, **A** nın özvektörleri aracığılıyla tanımlanan

$$A_{mn} = <\psi_m|A|\psi_n> = \int \psi_m{}^+ A \psi_n \, dx \qquad (I.9.9)$$

büyüklükleri $m, n = 1, 2, \cdots$ için bir matrisin elemanlarını teşkil ederler. Bu şekilde tanımlanan matrise **A** *operatörünün matrisel gösterilişi* adı verilir.

Eğer hermitsel bir **A** operatörünün spektrumu sürekli bir spektrum ise mütekaabil özvektörler arasındaki diklik bağıntıları

$$<\psi(\rho,\nu)|\psi(\rho',\nu')> = \delta(\nu-\nu')\,\delta(\rho-\rho') \qquad (I.9.10)$$

şeklinde olur. Bazan **A** operatörü kısmen süreksiz ve kısmen de sürekli bir spektrumu haiz olur. Bu takdirde de

$$<\psi_m(\rho,\nu)|\psi_{m'}(\rho',\nu')> = \delta(\rho-\rho')\,\delta(\nu-\nu')\,\delta_{mm'} \qquad (I.9.11)$$

olur.

Dirac notasyonu hakkında kısa bir bilgi vermiş olduğumuz bu bölümü kapatmadan önce pratikte bu notasyonun çok daha kısa bir şekilde ifâde olunabileceğine de işâret etmek faydalı olur. Meselâ (I. 9.2′) özdeğer problemini ifâde ederken özvektörler için $|\psi_m>$ yazmak yerine, bunun m - ninci özdeğere tekaabül eden özvektör olduğunu göstermek üzere, sâdece $|m>$ yazmak yetecektir. Buna göre kısaca özdeğer problemi olarak

$$\mathbf{A}|m> = m|m> \qquad (I.9.4')$$

yazılabilecektir. **A** operatörünün hermitsel olması da kısaca

$$<n|\mathbf{A}|m> = <m|\mathbf{A}|n>^{+} \qquad (I.9.7')$$

ile ifâde edilebilecektir. Kısmen süreksiz ve kısmen de sürekli bir spektrumu haiz hermitsel bir operatörün özvektörleri arasındaki (I.9.11) diklik bağıntıları da kısaca

$$<m\rho\nu \mid m'\rho'\nu'> = \delta(\rho-\rho')\,\delta(\nu-\nu')\,\delta_{mm'} \qquad (I.9.11')$$

olacaktır. Bir misâl olmak üzere bu kısaltılmış notasyonu kullanarak hermitsel bir operatörün özdeğerlerinin reel olduklarını gösterelim. Gerçekten de (I.9.4′) yü soldan $<m|$ özbrası ile çarpalım:

$$<m|\mathbf{A}|m> = m<m|m>$$

olur. Bu ifâdenin komplesk eşleniği

$$<m|\mathbf{A}|m>^{+} = m^{*}<m|m>^{+} = m^{*}<m|m>$$

dir. Fakat **A** hermitsel olduğundan (I.9.7′) bağıntısı geçerlidir, bu ise

$$m = m^{*}$$

olduğuna, yâni özdeğerlerin reel olduklarına delâlet eder.

Eğer göz önüne alınan *Hilbert* uzayındaki sonlu normu haiz her vektör hermitsel bir **A** operatörünün özvektörlerinin bir serisi (veyâ bir integrâli) olarak ifâde edilebiliyorsa, bu özvektörlerin bir *tam sistem* meydana getirdikleri ve hermitsel **A** operatorünün de *gözlenebilen bir nesne* olduğu söylenir. Buna göre $|\psi>$ ile *Hilbert* uzayındaki keyfî bir *ket vektörü*, ve $|\nu'>$ ler de hermitsel bir **A** operatörünün *özket*leri olsunlar. Eğer bunlar bir tam sistem meydana getiriyorlarsa, **A** nın sırf süreksiz bir spektrumu haiz olması hâlinde

$$|\psi> = \sum_{\nu'} a(\nu')|\nu'>$$

olacaktır. Bunun her iki tarafını $<\nu''|$ ile skaler olarak çarpıp da **A** nın özvektörleri arasında

$$<\nu''|\nu'> = \delta_{\nu''\nu'}$$

şeklinde diklik bağıntıları bulunduğunu da göz önüne alırsak

$$a(\nu') = <\nu'|\psi>\,,$$

ve dolayısıyla da

$$|\psi> = \sum_{\nu'} |\nu'><\nu'|\psi> \tag{I.9.12}$$

bulunur. Bu toplamdaki her bir terim $|\psi>$ nin, **A** operatörünün esas eksenlerini temsil eden özvektörlerinden biri üzerine izdüşümünü göstermektedir. Buna göre

$$\mathbf{P}_{\nu'} = |\nu'><\nu'| \tag{I.9.13}$$

oparatörü, «**A** nın $|\nu'>$ *özketi* üzerine izdüşürme» işlemine tekaabül etmektedir. (I.9.12) ve (I.9.13) e dayanarak

$$\sum_{\nu'} \mathbf{P}_{\nu'} = \sum_{\nu'} |\nu'><\nu'| = 1 \tag{I.9.14}$$

olduğu görülmektedir. Bu bağıntıya *«tamlık* ya da *kapanış bağıntısı»* adı verilir.

Eğer **A** sırf sürekli bir spektruma mâlik ise $|\nu>$ ile **A** nın özvektörlerini göstermek sûretiyle $|\psi>$ gibi bir ketin **A** nın özketleri cinsinden açılımı, (I.9.12) de toplam yerine integrâl koymak suretiyle,

$$|\psi> = \int |\nu'> d\nu <\nu'|\psi> \tag{I.9.15}$$

bağıntısıyla verilecektir.

Eğer bir **A** operatörü kısmen süreksiz ve kısmen de sürekli bir spektruma mâlik ise $|\psi>$ gibi bir vektörün **A** nın özketleri cinsinden açılımı

$$|\psi> = \sum_{\nu'} |\nu'> < \nu'|\psi> + \int |\nu''> d\nu'' < \nu''|\psi> \qquad (I.9.16)$$

şeklinde olacaktır.

(I.10) MATRİSLERİN BAZI FİZİKSEL UYGULAMALARI

Matrislerin fizikte kullanılmaları hakkında, şimdiye kadar gördüklerimizden başka, üç örnek vermekle yetineceğiz. Bu konuda daha geniş bilgi vermek bu kitabın amacı dışında kalmaktadır.

a) *KÜÇÜK TİTREŞİMLER*

Korunumlu (= konservatif) bir mekanik sistemde potansiyel enerji yalnız yer koordinatlarının fonksiyonu olup sisteme uygulanan kuvvetler sıfır ise sistemin denge durumunda olduğu söylenir:

$$Q_i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (I.10a.1)$$

Sistemin denge durumundaki genelleştirilmiş koordinatları q_{01}, $q_{02} \cdots$, q_{0n} olsun. Eğer η_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ ile sistemin denge durumundan sapmasını gösteren küçük koordinat farklarını göz önüne alırsak, sistemin *kararlı bir denge* durumu civarındaki küçük hareketleri,

$$q_i = q_{0i} + \eta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

büyüklüklerini yeni genelleştirilmiş koordinatlar olarak seçmek sûretiyle incelenebilir. Bu durumda $V(q_1, q_2, \cdots q_n)$ potansiyel enerjisini denge durumu civarında bir Taylor serisine açıp da bir taraftan (I.10a.1) bağıntısı ile η_i lerin çok küçük büyüklükler olduklarını göz önünde tutarak ve diğer taraftan da denge durumuna tekaabül eden potansiyel enerjiyi sıfır seçerek

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = V(q_{01}, \ldots, q_{0n}) + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \ldots \cong \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j =$$

$$=\frac{1}{2}\,V_{ij}\,\eta_i\,\eta_j \tag{I.10a.2}$$

olur. Bu türlü tanımlanan V_{ij} matrisinin n-ninci merteben bakışımlı bir matris olduğu ve elemanlarının ise yalnız sistemin denge durumu koordinatlarının fonksiyonu olduğu görülmektedir.

Genel koordinatlar açık bir şekilde zamanı ihtivâ etmediklerinden sistemin kinetik enerjisi hızların kuvadratik bir fonksiyonu olacaktır:

$$K=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j m_{ij}\,\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j=\frac{1}{2}\,m_{ij}\,\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \tag{I.10a.3}$$

Buradaki m_{ij} katsayıları genellikle q_i koordinatlarına bağlıdır. Ancak

$$m_{ij}(q_1,\ldots\ldots,q_n)=m_{ij}(q_{01},\ldots\ldots,q_{0n})+\sum_k\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0\eta_k+\ldots\ldots,$$

şeklinde, denge durumu civarında bir Taylor açılımı yapıldığında (I.10a.3) ün $\dot{\eta}_i$ lar cinsinden kuvadratik olması dolayısıyla K nın ilk yaklaşıklığının $m_{ij}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ nin açılımındaki ilk terimi almakla yapılacağı

$$K_{ij}=m_{ij}(q_{01},\ldots\ldots,q_{0n})$$

vazederek

$$K=\frac{1}{2}\,K_{ij}\,\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \tag{I.10a.4}$$

olur. Bu takdirde sistemin, *Lagrange* fonksiyonunun ifâdesi:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}\,(K_{ij}\,\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j-V_{ij}\,\eta_i\eta_j)$$

ve hareket denklemleri de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_i}=0, \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n) \tag{I.10a.5}$$

şeklindeki *Lagrange* hareket denklemlerine göre

$$K_{ij}\,\ddot{\eta}_j+V_{ij}\,\eta_j=0 \tag{I.10a.6}$$
$$(i=1,2,\ldots\ldots,n)$$

bulunur. Bu diferansiyel denklem sistemini çözmekle elde edilecek olan

η_i koordinat farkları sistemin denge durumu cıvarındaki hareketini belirlerler.

Eğer sistem denge durumu cıvarında küçük titreşimler yapıyorsa

$$\eta_i = C a_i \, e^{-i\omega t} \qquad (\text{I.10a.7})$$

vazedilebilir. Buradaki C katsayısı kompleks bir çarpandır. Bu takdirde (I.10a.6) sistemi

$$(V_{ij} - \omega^2 K_{ij}) \, a_j = 0 \qquad (\text{I.10a.8})$$

olur ki bu da genelleştirilmiş bir özdeğer probleminden başka bir şey değildir (Bk. Problem: 27). Bu homogen denklemin sıfırdan farklı çözümleri haiz olabilmesi için

$$|V_{ij} - \omega^2 K_{ij}| = 0 \qquad (\text{I.10a.9})$$

olmalıdır. Bu ise n adet ω_j^2 özdeğer verir. Her bir ω_j^2 için (I.10a.8) denklemi a_j genliklerine göre çözülebilir; daha doğrusu, bu şartlar altında $(n-1)$ adet genlik meselâ a_j nin fonksiyonu olarak elde edilebilirler. Belirli bir ω_k^2 özdeğerine tekaabül eden genlikleri a_{ik} ile gösterirsek denklemlerin lineer olması dolayısıyla genel çözüm

$$\eta_i = \sum_k C_k \, a_{ik} \, e^{-i\omega_k t}$$

olur. Fakat (I.10a.9) karakteristik denklemi hem $-\omega_k$ ve hem de $+\omega_k$ için geçerli olduğundan a_k özvektörü bu her iki frekans için de aynı olacak fakat şüphesiz C_k katsayısı değişecektir. Buna göre

$$\eta_i = \sum_k a_{ik} \left(C_k^{+} e^{i\omega_k t} + C_k^{-} e^{-i\omega_k t} \right) \qquad (\text{I.10a.10})$$

yazılabilir. Gerçekte hareketin, bu ifâdenin ancak reel kısmı olduğu âşikârdır. Buna göre de

$$\eta_i = \sum_k f_k \, a_{ik} \cos(\omega_k t + \delta_k) \qquad (\text{I.10a.11})$$

olur.

b) *DÖRTUÇLULAR*.

Dörtuçlu diye iki girişi ve iki de çıkışı haiz elektrik devresine denir.

Dörtuçluların basit bir teorisinde bunların yalnız dirençler, bobinler, kondansatörler, aynı frekansı haiz elektromotorlar ve lineer rejimde çalıştıkları kabul edilen amplifikatör lâmbaları ihtivâ ettikleri kabul edilir.

Şek. I. 2

i_1, e_1 ve i_2, e_2 ile sırasıyla giriş ve çıkıştaki akımları ve gerilimleri gösterelim. Sürekli sinüsel rejimde bulunulduğu takdirde I_1, E_1 ve I_2, E_2 ile giriş ve çıkıştaki kompleks akımlar ve gerilimleri göstererek

$$i_1 = I_1 e^{i\omega t} \qquad i_2 = I_2 e^{i\omega t}$$

$$e_1 = E_1 e^{i\omega t} \qquad e_2 = E_2 e^{i\omega t}$$

olur. Bu dört büyüklük biribirlerinden bağımsız olmayıp

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= a_{11} E_1 + a_{12} E_2 \\ I_2 &= a_{21} E_1 + a_{22} E_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.10b.1)}$$

ya da

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

diye iki bileşenli iki kompleks vektör tanımlayarak

$$\vec{I} = \mathbb{A} \vec{E}$$

yazılabilir. $\mathfrak{A}$ matrisine dörtuçlunun *admitans* matrisi denir. Eğer

$$\mathfrak{Z}=\mathfrak{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathfrak{A}|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

mevcûd ise

$$\vec{E}=\mathfrak{Z}\,\vec{I}$$

olur ve $\mathfrak{Z}$ ye de dörtuçlunun *empedans* matrisi adı verilir.

(I.10b.1) sistemini gerçekleyen büyüklüklerden

$$\vec{U}_1=\begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{U}_2=\begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde iki kompleks vektör tanımlamak mümkündür. Bu vektörler arasında da

$$\vec{U}_2=\mathfrak{G}\,\vec{U}_1$$

şeklinde bir bağıntı olacağı âşikârdır. Buradaki $\mathfrak{G}$ matrisine dörtuçlunun *karakteristik* matrisi adı verilir.

$a_{12}\neq 0$ olmak şartıyla (I.10b.1) den

$$E_2=-\frac{a_{11}}{a_{12}}E_1+\frac{1}{a_{12}}I_1$$

$$I_2=-\frac{|\mathfrak{A}|}{a_{12}}E_1+\frac{a_{22}}{a_{12}}I_1$$

yazılabilmesiyle $\mathfrak{G}$ nin elemanları da kendiliğinden belirlenmiş olur.

Peşpeşe sıralanmış, yâni, baştakinin girişi ile sondakinin çıkışı hariç, birinin çıkışı diğerinin girişini teşkil eden bir dörtuçlular zinciri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
&\vec{U}_2^{(1)}=\mathfrak{G}^{(1)}\vec{U}_1^{(1)} && \\
&\vec{U}_2^{(2)}=\mathfrak{G}^{(2)}\vec{U}_1^{(2)}, && \vec{U}_1^{(2)}=\vec{U}_2^{(1)} \\
&\cdot && \\
&\cdot && \\
&\cdot && \\
&\vec{U}_2^{(i)}=\mathfrak{G}^{(i)}\vec{U}_1^{(i)}, && \vec{U}_1^{(i)}=\vec{U}_2^{(i-1)} \\
&\cdot && \\
&\cdot && \\
&\cdot && \\
&\vec{U}_2^{(n)}=\mathfrak{G}^{(n)}\vec{U}_1^{(n)}, && \vec{U}_1^{(n)}=\vec{U}_2^{(n-1)}
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\vec{U}_2^{(n)} = \mathfrak{G}^{(n)}\,\mathfrak{G}^{(n-1)}\ldots\ldots\mathfrak{G}^{(i)}\ldots\ldots\mathfrak{G}^{(1)}\,\vec{U}_1^{(1)} = \mathrm{G}\,\vec{U}_1^{(1)}$$

yazılabileceklerdir. Eğer bütün dörtuçlular biribirlerinin aynı ise

$$\mathrm{G} = (\mathfrak{G})^n$$

olacaktır.

Matris hesabının dörtuçlulara uygulanması, bunların teorisinin hem zarif bir tarzda ifâdesini, hem de kolaylıkla incelenebilmelerini sağlamaktadır. (Bk. Problem: 54, 55, 56).

c) *MATRİS MEKANİĞİ.*

Tek bir $q(t)$ koordinatına bağlı olarak peryodik bir hareket yapan bir elektronun bu hareketi, klâsik elektromagnetik teoride $q(t)$ fonksiyonunu

$$q(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p\, e^{2\pi i \nu_p t} \qquad \text{(I.10c.1)}$$

şeklinde bir *Fourier* serisine açmakla incelenir. Bu ifâde, elektronun yayınladığı elektromagnetik ışınların ν_p frekanslarını ortaya koymaktadır. Her bir ışının fazını da göz önünde tutabilmek için a_p katsayıları kompleks sayılar olarak alınabilir. Fakat q(t) reel olduğundan a_p ile a_{-p} biribirlerinin kompleks eşleniği olmalıdırlar:

$$a_p = a^*_{-p}$$

Bu takdirde her bir harmoniğin şiddeti genliğinin normu ile yâni

$$a_p a_p^* = a_p a_{-p}$$

ile verilecektir.

Kuvantum teorisinde elektronun elektromagnetik radyasyonlarının mekanizması çok farklıdır. Bu teoriye göre bir elektron ancak bir E_m enerjisinden bir E_n enerjisine geçtiği takdirde frekansı

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h} \qquad \text{(I.10c.2)}$$

olan bir radyasyon yayınlar. h ile değeri $6{,}625 \cdot 10^{-34}$ joule. sec olan

Planck sâbiti gösterilmektedir. Burada eğer $E_m > E_n$ ise radyasyonun yayınlanmış, $E_n < E_m$ ise soğurulmuş olduğu anlaşılacaktır.

Bu şemaya göre sürekli $q(t)$ fonksiyonu yerine

$$q_{mn} = a_{mn}\, e^{2\pi i \nu_{mn} t}$$

şeklinde ifâdeler göz önüne almak gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bu durum

$$Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \cdots\cdots \\ q_{21} & q_{22} \cdots\cdots \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{Vmatrix}$$

şeklinde sonsuz bir matrisle temsil edilecektir. Klâsik elektromagnetik teoride (I.10c.1) açılımı ne ise kuvantum teorisinde de bu matris odur.

(I.10c.2) ye göre

$$\nu_{mn} = -\nu_{nm}$$
$$\nu_{nn} = \nu_{mm} = 0$$

olduğu, yâni m hâlinden n hâline geçişte yayınlanan radyasyonun frekansı n hâlinden m hâline geçişte soğurulanınkinin aynı olup, aynı bir enerjiyi muhafaza ederek (kararlı bir) yörünge üzerinde hareket eden elektronun ise herhangi bir radyasyon yayınlamadığı anlaşılmaktadır.

a_{mn} büyüklüğü gene kompleks bir sayı olarak telâkkî edilebilir ve bunun normu olan $a_{mn} a_{mn}^*$ de gene m hâlinden n hâline geçerken yayınlanan radyasyonun şiddetini ölçer. $|a_{mn}|$ mutlak değerinin karesi ise m den n ye geçiş ihtimâlini göstermektedir. m den n ye geçiş ile n den m ye geçiş aynı şekilde muhtemel olduklarından

$$|a_{mn}| = |a_{nm}|$$

olmalıdır. Bu ise

$$a_{mn} = a^*_{nm}$$

olması gerektiğini göstermektedir. Bu takdirde

$$q_{mn} = q^*_{nm}$$

olacağı, yâni elektronun gerek bir hâlden diğer bir hâle geçiş ihtimalleri ve gerekse bunlara tekaabül eden yer koordinatlarının kuvantum teorisinde hermitsel matrisler yardımıyla gösterilebileceği anlaşılmış bulunmaktadır.

Elektronun μ kütlesiyle **Q** matrisinin zamana göre türevinin çarpımından ibâret olan

$$P=\mu\dot{Q}$$

matrisini göz önüne alalım. Yukarıda açıklananlara göre **P** de hermitsel bir matris tarafından temsil edilecektir. **P** ve **Q** matrisleri çarpıma göre yerdeğiştirici değildirler. Kuvanta teorisinde matris mekaniğinin kurucularından olan *Heisenberg* **P** ve **Q** nun [**P**, **Q**] yerdeğiştiricisinin (*komütatör*'ünün)

$$[P,Q]=PQ-QP=\frac{h}{2\pi}I$$

olduğunu göstermiştir.

PROBLEMLER

Problem: 1. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ iki matris olmak üzere, bunların aşağıda gösterildiği sayıda satır ve sütunları haiz olmaları hâlinde $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ çarpım matrisinin genel elemanlarını yazınız.

	$\mathfrak{A}$		$\mathfrak{B}$		$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$		C_{pq}
	Satır	Sütûn	Satır	Sütûn	Satır	Sütûn	
I)	n	n	n	n			
II)	n	n	n	1			
III)	n	1	1	n			
IV)	1	n	n	n			
V)	1	n	n	1			

Not: Üçüncü hâle tekaabül eden çarpıma $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ nin *dış çarpımı* diğer hâllere tekaabül eden çarpımlara da *iç çarpım* adı verilir.

Problem: 2. Matris çarpımının ortaklaştırıcılık ve dağıtıcılık kurallarına uyduğunu matris elemanlarını açıkça yazarak gerçekleyiniz.

Problem: 3. Bir matrisin herhangi iki kuvvetinin birlbirleriyle çarpımının yerdeğiştirici olduğunu gösteriniz.

Problem: 4. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ çarpımının izinin $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ çarpımının izine eşit olduğunu gösteriniz.

Problem: 5.

$$\mathfrak{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$$

$$\mathfrak{B}=\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{Vmatrix}$$

matrisleri verilmektedir. $\mathfrak{A}^{-1}$, $\mathfrak{B}^{-1}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ve $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1}$ matrislerini açıkça hesaplayınız.

Problem: 6. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1}=\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}$ ve dolayısıyla

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\ldots\mathfrak{A}_n)^{-1}=\mathfrak{A}_n^{-1}\,\mathfrak{A}_{n-1}^{-1}\ldots\ldots\mathfrak{A}_2^{-1}\,\mathfrak{A}_1^{-1}$$

olması gerektiğini gösteriniz.

Problem: 7. Köşegen bir matrisin tersinin sıfırdan farklı elemanlarının, verilen matrisin sıfırdan farklı elemanlarının tersi olduğunu gösteriniz.

Problem: 8. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})=\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ ve dolayısıyle

$$\overline{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\ldots\mathfrak{A}_n)}=\bar{\mathfrak{A}}_n\bar{\mathfrak{A}}_{n-1}\ldots\ldots\bar{\mathfrak{A}}_2\bar{\mathfrak{A}}_1$$

olması gerektiğini gösteriniz.

Problem: 9. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{+}=\mathfrak{B}^{+}\mathfrak{A}^{+}$ ve dolayısıyla

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\ldots\mathfrak{A}_n)^{+}=\mathfrak{A}_n^{+}\,\mathfrak{A}^{+}_{n-1}\ldots\ldots\mathfrak{A}_2^{+}\,\mathfrak{A}_1^{+}$$

olması gerektiğini gösteriniz.

Problem: 10. $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$ hermitsel iki matris ve $\mathfrak{C}$ ile $\mathfrak{D}$ de birimsel iki matris olmak üzere

a) $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ matrisinin hermitsel,

b) $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ matrisinin hermitsel,

c) $i(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B}\mathfrak{A})$ matrisinin de hermitsel matrisler olduklarını gösteriniz.

Problem: 11. Üç boyutlu bir uzayda *Euler* açıları aracılığıyla belirlenen bir rotasyon hareketinde dönüşüm matrisini açık olarak elemanları cinsinden yazınız ve bunun dik bir matris olduğunu gösteriniz.

Problem: 12.

$$A=\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$$

matrisinin dik bir matris olduğunu gösterip A^{-1} i hesaplayınız.

Problem: 13. Aşağıdaki matrislerin ranglarını bulunuz:

$$\begin{Vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} a & -a & b \\ -a & 0 & a \\ -b & a & a \\ b & -a & c \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

Problem: 14. Aşağıdaki lineer sistemleri çözünüz.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=1 \\ -x_1+x_2-2x_3&=1 \\ x_1+2x_2+x_3&=2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3&=0 \\ x_1+2x_2+2x_3&=0 \\ x_1+5x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -3x_1-2x_2+x_3&=0 \\ x_1+3x_2-2x_3&=0 \\ 4x_1-x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=-1 \\ 3x_1+2x_2+2x_3&=6 \\ 6x_1+5x_2-x_3&=-4 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=0 \\ -x_1-5x_2+8x_3+x_4&=0 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4&=0 \\ 3x_1+3x_2+4x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2-3x_3+2x_4&=0 \\ 3x_1-2x_2-2x_3+3x_4&=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4&=0 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x_1-3x_2-4x_3&=0\\ x_1+2x_2+2x_3&=0\\ x_1+5x_2-x_3&=0\\ 2x_1-3x_2+5x_3&=0 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3&=2\\ x_1+2x_2+x_3&=3\\ 2x_1+x_2+x_3&=1 \end{aligned}$$

Problem: 15. a, b ve c birer skaler sayı olmak üzere eğer bir $\mathfrak{A}$ matrisi

$$a\,\mathfrak{A}^2-b\,\mathfrak{A}+c\,\mathbf{I}=0$$

denklemini gerçekliyorsa

$$\mathfrak{A}^{-1}=-\frac{1}{c}(a\,\mathfrak{A}-b\,\mathbf{I})$$

olduğunu gösteriniz.

Problem: 16. x_3, x_4 ve x_5 bilinmeyenlerini göz önüne almaksızın, aşağıdaki sistemden x_1 ve x_2 nin değerlerini bulunuz:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=3\\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4+4x_5&=9\\ 2x_1+x_2-2x_3+2x_4-3x_5&=-16\\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4+x_5&=2\\ -x_1+x_2-4x_3+4x_4+2x_5&=-12 \end{aligned}$$

Problem: 17. Benzerlik dönüşümüne göre eşdeğer olan matrislerin aynı izleri ve aynı determinantları haiz olduklarını gösteriniz.

Problem: 18. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ yerdeğiştici iki matris olmak üzere $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ise $\mathfrak{C}$ nin özdeğerlerinin $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ nin özdeğerlerinin ikişer ikişer çarpımlarından ibâret olduğunu gösteriniz.

Problem: 19. İki matrisin yerdeğiştirici olması için gerek ve yeter şart nedir?

Problem: 20.

$$\mathfrak{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini ve bunlara tekaabül eden normalize özvektörlerini, virgülden sonra üçüncü hâneye kadar hesaplayınız.

Problem: 21. Bir vektör uzayında muayyen bir matris

$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$$

ve bir vektör de

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$$

ile belirlenmiş bulunmakta ve gerek $\mathfrak{A}$, gerekse $\vec{x}$ bir $\mathfrak{T}$ dönüşümüne tâbî tutulmaktadır. Dönüşümden önceki sistemin taban vektörlerinin, artık

$$\vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

vektörleriyle temsil edildikleri yeni bir koordinat sisteminde $\mathfrak{A}$ ve $\vec{x}$ in haiz oldukları açık şekilleri hesaplayınız.

Problem: 22.

$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{x} = \begin{Vmatrix} 1 \\ a \\ i \\ b \\ -1 \end{Vmatrix}$$

ile verilen matris ile vektörün $\mathfrak{A}$ nın köşegen bir matris şekline girdiği koordinat sistemindeki dönüşmüşlerini bulunuz.

Problem: 23. Bir matrisle bunun transpozesinin aynı karakteristik denklemi haiz olduklarını gösteriniz.

Problem: 24. 1) Reel bir bakışımlı matrisin bütün özdeğerlerinin reel olduklarını,

2) $\mathfrak{A}$ reel ve çarpık-bakışımlı bir matris ise, a) $\mathfrak{A}$ nın özdeğerlerinin ya sıfır, ya da sırf sanal olduğunu, b) $\mathbf{I}+\mathfrak{A}$ ve $\mathbf{I}-\mathfrak{A}$ nın regüler olduklarını, c) ve ayrıca $\mathfrak{B}=(\mathbf{I}+\mathfrak{A})^{-1}(\mathbf{I}-\mathfrak{A})$ matrisinin dik bir matris olduğunu,

3) Hermitsel bir matrisin bütün özdeğerlerinin reel olduklarını,

4) Hermitsel bir matrisin farklı özdeğerlerine tekaabül eden özvektörlerin biribirlerine dik olduklarını ispatlayınız.

Problem: 25. Bir özvektörün, sıfır hariç olmak üzere bir çarpan ile çarpılmışının da gene bir özvektör olduğunu gösteriniz. Bu özelliğe dayanarak da uzunluğunun karesi 1 e eşit olacak şekilde bir özvektör seçmenin her zaman mümkün olduğunu gösteriniz.

Problem: 26. İkinci mertebeden kare matrisler göz önüne alındığında $\mathfrak{A}$ gibi bir matrisin özdeğerleriyle $\mathfrak{A}^2$ nin özdeğerleri arasındaki bağıntıyı kurunuz.

$\mathfrak{A}$ nın özdeğerleriyle, $n=3,4,\cdots$ olmak üzere, $\mathfrak{A}^n$ nin özdeğerleri arasında da buna benzer bağıntı olup olmadığını tesbit ediniz.

Problem: 27. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ aynı sayıda meselâ n satır ve sütûnu haiz iki matris olmak üzere çok genel bir özdeğer problemi

$$\mathfrak{A}\vec{x}=\lambda\mathfrak{B}\vec{x}$$

şeklindedir. $\mathfrak{B}$ regüler bir matris olduğu takdirde bu özdeğer probleminin klâsik tipte bir özdeğer problemine indirgenebileceğini ve $\mathfrak{B}$ nin tekil olması hâlinde ise n den daha az sayıda özdeğerin mevcûd olduğunu ve hattâ bazı hallerde hiçbir özdeğer olmadığını gösteteriniz.

$\mathfrak{A}$ matrisinin klâsik bir özdeğer problemi gözönüne alındığında $\mathfrak{A}$ nın kendi karakteristik denklemini gerçeklediğini gösteriniz (*Cayley-Hamilton teoremi*).

Problem: 28. Birimsel bir matrisin bütün özdeğerlerinin mutlak değerlerinin 1 e eşit olduğunu gösteriniz.

Problem: 29. Herhangi bir matrisin hermitsel bir matris ile çarpık-hermitsel bir matrisin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

Problem: 30. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$, farklı özdeğerleri haiz iki matris olmak üzere

$$\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{T}=\begin{Vmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_n \end{Vmatrix}$$

olacak şekilde aynı bir $\mathfrak{T}$ dönüşümü vâsıtasıyla köşegenleşebilmeleri için $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$ nin yerdeğiştirici olmaları lâzım geldiğini ve bu takdirde gerek $\mathfrak{A}$, gerekse $\mathfrak{B}$ nin aynı özvektörlere sâhip olduklarını gösteriniz.

Problem: 31. $\mathfrak{A}$ ile $(m\times m)$—li bir matrisi göstererek ve $\overset{\rightharpoonup}{x}\mathfrak{A}\vec{x}$ in pozitif-definit olduğunu kabul ederek

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\overset{\rightharpoonup}{x}\mathfrak{A}\vec{x})\,dx_1\,dx_2\cdots\cdots dx_n=\sqrt{\frac{\pi^n}{|\mathfrak{A}|}}$$

olduğunu tesbit ediniz.

Problem: 32. $\mathfrak{A}$ pozitif-definit ve $\mathfrak{B}$ de bakışımlı iki matris olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-(\overset{\rightharpoonup}{x}\mathfrak{A}\vec{x})-i(\overset{\rightharpoonup}{x}\mathfrak{B}\vec{x})\right\}dx_1\cdots dx_n=\sqrt{\frac{\pi^n}{|\mathfrak{A}+i\mathfrak{B}|}}$$

bağıntısını şu safhalardan geçerek ispatlayınız:

a) $\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{T}=\Lambda$ şeklinde köşegen bir matris olmak üzere $\vec{x}=\mathfrak{T}\vec{y}$ vazediniz.

b) sonra $y_k=z_k/\sqrt{\lambda_k}$ değişken dönüşümü yapınız.

c) Böylece integrant

$$\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} z_k^2 - i\,(\tilde{\vec{z}}\,\mathfrak{C}\,\vec{z})\right\}$$

şeklindedir. $\vec{z}=\mathfrak{S}\vec{w}$ şeklinde dik bir dönüşümde $\mathfrak{C}$ matrisini köşegen bir matrise indirgeyiniz.

d) Elde edilen integrali değerlendiriniz.

Problem: 33. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ nin her ikisi de pozitif-definit matrisler olmak şartiyle

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-(\tilde{\vec{x}}\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\vec{x})\right\}dx_1\cdots dx_n$$

yi hesaplayınız.

Problem: 34. $\mathfrak{A}$ pozitif-definit bir matris olmak üzere

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-(\tilde{\vec{x}}\,\mathfrak{A}\vec{x})+2i(\tilde{\vec{x}}\,\vec{y})\right\}dx_1\cdots dx_n$$

integralini hesaplayınız.

Problem: 35.

$$\tilde{\vec{x}}\,\mathfrak{A}\vec{x}=\|x_1\;x_2\;x_3\|\cdot\begin{Vmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}$$

$$=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$$

$$\begin{aligned}= \quad & x_1^2+x_1x_2+3x_1x_3\\ & +x_2x_1+5x_2^2+x_2x_3\\ & +3x_3x_1+x_3x_2+x_3^2=5\end{aligned}$$

ile verilmiş olan kuvadrik yüzeyi esas eksenlerine indirgeyiniz (yâni bunun ifâdesinde, $i\neq k$ olmak üzere x_ix_k lı terimleri yok ediniz). Bu kuvadriğin uzayda esas eksenlerine indirgenmesini sağlayan koordinat dönüşümünü açıkça yazıp bunun özelliklerini tesbit ediniz.

Problem : 36. $2x_1^2+6x_2^2+2x_3^2+8x_1x_3=1$ kuvadriğini esas eksenlerine indirgeyiniz.

Problem : 37.

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{4}\left\|\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & & & \\ 0 & 3 & & \mathbf{0} & \\ \hline & & 7 & 4 & 4 \\ & \mathbf{0} & 4 & 7 & 4 \\ & & 4 & 4 & 7 \end{array}\right\|, \quad \mathfrak{B}=\left\|\begin{array}{cc|ccc} 4 & -2 & & & \\ -2 & 4 & & \mathbf{0} & \\ \hline & & 2 & -2 & 0 \\ & \mathbf{0} & -2 & 4 & 2 \\ & & 0 & -2 & 2 \end{array}\right\|$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{2} & 0 & & & \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & & \mathbf{0} & \\ 0 & -\sqrt{2} & & & \end{array}\right\|$$

Bakışımlı matrislerinin ikişer ikişer çarpımlarının yerdeğiştirici olduğunu tesbit ettikten sonra Problem : 30 da yerdeğiştirici matrisler hakkında ifâde olunan özellikten yararlanarak bu üç matrisi de köşegenleştirecek olan dik matrisi açıkça hesaplayınız.

Bu türlü dönüşmüş olan $\mathfrak{C}$ matrisi daha da basit bir şekle indirgenebilir mi?

Problem : 38. $\mathfrak{A}$ gibi bir kare matrisin $\lambda_{(p)}$ gibi bir özdeğerine $\vec{x}^1_{(p)}$ ve $\vec{x}^2_{(p)}$ gibi farklı iki özvektörün tekaabül etmesi için $\mathfrak{A}$ matrisi ile $\vec{x}^1_{(p)}$ ve $\vec{x}^2_{(p)}$ arasında ne gibi bir bağıntı olması gereklidir?

Problem : 39. Herhangi bir matrisin her zaman regüler bir $\mathfrak{T}$ matrisi vâsıtasıyla köşegenleştirilemeyeceğine bir misâl olmak üzere, meselâ,

$$\mathfrak{A}=\left\|\begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array}\right\|$$

matrisini köşegenleştiren $\mathfrak{T}$ matrisinin mutlak sengüler bir matris olması gerektiğini gösteriniz.

Problem: 40. a) $e^{\mathbb{A}t}=\mathbb{I}+\mathbb{A}t+\cdots\cdots+\dfrac{\mathbb{A}^p t^p}{p!}+\cdots$

ile tanımlanan matrisel üstel fonksiyonun kompleks t düzleminin her sonlu bölgesinde birbiçim yakınsak olduğunu,

b) $e^{\mathbb{A}t}$ nin tanımından yararlanarak

$$e^{\mathbb{A}s}\,e^{\mathbb{A}t}=e^{\mathbb{A}(s+t)}$$

$$c^{\mathbb{A}(-t+t)}=\mathbb{I}$$

olduğunu,

c) $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ aynı mertebeden iki kare matris olmak şartıyla

$$e^{(\mathbb{A}+\mathbb{B})}=e^{\mathbb{A}t}\,e^{\mathbb{B}t}$$

olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathbb{A}$$

olduğunu, yâni $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ nin çarpıma göre yerdeğiştirici olması olduğunu ispatlayınız.

Problem: 41. $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$ ve $\mathbb{X}$ kare matrisler olmak üzere

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt}=\mathbb{A}\mathbb{X}+\mathbb{X}\mathbb{B}\,,\quad \mathbb{X}(0)=\mathbb{C}$$

denkleminin çözümünün $\mathbb{X}=e^{\mathbb{A}t}\mathbb{C}e^{\mathbb{B}t}$ olduğunu gösteriniz.

Problem: 42. Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemlerini matris metodu aracılığıyla çözünüz.

1) $$\frac{dx_1}{dt}=x_2\qquad \frac{dx_2}{dt}=x_3\qquad \frac{dx_3}{dt}=x_1$$

2) $$\frac{dx_1}{dt}=x_2+x_3\qquad \frac{dx_2}{dt}=x_3+x_1\qquad \frac{dx_3}{dt}=x_1+x_2$$

$D=\frac{d}{dt}$ yi göstermek üzere:

3) $(D-1)x+(D+2)y=1+e^t$ 4) $(D+2)x+(D+1)y=t$

$(D+2)y+(D+1)z=2+e^t$ $x+(D+3)y=t^2$

$(D-1)x+(D+1)z=3+e^t$

Problem: 43. $\varepsilon \ll 1$ olmak üzere $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ve $\mathbb{X}$ de aynı mertebeden kare matrisleri göstermek üzere

$$\mathbb{X}(t)=e^{\mathbb{A}t}+\varepsilon\int_0^1 e^{\mathbb{A}(t-s)}\,\mathbb{B}\mathbb{X}(s)\,ds$$

şeklindeki **Volterra** tipi integrâl denklemi önce

$$\mathbb{X}(s)=\mathbb{X}_0(s)=e^{\mathbb{A}s}$$

vazedip, ε un da 3 den büyük üslerini ihmâl edilebilir sayarak denklemi iterasyonla çözünüz.

Problem: 44. $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ aynı mertebeden iki kare matris olmak üzere

a) $\frac{d(\mathbb{A}\mathbb{B})}{dt}=\frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{B}+\mathbb{A}\frac{d\mathbb{B}}{dt}$

b) $\frac{d\mathbb{A}^{-1}}{dt}=-\mathbb{A}^{-1}\frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{A}^{-1}$

c) $\frac{d\mathbb{A}^n}{dt}=\frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{A}^{n-1}+\mathbb{A}\frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{A}^{n-2}+\cdots\cdots+\mathbb{A}^{n-1}\frac{d\mathbb{A}}{dt}$

olduğunu gösteriniz.

Problem: 45. ε keyfî bir büyüklük olmak üzere kezâ

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Problem: 46. 1) $\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\, \delta(x)\,; \quad (\lambda > 0)$

2) $\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$

bağıntılarını ispatlayınız ve

3) $\delta^{(n)}(x)$ in açık ifâdesini tesis ediniz.

Problem: 47. Dirac fonksiyonunun

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)^2\right] = \delta(x-a)$$

şeklinde de tanımlanabileceğini gösteriniz.

Problem: 48. $\nu = 1, 2, \ldots,$ olmak üzere kompleks düzlemin birim dairesi içinde tanımlanmış olan

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\, z^{\nu-1}$$

fonksiyonlarının bir Hilbert uzayının sayılabilir dik bir taban vektörleri takımını meydana getirdiğini gösteriniz.

Problem: 49. $\lambda,\ \mu,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ olmak üzere

$$\left\{\cos \frac{(2\lambda+1)\,\pi x}{X} \cdot \cos \frac{(2\mu+1)\,\pi y}{Y} \cdot \cos \frac{(2\nu+1)\,\pi z}{Z}\right\}$$

fonksiyon dizisinin, değişkenlerin

$$-\frac{X}{2} \le x \le \frac{X}{2}, \quad -\frac{Y}{2} \le y \le \frac{Y}{2}, \quad -\frac{Z}{2} \le z \le \frac{Z}{2}$$

bölgesi için bir Hilbert uzayının dik bir taban vektörleri takımını meydana getirdiğini gösteriniz.

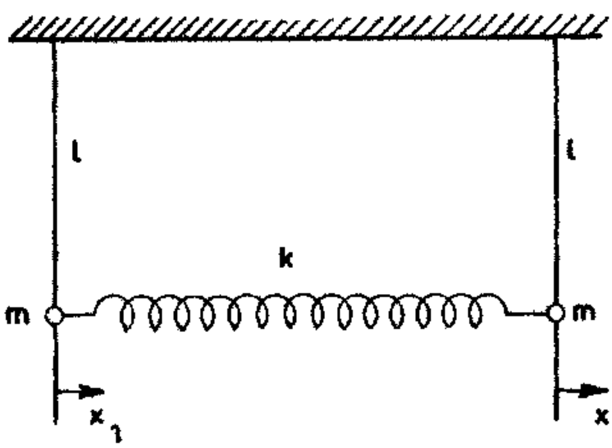
Problem: 50. (I.10a.10) ifâdesinde karşımıza çıkan $\| a_{ik} \|$ matrisinin dik bir matris olduğunu gösterip bu özellikten faydalanarak uygun başlangıç şartları altında C_k katsayıları nı belirleyiniz.

Problem: 51. Mekanik bir sistemin, kararlı bir denge durumu cıvarında, potansiyel ve kinetik enerjileri

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j \quad \text{ve} \quad K = \frac{1}{2} K_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

ile verildiğine göre öyle bir $\| A_{ij} \|$ matrisi bulunuz ki hem $\| V_{ij} \|$ ve hem de $\| K_{ij} \|$ yi aynı zamanda köşegenleştirsin. Bu takdirde sistemin kararlı denge durumu cıvarındaki küçük titreşimlerini veren denklemler nasıl ifâde olunurlar?

Problem: 52. Aşağıdaki

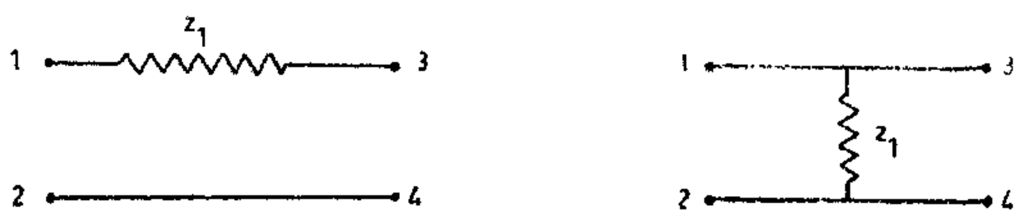


şeklinde gösterilen sistemin küçük titreşimlerini inceleyiniz.

Problem: 53. a) Paralel bağlanmış iki dörtuçluyu, ve

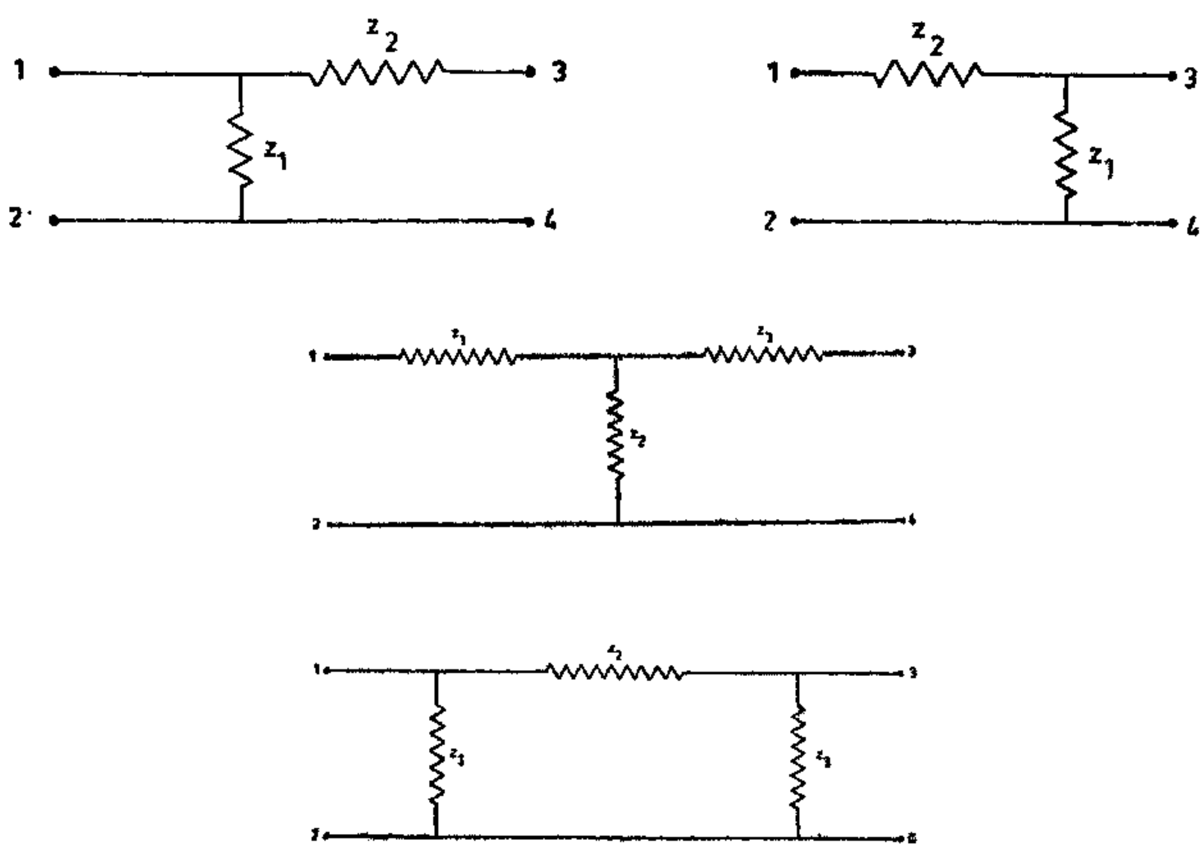
b) Seri bağlanmış iki dörtuçluyu matrisler yardımıyla inceleyiniz.

Problem : 54.



Şeklindeki dörtuçluları inceleyiniz.

Problem : 55.



Dörtuçlularını inceleyiniz.

II. Bölüm

TANSÖR HESABI

(I.1) TANSÖR KAVRAMI.

Bir **K** koordinot sistemindeki herhangi bir $P(x^1, x^2, \ldots . x^N)$ noktası ile başka bir **K′** koordinat sistemindeki $P(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ noktası arasında, $k=1,2,\ldots\ldots,N$ olmak üzere,

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, \ldots, x^N) \tag{II.1.1}$$

şeklinde bağıntılar bulunsun. Bu ifâdedeki rakamlar x lerin üslerini değil fakat onlara tekaabül ettirilen *üst indisleri* göstermektedir. Eğer $\bar{x}^k$ fonksiyonları tek değerli, sürekli, ve sürekli türevleri haiz fonksiyonlar ise ve bu dönüşümün jacobyeni

$$J = \left| \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^N} \\ \vdots & \vdots & & \\ \dfrac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^N} \end{vmatrix} \neq 0$$

ise, $m=1,2,\ldots,N$ olmak üzere, (II.1.1) bağıntıları x^m lere göre çözülebilirler:

$$x^m = x^m(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N) \tag{II.1.2}$$

Bu takdirde (II.1.1) ve (II.1.2) formüllerinin sırasıyla **K** → **K′** ve **K′** → **K** koordinat dönüşümlerini teşkil ettikleri ve, bu şartlar altında, yukarıdaki dönüşümlerden birinin, diğerinin ters dönüşümü olduğu söylenir.

Böyle (II.1.1) gibi $\mathbf{K} \to \mathbf{K}'$ şeklinde bir koordinat dönüşümü göz önüne alındığında eğer bir büyüklük gerek **K** da gerekse **K'** de aynı bir değeri haiz ise böyle bir büyüklüğe bir *skaler* adı verilir.

Eğer bir **K** sistemindeki $T^1, T^2, \ldots, T^N$ gibi N adet büyüklük (II.1.1) gibi bir dönüşümle bir **K'** sistemine geçildiğinde

$$\overline{T}^p = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q} T^q \qquad \text{(II.1.3)}$$

$$(p=1,2,\ldots\ldots,N)$$

gibi dönüşüyorlarsa bunlara *kontravaryant bir vektörün* ya da *birinci mertebeden kontravaryant bir tansörün* elemanları denir. Meselâ (II.1.1) dönüşüm fonksiyonlarının tam diferansiyelleri olan

$$d\overline{x}^k = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m} dx^m$$

ifâdeleri $(d\overline{x}^1, d\overline{x}^2, \ldots, d\overline{x}^k)$ nın bu tanım gereğince kontravaryant bir vektör olduğunu göstermektedir.

Eğer bir **K** sistemindeki $T_1, T_2, \ldots\ldots, T_N$ gibi N adet büyüklük

$$\overline{T}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p} T_q \qquad \text{(II.1.4)}$$

$$(p=1,2,\ldots\ldots,N)$$

şeklinde dönüşüyorlarsa bunlara da kovaryant bir vektörün ya da *birinci mertebeden kovaryant bir tansörün* elemanları denir. Meselâ

$$\phi = \phi(x^1, x_2, \ldots\ldots, x^N)$$

gibi skaler bir fonksiyonun $\mathbf{K} \to \mathbf{K}'$ şeklindeki bir koordinat dönüşümü sonucu, haiz olduğu $\partial\phi/\partial\overline{x}^p$ şeklindeki kısmî türevlerini hesaplayalım:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{x}^p} = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p} \frac{\partial \phi}{\partial x^q}$$

$$(p=1,2,\ldots\ldots,N)$$

olur. Bu ise $p=1,2,\ldots\ldots,N$ olmak üzere $\partial\phi/\partial\overline{x}^p$ nin bu tanım gereğince kovaryant bir vektörün bileşenleri olduğunu göstermektedir.

Benzer şekilde, ikinci mertebeden *tamamen kontravaryant bir tan-*

sör de **K** → **K′** gibi bir koordinat dönüşümünde bileşenleri

$$\overline{T}^{pq} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^s} T^{rs} \qquad \text{(II.1.5)}$$

$$(p,q=1,2,\ldots,N)$$

şeklinde değişen N^2 bileşenli geometrik nesne; ve ikinci mertebeden tamâmen *kovaryant bir tansör* de bileşenleri

$$\overline{T}_{pq} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^q} T_{rs} \qquad \text{(II.1.6)}$$

$$(p,q=1,2,\ldots,N)$$

şeklinde değişen N^2 bileşenli geometrik nesne olarak tanımlanır. İkinci mertebeden bir *karma tansör* de bileşenleri için dönüşüm kuralları

$$\overline{T}^p{}_q = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^q} T^r{}_s \qquad \text{(II.1.7)}$$

$$(p,q=1,2,\ldots,N)$$

bağıntılarıyla tanımlanan tansöre denir. Bu arada $\delta_p{}^q$ nun da ikinci mertebeden ve bir indisine göre kontravaryant, diğer indisine göre de kovaryant bir tansör olarak gösterilebilen *Kroenecker* sembolü olduğuna işâret edelim.

Tamâmen genel bir tarzda α-ncı mertebeden kontravaryant ve β-ncı mertebeden de kovaryant bir tansör diye

$$\overline{T}^{p_1 p_2 \ldots p_\alpha}_{q_1 q_2 \ldots q_\beta} = \frac{\partial \overline{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial \overline{x}^{p_2}}{\partial x^{r_2}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{p_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \overline{x}^{q_1}} \frac{\partial x^{s_2}}{\partial \overline{x}^{q_2}} \cdots \frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \overline{x}^{q_\beta}} T^{r_1 r_2 \ldots r_\alpha}_{s_1 s_2 \ldots s_\beta}$$

$$(p_1, p_3, \ldots, p_\alpha, q_1, q_2, \ldots, q_\beta = 1,2,\ldots,N) \qquad \text{(II.1.8)}$$

şeklinde dönüşüm kurallarına uyan ve $N^{\alpha+\beta}$ adet bileşeni haiz bir tansöre denir.

Eğer uzayın her bir noktasına bir skaler tekaabül ettirilirse böylelikle bir *skaler alan*, bir vektör tekaabül ettirilirse bir *vektörel alan* ve bir tansör tekaabül ettirilirse de bir *tansörel alan* meydana getirilmiş olur. Meselâ atmosferdeki hava basıncı skaler bir basınç alanı, arzın cıvarındaki gravitasyon vektörel bir kuvvet alanı meydana getirirler. Tansör alanlarına ait somut örnekleri de bölümün sonundaki fiziksel uygulamalar bölümünde vereceğiz.

Sıfır tansörü diye, mertebesi ne olursa olsun, bütün elemanları sıfır olan tansöre diyeceğiz. (II.1.8) dönüşüm kuralından da kolayca görüleceği üzere, bu dönüşüm kuralının lineer olması dolayısıyla, eğer bir tansörün elemanları herhangi bir **K** koordinat sisteminde sıfır iseler (II.1.1) dönüşümü yardımıyla yapılan herhangi başka bir koordinat sisteminde de sıfır olmakta devam ederler. Şu halde biz eğer bir fizik kanununun, şekil bakımından, ifâde edilmiş olduğu koordinat sistemine bağlı olmamasını istersek onu mutlaka tansörel bir ifâde olarak yazmalıyız. Bu fikir modern teorik fiziğin temel fikirlerinden biridir. *Albert Einstein* fizik kanunlarını önce düzgün doğrusal hareket eden eylemsizlik sistemlerinde invaryant (değişmez) bir şekli haiz olacak şekilde ve sonra da herhangi bir hareket yapan genel sistemler için invaryant olacak sekilde sırasıyla Özel ve Genel Rölâtivite Teorileri çerçeveleri içinde yazmayı başarmıştır. O zamandanberi inşâ olunan çeşitli gerek Temel Tânecikler ve gerekse alan teorilerinin başlıca mehenk taşı bunların bu *«rölâtivist invaryansı»* sağlayıp sağlamadıkları olmuştur.

(II.2) TANSÖRLER ÜZERİNDEKİ CEBİRSEL İŞLEMLER

Aynı sayıda kontravaryant ve aynı sayıda kovaryant indisleri haiz iki tansörün toplamı ve farkı tanımlanabilir ve bu işlemin sonucu da aynı sayıda kontravaryant indisi haiz bir tansördür. Gerçekten de

$$\overline{B}^{p_1p_2\ldots p_\alpha}_{q_1q_2\ldots q_\beta} = \frac{\partial\overline{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}}\frac{\partial\overline{x}^{p_2}}{\partial x^{r_2}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{p_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial\overline{x}^{q_1}}\frac{\partial x^{s_2}}{\partial\overline{x}^{q_2}}\cdots\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial\overline{x}^{q_\beta}}A^{r_1r_2\ldots r_\alpha}_{s_1s_2\ldots s_\beta}$$

$$\overline{B}^{p_1p_2\ldots p_\alpha}_{q_1q_2\ldots q_\beta} = \frac{\partial\overline{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}}\frac{\partial\overline{x}^{p_2}}{\partial x^{r_2}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{p_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial\overline{x}^{q_1}}\frac{\partial x^{s_2}}{\partial\overline{x}^{q_2}}\cdots\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial\overline{x}^{q_\beta}}\overline{A}^{r_1r_2\ldots r_\alpha}_{s_1s_2\ldots s_\beta}$$

ise

$$B^{p_1 p_2 \ldots p_\alpha}_{q_1 q_2 \ldots q_\beta} \pm \overline{B}^{p_1 p_2 \ldots p_\alpha}_{q_1 q_2 \ldots q_\beta} =$$

$$= \frac{\partial \overline{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial \overline{x}^{p_2}}{\partial x^{r_2}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{p_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \overline{x}^{q_1}} \frac{\partial x^{s_2}}{\partial \overline{x}^{q_2}} \cdots \frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \overline{x}^{q_\beta}} \times$$

$$\times \left(A^{r_1 r_2 \ldots r_\alpha}_{s_1 s_2 \ldots s_\beta} \pm \overline{A}^{r_1 r_2 \ldots r_\alpha}_{s_1 s_2 \ldots s_\beta} \right)$$

olur ki bu da (II.1.8) e göre $\left(A^{r_1 \ldots r_\alpha}_{s_1 \ldots s_\beta} \pm \overline{A}^{r_1 \ldots r_\alpha}_{s_1 \ldots s_\beta} \right)$ verilmiş olan tansörlere aynı tipte ve aynı mertebede bir tansör olduğunu göstermektedir.

Şimdi gene iki tansör verilmiş olsun:

$$B^{p_1 \ldots p_\alpha}_{q_1 \ldots q_\beta} = \frac{\partial \overline{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{p_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \overline{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \overline{x}^{q_\beta}} A^{r_1 r_2 \ldots r_\alpha}_{s_1 s_2 \ldots s_\beta}$$

$$C^{m_1 \ldots m_\gamma}_{n_1 \ldots n_\varepsilon} = \frac{\partial \overline{x}^{m_1}}{\partial x^{u_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{m_\gamma}}{\partial x^{u_\gamma}} \frac{\partial x^{v_1}}{\partial \overline{x}^{n_1}} \cdots \frac{\partial x^{v_\varepsilon}}{\partial \overline{x}^{n_\varepsilon}} D^{u_1 \ldots u_\gamma}_{v_1 \ldots v_\varepsilon}$$

Bunların *dış çarpımının*

$$B^{p_1 \ldots p_\alpha}_{q_1 \ldots q_\beta} C^{m_1 \ldots m_\gamma}_{n_1 \ldots n_\varepsilon} = T^{p_1 \ldots p_\alpha m_1 \ldots m_\gamma}_{q_1 \ldots q_\beta n_1 \ldots n_\varepsilon}$$

şeklinde $(\alpha+\gamma)$-nıncı mertebeden kontravaryant ve $(\beta+\varepsilon)$-uncu mertebeden de kovaryant bir tansör olduğu derhâl görülebilir. Bu tansörün bileşenlerinin sayısı $N^{\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon}$ olacaktır. Tansörel dış çarpımın toplama göre dağıtıcı olduğu kolaylıkla tesbit edilir.

Verilmiş tansörlerden yeni tansörler elde etmeğe yarıyan işlemlerden biri de tansörlerin *büzülmesi* işlemidir: eğer α-nıncı mertebeden kontravaryant ve β-nıncı mertebeden de kovaryant olan yâni $\alpha+\beta$ mertebesinden bir tansörün kontravaryant ve kovaryant indislerinden birer tânesi biribirlerine eşit kılınıp da bunlar üzerinden toplam yapılacak olursa $(\alpha-1)$-inci mertebeden kontravaryant ve $(\beta-1)$-inci mertebeden de kovaryant olan yâni $\alpha+\beta-2$ mertebesinden bir yeni tansör elde edilir. Bunu göstermek üzere, formalizmi ağırlaştırmamak için A^p_{qrs} gibi bir tansör göz önüne alalım. Bu takdirde bunun yeni koordinatlardaki ifâdesi

$$\bar{B}^{p}{}_{qrs} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} A^k{}_{lmn}$$

olur. Şimdi meselâ p ve r yi biribirlerine eşitleyip da bu müşterek indis üzerinden toplam yapacak olursak

$$\bar{B}^{p}{}_{qps} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} A^k{}_{lmn} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \delta_k{}^m A^k{}_{lmn}$$

$$= \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} A^k{}_{lkn} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \bar{A}_{ln}$$

bulunur ki bu da $B^p{}_{qps} \equiv B_{qs}$ nin ikinci mertebeden kovaryant bir tansör olduğunu göstermektedir.

Şimdi birinci mertebeden tansörler yâni vektörler alıp bunların *büzülmüş tansörel çarpımlarının* dönüşüm kurallarını yakından inceleyelim:

a) İki kontravaryant vektör hâli:

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} A^r, \quad \bar{B}^q = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} B^s$$

$$\bar{C}^{pq} = \bar{A}^p \bar{B}^q = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} A^r B^s = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} C^{rs} \qquad \text{(II.2.1)}$$

Bu bir tansördür. Buna karşılık meselâ

$$\bar{C}^{pp} = \bar{A}^p \bar{B}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} C^{rs}$$

bir tansör değildir.

b) İki kovaryant vektör hâli:

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} A_r, \quad \bar{B}_q = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} B_s$$

$$\bar{C}_{pq} = \bar{A}_p \bar{B}_q = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} A_r B_s = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} C_{rs} \quad \text{(tansör)} \qquad \text{(II.2.2)}$$

$$\bar{C}_{pp} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p} C_{rs} \quad \text{(tansör değil)}$$

c) Bir kontravaryant ve bir kovaryant vektör hâli

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} A^r, \quad \bar{B}_q = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} B_s$$

$$\bar{C}_p{}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} A^r B_s = \bar{A}^p \bar{B}_q \quad \text{(tansör)}$$

$$\bar{C}_p{}^p = \bar{A}^p \bar{B}_p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p} A^r B_s = \delta_r{}^s A^r B_s = A^s B_s \quad \text{(skaler)}$$

veyâ

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} A_r, \quad \bar{B}^q = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} B^s$$

$$\bar{C}_p{}^q = \bar{A}_p \bar{B}^q = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} A_r B^s \quad \text{(tansör)}$$

$$\bar{C}_p{}^p = \bar{A}_p \bar{B}^p = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} A_r B^s = \delta_s{}^r A_r B^s = A_s{}^s \quad \text{(skaler)}$$

yâni

$$A_s B^s = A^s B_s$$

olur.

Buradaki her üç büzülmüş tansörel çarpımdan ancak sonuncusunun yâni çarpımdan sonra bir kontravaryant ve bir kovaryant indisi eşitleyerek yapılan büzülmeye tekaabül eden hâlin tansör niteliğini haiz olduğu görülmektedir. Diğer taraftan (II.2.3) ifâdesi vektörlerin skaler çarpımlarının tansör formalizmine göre yazılışını da temsil etmektedir.

Böylelikle büzülme işleminin ancak ve ancak bir kontravaryant ve bir de kovaryant indis üzerinden olduğu takdirde tansörel bir anlamı haiz olacağı yâni ancak böyle bir büzülme yapmak sûretiyle iki mertebe daha küçük bir tansör elde edileceği anlaşılmış bulunmaktadir.

Bir tansör verildiğinde bunun belirli iki kontravaryant (ya da iki kovaryant) indisi aralarında değiş tokuş edildiği zaman eğer tansörün elemanları aynı kalıyorsa bu tansöre, göz önüne alınan indislere nazaran bakışımlıdır denir. Eğer bu indişler değiş tokuş edildiğinde tansörün elemanları işâret değiştiriyorsa o zamanda antisimetrık ya da çarpık - bakışımlı tansör adı verilir. Bakışım hassalarının koordinat dönüşümlerine bağlı olmadıkları gösterilir. (Bk. Problem: 4.)

(II.3) TANSÖRLÜK KRİTERYUMU.

Bir **K** koordinat sisteminde tanımlanmış olan $A(p_1,\ldots,p_a)$ gibi N fonksiyonun bir **K'** sistemindeki dönüşmüşleri de $B(q_1,\ldots.q_a)$ olsun. Bu takdirde $A(p_1,\ldots.,p_a)$ ların a-nıncı mertebeden bir tansör teşkil edip etmediklerini görmek için mutlaka bunların dönüşüm kurallarını açıkça tesis etmek gerekmez. Meselâ eğer **K** ya göre ξ_{p_i} ve **K'** ye göre de η_{p_i} bileşenlerini haiz her vektör takımı için

$$B(q_1,\ldots,q_a)\eta_{q_1}\ldots.\eta_{q_a}=A(p_1,\ldots.,p_a)\xi_{p_1}\ldots.\xi_{p_a}$$

eşitliği geçerli ise bu takdirde $A(p_1,\ldots.,p_a)$ fonksiyon takımı **K** sisteminde a-nıncı mertebeden kontravaryant bir tansörün bileşenlerini temsil ederler,

Gerçekten de, ξ_{p_i} ler kovaryant vektörler olduklarından

$$\xi_{p_i}=\frac{\partial x^{q_i}}{\partial \bar{x}^{p_i}}\eta_{q_i}$$

dönüşüm kuralları yardımıyla

$$\left[B(q_1,\ldots.,q_a)-A(p_1,\ldots.,p_a)\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{p_1}}\ldots.\frac{\partial x^{q_a}}{\partial \bar{x}^{p_a}}\right]\eta_{q_1}\ldots.\eta_{q_a}=0$$

yazılır. Halbuki η_{q_i} ler keyfî vektörler olduklarından bu bağıntıların gerçeklenebilmesi için köşeli parantezler içindeki ifâdelerin sıfır olmaları, yani

$$B(q_1,\ldots.,q_a)=\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{p_1}}\ldots\frac{\partial x^{q_a}}{\partial x^{p_a}}A(p_1,\ldots.,p_a)$$

olması gerekir ki bu da $A(p_1,\ldots,p_a)$ nın

$$A(p_1,\ldots.p_a)=A^{p_1p_2\ldots.p_a}$$

şeklinde a-nıncı mertebeden kontravaryant bir tansör olduğunu göstermektedir. Bu kriteryumun, tamamen benzer şekilde, kovaryant ve karma tansörler için de geçerli olduğu kolaylıkla gösterilir.

(II.4) METRİK TANSÖR.

Dik bir **K** kartezyen koordinat sisteminin eksenleri üzerindeki $\vec{e}_m$ $(m=1,2,\ldots,N)$ taban birim vektörleri ile,

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu}(x^1, x^2, \ldots, x^N) \qquad (\text{II.4.1})$$

$$(\mu=1,2,\ldots,N)$$

gibi dönüşüm formülleriyle yapılan bir $\mathbf{K} \to \mathbf{K}'$ dönüşümünde $\mathbf{K}'$ deki $\vec{\underline{e}}_{\mu}$ taban vektörleri aracılığıyla $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektör kontravaryant bileşenleri cinsinden her iki sistemde de

$$\vec{A} = \vec{e}_m A^m = \vec{\underline{e}}_{\mu} \bar{A}^{\mu}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_n B^n = \vec{\underline{e}}_{\nu} \bar{B}^{\nu}$$

$$(m,n,\mu,\nu=1,2,\ldots,N)$$

şeklinde ifâde edilirler. İki vektörün skaler çarpımının koordinat sistemine bağlı olmadığını yukarıda görmüştük. Şu hâlde

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{\underline{e}}_{\mu} \vec{\underline{e}}_{\nu} \bar{A}^{\mu} \bar{B}^{\nu} = \vec{e}_m \vec{e}_n A^m B^n$$

olur. Diğer taraftan **K** daki tek bileşenli birim taban vektörlerinin dönüşümleri olan grek indisli taban vektörleri bunlara

$$\vec{\underline{e}}_{\mu} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\mu}} \vec{e}_m$$

$$\vec{\underline{e}}_{\nu} = \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{\nu}} \vec{e}_n$$

bağıntılarıyla bağlıdırlar. Buna göre

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^{\nu}} \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n \bar{A}^{\mu} \bar{B}^{\nu} = \vec{\underline{e}}_{\mu} \cdot \vec{\underline{e}}_{\nu} \bar{A}^{\mu} \bar{B}^{\nu}$$

olur. Fakat **K** daki taban vektörleri biribirlerine dik birim vektörler olduklarından

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \delta_{mn}$$

$$(m,n = 1,2,\ldots,N)$$

dir; buna dayanarak artık

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^\nu} \delta_{mn} \bar{A}^\mu \bar{B}^\nu = g_{\mu\nu} \bar{A}^\mu \bar{B}^\nu = \vec{\underline{e}}_\mu \cdot \vec{\underline{e}}_\nu \bar{A}^\mu \bar{B}^\nu \tag{II.4.2}$$

yazılır. Şu hâlde

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^\nu} \delta_{mn} = \vec{\underline{e}}_\mu \cdot \vec{\underline{e}}_\nu \tag{II.4.3}$$

dür. K′ deki dönüşmüş taban vektörleri arasındaki bağıntıları özetleyen bu ikinci mertebeden bakışımlı tansöre *metrik tansör* adı verilir.

$$g^{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} \text{ nün kofaktörü}}{|g_{\mu\nu}|} \tag{II.4.4}$$

şeklinde tanımlanan tansör yardımıyla

$$g_{\lambda\mu}\, g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\lambda \tag{II.4.5}$$

olduğu hesaplanır.

Eğer skaler çarpımın (II.2.3) tanımıyla (II.4.2) sonucu karşılaştırılırsa

$$\bar{A}_\mu \bar{B}^\mu = g_{\mu\lambda} \bar{A}^\lambda \bar{B}^\mu$$

veyâ

$$(\bar{A}_\mu - g_{\mu\lambda} \bar{A}^\lambda)\, \bar{B}^\mu = 0$$

yâni

$$\bar{A} = g_{\mu\lambda} \bar{A}^\lambda \tag{II.4.6}$$

bulunur. Bu bağıntıyı her iki yanından $g^{\nu\mu}$ ile çarpalım; sessiz toplam indisleri üzerinden toplam yapıp, (II.4.5) ü de göz önünde bulundurarak

$$\bar{A}^\mu = g^{\mu\lambda} \bar{A}_\lambda \tag{II.4.7}$$

buluruz. Son iki bağıntı bir vektörün kontravaryant ve kovaryant bileşenleri arasındaki sıkı ilişkiyi ortaya koymaktadır. Herhangi bir tansörün indislerinin indirilip yükseltilmelerinde gene metrik tansörden benzer şekilde yararlanıldığının ispatı okuyucuya bırakılmıştır. (Bk. Problem: 6). Buna göre meselâ

$$A^{p}{}_{q}=g^{rp} A_{rq}\,, \quad A^{pq}=g^{rp} g^{sp} A_{rs}\,, \quad A^{p}{}_{\cdot rs}=g_{rq} A^{pq}{}_{s}$$

$$A^{qm\,.\,tk}_{\;\;..\,n\,..}=g^{pk} g_{sn} g^{rm} A^{q\,.\,st}_{\;.\,r\,..\,p}$$

yazılacaktır. Bu ifâdelerdeki noktalar yer değiştiren indislerin ilk durumlarına işâret etmektedirler.

N boyutlu bir uzayda N adet bağımsız birim vektörün temsil ettikleri dik bir **K** koordinat sisteminde sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesi

$$ds^2=dx^p\, dx_p=\delta_{pq}\, dx^p\, dx^q \tag{II.4.8}$$

şeklindedir. Eğer bu uzayda (II.4.1) gibi bir koordinat dönüşümü yapılacak olursa, $g_{\mu\nu}$ metrik tansörü (II.4.2) ile belirlenmiş olarak, (II.4.8) metriği yeni **K'** koordinat sisteminde

$$ds^2=g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{II.4.9}$$

şekline girer.

(II.4.1) koordinat dönüşümü tek değerli, sürekli ve sürekli türetilebilen bir dönüşüm ise bunun

$$x^p=x^p(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$$
$$(p=1,2, \ldots, N)$$

şeklinde ters dönüşümü de vardır. Böylece, **K'** $\to$ **K** için (II.4.9) metriği de gene

$$ds^2=g_{\mu\nu}\, d\bar{x}^{\mu}\, d\bar{x}^{\nu} \;\to\; ds^2=\delta_{pq}\, dx^p\, dx^q$$

olarak köşegensel şekline müncer olur.

Eğer bir *metrik* $(=ds^2)$ tıpkı (II.4.8) metriği gibi köşegensel ise ya da tek değerli, sürekli ve sürekli türetilebilen bir koordinat dönüşümü yardımıyla (II.4.8) şekline sokulabiliyorlarsa bu metriğe «*öklitsel metrik*» adı verilir ve bunun geçerli olduğu N boyutlu uzayın da öklitsel bir uzay veyâ *Euklides* uzayı olduğunden bahsolunur. Bu niteliği haiz uzaylarda bir doğrunun dışındaki bir noktadan bu doğruya bir ve ancak bir paralel çizilebileceği gösterilebilir.

Eğer, metrik tansörün elemanları $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ şeklinde keyfî bır takım fonksiyonlar olmak üzere, (II.4.6) şeklinde bir ifâde verilirse $g_{\mu\nu}$ leri δ_{pq} lere dönüştürecek tek değerli, sürekli, sürekli türetilebilen ve jakobyeni sıfırdan farklı bir koordinat dönüşümü bulmak genellikle imkânsızdır. Böyle bir imkânsızlığın vukûunda

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)\, d\bar{x}^{\mu} d\bar{x}^{\nu}$$

metriğının öklitsel olmayan bir metrik olduğu ve buna da N boyutlu *«öklitsel olmayan»* bir uzayın tekaabül ettiği söylenir. Bu uzayın öklitsel uzaydan farklı bir geometrik yapısı vardır. Öklitsel uzayda iki nokta arasındaki en kısa yol bu iki noktadan geçen doğrudur. Metrik tansörün elemanlarının, koordinatların keyfî fonksiyonları olarak belirlendiği öklitsel olmayan bir uzaya *«Riemannsal bir uzay»* veyâ *Riemann* uzayı adı verilir, ve bu cins uzaylarda iki nokta arasında genellikle bir doğru çizmek imkânsızdır. Bununla beraber iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı temsil eden yâni doğruların öklitsel geometride oynadığı rolü burada oynayan eğri aileleri vardır ki bunlara göz önüne alınan uzayın *geodezik*leri adı verilir. Riemannsal uzaylarda iki nokta arasında birden fazla geodeziğin geçebildiği, verilen bir geodezik dışında alınan bir noktadan buna ya sıfır ya da sonsuz paralelin çizilebildiği gösterilebilir. Bundan başka, öklitsel uzayın *«düz»* olmasına karşılık Riemannsal uzayların «eğrilik» vasfını ve bazan da «büküm»ü haiz olduğu gösterilir. Özellikle Genel Rölâtivite Teorisinde uzay-zamanı temsil eden dört boyutlu uzayın Riemannsal bir uzay olduğu gösterilmektedir. Riemannsal bir uzayın geodeziklerinin özelliklerine Varyasyonlar Hesabı bahsinde daha etraflı bir şekilde temas edeceğiz.

Eğer keyfî olarak önceden vaz olunmuş bir metriğin katsayıları (yâni metrik tansörün elemanları) koordinatların keyfî bir takım fonksiyonları olmaktan başka bir de bunların belirli bir parametreye göre türevlerinin de fonsiyonları iseler böyle bir matriğin temsil ettiği geometriye de *«Finslersel geometri»* veyâ *Finsler* geometrisi adı verilir.

(II.5) TANSÖRLERİN FİZİKSEL BİLEŞENLERİ.

Koordinat değişkenleri diferansiyellerinin kontravaryant vektörler gibi dönüştüklerini görmüştük. Bu gibi diferansiyeller genellikle bir öteleme hareketi temsil etmektedirler. Fakat (II.1.1) gibi genel bır koordinat dönüşümünde koordinat değişkenleri açılar da olabilirler ve bu itibarla da bunlara tekaabül eden diferansiyeller âşikâr olarak herhangi bir öteleme hareketini temsil etmezler. Bundan başka $\underline{\vec{e}}$ vektörlerinin de birim vektörler olması beklenemez.

Buna mukaabil fizikçileri, genellikle, öteleme hareketine tekaabül eden büyüklükler ilgilendirir. Bir vektör, ya da tansörün bu cins bileşenlerine *fiziksel bileşenler* adı verilir. Bunlar ilgi çekici özellikleri haiz olurlar. Eğer $\underline{\vec{u}}_p$ ile, $\underline{\vec{e}}_p$ taban vektörleri boyunca birim vektörleri gösterecek olursak $\overline{A}^p$ gibi vektörün ${}^*\overline{A}_p$ fiziksel bileşenleri

$$\overline{A}^p \underline{\vec{e}}_p = {}^*\overline{A}_p \underline{\vec{u}}_p \tag{II.5.1}$$

bağıntısıyla tanımlanırlar. Özellikle

$$\overline{dx^p}\;\underline{\vec{e}}_p = {}^*(\overline{dx^p})\;\underline{\vec{u}}_p$$

olur. Buradaki $(\overline{dx^p})$, $\overline{dx^p}$ ye tekaabül eden öteleme miktarına işâret etmektedir.

$\overline{A}^p$ ile ${}^*A_p$ arasındaki açık bağıntı kolaylıkla tesbit edilir. Gerçekten

$$\underline{\vec{e}}_p \cdot \underline{\vec{e}}_q = g_{pq}$$

olduğundan

$$|\underline{\vec{e}}_p| = \sqrt{g_{pp}} \quad \text{(p üzerinden toplam yok).}$$

demektir. Şu hâlde

$$\underline{\vec{e}}_p = \sqrt{g_{pp}}\;\underline{\vec{u}}_p \quad \text{(p üzerinden toplam yok).}$$

olacaktır. Bu ise

$$\overline{A}^p \underline{\vec{e}}_p = \overline{A}^p \sqrt{g_{pp}}\;\underline{\vec{u}}_p = {}^*\overline{A}_p\,\underline{\vec{u}}_p$$

yâni

$${}^*\overline{A}_p = \sqrt{g_{pp}}\;\overline{A}^p \tag{II.5.2}$$

olması demektir. Benzer şekilde

$$^{*}(d\bar{x}^{p})=\sqrt{g_{pp}}\;d\bar{x}^{p}$$

olur.

m-ninci mertebeden bir tansör m vektörün aralarında tansörel çarpımlarının sonucu olarak telâkkî olunabildiğinden, meselâ ikinci mertebeden kontravaryant bir tansör için fiziksel bileşenler de

$$^{*}A_{pq}=\sqrt{g_{pp}\,g_{qq}}\;A^{pq}$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Meselâ silindirik koordinat sisteminde

$$g_{11}=1\,;\quad g_{22}=r^{2}\,;\quad g_{33}=1$$

ve $\bar{x}^1=r$; $\bar{x}^2=\theta$; $\bar{x}^3=z$ olması dolayısıyla

$$^{*}(d\bar{x}^{1})=dr\,,\quad ^{*}(d\bar{x}^{2})=r\,d\theta\,,\quad ^{*}(d\bar{x}^{3})=dz$$

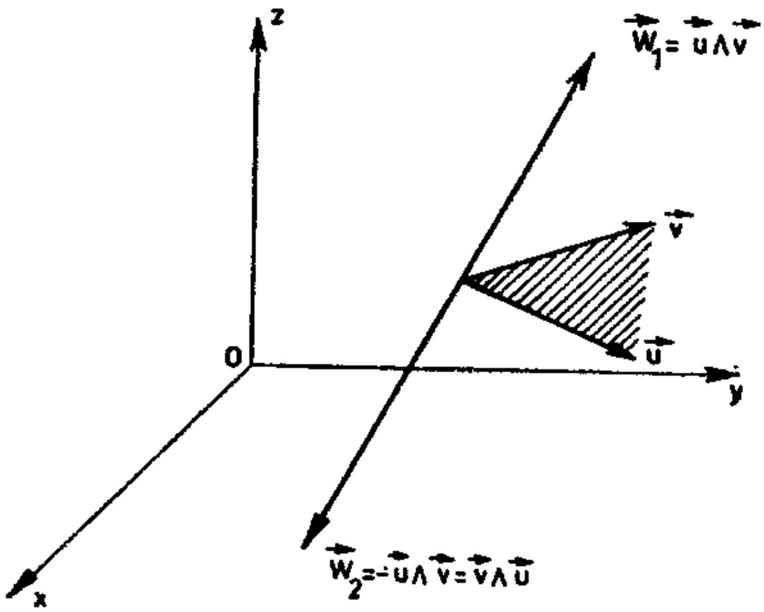
$$^{*}A_{1}=A^{1}\,,\quad ^{*}A_{2}=rA^{2}\,,\quad ^{*}A_{3}=A^{3}$$

olacaktır.

(II.6) İZAFÎ TANSÖRLER VE TANSÖR YOĞUNLUKLARI.

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi iki vektörün $\vec{u}\wedge\vec{v}$ vektörel çarpımı gerek $\vec{u}$, gerekse $\vec{v}$ ye dik ve uzunluğu da $|\vec{u}|.|\vec{v}|\,\sin(\vec{u},\vec{v})$ ile verilmiş olan bir vektördür. Ancak Şekil: II.1 den de görüldüğü gibi bu özelliği haiz fakat biribirlerine zıt yönde iki vektör vardır. İki vektörün vektörel çarpımını tek bir şekilde tanımlayabilmek üzere bu iki vektörden, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ile bir sağ el üçlüsü meydan getirecek sûrette olanı $\vec{u}\wedge\vec{v}$ nin temsilcisi olarak seçilir.

Eğer x ekseni (y,z) düzlemine göre yansıtılırsa, yâni bir sağ el sistemi yerine bir sol el sistemi alınacak olursa, bu koordinat dönüşümünün neticesinde $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ nin vektörel çarpımını $\vec{W}_2$ temsil eder. Bu itibarla iki vektörün vektörel çarpımı olan bir vektörün, bir sağ el sisteminden bir sol el sistemine geçildiğinde, âdî bir vektörün aksine işâret değiştirdiği görülmektedir. Bu türlü vektörlere *eksenel vektörler* adı verilir. Âdî vektörlere ise *kutupsal vektörler* denir, Dik bir koordinat sistemine göre ve 3 boyutlu uzayda $\vec{W}=\vec{u} \wedge \vec{v}$ nin bileşenleri



Şek. II. 1

$$W_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 ; \quad W_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 ; \quad W_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

dir; buna benzer şekilde bir F vektörünüu rotasyoneli de bileşenleri

$$(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F})_1 = \frac{\partial F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial F_2}{\partial x^3} ; \quad (\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F})_2 = \frac{\partial F_1}{\partial x^3} - \frac{\partial F_3}{\partial x^1} ; \quad (\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F})_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial x^2}$$

olan eksenel bir vektördür.

Tansör hesabı bakımından eksenel bir vektör her zaman 2. mertebeden çarpık-bakışımlı bir tansörle gösterilebilir; bu takdirde

$$W_{pq} = u_p v_q - u_q v_p$$

$$R^p{}_q = \frac{\partial F_q}{\partial x^p} - \frac{\partial F_p}{\partial x^q} = \partial^p F_q - \partial^q F_p$$

yazılabilir. Bu türlü tanımlanmış olan tansörlerin bir koordinat dönüşümünde nasıl değişeceklerine bakalım. Eğer göz önüne alınan koordinat dönüşümü bir yansımaya tekaabül ediyorsa bu takdirde tansörler (—1) ile çarpılacaklardır; yâni meselâ

$$\overline{W}_{pq} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^q} (-1)\, W_{rs}$$

$$\overline{R}^p{}_q = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^p} (-1)\, R_s{}^r$$

olacaktır. Böyle bir dönüşümün jakobyeninin de $|J| = -1$ olduğuna dikkati çekelim.

Daha genel bir tarzda, eğer jacobyeni $|J|$ olan bir dönüşümde $T_{rs} \ldots$ gibi büyüklükler

$$\overline{T}_{pq} \ldots = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^q} \ldots\ldots |J|^\alpha\, T_{rs} \ldots \qquad \text{(II.6.1)}$$

şeklinde değişiyorsa $T_{rs} \ldots$ ye α *ağırlığını* haiz bir *izâfî tansör* adı verilir. $\alpha = 1$ olursa $T_{rs} \ldots$, *tansör yoğunluğu* adını alır. $\alpha = 0$ olması hâlinde de *mutlak tansör* denir.

Kolaylıkla görülebilir ki

1) Aynı mertebe ve aynı ağırlığı haiz izâfî tansörlerin toplamı ve farkı da aynı mertebeden ve aynı ağırlıklı izâfî bir tansördür,

2) M-ninci ve N-ninci mertebeden ve sırasıyla α ve β ağırlıklarını haiz iki tansörün çarpımı $(M+N)$-inci mertebeden ve $\alpha+\beta$ ağırlıklı bir tansördür.

3) İzâfî bir tansörün tâbî tutulduğu büzülme işlemi sonucu elde edilen tansör ilkiyle aynı ağırlığa mâliktir.

Analizden bilindiği gibi

$$dV = dx^1 dx^2 \cdots dx^N$$

kartezyen hacım elemanı bir koordinat dönüşümü sonucu

$$d\overline{V} = |J|^{-1}\, dV \qquad \text{(II.6.2)}$$

ifâdesine dönüştüğü için hacım elemanının bir koordinat dönüşümünde invaryant kalan bir skaler gibi değil de $\alpha = -1$ ağırlıklı bir «*yalancı skaler*» gibi değiştiği söylenir. Buna karşılık $|J|\, dV$ ifâdesinin bir koordinat dönüşümünde mutlak bir skaler gibi dönüşeceğine dikkat ediniz.

Şimdi, bir tansör yoğunluğu olan *Levi - Civita* sembolünü göz önüne alalım.

$$\varepsilon^{p_1 p_2 \ldots\ldots p_n}$$

ile gösterilen bu sembol

1) eğer herhangi iki indis eşit olursa sıfır olur;

2) $(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n)$ dizisi $(1,2, \ldots\ldots, n)$ dizisinin çift bir permütasyonuna tekaabül ederse $+1$ değerini alır;

3) $(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n)$ dizisi $(1,2, \ldots\ldots, n)$ dizisinin tek bir permütasyonuna tekaabül ederse: -1 değerini alır.

Bu itibarla meselâ

$$\varepsilon^{123}=1\,; \quad \varepsilon^{312}=1\,; \quad \varepsilon^{231}=1\,, \quad \varepsilon^{132}=-1\,; \quad \varepsilon^{321}=-1\,; \quad \varepsilon^{122}=0$$

olur.

Bu sembol yardımıyla determinatların açılımı kolayca yazılabilir: meselâ:

$$\begin{vmatrix} a_1^{\,1} & a_1^{\,2} & a_1^{\,3} \\ a_2^{\,1} & a_2^{\,2} & a_2^{\,3} \\ a_3^{\,1} & a_3^{\,2} & a_3^{\,3} \end{vmatrix} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\, a^1{}_\lambda\, a^2{}_\mu\, a^3{}_\nu$$

dür.

m-li vektör diye her indis çiftine göre çarpık-bakışımlı olan m-ninci mertebeden tansörlere denir. Bu ifâde tarzına göre ikinci mertebeden küçük tansörlere de (skalerlere: $m=0$; vektörlere: $m=1$) m-li vektör denilecektir. N boyutlu uzayda, $0 \leqq m \leqq N$ olmak üzere m-li her $V_{p_1 p_2 \ldots\ldots p_m}$ ya da $V^{p_1 p_2 \ldots\ldots p_m}$ vektörüne Levi-Civita sembolü yardımıyla

$$V^{q_1 q_2 \ldots\ldots q_{N-m}} = \frac{1}{m!}\, \varepsilon^{q_1 q_2 \ldots\ldots q_{N-m}\, p_1 p_2 \ldots\ldots p_m}\, V_{p_1 p_2 \ldots\ldots p_m}$$

$$V_{q_1 q_2 \ldots\ldots q_{N-m}} = \frac{1}{m!}\, \varepsilon_{p_1 p_2 \ldots\ldots p_m\, q_1 q_2 \ldots\ldots q_{N-m}}\, V^{p_1 p_2 \ldots\ldots p_m}$$

$(N-m)$-li vektörleri tekaabül ettirilebilir. Bunlara V nin *düal* vektörleri adı verilir. Özellikle $T_{p_1 p_2 \ldots\ldots p_N}$ gibi N li bir vektörün düali

$$T = \frac{1}{N!}\, \varepsilon^{p_1 p_2 \ldots\ldots p_N}\, T_{p_1 p_2 \ldots\ldots p_N}$$

şeklinde bir skalerdir.

Faydalı bir formül olarak Levi-Civita sembolünün Kroenecker sembolleri cinsinden

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \ldots\ldots p_N} = \begin{Vmatrix} \delta_{1p_1} & \delta_{1p_2} & \cdots\cdots & \delta_{1p_N} \\ \delta_{2p_1} & \delta_{2p_2} & \cdots\cdots & \delta_{2p_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{Np_1} & \delta_{Np_2} & \cdots\cdots & \delta_{Np_N} \end{Vmatrix} \qquad \text{(II.6.3)}$$

şeklinde yazılabileceğine de işâret edelim.

(II.7) KONTRAVARYANT VE KOVARYANT TÜREV.

N boyutlu öklitsel bir uzayda bir **K** dik kartezyen koordinat sisteminde bir $P(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ noktasına bağlı bir $\vec{A}$ vektörünün bileşenleri x koordinatlarının sürekli fonksiyonları olsunlar. Eğer

$$\bar{x}^p = \bar{x}^p(x^1, x^2, \ldots\ldots, N^N)$$
$$(p = 1, 2, \ldots\ldots, N)$$

gibi bir koordinat dönüşümüyle dik kartezyen **K** koordinat sisteminden eğrisel bir **K**′ koordinat sistemine geçilirse $\vec{A}$ nın bu sistemde haiz olduğu $\bar{A}^p(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^N)$ bileşenleri de $\bar{x}^q$ koordinatlarının sürekli fonksiyonları olurlar. **K**′ nün birim taban vektörlerini $\vec{\underline{e}}_p$ ile gösterirsek bu sistemde $\vec{A}$

$$\vec{A} = \bar{A}^p \vec{\underline{e}}_p \qquad \text{(II.7.1)}$$

ile temsil olunacaktır. Şimdi amacımız, $P(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots\ldots, \bar{x}^N)$ noktası

$$P'\left(\bar{x}^1 + \Delta\bar{x}^1,\ \bar{x}^2 + \Delta\bar{x}^2, \ldots\ldots, \bar{x}^N + \Delta\bar{x}^N\right)$$

durumunda olursa acaba $\vec{A}$ da vukuu bularak $\Delta\vec{A}$ değişimi nedir, onu tesbit etmektedir. Bu takdirde (II.7.1) den

$$\Delta\vec{A} = (\bar{A}^p + \Delta\bar{A}^p)(\vec{e}_p + \Delta\vec{e}_p) - \bar{A}^p\,\vec{e}_p$$
$$= \vec{e}_p \cdot \Delta\bar{A}^p + \bar{A}^p \cdot \Delta\vec{e}_p + (\Delta\bar{A}^p)(\Delta\vec{e}_p)$$

bulunur. $\Delta\vec{x}^p \to 0$ için $(\Delta\bar{A}^p)(\Delta\vec{e}_p)$ ikinci mertebeden bir sonsuz küçük olduğundan daha çabuk sıfıra gider. Şu hâlde $\vec{A}$ nın $\mathbf{K}'$ koordinat sistemine göre değişiminin esas kısmı, yâni diferansiyeli

$$d\vec{A} = \vec{e}_p \cdot \Delta\bar{A}^p + \bar{A}^p \cdot \Delta\vec{e}_p \qquad \text{(II.7.2)}$$

dir. Böylece $\vec{A}$ daki $d\vec{A}$ değişiminin $\bar{x}^p$ değerlerinin değişmesiyle $\bar{A}^p$ bileşenlerinin değişmesinden ve keză $\bar{x}^p$ noktasının değişmesi sebebiyle $\vec{e}_p$ birim vektörlerinde vukuu bulan değişmelerden ileri geldiğini görüyoruz.

$\vec{A}$ nın $\bar{x}^q$ ya göre kısmî türevini

$$\lim_{\Delta\bar{x}^q \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta\bar{x}^q} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta\bar{x}^q}$$

diye tanımlayacağız; bu takdirde (II.7.2) den

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta\bar{x}^q} = \vec{e}_p\,\frac{\partial\bar{A}^p}{\partial\bar{x}^q} + \frac{\partial\vec{e}_p}{\partial\bar{x}^q}\,\bar{A}^p \qquad \text{(II.7.3)}$$

olur.

$\vec{e}_p$ birim taban vektörlerinin $\bar{x}^q$ ya göre kısmî türevleri gene $\vec{e}_p$ birim taban vektörleri cinsinden yazılabilirler. Eğer bu kısmî türevlerin $\mathbf{K}'$ nün eksenleri üzerine izdüşümlerini $\Gamma^k{}_{pq}$ ile gösterirsek

$$\frac{\partial\vec{e}_p}{\partial\bar{x}^q} = \Gamma^k{}_{pq}\,\vec{e}_k \qquad \text{(II.7.4)}$$

yazılabilir. Fakat (II.4.3) e göre

$$g_{pq} = \vec{e}_p \cdot \vec{e}_q$$

olduğundan

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^s} = \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x^s} \cdot \vec{e}_q + \vec{e}_p \cdot \frac{\partial \vec{e}_q}{\partial x^s} \qquad \text{(II.7.5)}$$

dir. Bu formüldeki indisleri permütasyona tâbî tutarak

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^q} = \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x^q} \vec{e}_s + \vec{e}_p \cdot \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial x^q} \qquad \text{(II.7.6)}$$

$$\frac{\partial g_{qs}}{\partial x^p} = \frac{\partial \vec{e}_q}{\partial x^p} \cdot \vec{e}_s + \vec{e}_q \cdot \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial x^p} \qquad \text{(II.7.7)}$$

elde edilir. $\vec{r}$ yervektörü $\vec{r} = x^p \vec{e}_p$ olmak hasebiyle $\partial\vec{r}/\partial x^p = \vec{e}_p$ olduğundan

$$\frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x^q} = \frac{\partial}{\partial x^q}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^p}\right) = \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^q}\right) = \frac{\partial \vec{e}_q}{\partial x^p}$$

dir. Buna göre (II.7.5) ve (II.7.7) yerine

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^s} = \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x^s} \cdot \vec{e}_q + \vec{e}_p \cdot \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial x^q} \qquad \text{(II.7.5')}$$

$$\frac{\partial g_{qs}}{\partial x^p} = \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x^q} \cdot \vec{e}_s + \vec{e}_q \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x^s} \qquad \text{(II.7.7')}$$

yazılabilir. (II.7.5'), (II.7.6) ve (II.7.7') den

$$\frac{\partial \vec{e}_p}{\partial x^q} \cdot \vec{e}_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qs}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^s}\right) = \Gamma_{pq,s} \qquad \text{(II.7.8)}$$

elde edilir. (II.7.4) e göre

$$\frac{\partial \vec{e}_p}{\partial \bar{x}^q} \cdot \vec{e}_s = \Gamma^k{}_{pq} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_s = \Gamma^k{}_{pq}\, g_{ks} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial g_{qs}}{\partial \bar{x}^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial \bar{x}^s}\right) \qquad \text{(II.7.8')}$$

ve bu ifâdeyi g^{sr} ile çarparak

$$\Gamma^k{}_{pq}\, g_{ks}\, g^{sr} = \Gamma^k{}_{pq}\, \delta_k{}^r = \Gamma^r{}_{pq} = \frac{1}{2}\, g^{rs}\left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial g_{qs}}{\partial \bar{x}^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial \bar{x}^s}\right) \qquad \text{(II.7.9)}$$

bulunur. (II.7.8) ve (II.7.9) ifâdeleriyle tanımlanan $\Gamma_{pq,s}$ ye $\Gamma^r{}_{pq}$ büyüklüklerine sırasıyla *birinci ve ikinci cins Christoffel sembolleri* adı verilir. Bunlar yardımıyla artık, $\vec{A}$ nın **K**$'$ de $\bar{x}^p$ ya göre kısmî türevini veren (II.7.3) ifâdesi

$$\frac{\delta \vec{A}}{\delta \bar{x}^q} = \vec{e}_p \frac{\partial \bar{A}^p}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial \bar{x}^q} \bar{A}^p = \vec{e}_p \frac{\partial \bar{A}^p}{\partial \bar{x}^q} + \Gamma^r{}_{pq} \vec{e}_r \bar{A}^p$$

$$= \left[\frac{\partial \bar{A}^r}{\partial \bar{x}^q} + \Gamma^r{}_{pq} \bar{A}^p\right] \vec{e}_r \qquad \text{(II.7.10)}$$

şekline girer.

Eğer $\vec{A}$ kartezyen bir sisteme göre belirlenmişse böyle bir sistem için metrik tansörün elemanları sâbit olduğundan Christoffel sembolleri sıfırdır ve (II.7.10) da

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^q} = \frac{\partial A^r}{\partial x^q} \vec{e}_r$$

ifâdesine müncer olur. Bu ise bir kartezyen koordinat sisteminde $\vec{A}$ nın x^q ya göre türevinin, bileşenleri $\vec{A}$ nın bileşenlerinin x^q göre kısmî türevleri olan bir tansör olduğunu göstermektedir. Eğrisel bir koordinat sisteminde de (II.7.10) ifâdesini, türev tanımını genelleştirerek aynı şekilde yorumlayabiliriz. Gerçekten de eğer

$$\frac{\delta A^r}{\delta \bar{x}^q} = \nabla_q \bar{A}^r = \bar{A}^r{}_{;q} = \frac{\partial \bar{A}^r}{\partial \bar{x}^q} + \Gamma^r{}_{pq} \bar{A}^p \qquad \text{(II.7.11)}$$

ile bir vektörün bileşenlerinin *kontravaryant türevini* ya da *kontravaryant mutlak türevini* tanımlayacak olursak (II.7.10) ifâdesi bir koordinat sisteminde $\vec{A}$ nın $\bar{x}^q$ ya göre türevinin, bileşenleri $\vec{A}$ nın bileşenlerinin $\overline{x}^q$ ya göre kontravaryant türevleri olan bir tansör olduğunu göstermektedir.

∇_q mutlak türev operatörü tıpkı âdî türev operatörü gibi hem dağıtıcıdır ve hem de çarpımları zincir kuralına göre türetir; meselâ :

$$\nabla_q(\overline{A}^p+\overline{B}^r)=\nabla_q\overline{A}^p+\nabla_q\overline{B}^r$$

$$\nabla_q(\overline{A}^p\overline{B}_r)=(\nabla_q\overline{A}^p)\overline{B}_r+\overline{A}^p(\nabla_q\overline{B}_r)$$

dir. (II.7.11)e benzer şekilde kovaryant mutlak türev de

$$\nabla_q\overline{A}_p=\overline{A}_{p;q}=\frac{\partial\overline{A}_p}{\partial\overline{x}^q}-\Gamma^r{}_{qp}\overline{A}_r \qquad \text{(II.7.12)}$$

şeklinde tanımlanır.

Mutlak türevin âdî türevi özel bir hâl olarak kapsaması ($\Gamma^r{}_{qp}=0$) bunun çok daha genel bir türev kavramı olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan mutlak türev tansör vasfını da haizdir. Gerçekten, (II.7.10) ifâdesinden $\vec{A}$ nın $\delta\vec{A}$ değişimi için

$$\delta\vec{A}=(\nabla_q\overline{A}^p)\delta\overline{x}^q\,\underline{\vec{e}_p}$$

ya da

$$\delta\vec{A}\cdot\underline{\vec{e}_s}=\delta\overline{A}^s=(\nabla_q\overline{A}^p)\delta\overline{x}^q\,\underline{\vec{e}_p}\cdot\underline{\vec{e}_s}=(\nabla_q\overline{A}^p)\delta\overline{x}^q g_{ps}=(\nabla_q\overline{A}^s)\delta\overline{x}^q$$

yazılabilir. Oysa ki bu ifâdenin sol yanı kontravaryant bir vektördür. Sağ yanındaki $d\overline{x}^q$ de kontravaryant bir vektördür. Parantez içindeki ifâde ise iki indise bağlı olup bunlardan biri ile $d\overline{x}^q$ üzerinden kontraksiyon (büzülüm) yapıldığından tansörlük kriteryumuna göre ($\nabla_q\overline{A}^s$) nin ikinci mertebeden bir tansör olduğu anlaşılmış olur.

Vektörler için tanımını gördüğümüz mutlak türev kavramını mertebesi iki ya da daha büyük olan tansörlere de genelleştirmek mümkündür. Bunun için ikinci mertebeden $A_p{}^q$ diye karma bir tansör ile $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi sâbit iki vektörün ($\nabla u^p\equiv\nabla v_q\equiv 0$) büzülmüş çarpımlarının mutlak türevlerini alalım. Bu çarpım bir skaler olduğundan bunun üzerinde yapılan cebirsel işlemler koordinat sistemine bağlı değildirler ve özellikle $\nabla_r(A_p{}^q u^p v_q)$ mutlak türevi de burada âdî $d(A_p{}^q u^p v_q)/dx^r$ türevine indirgenir. Şu hâlde

$$\nabla_s(A_p{}^q u^p v_q) \equiv \frac{\partial}{\partial x^s}(A_p{}^q u^p v_q) = \frac{\partial A_p{}^q}{\partial x^s} u^p v_q + A_p{}^q \frac{\partial u^p}{\partial x^s} v_q + A_p{}^q u^p \frac{\partial v_q}{\partial x^s}$$

dir; fakat:

$$\nabla_s u^p = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u^p}{\partial x^s} = -\Gamma^p{}_{ms}\, u^m$$

$$\nabla_s v_q = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_q}{\partial x^s} = \Gamma^m{}_{qs}\, v_m$$

olduğundan, ve icâbında toplama indislerini değiştirerek

$$\nabla_s(A_p{}^q u^p v_q) = u^p v_q(\nabla_s A_p{}^q) = \frac{\partial A_p{}^q}{\partial x^s} u^p v_q + A_p{}^q \frac{\partial u^p}{\partial x^s} v_q + A_p{}^q u^p \frac{\partial v_q}{\partial x^s}$$

$$= u^p v_q \frac{\partial A_p{}^q}{\partial x^s} - A_p{}^q v_q\, \Gamma^p{}_{ms} u^m + A_p{}^q u^p\, \Gamma^m{}_{qs} v_m$$

$$= u^p v_q \left[\frac{\partial A_p{}^q}{\partial x^s} - A_m{}^q\, \Gamma^m{}_{ps} + A^m{}_p\, \Gamma^q{}_{ms} \right]$$

bulunur. Bu ifâde

$$\nabla_s A_p{}^q = A^q{}_{p;s} = \frac{\partial A_p{}^q}{\partial x^s} - A_m{}^q\, \Gamma^m{}_{ps} + A_p{}^m\, \Gamma^q{}_{ms}$$

olduğunu gösterir. Bunun üçüncü merteben bir tansör olduğu âşikârdır. Herhangi bir mertebeden bir karma tansörün mutlak türevi de benzer şekilde ve aynı esaslara göre kolaylıkla tanımlanır.

Birim vektörlerin mutlak türevini alalım; (II.7.4) ü de hesaba katarak

$$\nabla_q \underline{\vec{e}_p} = \frac{\partial \underline{\vec{e}_p}}{\partial x^q} - \Gamma^k{}_{pq} \underline{\vec{e}_k} = 0$$

olur. Buna göre

$$g_{pq;s} = \nabla_s(\vec{e}_p \cdot \vec{e}_q) = (\nabla_s \underline{\vec{e}_p}) \cdot \underline{\vec{e}_q} + \underline{\vec{e}_p} \cdot (\nabla_s \underline{\vec{e}_q}) \equiv 0 \qquad \text{(II.7.13)}$$

olur; yâni metrik tansörün mutlak türevi özdeş olarak sıfırdır. Bu önemli özelliğin ifâdesine «*Ricci Teoremi*» adı verilmektedir.

Daha yüksek mertebeden mutlak türevler de gene aynı esaslar içinde kolaylıkla tanımlanabilirler.

Bu bahsi kapamadan önce Cristoffel sembollerinin içyüzlerini daha açık bir şekilde tesbit etmek istiyoruz. Bu itibarla, ikinci mertebeden bakışımlı bir tansör olan metrik tansörün bir koordinat dönüşümünde

$$\bar{g}_{pq} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} g_{rs}$$

şeklinde değişeceğine işâret edelim. Buradan

$$\frac{\partial \bar{g}_{pq}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} g_{rs} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^q \partial \bar{x}^m} g_{rs} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^n}$$

bulunur. Buradan

$$\bar{\Gamma}_{pq,s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{ps}}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial \bar{g}_{qs}}{\partial \bar{x}^p} - \frac{\partial \bar{g}_{pq}}{\partial \bar{x}^s}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^s} \Gamma_{ab,c} + g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \qquad \text{(II.7.14)}$$

elde edilir. Bu, Christoffel sembollerinin dönüşüm formüllerinden ibârek olup açıkça görüldüğü üzere sağ yandaki terim özdeş olarak sıfır olmadıkça $\Gamma_{ab,c}$ lerin ve dolayısıyla

$$\Gamma^d{}_{ab} = g^{dc} \Gamma_{ab,c}$$

lerin tansör olmadıklarına delâlet etmektedir. Christoffel sembollerinin tansör vasfını haiz olabilmeleri için, indislerin değeri ne olursa olsun,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ya} & g_{ab} \equiv 0 \\ \text{ya} & \dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^s} \equiv 0 \\ \text{ya da} & \dfrac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \equiv 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(II.7.15)}$$

olmalıdır. Bunlardan ilk ikisi, gerçek bir dönüşüm göz önüne alındığında, anlamsızdır. Sonuncusu ise dönüşümün lineer olması gerektiğini gösterir:

$$x^b = a^b{}_f \, \bar{x}^f \qquad (b=1,2,\cdots,N) \qquad \text{(II.7.16)}$$

Bu şekildeki bir dönüşüme *afin dönüşüm* adı verilmektedir. Afin dönüşüm katsayılar cetveli, elemanları sâbitlerden oluşmuş bir matrisle gösterilmektedir. Katsayıların sâbitler olması bu matrisin uygun bır diklik dönüşümü yardımıyla köşegenleştirildiğinde, elde edılen köşegen matrisin köşegen elemanlarının da sâbitler olmasını garantiler. Hâlbuki son keyfiyet öklitsel metriği karakterize eden niteliktir. Dolayısıyla *Christoffel sembolleri ancak öklitsel uzaylar için tansör vasfını haizdirler.*

Christoffel sembollerinin

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{pq,s} &= \Gamma_{qp,s} \\ \Gamma^s{}_{pq} &= \Gamma^s{}_{qp} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.7.17)}$$

şeklinde bakışım özelliklerini haiz oldukları, bunların tanım bağıntıları yardımıyla kolaylıkla tesbit olunur.

(II.8) ÖNEMLİ DİFERANSİYEL OPERATÖRLER.

Âdî vektör hesabında Φ gibi skaler bir fonksiyona

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi = \vec{e}_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x^1} + \vec{e}_2 \frac{\partial\Phi}{\partial x^2} + \vec{e}_3 \frac{\partial\Phi}{\partial x^3} = (\partial^p\Phi)\,\vec{e}_p$$

şeklinde tanımlanan bir vektör tekaabül ettirilir. Buna *gradyent vektörü* adı verilir. Eğrisel koordinatlarda gradyent vektörünün, bir skaler üzerine uygulanan mutlak türev operatörünün âdı türev operatöründen farklı olmaması dolayısıyla N boyutlu bir uzayda

$$\mathbf{Grad}_p\,\Phi = \nabla_p\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^p} = \partial_p\Phi \qquad (p=1,2,\ldots,N)$$

şeklinde tanımlanacağı ve bunun kontravaryant bileşenlerinin de

$$\nabla^p\Phi = g^{pq}\,\nabla_q\Phi = g^{pq}\,\partial_q\,\Phi \qquad \text{(II.8.1)}$$

olduğu âşikârdır.

Gene âdî vektör hesabında bir vektörün *diverjansı* diye

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} = \partial^p A_p$$

skaleri anlaşılmaktadır. Eğrisel koordinatlarda ve N boyutlu uzay için diverjans

$$\mathrm{Div}\,\vec{A} = \nabla_p \bar{A}^p = \partial_p \bar{A}^p + \Gamma^p{}_{pq} \bar{A}^q \qquad \text{(II.8.2)}$$

diye tanımlanacaktır.

Bunun daha açık bir ifâdesini elde etmek amacıyla Christoffel sembollerinin bazı yararlı özeliklerini tesis etmek gerekir. Bunun için Ricci teoremini açıkça yazalım:

$$\nabla_s g_{pq} = \partial_s g_{pq} - \Gamma^r{}_{ps}\, g_{rq} - \Gamma^r{}_{qs}\, g_{pr} \equiv 0$$

Bu ifâdeyi g^{pq} ile çarpalım:

$$g^{pq}\, \partial_s g_{pq} - g^{pq}\, g_{rq}\, \Gamma^r{}_{ps} - g^{pq}\, g_{pr}\, \Gamma^r{}_{qs} = 0$$

$$g^{pq}\, \partial_s g_{pq} - \delta_r{}^p\, \Gamma^r{}_{ps} - \delta_r{}^q\, \Gamma^r{}_{ps} = g^{pq}\, \partial_s\, g_{pq} - \Gamma^p{}_{ps} - \Gamma^q{}_{qs} = 0$$

Yâni

$$g^{pq} \partial_s g_{pq} = \Gamma^p{}_{ps} + \Gamma^q{}_{qs} = 2\Gamma^r{}_{rs}$$

bulunur. Fakat

$$g^{pq} = \frac{g_{pq} \text{ nun kofaktörü}}{|g_{pq}|} = \frac{\text{kof}\,(g_{pq})}{|g_{pq}|}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre

$$\partial_s g = \partial_s (\varepsilon^{p_1 p_2 \dots p_N}\, g_{1p_1} g_{2p_2} \cdots g_{Np_N})$$

$$= \varepsilon^{p_1 p_2 \dots p_N} \left[(\partial_s g_{1p_1}) g_{2p_2} \cdots g_{Np_N} + \cdots + g_{1p_1} g_{2p_2} \cdots (\partial_s g_{Np_N}) \right]$$

$$= \sum_p \sum_q (\partial_s g_{qp}) \times (\text{kof}(g_{pq}))$$

$$= \sum_p \sum_q g\, g^{pq}\, \partial_s g_{pq} = \sum_r 2g\Gamma^r{}_{rs} = 2g\Gamma^r{}_{rs}$$

bululunur. Şu hâlde

$$\Gamma^r{}_{rs} = \frac{1}{2g}\, \partial_s g$$

olur. Diğer taraftan ise

$$\frac{1}{2g}\partial_s g = \frac{1}{2\sqrt{g}\sqrt{g}}\partial_s(\sqrt{g})^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s(\sqrt{g})$$

olduğundan

$$\Gamma^r{}_{rs} = \frac{1}{2g}\partial_s g = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s(\sqrt{g}) = \partial_s(ln\sqrt{g}) \qquad \text{(II.8.3)}$$

bulunur. Bu itibarla da (II.8.2)

$$\begin{aligned}\textbf{Div}\,\underline{\vec{A}} &= \partial_p \bar{A}^p + \Gamma^p{}_{pq}\bar{A}^q \\ &= \partial_p \bar{A}^p + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_q(\sqrt{g})\bar{A}^q\end{aligned}$$

veyâ

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_q(\sqrt{g}\,\bar{A}^q) = \partial_q\bar{A}^q + \frac{\bar{A}^q}{\sqrt{g}}\partial_q\sqrt{g}$$

olması dolayısıyla

$$\textbf{Div}\,\underline{\vec{A}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_q(\bar{A}^q\sqrt{g}) \qquad \text{(II.8.4)}$$

bulunur. Herhangi bir $T^{p_1p_2\ldots p_N}$ tansörünün diverjansı da

$$\textbf{Div}\,T^{p_1p_2\ldots p_N} = \nabla_{p_N} T^{p_1p_2\ldots p_{N-1}p_N}$$

şeklinde $(N-1)$-inci mertebeden bir tansör olarak tanımlanır.

$T_{p_1p_2\ldots p_N}$ gibi N-ninci mertebeden kovaryant bir tansör verildiğinde

$$\frac{1}{m!}\,\varepsilon_{q_1q_2\ldots q_{N+1}}\,\varepsilon^{p_1p_2\ldots p_N}\,\nabla_p T_{p_1p_2\ldots p_N} \qquad \text{(II.8.5)}$$

şeklinde tanımlanan $(m+1)$-li vektöre göz önüne alınan tansörün rotasyoneli adı verilir. Bu tanıma binâen eğer göz önüne alınan tansör φ gibi bir skaler ise bunun rotasyonelinin, (II.6.3) ü göz önünde tutarak

$$\frac{1}{0!}\,\delta^{pq}\,\nabla_p\varphi = \nabla_q\varphi = \overrightarrow{\textbf{Grad}}\;\varphi$$

ye müncer olduğu görülmektedir.

φ gibi skaler bir fonksiyonun lâplâsyeninin ifâdesini de genel koordinatlara aktarabiliriz. Gerçekten de (II.8.4) ü göz önünde tutarak

$$\begin{aligned}\text{Lap}\ \varphi = \text{Div Grad}\ \varphi &= \nabla_p(g^{pq}\,\partial_q\varphi) = \nabla_p\,\partial^p\varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_p(\sqrt{g}\;\partial^p\varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_p(\sqrt{g}\;g^{pq}\,\partial_q\varphi)\end{aligned} \qquad \text{(II.8.6)}$$

bulunur.

Örnek: Silindirik koordinatlar için Φ gibi bir skalerin gradyentinin ve lâplâsyeninin ve $\vec{A}$ gibi bir vektörün de diverjansının açık ifâdelerini bulunuz.

$$x = \rho\cos\varphi\,,\quad y = \rho\sin\varphi\,,\quad z = z$$

$$dx = -\rho\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,d\rho\,,\quad dy = \rho\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,d\rho\,,\ dz = dz$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (-\rho\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,d\rho)^2 + (\rho\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,d\rho)^2 + dz^2$$

$$= d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 + dz^2$$

$$g = |g_{pq}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2\,;\quad g^{pq} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Bu takdirde $\overrightarrow{grad}\ \varphi$ nin bileşenleri (II.8.1) e binâen

$$(\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi)_1 = g^{11}\,\partial_1\Phi + g^{12}\,\partial_2\Phi + g^{13}\,\partial_3\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + 0 + 0 = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$$

$$(\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi)_2 = g^{21}\,\partial_1\Phi + g^{22}\,\partial_2\Phi + g^{23}\,\partial_3\Phi = 0 + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + 0 = \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

$$(\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi)_3 = g^{31}\,\partial_1\Phi + g^{32}\,\partial_2\Phi + g^{33}\,\partial_3\Phi = 0 + 0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

olur.

$$(\text{div}\,\vec{A}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{q=1}^{3}\frac{\partial(A^q\sqrt{g}\,)}{\partial x^q} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A^1)}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho A^2)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho A^3)}{\partial z}\right] =$$

$$= \frac{\partial A^1}{\partial\rho} + \frac{\partial A^2}{\partial\varphi} + \frac{\partial A^3}{\partial z} + \frac{A^1}{\rho}$$

$$\text{Lap}\,\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{g}\; g^{pq} \frac{\partial \Phi}{\partial x^q}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\,.$$

(II.9) PARALEL VEKTÖR ALANLARI.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörün skaler çarpımını göz önüne alalım.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos(\vec{A},\vec{B})$$

$$A^p\vec{e}_p \cdot B^q\vec{e}_q = \sqrt{[A^p\vec{e}_p][A^q\vec{e}_q]}\cdot\sqrt{[B^q\vec{e}_q][B^p\vec{e}_p]}\cdot\cos(\vec{A},\vec{B})$$

$$g_{pq}A^pB^q = \sqrt{g_{pq}A^pA^q}\cdot\sqrt{g_{pq}B^pB^q}\cdot\cos(\vec{A},\vec{B})$$

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{g_{pq}A^pA^q}\sqrt{g_{pq}B^pB^q}} \qquad \text{(II.9.1)}$$

bulunur.

Şimdi $s_1 \leqq s \leqq s_2$ olmak üzere

$$x^q = x^q(s) \qquad (q = 1, 2, \cdots, N)$$

ile parametrik olarak belirlenen bir G uzay eğrisi ve bir de G boyunca sâbit kalan fakat tekil olmayan bir A^p $(p=1,2,\cdots,N)$ vektörü göz önüne alalım.

A^p vektörünün G boyunca sâbit kalması A_p nin G yi karakterize eden s parametresine göre kontravaryant türevinin sıfır olması demektir :

$$\frac{dA^p}{ds} + \Gamma^p{}_{mn}A^m\frac{dx^n}{ds} = 0\,. \qquad \text{(II.9.2)}$$

Diğer taraftan G nin teğet vektörünün bileşenlerinin de

$$\frac{dx^q}{ds}$$

ile verildiği bilinmektedir. Bu takdirde A_p vektörü ile G nin teğet vektörü olan dx^q/ds nin skaler çarpımı bir skaler olduğundan, bunun s ye göre mutlak türevi sıfır olacaktır. Ricci teoremini ve A^p vektörünün sâbit bir vektör olmak dolayısıyla gerçeklemekte olduğu (II.9.2) bağıntılarını göz önünde bulunduracak olursak

$$0=\nabla_{(s)}\left(g_{pq}A^p\frac{dx^q}{ds}\right)=\left(\nabla_{(s)}g_{pq}\right)A^p\frac{dx^q}{ds}+g_{pq}\left(\nabla_{(s)}A^p\right)\frac{dx^q}{ds}+$$

$$+g_{pq}A^p\left(\nabla_{(s)}\frac{dx^q}{ds}\right)=g_{pq}A^p\left[\frac{d^2x^q}{ds^2}+\Gamma^q_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right] \qquad \text{(II.9.3)}$$

bulunur. Bu takdirde G eğrisinin

$$\frac{d^2x^q}{ds^2}+\Gamma^q_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}=0, \qquad (q=1,2,\cdots,N) \qquad \text{(II.9.4)}$$

bağıntılarını gerçekleyen bir eğri olması lâzım geldiği görülmektedir. (II.9.4) bağıntılarını gerçekleyen her G eğrisine, göz önüne alınan N boyutlu uzayın bir *geodezik eğrisi* adı verilir. Varyasyonlar hesabı bölümünde göreceğimiz veçhile eğrisel uzaylardaki (Riemann uzaylarında = Riemannsal uzaylarda) geodezik eğrileri, yayvan uzaylarda (Euklides uzaylarında = öklitsel uzaylarda) doğruların mâlik oldukları özelliklere sahip eğriler olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle, eğrisel bir uzayın herhangi iki nokta arasındaki en kısa yolun bu noktalardan geçen geodezik eğrisinin bu noktalar arasındaki parçası olduğunu göstereceğiz. Bu itibarla geodezik eğrileri doğruların eğrisel uzaylara genelleştirilmiş hâlleridirler.

(II.9.3) bağıntısı (II.9.1) göz önünde tutulduğu takdirde A^q vektörü ile G nin teğet vektörü arasındaki açının s parametresine göre türevinin de sıfır olduğunu yâni bu açının A^p nin G boyunca kayması esnâsında sâbit kaldığını göstermektedir.

Tersine olarak, bir geodezik eğrisiyle sâbit bir açı teşkil eden $A^p=A^p(s)$ vektörünün de zorunlu olarak sâbit bir vektör olduğu ispatlanır. Nasıl ki yayvan bir uzayda *bir doğru boyunca* kaydırılan sâbit bir vektörün bu doğru ile yaptığı açı sâbit kaldığında göz önüne alınan vektörün kendi kendine paralel bir kayma yâni bir öteleme hareketi yaptığı söyleniyorsa eğrisel bir uzayda da, doğruların daha genel bir hâli olan *bir geodezik eğrisi boyunca* sâbit bir vektörün bu geodezik eğrisi ile yaptığı açı sâbit kalmakta ve dolayısıyla bu keyfiyet de eğrisel uzaylardaki sâbit vektörlerin öteleme hareketlerini karakterize etmektedir.

(II.10) EĞRİLİK TANSÖRÜ

Kovaryant bir A_p vektörünü x^q ye göre mutlak türevinin

$$A_{p;q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^{\alpha}{}_{pq} A_{\alpha} \tag{II.10.1}$$

olduğunu görmüştük. Şimdi (II.10.1) in x^r ye göre mutlak türevini alalım:

$$A_{p;qr} = \frac{\partial A_{p;q}}{\partial x^q} - \Gamma^{\alpha}{}_{rq} A_{\alpha;q} - \Gamma^{\alpha}{}_{qr} A_{p;\alpha} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^{\alpha}{}_{pq} A_{\alpha}\right) - \Gamma^{\alpha}{}_{pr}\left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^q} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha q} A_{\beta}\right) -$$

$$- \Gamma^{\alpha}{}_{qr}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\gamma}{}_{p\alpha} A_{\gamma}\right)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$A_{p;rq} = \frac{\partial A_{p;r}}{\partial x^q} - \Gamma^{\alpha}{}_{pq} A_{\alpha;r} - \Gamma^{\alpha}{}_{rq} A_{p;\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^q}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^r} - \Gamma^{\alpha}{}_{pr} A_{\alpha}\right) - \Gamma^{\alpha}{}_{pq}\left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^r} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha r} A_{\beta}\right)$$

$$- \Gamma^{\alpha}{}_{rq}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\gamma}{}_{p\alpha} A_{\gamma}\right)$$

Bu iki ifâdeyi biribirlerinden çıkartırsak

$$A_{p;qr} - A_{p;rq} = \Gamma^{\alpha}{}_{pr} \Gamma^{\beta}{}_{\alpha q} A_{\beta} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{pq}}{\partial x^r} A_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{pq} \Gamma^{\beta}{}_{\alpha r} A_{\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{pr}}{\partial x^q} A_{\alpha}$$

$$= \left\{ \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{pr}}{\partial x^q} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{pq}}{\partial x^r} + \Gamma^{\beta}{}_{pr} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta q} - \Gamma^{\beta}{}_{pq} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta r} \right\} A_{\alpha}$$

$$= R^{\alpha}{}_{pqr} A_{\alpha} = \left\{ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^q} & \dfrac{\partial}{\partial x^r} \\ \Gamma^{\alpha}{}_{pq} & \Gamma^{\alpha}{}_{pr} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\beta}{}_{pr} & \Gamma^{\beta}{}_{pq} \\ \Gamma^{\alpha}{}_{\beta r} & \Gamma^{\alpha}{}_{\beta q} \end{vmatrix} \right\} A_{\alpha}$$

bulunur. (II.10.2)

(II.10.2) yardımıyla belirlenen $R^{\alpha}{}_{pqr}$ tansörü dördüncü mertebeden bir tansör olup «*Riemann-Christoffel tansörü*» veyâ *eğrilik tansörü*» adını taşımaktadır. Genel olarak

$$R^{\alpha}{}_{pqr} \neq 0$$

dır. Bu itibarla mutlak türev alırken türevin alınış sırası önemli olur. Türevin alınış sırasının önemli olmaması için $R^{\alpha}{}_{pqr}=0$ olması gerektiği âşikârdır. Diğer taraftan eğrilik tansörü sâdece Christoffel sembollerine ve bunların birinci türevlerine yâni g_{pq} lerin birinci ve ikinci türevlerine bağlıdır. Eğer g_{pq} ler sâbitlerden ibâretse ya da sürekli bir koordinat dönüşümü yardımıyla sâbitlere dönüştürülebiliyorlarsa yâni, başka bir deyimle, göz önüne alınan uzay öklitsel bir uzay ise

$$R^{\alpha}{}_{pqr}=0 \tag{II.10.3}$$

olur. Riemann-Cristoffel tansörünün özdeş olarak sıfır olması bunun ait olduğu uzayın öklitsel (yayvan) olmasına, yâni metriğin elemanlarının sâbitlerinden müteşekkil olmasına ; ve bunun sıfırdan farklı olması da metriğin elemanlarının sâbitlere dönüştürülememesine, yâni bunun ait olduğu uzayın Riemannsal (*eğri*) bir uzay olmasına delâlet etmektedir. Bu durum $R^{\alpha}{}_{pqr}$ ye niçin eğrilik tansörü adı verildiğini de aydınlatmaktadır. Şu hâlde (II.10.3) bağıntıları bir uzayın yayvan (öklitsel) olmasını karakterize ederler.

Şimdi

$$R_{kpqr}=g_{k\alpha}\, R^{\alpha}{}_{pqr}$$

ile tanımlanan tansörü gözönüne alalım. Bu tansörün determinant şeklinde

$$R_{kpqr}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^q} & \dfrac{\partial}{\partial x^r} \\ \Gamma_{pq,k} & \Gamma_{pr,k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\beta}{}_{pq} & \Gamma^{\beta}{}_{pr} \\ \Gamma_{kq,\beta} & \Gamma_{kr,\beta} \end{vmatrix}$$

ya da daha açık olarak

$$R_{kpqr}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x^p \partial x^q}+\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^k \partial x^r}-\frac{\partial^2 g_{kq}}{\partial x^p \partial x^r}-\frac{\partial^2 g_{pr}}{\partial x^k \partial x^q}\right]$$
$$+g^{\alpha\beta}[\Gamma_{pq,\beta}\Gamma_{kr,\alpha}-\Gamma_{pr,\beta}\Gamma_{kq,\alpha}] \tag{II.10.4}$$

şeklinde yazılabileceği kolaylıkla gerçeklenebilir.

(II.10.4) bağıntısına dayanarak

$$R_{pkqr} \equiv -R_{kpqr} \tag{a}$$

$$R_{kprq} \equiv -R_{kpqr} \tag{b}$$

$$R_{qrkp} \equiv R_{kpqr} \tag{c}$$

$$R_{kpqr} + R_{kqpr} + R_{krpq} \equiv 0 \tag{d}$$

bağıntıları ispatlanır. Bunlardan (a) ve (b) özdeşlikleri R_{kpqr} tansörünün ilk iki ve son iki indislerine göre çarpık-bakışımlı olduğunu ve (c) özdeşliği de aynı tansörün ilk iki ve son iki indis gruplarına göre bakışımlı olduğunu göstermektedir. Buradan, R_{kpqr} nin biribirlerinden ve sıfırdan farklı elemanlarının üç türlü olduğu neticesi çıkar.

1. R_{kpkp} şeklinde farklı iki indisi haiz elemanlar ki sayıları $n_1 = n(n-1)/2$ dir.

2. R_{kpkq} şeklinde farklı üç indisi haiz elemanlar ki sayılar $n_2 = n(n-1)(n-2)/2$ dir.

3. R_{kpqr} şeklinde dört indisi de farklı olan elemanlar ki bunların sayıları da $n_3 = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$ dir.

Şu hâlde R_{kpqr} tansörünün sıfırdan ve biribirlerinden farklı elemanlarının sayısı $N = n_1 + n_2 + n_3$ dür.

(II.11) TANSÖRLERİN BAZI FİZİKSEL UYGULAMALARI

Tansörlerin fizikteki uygulamaları pekçoktur. Biz burada ancak birkaç örnek vermekle yetineceğiz.

(*a*) *MADDESEL NOKTANIN MEKANİĞİ*

Maddesel bir noktanın, ya da noktalar sisteminin eğrisel koordinatlarda incelenmesi için en uygun araç tansör hesabıdır. Tansörel türevin mutlak bir niteliği haiz olması ve özellikle dik kartezyen koordinat sisteminde âdî türeve indirgenmesi eğrisel koordinatlar bahis konusu olduğunda daima mutlak türev kullanmayı zorunlu kılar.

Dik bir kartezyen koordinat sisteminden eğrisel bir koordinat sisteminde geçildiğinde yeni bir sistemin birim vektörleri bu sistemdeki koordinat eğrilerinin teğetleri olurlar. Böyle bir koordinat sisteminde maddesel bir noktanın mekaniğini incelemek için $\dot{x}^p = dx^p/dt = v^p$ olmak üzere maddesel noktanın $K=\frac{1}{2}mv^2$ kinetik enerjisinin

$$K=\frac{m}{2}g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$$

şeklinde yazılacağına dikkat edelim. Bu takdirde g_{pq} temel metrik tansörünün bakışımlı olması dolayısıyla

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^p}=\frac{m}{2}g_{pq}\left(\frac{\partial \dot{x}^p}{\partial \dot{x}^p}\dot{x}^q+\dot{x}^p\frac{\partial \dot{x}^q}{\partial \dot{x}^p}\right)=\frac{m}{2}g_{pq}(\dot{x}^q+\delta_{pq}\dot{x}^p)$$

$$=\frac{m}{2}g_{pq}(\dot{x}^q+\dot{x}^q)=mg_{pq}\dot{x}^q$$

ve bu ifâdenin t ye göre türevi de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^p}\right)=m\left(g_{pq}\ddot{x}^q+\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\dot{x}^r\dot{x}^q\right) \qquad \text{(II.11a.1)}$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial K}{\partial x^p}=\frac{m}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\dot{x}^p\dot{x}^q \qquad \text{(II.11a.2)}$$

olduğundan (II.11a.1) den (II.11a.2) yi çıkartarak hareketin *Lagrange* denklemleri olarak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^p}\right)-\frac{\partial K}{\partial x^p}=m\left[g_{pq}\ddot{x}^q+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^q\dot{x}^r\right]$$

$$=m\left[g_{pq}\ddot{x}^q+\Gamma_{qr,p}\dot{x}^q\dot{x}^r\right]$$

$$=mg_{ps}(\ddot{x}^s+\Gamma^s{}_{qr}\dot{x}^q\dot{x}^r) \qquad \text{(II.11a.3)}$$

bulunur. Buna göre (II.11a.3) denklemlerinin sağ yanı kuvveti gösterecektir. Şu hâlde

$$F_p = mg_{ps}(\ddot{x}^s + \Gamma^s_{qr}\dot{x}^q\dot{x}^r) = mg_{ps}a^s = ma_p \qquad \text{(II.11a.4)}$$

yazılabilecektir. Bu türlü tanımlanan a_p nin ise maddesel noktanın eğrisel koordinatlardaki ivmesinin kovaryant bileşenleri olduğu görülmektedir. Demek ki eğrisel koordinatlarda ivmenin kontravaryant bileşenleri de

$$a^p = \ddot{x}^p + \Gamma^p_{qr}\dot{x}^q\dot{x}^r \qquad \text{(II.11a.5)}$$

$$(p = 1, 2, \cdots, N)$$

bağıntılarıyla verileceklerdir.

Eğer bir cismin üzerine hiç bir kuvvet etki yapmıyorsa cismin ivmesi sıfır olur.

$$a^p = 0. \qquad \text{(II.11a.6)}$$

Bu, eylemsizlik kanununun ifâdesidir. Buna göre, cisim öklitsel bir uzayda ise ya sükûnettedir, ya da düzgün doğrusal bir hareket icrâ eder. Eğer cisim Riemannsal bir uzaya bağlı ise (II.11a.6) bağıntısı gene eylemsizlik kanununun matematik ifâdesini vermeğe devam eder, ancak şu farkla ki, (II.9.4) ü de göz önünde tutarak, (II.11a.5) den

$$a^p = \frac{d^2x^p}{dt^2} + \Gamma^p_{qr}\frac{dx^q}{dt}\frac{dx^r}{dt} = 0 \qquad \text{(II.11a.7)}$$

olması dolayısıyla ya sükûnette bulunacağı, ya da bağlı olduğu Riemannsal uzayın bir geodezik eğrisi boyunca hareket edeceği görülür. Şu hâlde genel olarak eylemsizlik kanununu:

«İçinde bulunduğu uzayda, üzerine herhangi bir kuvvet etki yapmayan bir cisim ya sükûnette kalır, ya da bir geodezik eğrisi boyunca hareket eder» tarzında ifâde etmemiz lâzımdır.

Riemannsal bir uzayda, eylemsizlik kanununa göre hareketi (II.11a.7) ile belirlenmiş bir maddesel noktanın bu hareketini öklitsel bir uzaya nisbetle yorumlarsak d^2x^p/dt^2 nin öklitsel bir uzaya nazaran maddesel noktanın haiz olduğu ivmenin bileşenleri olmasından dolayı (II.11a.7) den

$$\frac{d^2x^p}{dt^2} = -\Gamma^p_{qr}\frac{dx^q}{dt}\frac{dx^r}{dt} \qquad \text{(II.11a.8)}$$

bulunur. Bu ise, bir Riemann uzayında eylemsizlik kanununa uyarak hareket eden maddesel bir noktanın, öklitsel bir uzaya nisbet edildiğinde tıpkı bir kuvvet alanının etkisi altında hareket ediyormuş gibi göründüğüne işâret etmektedir.

Eğer göz önüne alınan maddesel nokta korunumlu (=konservatif) bir sistemde hareket ediyorsa, V ile sâdece x^p koordinatlarına bağlı olan skaler potansiyeli göstererek,

$$F_p = -\frac{\partial V}{\partial x^p}$$

olacağından (II.11a.3) denklemleri

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^p}\right) - \frac{\partial (K-V)}{\partial x^p} = 0$$

ve Lagrange fonksiyonu olarak

$$\mathfrak{L} = K - V$$

vazederek

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^p}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^p} = 0 \qquad \text{(II.11a.9)}$$

$$(p=1,\ 2,\cdots,N)$$

bulunur.

(*b*) *SÜREKLİ ORTAMLAR MEKANİĞİNDEKİ ESAS TANSÖRLER.*

Sürekli bir ortamda Şekil: II.2 deki gibi, biribirlerine dik olan yüzleri koordinat eksenlerine paralel olan dört-yüzlü şeklinde elemanter bir hacım göz önüne alalım. Bu hacımın $dS_1 = AOC$, $dS_2 = COB$ ve $dS_3 = BOA$ dik yüzleri üzerine yüzey birimi başına etki yapan kuvvetler $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$ ve $dS = ABC$ yüzü üzerine yüzey birimi başına etki eden de $\vec{T}$ olsun. Bunların hepsi hacımdan dışarıya doğru yönelmişlerse bunlara *gerilim kuvvetleri*, hepsi birden içeriye doğru yönelmişlerse bunlara *basınç kuvvetleri* adı verilir. Bu hacımın denge şartlarından biri

$$\vec{T}\,dS = \vec{T}_1\,dS_1 + \vec{T}_2\,dS + \vec{T}_3\,dS_3 \qquad \text{(II.11b.1)}$$

eşitliğiyle ifâde olunur. Eğer

$$\vec{n} = n^1 \vec{e}_1 + n^2 \vec{e}_2 + n^3 \vec{e}_3$$

ile $dS = ABC$ yüzeyinin birim normal vektörünü gösterirsek ABC nin koordinat düzlemleri üzerine izdüşümlerinin

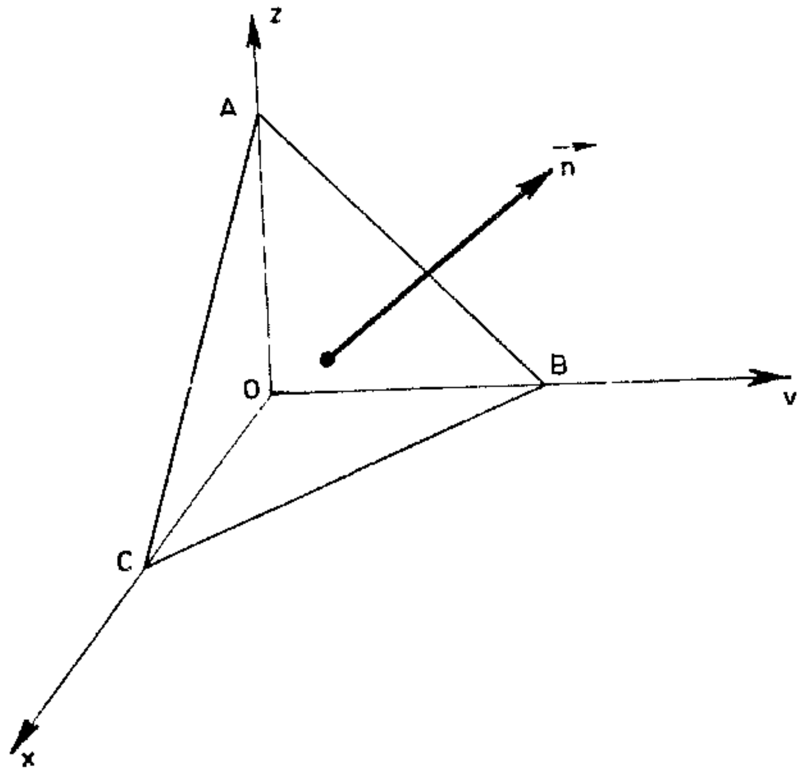
$$dS_1 = n^1 dS\,, \quad dS_2 = n^2 dS\,, \quad dS_3 = n^3 dS$$

ile belirleneceği âşikârdır. Buna göre (II.11b.1)

$$\vec{T} = n^i \vec{T}_i = n^1 \vec{T}_1 + n^3 \vec{T}_2 + n^3 \vec{T}_3 \qquad \text{(II.11b.2)}$$

yazılır.

Diğer taraftan



Şek. II.2

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_2 = \begin{pmatrix} \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_3 = \begin{pmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \end{pmatrix}$$

ise (II.11b.2) kısaca

$$\tau_p = \tau_{pq}\, n^p \tag{II.11b.3}$$

şeklinde yazılır. Buradaki τ_{pq} nün ikinci mertebeden bir tansör olduğu âşikârdır. Buna *gerilim* ya da *basınç tansörü* adı verilir. Gerilim tansörünün bakışımlı yâni ancak 6 tâne bağımsız bileşeni haiz bir tansör olduğu gösterilir.

Şimdi, sürekli yapıyı haiz bir cismin içindeki biribirlerine sonsuz yakın x^p ve $x^p + dx^p$ noktaları arasındaki uzaklığın karesinin

$$ds^2 = \delta_{pq}\, dx^p\, dx^q$$

olduğuna işâret ettikten sonra, cismin bir deformasyona tâbî tutulduğunu ve x^p noktasının, bu sebeple, $x^p + u^p$ noktasına, $x^p + dx^p$ nin de $x^p + dx^p + u^p + du^p$ noktasına kaymaları dolayısıyla ds^2 nin de

$$\begin{aligned} dS^2 &= \delta_{pq}(dx^p + du^p)(dx^q + du^q) \\ &= \delta_{pq}\, dx^p\, dx^q + \delta_{pq}\, dx^p\, du^q + \delta_{pq}\, du^p\, dx^q + \delta_{pq}\, du^p\, du^q \end{aligned}$$

olduğunu varsayalım. Bu deformasyon

$$u^p = u^p(x^1, x^2, x^3)$$
$$(p = 1,2.3)$$

gibi koordinatların sürekli bir takım fonksiyonlarıyla belirlenmiş ise

$$du^p = \frac{\partial u^p}{\partial x^r}\, dx^r$$

yazılabileceğinden

$$dS^2 - ds^2 = \left\{ \frac{\partial u^r}{\partial x^s} + \frac{\partial u^s}{\partial x^r} + \frac{\partial u^p}{\partial x^r}\, \frac{\partial u^p}{\partial x^s} \right\} dx^r\, dx^s = \sigma_{rs}\, dx^r\, dx^s \tag{II.11b.4}$$

bulunur. Bu ifâde cismin tâbî olduğu deformasyon için bir ölçü mâhiyetindedir. Eğer ikinci mertebeden terimleri ihmâl ederek sâdece küçük deformasyonlar göz önüne alınırsa

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u^r}{\partial x^r} \qquad (r \text{ üzerinden toplam yok})$$

$$\sigma_{rs}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u^r}{\partial x^s}+\frac{\partial u^s}{\partial x^r}\right]$$

ile tanımlanan bakışımlı tansöre *«deformasyon tansörü»* adı verilir. Şu hâlde bu tansör de genel olarak bağımsız 6 bileşene mâliktir, Bu tansörün esas köşegen terimlerinin p eksenine paralel deformasyonları, yâni eğer $\sigma_{rr}>0$ ise genişlemeleri, aksi hâlde büzülmeleri temsil ettikleri ve diğer σ_{rs} terimlerinin de kenarları sırasıyla r ve s eksenlerine paralel olan bir açının tâbî olduğu değişimin iki mislini temsil ettikleri gösterilebilir.

Gerek σ_{rs} deformasyon tansörü ve gerekse τ_{rs} gerilim tansörü ikinci mertebeden bakışımlı tansörler olmak hasebiyle bakışımlı matrisler yardımıyla temsil edilebilirler ve bunlara da, eksenler olarak bu matrislerin özvektörlerine tekaabül eden özdoğrultular seçildiğinde köşegensel bir şekil verilebildiği mâlûmdur. Bakışımlı matrislerin köşegenleştirilmesini mümkün kılan dönüşümlerin ise uzunlukları invaryant bırakan dik dönüşümler olduklarını görmüştük. Bu dönüşüm yapılacak olursa, meselâ, σ_{rs} deformasyon tansörü

$$\begin{Vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}$$

şekline girer.

Cismin içinde deformasyondan önce ρ yarıçapını haiz küresel bir hacım elemanının deformasyondan sonra, eksenlerinin uzunlukları

$$\rho(1+\sigma_{11}), \qquad \rho(1+\sigma_{22}), \qquad \rho(1+\sigma_{33})$$

olan bir elipsoide dönüştüğü gösterilebilir.

Eğer bir cismin sıcaklıkla genişlemesi göz önüne alınırsa O orijininde bulunan ve eksenler üzerindeki izdüşümleri de l_p olan bir vektör izdüşümleri Δl_p olan bir genişlemeye tâbî olacaktır. Cismin belirli bir T sıcaklığından $T+\Delta T$ sıcaklığına taşınmış olduğu farzedilirse, A_{pq} genişleme tansörünü göstermek üzere

$$\Delta l_p=\Delta T\, A_{pq} l^q$$

olur. A_{pq} simetrik olduğundan köşegenleştirilebilir:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{Vmatrix}$$

ve meselâ ρ yarıçapını haiz küresel bir hacım elemanı, sıcaklığı ΔT kadar arttırıldıktan sonra, eksenleri sırasıyla

$$\rho(1+A_{11})\,\Delta T\,, \qquad \rho(1+A_{22})\,\Delta T\,, \qquad \rho(1+A_{33})\,\Delta T$$

olan bir elipsoide dönüşür.

Bu bahsi kapamadan önce tek boyutlu hâl için gerilim ile deformasyon arasında

$$\tau = m\sigma$$

şeklinde *Hook* kanununun cârî olduğunu hatırlatalım. m orantı katsayısına *elâstiklik modülü* adı verilmektedir. İster izotrop olsun, ister olmasın üçboyutlu hâl için Hook bağıntısının genelleştirilmiş hâli

$$\tau_{pq} = m^{rs}{}_{pq}\sigma_{rs}$$

şeklindeki bir tansörel bağıntıdır. Dördüncü mertebeden bu $m^{rs}{}_{pq}$ tansörüne *elâstiklik modülleri tansörü* adı verilir. τ_{pq} ve σ_{rs} tansörlerinin bakışımlı olmaları dolayısıyle $m^{rs}{}_{pq}$ tansörünün de r ve s ye ve keza p ve q ye göre bakışımlı olacağı âşikârdır. Bu ise bu tansörün bağımsız bileşen sayısını 81 den 36 ya düşürür. Diğer taraftan dik koordinatlarda kovaryant ve kontravaryant bileşenler arasında fark gözetilmiyeceğinden yâni

$$m^{rs}{}_{pq} = m^{pq}{}_{rs}$$

olması hasebiyle elâstiklik tansörünün bağımsız ancak 21 bileşeni hâiz olduğu anlaşılır.

(c) *GENEL RÖLÂTİVİTEDEKİ UZAY-ZAMAN METRİĞİNİN RİEMANNSAL YAPISI.*

Özel Rölâtivite Teorisi ışığın, deneylerle de açıkça ortaya konmuş olduğu gibi, boşlukta sâbit bir c hızıyla ve eşyönlü (=izotrop) bir şekilde yayılması esâsından hareket ederek

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz + i^2 c^2 dt^2 \qquad \text{(II.11c.1)}$$

ifâdesinin, bir eylemsizlik sisteminden bir başka eylemsizlik sistemine geçişi sağlayan bütün afin dönüşümler için invaryant olduğu neticesine varır. Eylemsizlik sistemleri biribirlerine nazaran düzgün doğrusal izâfî hareketlerde bulunan sistemlerdir. Bu şartlar altında iki eylemsizlik sistemi arasındaki bağlantıyı sağlayan afin dönüşümün

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(II.11c.2)}$$

şeklindeki *Lorentz* dönüşüm formülleriyle belirleneceği gösterilir. v her iki eylemsizlik sisteminin biribirlerine nazaran izâfî hızlarını göstermektedir. Özel Rölâtivite Teorisinin, sâdece, biribirlerine nazaran düzgün doğrusal hareket yapan referans sistemleri ile meşgûl olması ve fizik kanunlarının bu gibi sistemler arasındaki koordinat dönüşümlerinde şeklen invaryant kalmalarını şart koşan bir programı olması, ivmeli hareketleri ve, özellikle, ancak ivmeli hereketlere sebep olan gravitasyon olaylarını teorinin çerçevesi dışında bırakmaktadır.

İvmeli hareketleri de göz önünde bulundurarak fizik kununlarının herhangi bir hareket tarzı için dahi şeklen invaryant kalmalarını sağlamak için bir referans sisteminden bir diğerine geçişi sağlayan dönüşüm formüllerinin artık (III.11c.2) lineer formülleri yerine çok daha genel sürekli bir takım fonksiyonlarla temin edileceği ve teorinin de fizik kanunlarının herhangi bir harekete göre şeklen invaryant kalmalarını sağlayacak şekilde genelleştirilmesi lâzım geldiği görülmektedir.

Bu şartlar altında genelleştirilmiş olan Rölâtivite Teorisinden uzay-zamanın yapısını teşkil eden ds^2 genel olarak

$$ds^2 = g_{pq}(x^1, x^2, x^3, x^4)\, dx^p\, dx^q, \quad x^4 = ict \qquad \text{(II.11c.3)}$$

şeklinde olacaktır. Burada, gravitasyonun varlığı şartı altında (II.11c.3) metriği ile gravitasyon mevcûd olmadığı zaman geçerli (II.11c.1) şeklindeki yayvan metrik arasındaki bağıntıyı ortaya koymak istiyoruz. Bu itibarla önce önemli bir özelliğe, eylemsizlik kütlesinin ağır kütle ile orantılı olması keyfiyetine temas etmeliyiz. Bu keyfiyet 10^{-11} lik bir izâfî hatâ ile denel olarak gerçeklenmiş bulunmaktadır. Bir cismin eylemsizlik kütlesinin onun harekete karşı direncinin bir ölçüsü olduğu ve ağır kütlesinin de, bir gravitasyon alanının cismin üzerindeki etkisi olduğu mâlûmdur. Bu iki ayrı büyüklüğün biribirleriyle orantılı (ve hattâ birimlerin uygun seçilmesiyle biribirlerine eşit) olmaları önceden kestirilebilen bir keyfiyet değildir ve denel olarak yüksek bir hassasiyetle gerçeklenmiş olan bu özelliğin içyüzünü de ancak Genel Rölâtivite Teorisi aydınlatmıştır.

Fizik bize bir cisme, kütlesine bağlı olmayan bir ivme verebilen yegâne kuvvetlerin eylemsizlik kuvvetleriyle gravitasyon kuvvetleri olduğunu göstermektedir. Eğer eylemsizlik kütlesı ağır kütle ile orantılı (ya da birimleri uygun seçerek ona eşit) olmasaydı, eylemsizlik kütlesiyle ağır kütlesini bildiğimizde, hereket eden bir cismin üzerine etki yapan kuvvetin bir eylemsizlik kuvveti mi, yoksa bir gravitasyon kuvveti mi olduğunu, ya da başka bir deyişle, cismin bir eylemsizlik alanında mı yoksa bir gravitasyon alanında mı olduğunu deney yaparak derhâl anlıyabilirdik. Ancak, birimler uygun seçildiğinde eylemsizlik kütlesinin ağır kütleye eşit olması keyfiyeti dolayısıyla bir eylemsizlik alanında da, homogen bir gravitasyon alanında da cisim aynı ivmeye sâhip olacaktır. Bu itibarla meselâ uzayda her cisimden uzak bir yerde, içinde, dışarıdan hiç bir informasyon almayan bir fizikçi bulunan

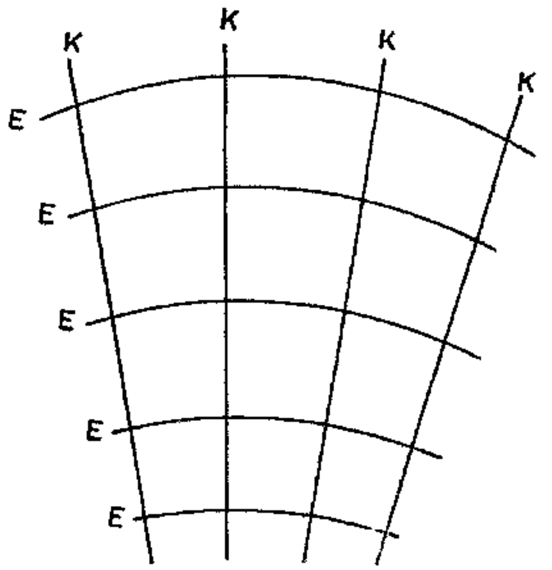
Şek · II. 3a

Şek : II. 3b

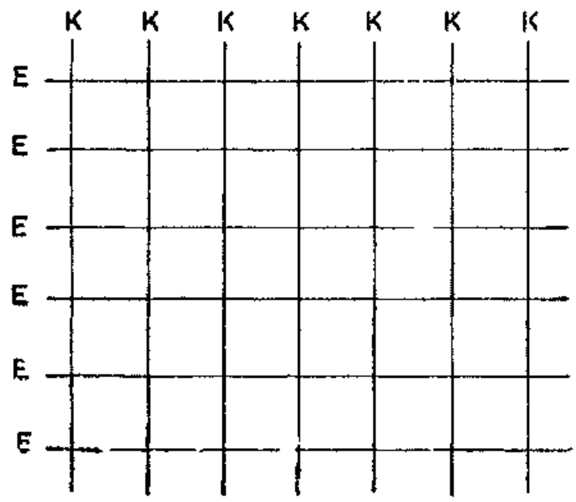
bir asansör alsak ve bu da, Şekil: II.3a daki gibi, $\vec{U}$ doğrultusunda $\vec{g}$ ivmeli bir hareket yapıyor olsa, fizikçinin elinden bıraktığı bir cisim tıpkı homogen bir gravitasyon alanında serbest düşüşe terkedilmiş gibi $\vec{A}$ doğrultusunda $\vec{g}$ ivmesiyle tabana doğru düşecektir. Eğer asansör homogen bir gravitasyon alanında sükûnette ise fizikçi, gene, elinden bıraktığı bir cismin $\vec{A}$ doğrultusunda $\vec{g}$ ivmesiyle düştüğünü müşâhede edecektir. Eylemsizlik kütlesinin ağır kütleye eşit olması dolayısıyla her iki hâlde de fizikçi bir eylemsizlik alanında mı yoksa homogen bir gravitasyon alanında mı bulunduğunu herhangi bir deneyle kesin olarak tesbit edemiyecektir. Öte yandan homogen gravitasyon alanındaki asansör eğer serbest düşüşe terkedilirse bu esnâda fizikçinin elinden bırakacağı bir cisim de asansörle birlikte düşeceğinden serbest düşüşün devamı süresince bu cisim asansörün tabanına varamıyacaktır. Aynı hâl kâinattaki bütün cisimlerin gravitasyon etkilerinden uzak bir yerde *sükûnette* bulunan bir asansör içindeki bir fizikçi için de vâriddir. Bunun, elinden herhangi bir ilk hız vermeden bırakacağı bir cisim de ne bir gravitasyon alanı mevcûd olduğundan ve ne de asansör yukarı doğru düzgün ivmeli bir hareket yaptığından, asansörün tabanına düşmeyecektir. Bunlar göstermektedirler ki homogen bir gravitasyon alanını uygun bir koordinat dönüşümüyle yok etmek kaabildir. Ancak gravitasyon alanlarının var olmaması hâlinde uzay zamanın yapısını teşkil eden metriğin (II.10c.1) metriği olduğu, yâni homogen bir gravitasyon alanına tekaabül eden

$$ds^2 = g_{pq}(x^1, x^2, x^3, x^4)\, dx^p\, dx^q$$

gibi bir metriğin uygun bir koordinat dönüşümüyle (II.10c.1) yayvan metriğine dönüştüğü anlaşılmaktadır.



Şek. II.4a



Şek. II.4b

Eğer göz önüne almış olduğumuz asansör homogen olmayan bir gravitasyon alanında ise, böyle bir alanda kuvvet çizgileri yakınsek bir gidişi haiz olduklarından (Bk. Şekil: II.4a), dışarıdan informasyon almasa dahi asansördeki fizikçi, hassas deneylerle, aynı anda bırakacağı cisimlerin (homogen gravitasyon alanındaki gibi paraleller boyunca değil fakat) yakınsak doğrular boyunca yakınsak olarak asansörün duvarlarından birine düştüklerini müşâhede edebilecek ve bundan da homogen olmayan bir gravitasyon alanına bulunduğunu, yâni homogen olmayan bir gravitasyon alanına sebebiyet veren bir gök cismi cıvarında olduğunu anlayacaktır.

Diğer taraftan böyle bir gök cisminin doğurduğu bütün gravitasyon alanını, homogen gravitasyon alanları için olduğu gibi, yok edecek bir dönüşüm bulunmadığı da âşikârdır. Ancak bu gibi gök cisimlerinin cıvarında çok küçük bir uzay bölgesindeki gravitasyon alanının kuvvet çizgileri kuvvetli bir şekilde yakınsak olmadıklarından, sâdece bu küçük uzay bölgesinde yukarıdaki gibi bir koordinat dönüşümüyle asansörü serbest düşüş hâline indirgemek yâni mevzî olarak gravitasyon alanını yok etmek mümkün olabilecektir.

Homogen olmayan *gerçek* gravitasyon alanlarının tüm olarak yok edilememeleri keyfiyeti, bunlara tekaabül eden (II.11c.3) metriğini, Özel Rölâtivitenin (II.11c.1) metriğine dönüştürecek hiçbir dönüşüm olmadığını göstermektedir ki bunun da g_{pq} metriğinin Riemannsal olması için gerek ve yeter şart olduğunu bilmekteyiz (Bk. Bölüm: II.4). Böylelikle gerçek gravitasyon alanlarının ve dolayısıyla bunları doğuran maddenin mevcûdiyetinin uzay-zaman konfigürasyonunun yapısını bozup Riemannsal kıldığını görmüş olmaktayız. İşte bu sebepledir ki madde ihtivâ etmeyen bir uzay-zamanın geometrik yapısının yayvan (öklitsel) olmasına karşılık madde ihtivâ eden bir uzay-zamanın geometrik yapısı eğrisel olmaktadır.

PROBLEMLER

Problem: 1. Birinci mertebeden kovaryant bir tansörün dik bir kartezyen sistemdeki bileşenleri sırasıyla xy, $2y-z^2$ ve xz olduğuna göre aynı tansörün küresel koordinatlardaki bileşenlerini tesbit ediniz.

Problem: 2. A_p birinci mertebeden kovaryant bir tansör olsa dahi $\partial A_p/\partial x^q$ nun bir tansör olmadığını gösteriniz.

Problem: 3. Maddî bir noktanın hızının birinci mertebeden kontravaryant bir tansör olduğunu gösteriniz.

Problem: 4. Bir tansör için bakışımlı ya da çarpık-bakışımlı olma özelliğinin tansörün ifâde olunduğu koordinat sistemine bağlı olmadığını gösteriniz.

Problem: 5. Her tansörün aynı cins herhangi iki indise nisbetle bakışımlı olan aynı mertebeden bir tansörle, çarpık-bakışımlı olan aynı mertebeden bir tansörün toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Problem: 6. Herhangi bir mertebeden tansörün indislerini indirmek veyâ yükseltmenin metrik tansörle yapıldığını gösteriniz.

Problem: 7. $\Phi = a_{pq}A^p A^q$ ise, b_{pq} ile bakışımlı uygun bir tansörü göstermek üzere daima $\Phi = b_{pq}A^p A^q$ yazılabileceğini gösteriniz.

Problem: 8. Eğer a_{pq} çarpık-bakışımlı bir tansör ise

$$\Phi = a_{pq}A^p A^q = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Problem: 9. x ve y dik kartezyen düzlem koordinatları göstermek üzere

$$x = a \cosh \varphi \cos \psi$$
$$y = a \sinh \varphi \sin \psi$$

şeklinde bir koordinat dönüşümünde: a) yeni koordinat sisteminin kovaryant $\vec{e}_\varphi$ ve $\vec{e}_\psi$ taban vektörlerini $\vec{i}$ $\vec{j}$ dik kartezyen taban vektörleri cinsinden ifâde ediniz, ve b) bu koordinat sistemindeki metrik tansörün bileşenlerini açıkça yazınız.

Problem: 10. g_{pq} nun ve g^{pq} nun silindirik küresel koordinat sistemlerindeki bileşenlerini tesbit ediniz ve $|g_{pq}|$ yu hesaplayınız.

Problem: 11. Üç boyutlu bir koordinat sisteminde koordinat eğrileri arasındaki α_{12}, α_{23}, α_{31} açılarının

$$\cos\alpha_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,;\quad \cos\alpha_{23}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}\,;\quad \cos\alpha_{31}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

ile verildiklerini gösteriniz ve koordinat eğrileri boyunca teğet birim vektörlerini hesaplayınız.

Dik bir koordinat sisteminde metrik bir tansörün g_{11}, g_{23}, ve g_{31} bileşenlerinin sıfır olduğunu gösteriniz.

Problem: 12. $p\neq q$ için $g_{pq}=0$ olan uzaylar için birinci ve ikinci cins Christoffel sembollerini hesaplayınız.

Problem: 13. Dik kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlar için birinci ve ikinci cins Christoffel sembollerini hesaplayınız.

Problem: 14. Dik kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlar için gradyentin. diverjansın, rotasyonelin ve lâplâsyenin ifâdelerini tesis ediniz.

Problem: 15. $\bar{A}^p=\dfrac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^q}\,\bar{A}^q$ olduğuna göre $\dfrac{\partial\bar{A}^p}{\partial\bar{x}^q}$ ifâdesini teşkil ettikten sonra Christoffel sembollerinin dönüşüm kurallarından yararlanarak $\nabla_q\bar{A}^p$ mutlak türevinin tansörel vasfı haiz olduğunu gösteriniz.

Problem: 16. Christoffel sembollerinin bakışım (simetri) özelliklerini inceleyiniz.

Problem: 17. A^p vektörünün diverjansını silindirik ve küresel koordinatlarda, bunun fiziksel bileşenleri cinsinden hesaplayınız.

Problem: 18. Maddesel bir noktanın hız ve ivme vektörlerinin fiziksel bileşenlerini silindirik ve küresel koordinat sistemlerinde yazınız.

Problem: 19. a) $x=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)$, $y=uv$, $z=z$

ile belirlenen parabolik silindirik koordinat sistemi için

b) $x=uv\cos\varphi$, $y=uv\sin\varphi$, $z=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)$

ile belirlenen paraboloit koordinat sistemi için

c) $x=a\cosh u\cos v\,,\quad y=a\sinh u\sin v\,,\quad z=z$

ile belirlenen eliptik silindirik koordinat sistemi için

d) $x=a\sinh\xi\sin\eta\cos\varphi$

$y=a\sinh\xi\sin\eta\sin\varphi$

$z=a\cosh\xi\cos\eta$

ile belirlenen koordinat sistemi için

e) $x=a\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi$

$y=a\cosh\xi\cos\eta\sin\varphi$

$z=a\sinh\xi\sin\eta$

ile belirlenen koordinat sistemi için metrik tansörü ve Christoffel sembollerini ve lâplâsyenin ifâdesini hesaplayınız.

Problem: 20. Silindirik ve küresel koordinatlar için geodezikleri tâyin ediniz.

Problem: 21. Bir geodezik eğrisi boyunca eğriyle olan açısı sâbit kalan bir vektörün zorunlu olarak sâbit bir vektör olması gerektiğini gösteriniz.

Problem: 22.

$$\frac{d}{dt}(g^{pq}A_pA_q)=2g^{pq}A_p\frac{\delta A_q}{\delta t}$$

olduğunu gösteriniz.

III. Bölüm

TEK KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

(III.1) GENEL TÂRİFLER

Bu bölümde kompleks sayıların, bunlara ait cebirsel işlemlerin ve bunların kompleks düzlemdeki gösterilişlerinin bilindiğini varsayacağız.

$\sqrt{-1}=i$ ve $z=x+iy$ olmak üzere z nin fonksiyonu olan $w=f(z)$ gibi bir ifâdeye *tek kompleks değişkenli fonksiyon* adını vereceğiz. Eğer z nin her değerine w nin tek bir değeri tekaabül ederse w *tek-değerli*, aksi hâlde *çok-değerli* bir fonksiyon olur. Çok-değerli bir fonksiyon tek değerli bir takım fonksiyonların bir topluluğu olarak telâkki olunabilir ve böyle bir topluluğun her bir elemanına *çok-değerli fonksiyonun bir kolu* veyâ *dalı* adı verilir. Fonksiyonun çok-değerli olduğu nokta da *dallanma noktası* diye isimlendirilir. Fonksiyonun kollarından birisi seçilerek buna *esas kol* ve fonksiyonun buna tekaabül eden değerine de *esas değeri* denir.

Misâl: $w=z^2$ tek-değerli, $w=\sqrt{z}$ ise çok-değerli (bu hâlde *iki-değerli*) bir fonksiyondur; ve $z=0$ bir dallanma noktasıdır. Zirâ meselâ bir P noktası için $z=\rho e^{i\theta_1}$ ise $w\sqrt{z}=\sqrt{\rho}\, e^{i\theta_1/2}$ dir ve θ_1 i eğer 2π kadar değiştirirsek

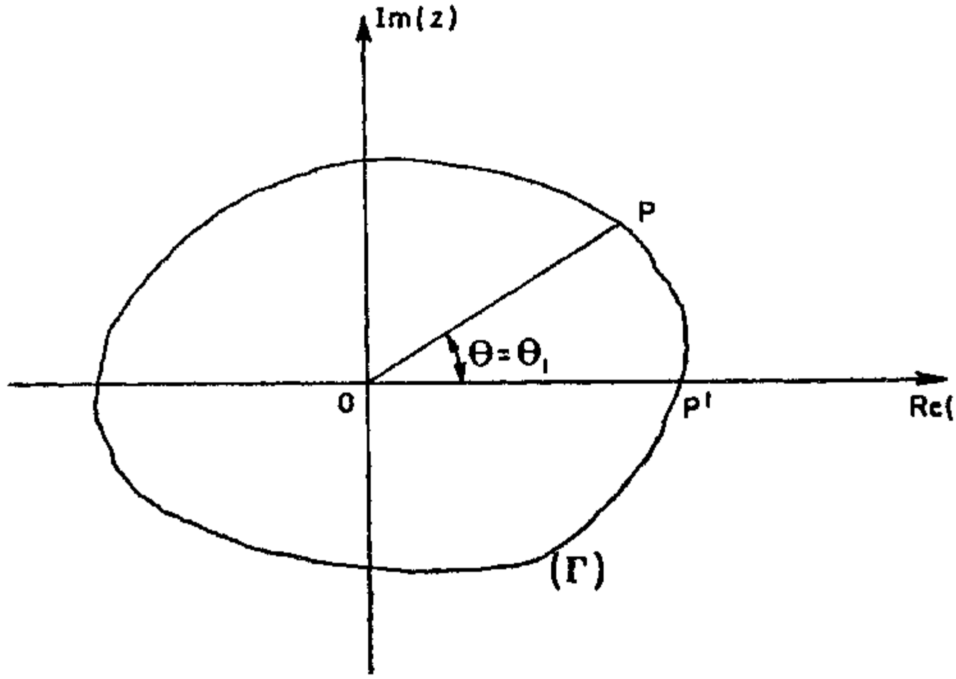
$$w(\theta_1+2\pi)=\sqrt{\rho}\exp[i(\theta_1+2\pi)/2]=\sqrt{\rho}\exp(i\theta_1/2)\exp(i\pi)=-w(\theta_1)$$

bulunur. θ_1 i eğer 4π kadar değiştirirsek

$$w(\theta_1+4\pi)=\sqrt{\rho}\exp[i(\theta_1+4\pi)/2]=\sqrt{\rho}\exp(i\theta_1/2)\exp(i2\pi)=w(\theta_1)$$

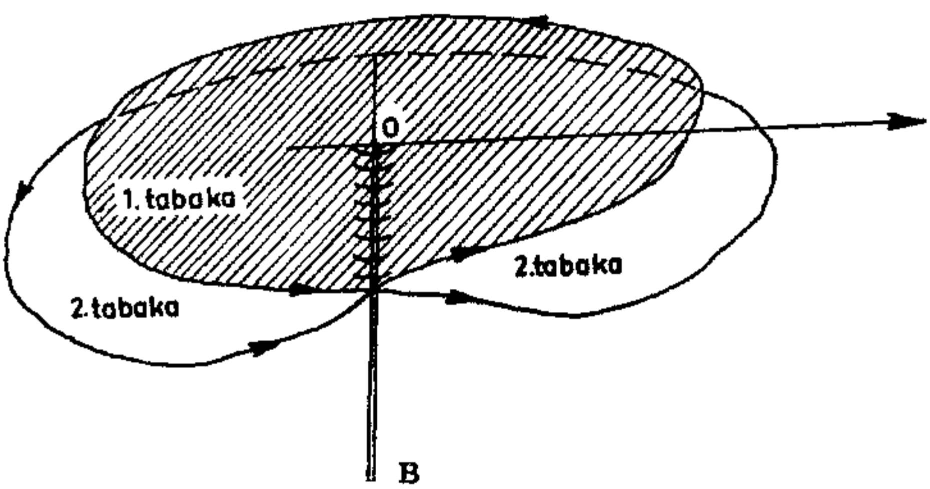
olur. Buna göre $0\leqq\theta_1\leqq 2\pi$ olduğu müddetçe fonksiyonun bir kolu, ve

$2\pi \leqq \theta \leqq 4\pi$ oldukça da diğer kolu üzerinde bulunduğumuz anlaşılmaktadır. Fonksiyonun her bir kolu tek - değerlidir.



Şek. III. 1a

Fonksiyonun tümünü tek - değerli kılmak için orijinden itibâren sonsuza kadar bir *kesim* yapılır (Şekil: III. 1b deki *OB* doğrusu) ve *O* etrafında bir çevre üzerindeki bir noktanın bunu katetmesi yasak-



Şek. III. 1b
Riemann yüzeyleri ve dallanma noktasına dair.

lanır. Böylelikle fonksiyon tek-değerli kılınmış olur. Şekil: III.1a da O etrafındaki (Γ) çevresi üzerinde dolanıp da OB kesiminin alt kenarında P' durumuna ulaşan P noktasının θ argümenti arttırılıp da $\theta > 2\pi$ olunca noktanın z - düzlemini terkedip onun hemen altında ve ona OB boyunca yapışık olan ikinci bir tabakaya geçtiği ve orada da argümenti 4π ye yaklaştığında tekrar OB kesim eğrisine yaklaştığı ve $\theta > 4\pi$ için gene üst tabakaya avdet ettiği telâkkî olunur.

Çok - değerli fonksiyonu tek - değerli kılmak için göz önüne alınan ve bir kesim doğrusu boyunca biribirlerine yapışık olan bu tabaklara *RİEMANN yüzeyleri* adı verilir ve, genellikle, fonksiyonun en üst tabakada aldığı değere de *esas değer* denir.

Burada çok - değerli fonksiyonlara misâl olarak verdiğimiz $w = \sqrt{z}$ fonksiyonunun, $z = 0$ noktasını çevrelemeyen herhangi kapalı bir eğri üzerinde tek değerli olduğuna da dikkati çekmek lâzımdır.

Tek - değerli fonksiyonlara *birbiçim* (*üniform*) fonksiyonlar, ve çok - değerli bir fonksiyonu tek - değerli kılmaya da *birbiçimleme* (*üniformizasyon*) adı verilir.

z - düzleminde bir B bölgesinde ve her $z_0 \in B$ noktası için $\varepsilon > 0$ ve δ,

$$\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$$

olmak üzere, iki çok küçük kemmiyet ise ve $|z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)$ eşitsizliği

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sürüklüyorsa $f(z)$ nin $z = z_0$ için sürekli olduğu söylenir. Eğer $|z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)$ eşitsizliğini gerçekleyen δ kemmiyeti z_0 a değil de sâdece ε a bağlı ise, bu takdirde $f(z)$ nin de *birbiçim olarak sürekli* olduğu söylenir.

Süreklilik hakkında şu teoremler geçerlidir;

1. $f(z)$ ve $g(z)$ eğer $z = z_0$ da sürekli iseler bunların toplamları, farkları, çarpımları ve $g(z_0) \neq 0$ olmak şartıyla $f(z) / g(z)$ oranı da z_0 da süreklidirler.

2. Bütün polinomlar ; e^z, $\sin z$ ve $\cos z$ fonksiyonları bütün sonlu bölgeler için sürekli fonksiyonlardır.

3. $w=f(z)$ eğer $z=z_0$ da ve $z=g(\zeta)$ da $\zeta=\zeta_0$ da sürekli iseler ve $\zeta_0=f(z_0)$ ise, $w=g[f(z)]$ fonksiyon fonksiyonu da $z=z_0$ da süreklidir.

4. Eğer $f(z)$ kapalı bir B bölgesinde sürekli ise, B de aynı zamanda sınırlıdır da; yâni öyle bir M sâbiti vardır ki her $z\in B$ için $|f(z)|<M$ dir.

5. $f(z)$ eğer bir bölgede sürekli ise bunun reel ve sanal kısımları da aynı yerde süreklidirler.

6. $f(z)$ eğer *kapalı* bir bölgede sürekli ise, bu bölgede her yerde birbiçim olarak süreklidir.

(III.2) CAUCHY - RİEMANN ŞARTLARI.

Eğer bir B bölgesinin bütün z noktalarında $f(z)$ fonksiyonunun türevi varsa $f(z)$ ye B de *analitik* bir fonksiyondur denir. δ küçük bir kemmiyet olmak üzere, $|z-z_0|<\delta$ dairesi içindeki her nokta için eğer $f'(z)$ mevcûd ise $f(z)$ nin $z=z_0$ da analitik olduğu söylenir.

Şimdi $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ nin bir B bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter şartın, u ve v reel fonksiyonlarının kısmî türevleri B de sürekli olmak şartıyla,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{III.2.1}$$

bağıntılarının geçerli olması olduğunu göstereceğiz.

a) ŞART GEREKTİR:

$f(z)$ nin analitik olması için

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{[u(x+\Delta x,\, y+\Delta y)+i\ v(x+\Delta x,\, y+\Delta y)]-[u(x,y)+i\ v(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

limitinin, Δz nin (ya da Δx ve Δy nin) sıfıra yaklaşma şekline bağlı olmaksızın mevcûd olması lâzımdır.

Önce sıfıra reel eksen boyunca yaklaşalım; yâni $\Delta y=0$ ve $\Delta x\rightarrow 0$ olsun. Bu takdirde yukarıdaki limit için

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\left[\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{(III.2.2)}$$

bulunur. Bundan sonra da sıfıra sanal eksen boyunca yaklaşalım; $x=0$, $\Delta y\rightarrow 0$ olsun. Bu takdirde de

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\rightarrow 0}\left\{\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\right\}$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{(III.2.3)}$$

olur.

$f(z)$ nin analtik olması $f'(z)$ nin ancak tek bir şekilde mevcûd olmasına bağlıdır. Şu hâlde (III.2.2) ve (III.2.3) sonuçlarının biribirleriyle özdeş olmaları gerekir; yani

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

olmalıdır.

b) ŞART YETERDİR:

$\partial u/\partial x$ ve $\partial u/\partial y$ nin sürekli oldukları varsayıldığına göre ve ε_1 ile η_1 de $\Delta x\rightarrow 0$ ve $\Delta y\rightarrow 0$ için sıfıra giden küçük kemmiyetler olmak üzere

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)$$

$$=[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y+\Delta y)]+[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)]$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon_1\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\eta_1\right)\Delta y=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\eta_1\Delta y$$

olur.

ε_2 ve η_2 gene $\Delta x \to 0$ ve $\Delta y \to 0$ için sıfıra giden kemmiyetler olmak üzere, ve $\partial v/\partial x$ ile $\partial v/\partial y$ nin de sürekli olmaları dolayısıyla, benzer şekilde

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\\ &= [v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y+\Delta y)] + [v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]\\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_2\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2\right)\Delta y = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \eta_2\Delta y\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\delta y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y +$$
$$+ (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\Delta x + (\eta_1 + i\eta_2)\Delta y$$

dir. $\Delta x \to 0$ ve $\Delta y \to 0$ için $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ ve $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ nin de sıfıra gideceği âşikârdır. Diğer taraftan Cauchy-Riemann şartlarını da kullanarak bu son ifâde için

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + \varepsilon\Delta x + \eta\Delta y\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon\Delta x + \eta\Delta y\end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ile bölüp limite geçecek olursak

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

bulunur; yâni $f(z)$ nin türevi mevcûttur ve tektir. Şu hâlde $f(z)$ göz önüne alınan bölgede analitiktir.

Sürekli, birbiçim ve analitik olan bir fonksiyona *holomorf* fonksiyon denir.

(III.2.1) bağıntılarından önce birincisini x e göre, ikincisini y ye göre ve sonra da birincisini y ye, ikincisini x e göre türetip taraf tarafa toplayarak kompleks değişkenli bir fonksiyonun reel ve sanal kısımlarının sırasıyla

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2.4)}$$

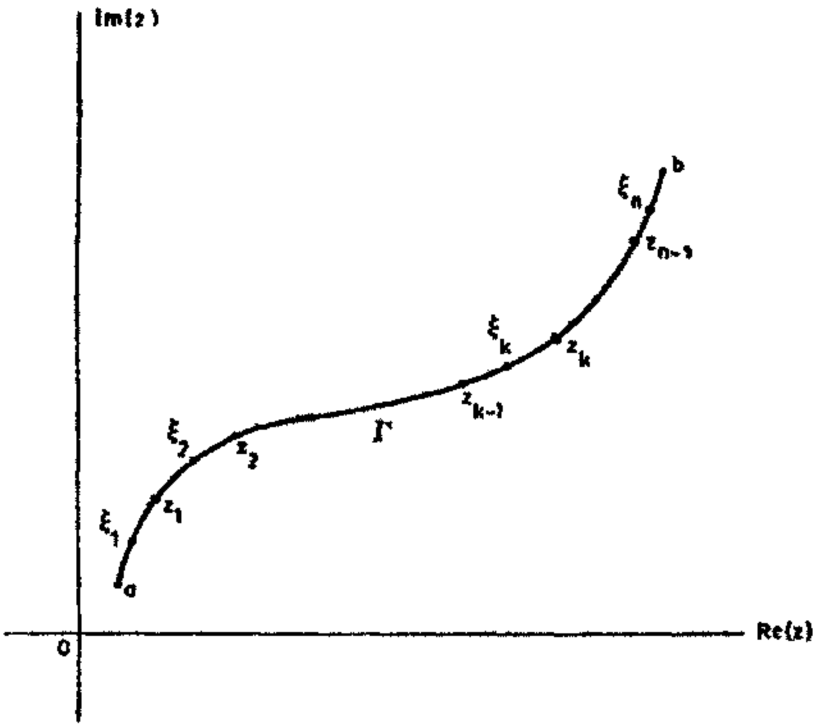
diferansiyel denklemlerini tahkik ettikleri bulunur. Bunlar düzlem için *Laplace* denklemleridir. Laplace denklemlerinin çözümlerine ***harmonik fonksiyonlar*** denir. Şu hâlde ***tek değişkenli kompleks bir fonksiyonun reel ve sanal kısımları harmonik fonksiyonlardır.***

Kompleks değişkenli fonksiyonların türevleri de tıpkı reel değişkenli fonksiyonların türevleri gibi aynı türetme kurallarına uyarlar. Özellikle *zincir kuralı* ile ters fonksiyonların türev kuralı burada da geçerlidir.

Belirsiz şekillerin limitlerini hesaplamak için reel değişkenli fonksiyonlar için kullanılan *L'Hospital* kuralının burada da geçerli olduğuna işâret edelim.

(III.3) KOMPLEKS INTEGRASYON.

Şekil: III.2 deki gibi sonlu bir (Γ) eğrisinin bütün noktalar için



Şek. III.2

sürekli olan bir $f(z)$ fonksiyonu olsun. $a=z_0$ ve $b=z_n$ olmak üzere (Γ) üzerinde $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ gibi bir takım noktalar seçelim, ve ξ_k lar ile de z_{k-1} ve z_k noktalarını birleştiren (Γ) eğrisinin yayı üzerinde keyfî bir takım noktalar alalım. Bu takdirde, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ olmak üzere

$$S_n = f(\xi_1)(z_1 - a) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - z_{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k \qquad \text{(III.3.1)}$$

toplamının, $|\Delta z_k| \to 0$ için (Γ) üzerindeki kısmî yayların sayısı sonsuza gittiğinde bu yayların seçilme tarzına bağlı olmaksızın bir limite yaklaştığı gösterilebilir ve

$$\lim_{|\Delta z_k| \to 0} S_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(z)\,dz = \int_{\Gamma} f(z)\,dz \qquad \text{(III.3.2)}$$

şeklinde temsil olunan bu limite $f(z)$ nin a dan b ye kadar belirli integrali ya da $f(z)$ nin (Γ) üzerinden kompleks integrali adı verilir.

Bu limitin varlığı şartı altında (Γ) eğrisine *integre edilebilen bir eğri* adı verilir. $(\Gamma) \in B$ olacak şekilde bir B bölgesinin her yerinde analitik bir $f(z)$ fonksiyonu varsa (Γ) da, bu takdirde, integre edilebilen bir eğri olur.

Kompleks integraller de reel integraller gibi şu özelikleri haizdirler:

1)

$$\int_{(\Gamma)} [f(z) + g(z)]dz = \int_{(\Gamma)} f(z)dz + \int_{(\Gamma)} g(z)dz$$

2) A bir sâbit olmak üzere

$$\int_{(\Gamma)} A f(z)\,dz = A \int_{(\Gamma)} f(z)\,dz$$

3)

$$\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$$

4)

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^m f(z)\,dz + \int_m^b f(z)\,dz\,, \qquad [a, b, m \in \Gamma]$$

5) $M = \underset{z \in \Gamma}{Max} \left\{ |f(z)| \right\}$, $L = (\Gamma)$ *nın uzunluğu* olmak üzere:

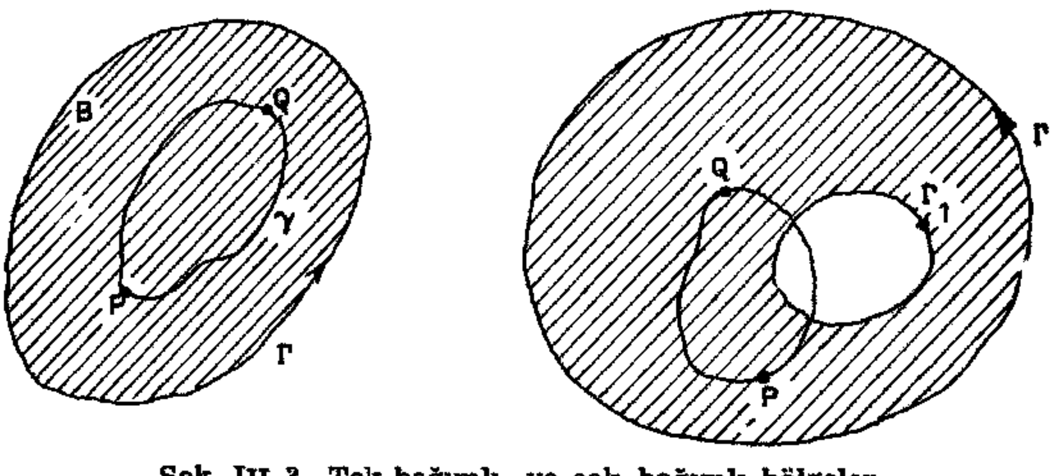
$$\left| \int_{(\Gamma)} f(z)\,dz \right| \leqq ML$$

6) $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ olmak üzere

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

7) $z = g(\zeta)$ ise ve z-düzlemindeki bir (Γ) eğrisine ζ-düzleminde bir (Γ') eğrisi tekaabül ediyor ve kezâ $g'(\zeta)$ türevi de (Γ') üzerinde sürekli ise

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma'} f\{g(\zeta)\}\, g'(\zeta)\,d\zeta$$



Şek. III. 3 Tek bağımlı ve çok bağımlı bölgeler.

Bir, B bölgesinin basit ya da *tek bağımlı* bir bölge olması demek $(\Gamma)\in B$ olacak şekildeki bütün kapalı eğrilerin ancak ve ancak B ye ait noktalar ihtivâ etmesi demektir. Aksi hâlde bölgeye *çok-bağımlı* bir bölgedir denir. Bölgeleri sınırlayan eğriler için yön daima bölgenin içi solda kalacak şekildedir.

CAUCHY Teoremi. Basit bir kapalı (Γ) eğrisinin çevrelediği tek bağımlı bir bölgenin bütün noktaları için sürekli olmak vasfını haiz $f'(z)$ türevli bir $f(z)$ fonksiyonunun (Γ) üzerinde kompleks integrali sıfırdır.

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=0. \tag{III.3.3}$$

İspatı: $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ fonksiyonu analitik ve (Γ) içinde sürekli türevi haiz olduğuna göre, (III.2.2) ve (III.2.3) e binâen

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

olduğundan

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

Cauchy-Riemann şartlarını gerçekleyen kısmî türevler de, sürekli olmak zorundadırlar,

Öte yandan düzlem için *Green* teoremi bilindiği gibi kapalı bir basit eğri boyunca alınmış olan integrali eğrinin sınırladığı bölge üzerinden alınmış çift katlı bir integrale dönüştürmektedir. Bu teoreme göre eğer $P=P(x,y)$ ve $Q=Q(x,y)$ göz önüne alınan bölgede sürekli türevleri haiz iseler

$$\oint_{(\Gamma)}\left\{P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right\}=-\int\!\!\int_{B}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy$$

olur. Bu takdirde, ve Cauchy-Riemann şartlarının ışığında

$$\oint_{(\Gamma)} f(z)\,dz=\oint_{(\Gamma)}(u+iv)(dx+idy)=\oint_{(\Gamma)}\left\{u\,dx-v\,dy\right\}+i\oint_{(\Gamma)}\left\{v\,dx+u\,dy\right\}$$

$$=-\iint_B\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy+i\iint_B\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=0+0=0$$

bulunur ki zâten bu da ispat edilmek istenen şeydir.

Özellikle $f(z)=1$, $f(z)=z$, $f(z)=(z-z_0)$ fonksiyonları analitik ve herhangi bir kapalı basit eğri içinde sürekli türevleri haiz olduklarından, bu teoremin bir sonucu olarak,

$$\oint_\Gamma dz=0,\quad \oint_\Gamma z\,dz=0,\quad \oint_\Gamma (z-z_0)\,dz=0 \qquad \text{(III.3.4)}$$

bağıntıları yazılabilir.

Cauchy teoremini daha az kısıtlayıcı şartlar altında ispatlamak da mümkündür. Bu önemli teoremin *Goursat* tarafından verilen ispatı, kapalı bir (Γ) eğrisi içinde $f(z)$ nin sürekliliğini değil, fakat sâdece $f(z)$ nin analitik olmasını şart koşması bakımından daha genel bir ifâde tarzına yol açmıştır.

CAUCHY - GOURSAT Teoremi: Tek - bağımlı bir bölgeyi çevreliyen kapalı bir (Γ) eğrisi üzerindeki bütün noktalarda analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$\oint_\Gamma f(z)dz=0 \qquad \text{(III.3.5)}$$

dır.

Bu teoremin ispatını, uzunluğuna binâen, burada vermekten kaçınıyoruz. (Bk. *Ruel V. Churchill*: **Complex Variables and Applications**, S. 106-111, Mc Graw-Hill Book Comp., Inc.; New York, Toronto, London; 1948).

Cauchy - Goursat teoreminin tersi de geçerlidir; yani:

MORENA Teoremi: Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu tek bağımlı bir B bölgesinde sürekli, ve $(\Gamma)\in B$ şeklinde kapalı her eğri için de

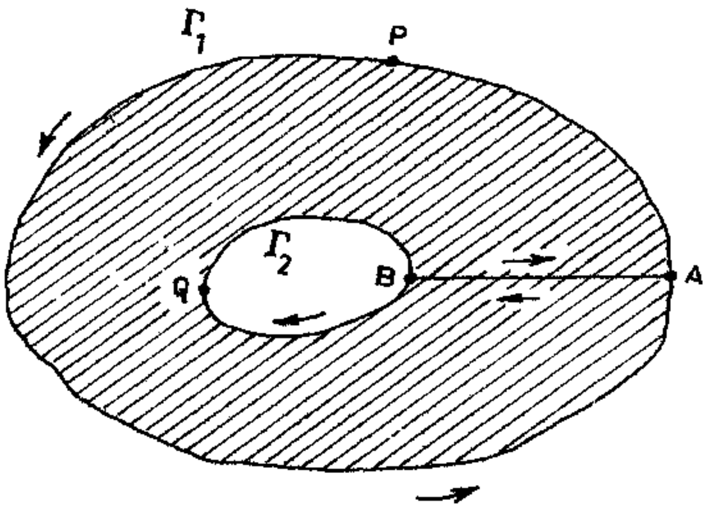
$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$$

ise, $f(z)$ fonksiyonu bütün B bölgesinde analitik olan bir fonksiyondur.

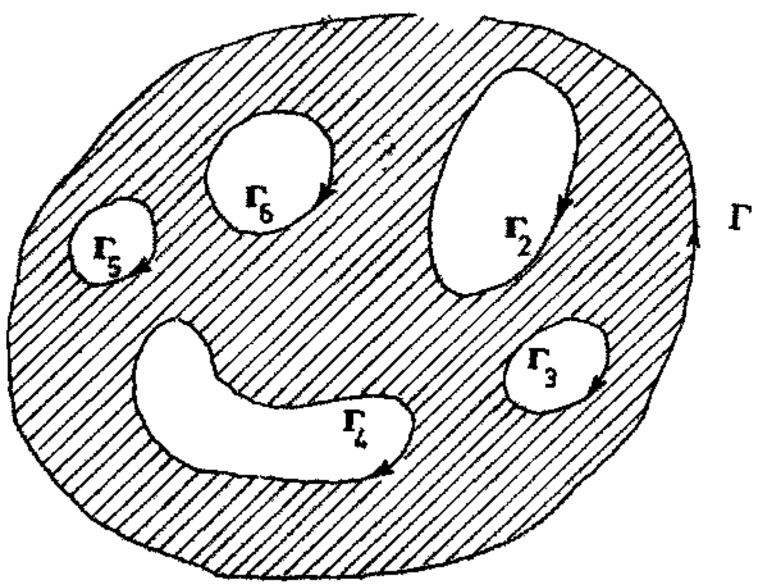
(III.4) ÇOK - BAĞIMLI BÖLGELER İÇİN CAUCHY TEOREMİ

Cauchy - Goursat teoremini ancak tek - bağımlı bölgeleri göz önüne alarak tesis ettik. Acaba ilgilenilen bölge tek bağımlı olacak yerde çok - bağımlı olsa ne olurdu ?

Bunu görmek için Şekil: III.4a daki gibi meselâ iki bağımlı bir



Şek. III.4a



Şek. III.4b

bölge tasarlayalım. Bu bölge, Γ_2 kapalı eğrisi tamamen Γ_1 kapalı eğrisinin sınırladığı bölge içinde kalmak üzere Γ_1 ve Γ_2 eğrileriyle sınırlanmış olsun. $f(z)$ gibi bir fonksiyonun Γ_2 nin dışında ve Γ_1 in içinde kalan müşterek kapalı bölgede analitik olduğunu varsayıyoruz. Eğer Γ_1 in A gibi bir noktasının Γ_2 nın B gibi bir noktasına bağlayacak olursak bu bölge basit bağımlı olur ve bu sebepten ötürü de buna Cauchy-Goursat teoremi uygulanabilir. Böylelikle pozitif yönde hareket ederek integral almak sûretiyle

$$\int_{APA} f(z)\, dz + \int_{AB} f(z)\, dz + \int_{BQB} f(z)\, dz + \int_{BA} f(z)\, dz = 0$$

olur. Buradaki 2. ve 4. integrallerin, aynı bir integrasyon yolu üzerinde aksi yönlerde hesaplandıklarından, toplamları sıfırdır. Binâenaleyh

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\, dz = 0$$

ya da ikinci integrâli sağ yana geçirip işâretini yâni Γ_2 üzerindeki dolanma yönünü değiştirerek

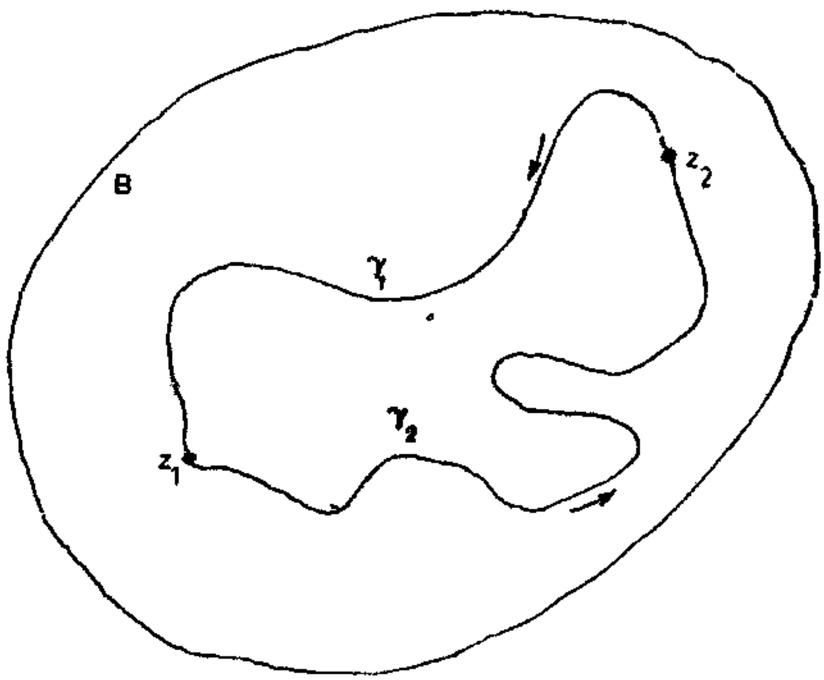
$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \oint_{\Gamma_2'} f(z)\, dz \qquad \text{(III.4.1)}$$

olur. İkiden daha fazla bağımlı bölgeler söz konusu olduğunda $k=1, 2, \cdots, n$ olmak üzere Γ_k lar, aynı bir kapalı Γ eğrisinin iç bölgesinin tamamen içinde kalan kapalı eğriler ise uygun kesimler yapıp göz önüne alınan bölgeyi tek-bağımlı kılarak Cauchy-Goursat teoreminin uygulanmasıyla da bu bölgedeki analitik bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)\, dz \qquad \text{(III.4.2)}$$

bağıntısının geçerli olduğu kolaylıkla gösterilir.

Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu kapalı bir eğrinin sınırladığı bir B bölgesinde analitikse B deki herhangi iki nokta arasında $f(z)$ nin integrali yola bağlı olmaz. Gerçekten de (Şekil: III.5) deki gibi B ye ait z_1 ve z_2 noktaları γ_1 ve γ_2 eğrileri aracılığıyla birleştirilmiş olsunlar. $f(z)$ fonksiyonu B de analitik olduğundan B deki kapalı her Γ eğrisi üzerinden alınan integrali sıfırdır. Özellikle, eğer $\Gamma=\gamma_1+\gamma_2$ ise



Şekil III. 5.

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=\oint_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz=\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz+\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$=\underbrace{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz}_{\gamma_1\text{ boyunca}}+\underbrace{\int_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz}_{\gamma_2\text{ boyunca}}=0$$

yâni

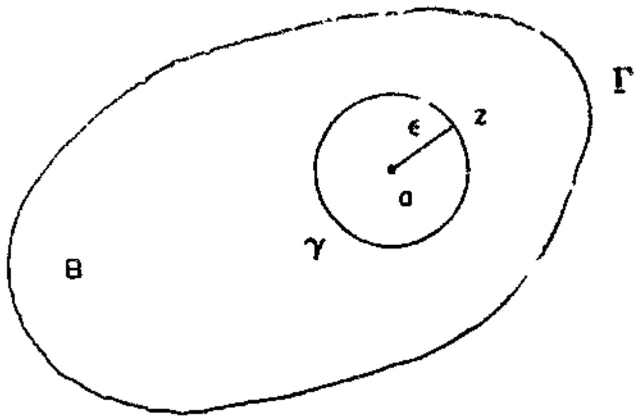
$$\underbrace{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz}_{\gamma_1\text{ boyunca}}=-\underbrace{\int_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz}_{\gamma_2\text{ boyunca}}=\underbrace{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz}_{\gamma_2\text{ boyunca}}$$

olur.

Şimdi Cauchy-Goursat teoremi yardımıyla bazı integraller hesaplayalım. Meselâ Γ gene basit bir kapalı eğri ve B de Γ nın sınırlandırdığı kapalı bölge olmak üzere

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}$$

integralini hesaplamak için $a \notin B$ ve $a \in B$ hâllerini göz önüne alacağız. Bu integralin integrantı $z=a$ da sonsuz olmakta ve dolayısıyla



Şekil III. 6

bu noktada $f(z)=1/(z-a)$ analitik olma vasfını kaybetmektedir. Eğer $a \notin B$ ise $f(z)$ nin B içinde analitik olmadığı yer bulunmayacağından

$$a \notin B \text{ için} \qquad \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = 0$$

olur.

$a \in b$ ise, ε çok küçük bir kemmiyet olmak üzere $|z-a|=\varepsilon$ çemberini göz önüne alalım; bunu γ ile gösterecek olursak yukarıda açıklandığı üzere

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

olur. $|z-a|=\varepsilon$ dan $z-a=\varepsilon e^{i\theta}$ ve $dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$ bulunur. Buna göre

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{0}^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = 2\pi i \qquad \text{(III.4.3)}$$

olduğu tesbit edilmiş olur. Benzer şekilde, n ile pozitif ve birden büyük bir tam sayıyı göstererek

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{0}^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_{0}^{2\pi} \varepsilon^{(1-n)i\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \left[\frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)\varepsilon^{n-1}} \left[e^{2(1-n)\pi i} - 1 \right] = 0 \qquad \text{(III.4.4)}$$

bulunur.

Şimdi gene Şekil: III.6 yı göz önünde bulundurarak, $f(z)$ fonksiyonu B de analitik olmak şartiyle

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

integralini hesaplayalım. Eğer $a \in B$ ise, $f(z)/z-a$ bu noktada analitik olmaz ve basit bir *kutup noktası* arzeder. Diğer taraftan

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{z-a} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z-a}$$

dır. Diğer taraftan sağ yandaki integral

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz + f(a) \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-a} \qquad \text{(III.4.5)}$$

yazılabilir. (III.4.3) sonucuna dayanarak sağdaki ikinci integral $2\pi i f(a)$ dan ibârettir. Sağdaki ilk integrali hesaplayabilmek için de $z-a=\varepsilon\, e^{i\theta}$ vazedelim: $dz = i\varepsilon\, e^{i\theta}\, d\theta$ olur ve böylece

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz = i \oint_{\gamma} \left[f(z)-f(a)\right] d\theta$$

olur. Eğer $|f(z)-f(a)|$ nın maksimumu M ise

$$\left| \oint_{\gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz \right| \leqq M \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi M$$

dir. Fakat ε yarıçapı keyfî olduğundan bunu istediğimiz kadar küçük alabiliriz. Diğer taraftan $f(z)$ nin analitik olması hasebiyle $\varepsilon \to 0$ için $f(z) \to f(a)$ ve dolayısıyla $M \to 0$ olacaktır. Şu hâlde (III.4.5) in sağ yanındaki ilk integrâlin değeri sıfırdır. Buna dayanarak

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{z-a} = 2\pi i\, f(a) \qquad \text{(III.4.6)}$$

olur. Buna göre ζ ile $f(z)$ fonksiyonunun her noktasında analitik olduğu bir B bölgesini sınırlayan sâbit bir kapalı Γ eğrisi üzerindeki değişken bir noktayı göstermek üzere $z \in B$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{(III.4.7)}$$

bulunur.

«Cauchy integral formülü» diye bilinen bu ifâde $f(\zeta)$ fonksiyonunun analitik olduğu bir bölgenin sınırında aldığı değerler bilindiğinde fonksiyonun bölgenin herhangi bir noktasındaki değerini hesaplamağa yarar.

Uygulama: 1) Γ eğrisi $x^2+4y^2=1$ elipsi olduğunda

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

integralini hesaplayınız.

$f(z)=\sin z$ fonksiyonu bu elipsin içinde analitik bir fonksiyondur. Eğer bir de $a=0$ vazedilirse (III.4.7) Cauchy formülüne binâen

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \sin 0 = 0$$

bulunur.

2) Γ eğrisi $|z|=2$ çemberiyle gösterilmek üzere

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-z}}{z+1} dz$$

integralini hesaplayınız.

$z=-1$ noktası Γ nın içinde olup e^{-z} ise, Γ nın içinde her yerde analitiktir. Bu takdirde (III.4.7) Cauchy formülüne dayanarak

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{-z}}{z+1} dz = 2\pi i \Big[e^{-z} \Big]_{z=-1} = 2\pi i e$$

bulunur.

(III.4.7) Cauchy integral formülü analitik fonksiyonların birçok özelliklerini incelemek için çok faydalı bir formüldür. Bunun yardımıyla $f(z)$ gibi analitik bir fonksiyonun Γ nın sınırladığı B bölgesinde yalnız birinci mertebeden sürekli türevleri değil fakat her mertebeden türevleri haiz olduğu gösterilebilir. Bu netice ise analitik bir fonksiyonun her mertebeden türevi haiz olduğunu ortaya koymaktadır. Bu itibarla önce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

şeklinde *Cauchy tipi bir integral* göz önüne alalım. Burada $f(\zeta)$ mutlaka analitik olması iktizâ etmeyen sürekli herhangi bir kompleks fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(z)$ nin Γ nın sınırladığı B bölgesinde her noktada bir türevi haiz olduğunu yâni $f(z)$ nin B de analitik olduğunu göstereceğiz. Buna göre

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - (z+\Delta z)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \right] = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} \right]$$

ve $f(\zeta)$ sürekli olduğu için integral işâreti altında $\Delta z \to 0$ yapılmasında beis olmadığından

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

bulunur. Ayni şekilde

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

bulunur. Bu formüller ise $f(z)$ nin analitik olduğunu ve her mertebeden türevi haiz olduğunu göstermektedirler.

(III.5) TAYLOR SERİSİNE AÇILIM.

z_0 merkezli bir γ çemberi içinde holomorf bir $f(z)$ fonksiyonu olsun. Bu takdirde (III.4.7) Cauchy integral formülüne dayanarak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

olduğunu bilmekteyiz. Şimdi

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \; \frac{1}{\left[1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right]}$$

yazılabileceği için

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right] =$$

$$= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n + \cdots \right]$$

olur. Birbiçim bir şekilde yakınsak olan bu son ifâdeyi $1/2\pi i$ ile çarpıp da ζ ya göre γ üzerinden integralini alırsak

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^2}(z-z_0)+$$

$$\cdots\cdot+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n+\cdots\cdot$$

$$=A_0+A_1(z-z_0)+\cdots+A_n(z-z_0)^n+\cdots \qquad \text{(III.5.1)}$$

bulunur. (III.4.8) ifâdeleri de göz önünde bulundurularak

$$A_n=\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z)}{n!} \qquad \text{(III.5.2)}$$

olduğu tesbit edilir. Bu şartlar altında (III.5.1) açılımı $f(z)$ nin $z-z_0$ noktası cıvarında bir Taylor serisine açılımını göstermektedir. Eğer $z_0=0$ ise (III.5.1) açılımı (III.5.2) şartları altında

$$f(z)=f(0)+zf'(0)+\frac{z^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

şeklindeki bir *Mac Laurin* açılımına müncer olur.

Bu vesiyle ile bir B bölgesinde analitik olan bir fonksiyonun o bölgede her mertebeden sürekli türevi haiz olması dolayısıyla, bir Taylor serisine açındırılabildiğini müşâhede etmekteyiz. Tersine olarak, eğer bir B bölgesinde bir fonksiyon bir Taylor serisine açındırılabiliyorsa, her mertebeden sürekli türevi haizdir demektir; bu ise o fonksiyonun analitik olduğuna delildir.

(III.6) LAURENT SERİSİNE AÇILIM.

$z=z_0$ merkezli ve R yarıçaplı bir Γ dairesinin içinde ve çemberi üzerinde merkez hariç analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu göz önüne alalım. Eğer merkezi, ρ yarıçaplı küçük bir γ dairesiyle çevreleyecek olursak $f(z)$ fonksiyonu Γ ile γ arasındaki bölgede holomorf olur. (III. 4.7) Cauchy integral formülünü $\gamma+\Gamma$ çevresi için, ve her iki γ ve Γ üzerindeki yönü saatin aksi yönü seçerek,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma+\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} \quad \text{(III.6.1)}$$

şeklin deyazmak kaabildir. (III.5.1) e binâen bu ifâdenin sağ yanındaki ilk terim,

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{(III.6.2)}$$

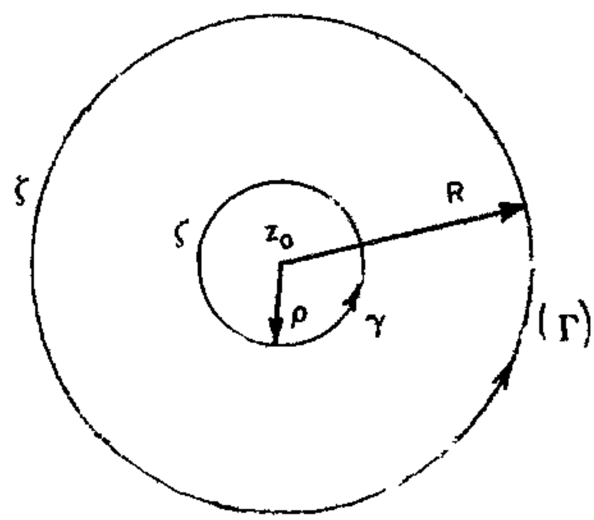
olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = A_0 + A_1(z - z_0) + \cdots\cdot + A_n(z - z_0)^n + \cdots\cdot \quad \text{(III.5.1)}$$

den ibârettir. Bununla beraber A_n katsayıları için (III.6.1) nin en sağ yanı geçerli değildir, zirâ $f(z)$ bütün Γ içinde her yerde holomorf bir fonksiyon değildir. Bununla beraber geçen paragraftaki gibi

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \, \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

yazılabilir. Burada Şekil: III. 7 den de görüldüğü üzere γ için $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$ olduğundan



Şekil: III. 7

$$\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=$$

$$=\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\left[1+\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n+\cdots\right] \quad \text{(III.6.3)}$$

ya da $1/2\pi i$ ile çarpıp ζ ya göre γ üzerinden integralini alarak

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)\,(\zeta-z_0)\,d\zeta}{(z-z_0)^2}+$$

$$\cdots+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)\,(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta}{(z-z_0)^n}+\cdots$$

yâhut da

$$A_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\zeta)\,(\zeta-z_0)^{n-1}\,d\zeta \quad \text{(III.6.4)}$$

vazederek

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)\,dz}{\zeta-z}=\frac{A_{-1}}{z-z_0}+\frac{A_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots$$

(III.6.5)

bulunur. Buna göre, göz önüne alınan şartlar altında, (III.6.1) formülü (III.5.1) ve (III.6.3) açılımları ışığında

$$f(z)=\cdots+\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-z_0}+A_0+A_1(z-z_0)+\cdots$$

$$\cdots+A_n(z-z_0)^n+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-z_0)^n \quad \text{(III.6.6)}$$

gibi bir seriye açılım şeklinde karşımıza çıkar. Böyle bir açılıma *Laurent açılımı* adı verilir.

Bir $f(z)$ fonksiyonunun Laurent açılımında eğer $(z-z_0)$ ın negatif kuvvetlerinin katsayısı sıfırdan farklı olanlarının en yüksek mertebesi sonlu bir n sayısı ise $f(z)$ nin n - ninci dereceden bir kutbu olduğu ve $z=z_0$ ın da bu n - ninci dereceden kutbu temsil ettiği söylenir. Eğer $n=\infty$ ise $z=z_0$ ın *esaslı bir tekil noktaya* delâlet ettiği söylenir. n nin sonlu olması hâlinde $f(z)$ ye *meromorf* bir fonksiyon denir.

Eğer tek değerli bir $f(z)$ fonksiyonu $z=z_0$ gibi bir noktada tanımlanmamış, fakat buna mukaabil

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \tag{III.6.7}$$

limiti mevcûd ise $z=z_0$ a *kaldırılabilir tekil nokta* denir ve böyle hâllerde $z=z_0$ da $f(z)$ in değeri (III.6.7) limiti olarak tanımlanır.

Eğer $z=1/w$ vazederek $f(z)$ fonksiyonu $f(1/w)=F(w)$ ye dönüştürüldüğünde $w=0$ için $F(w)$ bir tekil nokta arzediyorsa bu takdirde $f(z)$ nin *sonsuzda tekil bir noktayı* haiz olduğu söylenir. buna binâen meselâ $f(z)=z^2$ fonksiyonu sonsuzda ikinci mertebeden bir kutbu haizdir, zirâ $F(w)=f(1/w)=1/w^2$ fonksiyonu $w=0$ da ikinci mertebeden bir kutbu haiz bulunmaktadır. Aynı şekilde $f(z)=e^z$ de $z=\infty$ da, $F(w)=f(1/w)=e^{-w}$ fonksiyonunun $w=0$ da esaslı bir tekil noktayı haiz olması sebebiyle, esaslı bir tekil nokta arzetmektedir.

(III.7) REZİDÜ TEOREMİ.

Bir B bölgesindeki kapalı bir γ eğrisi içinde meromorf olan bir fonksiyonun

$$f(z) = \sum_{n=-a}^{\infty} A_n(z-z_0)$$

şeklinde bir Laurent serisine açıldığını gördük. Bu açılım katsayılarını, (III.5.2) ve (III.6.3) ü göz önünde tutarak ve $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ değerini almak üzere, tek bir

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

formülü hâlinde toplamak mümkündür. Eğer $n=-1$ alınacak olursa, formüle dayanarak

$$\oint_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i\, A_{-1} \qquad \text{(III.7.1)}$$

olacaktır. Laurent açılımında $1/(z-z_0)$ ın katsayısı olan A_{-1} e $f(z)$ fonksiyonunun $z=z_0$ noktasındaki *rezidü*sü adı verilir. (III.7.1) e binâen: «Meromorf bir fonksiyonun, tekil noktasını ihtivâ eden kapalı bir eğri üzerinden integrali fonksiyonun tekil noktasındaki rezidüsünün $2\pi i$ katıdır.»

Bunu doğrudan doğruya görmek de mümkündür. Gerçekten, $f(z)$ nin holomorf kısmını $\varphi(z)$ ile göstererek

$$f(z) = \cdots + \frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{A_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{A_{-1}}{(z-z_0)} + \varphi(z)$$

yazılabilir. Bu ifâdeyi Γ üzerinden integre edelim. $\varphi(z)$ nin Γ içinde holomorf olması dolayısıyla $\varphi(z)$ nin Γ üzerindan integrali Cauchy-Goursat teoremine göre sıfır olacağından

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = \cdots + A_{-n} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} + \cdots + A_{-2} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^2} + A_{-1} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}$$

olur. Halbuki bu tip integralleri zâten (III.4.3) ve (III.4.4) de hesaplamış buluyoruz. Bu sonuçlara dayanarak gene:

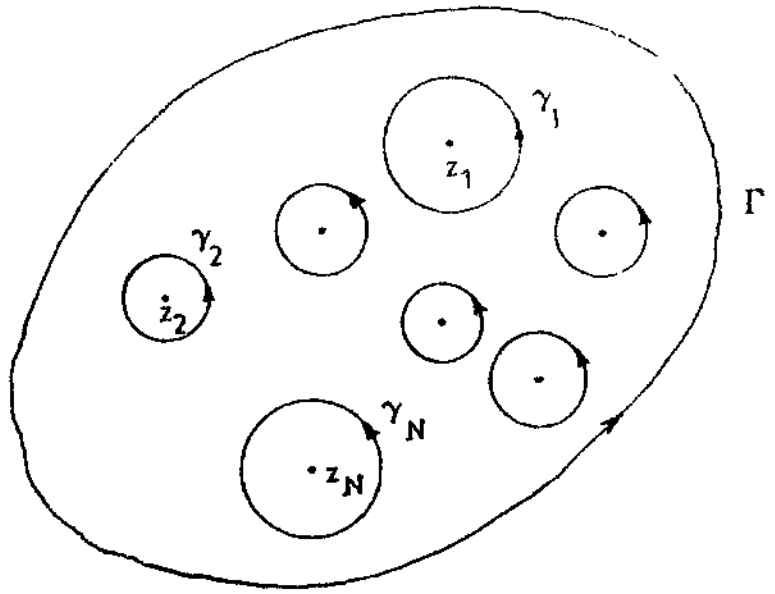
$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i\, A_{-1}$$

bulunur.

Şimdi Γ eğrisinin çevrelediği bir B bölgesinde $f(z)$ fonksiyonunun N adet kutbu haiz olduğunu farzedelim. (Bk. Şekil: III.8). Daha önce görmüş olduğumuz vechile $f(z)$ nın Γ üzerinden integrali, $k=1,2,\ldots,N$ olmak üzere, $f(z)$ nin γ_k lar üzerinden integrallerinin toplamına müncer olur:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\, dz + \cdots + \oint_{\gamma_N} f(z)\, dz. \qquad \text{(III.7.2)}$$

Herbir γ_k çevresi içinde $f(z)$ meromorf bir fonksiyon olduğundan z_k kutup noktası cıvarında bir Laurent serisine açılabilir ve γ_k üzerinden $f(z)$ nin integrali de, bu takdirde, $f(z)$ nin z_k ya göre rezidüsünün $2\pi i$ katı olur.



Şek. III.8

$f(z)$ nin z_k kutbuna tekaabül eden rezidüsünü $A_{-1}^{(k)}$ ile gösterirsek $f(z)$ nin Γ üzerinden integrali de (III.7.2) dolayısıyla

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} A_{-1}^{(k)} \tag{III.7.3}$$

olacaktır.

Rezidülerin hesabı için kolay bir kural verebilmek üzere $f(z)$ nin $z=z_0$ da m-ninci mertebeden bir kutbu haiz olduğunu farzedelim; bu takdirde $f(z)$ nin Laurent açılımı

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{A_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-z_0} + A_0 + A_1(z-z_0) + \cdots$$

şeklinde olacaktır. Bu ifâdenin her iki yanını da $(z-z_0)^m$ ile çarpalım. Böylece

$$F(z) = (z-z_0)^m f(z) =$$
$$= A_{-m} + A_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + A_{-1}(z-z_0)^{m-1} + A_0(z-z_0)^m + \cdots$$

şeklindeki holomorf bir fonksiyonun $z=z_0$ noktası cıvarındaki Taylor serisine açılımı elde edilmiş olur. Taylor serisindeki terimlerin katsayılarının nasıl bulunduğu Matematiksel Analiz' den bilinmektedir. Özellikle $F(z)$ nin bu açılımındaki A_{-1} katsayısı da

$$A_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[F(z)\right]_{z=z_0}$$

yâni

$$A_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\} \qquad \text{(III.7.4)}$$

olur.

Eğer göz önüne alınan kutup basit bir kutup ise $m=1$ dir; ve rezidü de bu sefer

$$A_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left\{(z-z_0)\,f(z)\right\} \qquad \text{(III.7.5)}$$

ifâdesiyle verilecektir.

MİSÂL: 1. Örnek olmak üzere

$$f(z)=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

fonksiyonunun kutup noktalarındaki rezidülerini arayalım. Bu fonksiyonun $z=-1$ de çift katlı bir kutbu; $z=\pm 2i$ de de basit iki kutbu haiz olduğu görülmektedir.

$z=-1$ deki rezidü, (III.7.4) e binâen

$$\lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to -1}\left\{\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}\right\}=-\frac{14}{25}$$

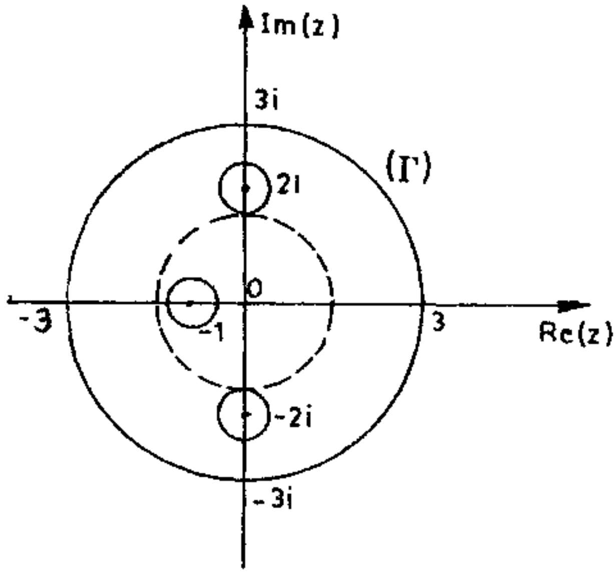
$z=2i$ deki rezidü (III.7.4) e binâen

$$\lim_{z\to 2i}\left\{(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}\right\}=\frac{-4-4i}{(2i+1)^2(4i)}=\frac{7+i}{25}$$

$z=-2i$ deki rezidü de gene (III.7.5) e dayanarak

$$\lim_{z\to -2i} \left\{ (z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} \right\} = \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(4i)} = \frac{7-i}{25}$$

olarak tesbit edilirler. Buna göre $f(z)$ nin meselâ $|z|=3$ çemberi üzerinden integrali



Şek. III.9

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{14}{25}+\frac{7+i}{25}+\frac{7-i}{25}\right)=0$$

bulunur; ve meselâ $|z|=3/2$ çemberi üzerinden integrali de

$$\oint_{|z|=3/2} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz = -\frac{28\pi i}{25}$$

olur.

MİSÂL: 2 Başka bir misâl olmak üzere $|z|=1$ çemberi boyunca

$$\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{cotg} z \cdot \coth z}{z^3}\,dz$$

integralini hesaplayalım.

İntegrantın $z=0$ da üç katlı bir kutbu haiz olduğu görülmektedir. Bu kutba tekaabül eden rezidüyü hesaplamak için gene (III.5.4) formümülünü kullanmaya kalkışırsak bu bizi çok uzun hesaplara sevkeder. Bu itibarla integrantı biraz değişik bir tarzda yazılarak bunun ifâdesinin payında ve paydasındaki basit fonksiyonlar $z=0$ cıvarında Mac Laurin serilerine açılır:

$$f(z) = \frac{\operatorname{cotg} z \cdot \coth z}{z^3} = \frac{\cos z \cdot \cosh z}{z^3 \sin z \cdot \sinh z}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)}{z^3\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{z^4}{6} + \cdots}{z^5\left(1 - \frac{z^4}{90} + \cdots\right)} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{7z^4}{45} + \cdots\right).$$

Buna dayanarak $f(z)$ nin $z=0$ daki rezidüsünün $A_{-1} = -\frac{7}{45}$ olduğu görülmektedir. Bu kutup noktası $z=1$ çemberinin içinde kaldığından

$$\oint_\Gamma \frac{\operatorname{cotg} z \cosh z}{z^3} dz = 2\pi i\left(-\frac{7}{45}\right) = -\frac{14\pi i}{45}$$

bulunur.

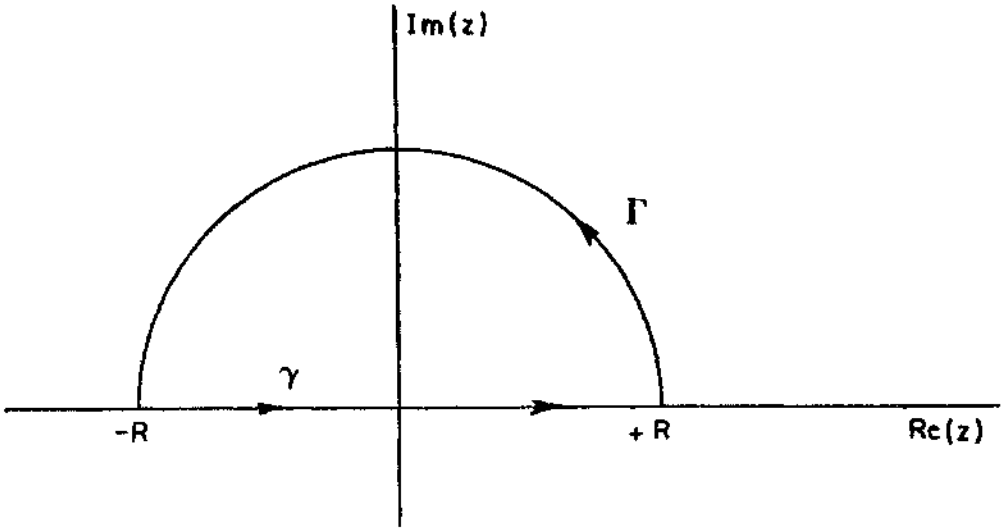
(III.8) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ TİPİNDE BELİRLİ VE REEL İNTEGRALLERİN REZİDÜLER METODU YARDIMIYLA HESAPLANMASI.

Şekil : III.10 daki gibi, üst kompleks düzlemde bir yarım daire ve bu yarım düzlemde meromorf olan bir $f(z)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

Bu takdirde Γ ile yarım çemberi ve γ ile de çevrenin reel eksen üzerindeki parçasını göstererek

$$\oint_{\Gamma+\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)}$$

olacağını biliyoruz. Bu ifâdeyi



Şekil III. 10

$$\oint_{\Gamma+\gamma} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)} \qquad \text{(III.8.1)}$$

şeklinde iki parçaya da ayırabiliriz. Bunlar, biri $-R$ ilâ $+R$ arasında kompleks z değişkeninin reel eksen üzerinde katettiği γ çevre parçası, diğeri ise Γ çemberi üzerinden $f(z)$ nin integralleridir.

Eğer $z \to \infty$ olursa bu kezâ $R \to \infty$ demektir. Diğer taraftan $k > 0$ olmak ve M de bir sâbiti göstermek üzere, eğer

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{R\to\infty} |f(z)| \to \lim_{z\to\infty} \frac{M}{|z|^k} = \lim_{R\to\infty} \frac{M}{R^k} \qquad \text{(III.8.2)}$$

ise,

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leqq \lim_{R\to\infty} \frac{M}{R^k} \left| \int_{\Gamma} dz \right| = \lim_{R\to\infty} \frac{M}{R^k} \pi R = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi M}{R^{k-1}} = 0$$

$$\text{(III.8.3)}$$

olur. $f(z)$ fonksiyonunun (III.8.2) şartına uymasına *JORDAN şartı* ve bunun sonucu olarak da $f(z)$ nin üst yarım kompleks düzlemde Şekil: III. 10 daki gibi Γ yarım çemberi üzerinden integralinin sıfır olmasına *Jordan lemması* adı verilir.

(III.8.3) ün ışığı altında (III.8.1) integrali

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma+\gamma} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + 0 = 2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)} \qquad \text{(III.8.4)}$$

ifâdesine indirgenmiş olur.

Böylelikle,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

tipinde belirli reel integrallerin hesaplanabilmesi için integrantın ne gibi vasıflara mâlik olması gerektiğini görmüş bulunuyoruz.

MİSÂL: 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ *integralini hesaplayınız.*

Bunun için tek kompleks değişkenli $f(z)=1/(z^2+1)^3$ fonksiyonunun, Şekil: III.10 daki $\Gamma+\gamma$ çevresi üzerinden integralini göz önüne alacağız. Bu $f(z)$ fonksiyonu üst yarım düzlemde $x=i$ noktasında üç katlı bir kutbu haizdir. Diğer taraftan $z=Re^{i\theta}$ vazederek $dz=iRe^{i\theta}d\theta$ olur ve

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^2+1)^3}\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}d\theta}{(R^2e^{i2\theta}+1)^3}\right| \leqq \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{|iRe^{i\theta}|\,d\theta}{|R^2e^{i2\theta}+1|^3}$$

$$< \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{R}{R^6}d\theta = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R^5} = 0$$

dır. Bu itibarla

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma+\gamma}\frac{dz}{(z^2+1)^3} = \lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{(x^2+1)^3} + \int_{\Gamma}\frac{dz}{(z^2+1)^3}\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} + 0 = 2\pi i\, A_{-1}$$

olur. $z=i$ deki üç katlı kutba tekaabül eden rezidü, (III.7.4) e binâen

$$A_{-1}=\lim_{z\to i}\left\{\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^2\cdot\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]\right\}=\frac{3}{16i}$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\,\frac{3}{16i}=\frac{3\pi}{8}$$

bulunur.

MİSÂL: 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{7\pi}{50}$ *olduğunu gösteriniz.*

Burada da gene Şekil: III.10 daki integrasyon çevresini göz önüne alıp $R\to\infty$ için

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma+\gamma}\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2\,(z^2+2z+2)}$$

kompleks integralini hesaplayacağız. Buradaki integrant üst yarım kompleks düzlemde $z=i$ noktasında çift katlı bir kutbu ve bir de $z=-1+i$ noktasında basit bir kutbu haizdir. Diğer taraftan $z=Re^{i\theta}$ vazederek $dz=iRe^{i\theta}d\theta$ olur ve

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right|=\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi}\frac{R^2e^{i2\theta}iRe^{i\theta}d\theta}{(R^2e^{i2\theta}+1)^2(R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)}\right|$$

$$\leqq\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{R^3\left|e^{i3\theta}\right|d\theta}{\left|(R^2e^{i2\theta}+1)^2\,(R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)\right|}\leqq\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{R^3}{R^6}\,d\theta=0$$

dır. Bu itibarla *JORDAN* lemmasının şartları gerçekleştiği vakit Γ üzerinden olan integralin sıfıra gitmesi dolayısıyla,

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma+\gamma}\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2\,(z^2+2z+2)}=\lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{+R}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}+\right.$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} + 0 = 2\pi i\sum_k A_{-1}^{(k)}$$

olur; $z=i$ kutbuna tekaabül eden rezidü, (III.7.4) e binâen

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\Big\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\Big\} = \frac{9i-12}{100}$$

ve $z=-1+i$ kutbuna tekaabül eden rezidü de, (III.7.5) e binâen

$$\lim_{z\to(-1+i)}\Big\{(z+1-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\Big\} = \frac{3-4i}{25}$$

dir. Şu hâlde

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = 2\pi i\left(\frac{9i-12}{100}+\frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7\pi}{50}$$

olur.

MİSÂL: 3. BASAMAK ya da HEAVİSİDE FONKSİYONU.

Şimdi kompleks düzlemde

$$t<0 \quad \text{için:} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma+\gamma}\frac{e^{itz}\,dz}{z}, \qquad \text{ve}$$

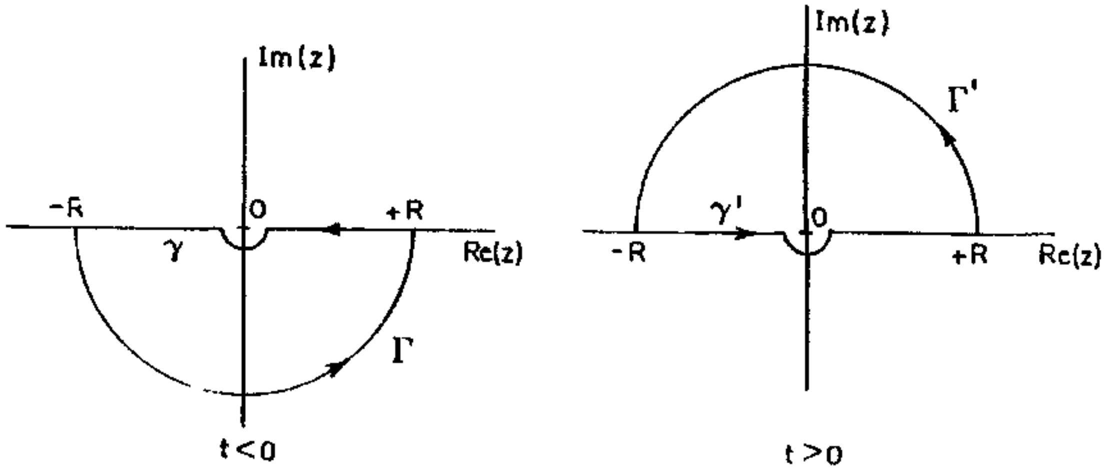
$$t>0 \quad \text{için:} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma'+\gamma'}\frac{e^{itz}\,dz}{z}$$

olacak şekilde t nin fonksiyonu olarak belirlenen $f(t)$ yi göz önüne alıp özelliklerini incelemek istiyoruz. (Bk: Şekil: III.11).

Önce $t<0$ hâlini göz önüne alalım. Buna göre $\Gamma+\gamma$ çevresi $z=0$ kutbunu ihtivâ etmediğinden

$$t<0 \quad \text{için:} \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma+\Gamma}\frac{e^{itz}\,dz}{z} = 0$$

dir.



Şekil III. 11

Diğer taraftan $z = Re^{i\theta}$ vazederek

$$I = \lim_{R\to\infty} \left| \int_\Gamma \frac{e^{itz}\,dz}{z} \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_\pi^0 \frac{e^{itRe^{i\theta}}\, iRe^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta}} \right| =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left| \int_\pi^0 ie^{it(R\cos\theta + iR\sin\theta)}\,d\theta \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_\pi^0 ie^{itR\cos\theta}\, e^{-tR\sin\theta}\,d\theta \right| =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left| 2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ie^{itR\cos\theta}\, e^{-tR\sin\theta}\,d\theta \right| \leqq \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\left| ie^{itR\cos\theta} \right| e^{-tR\sin\theta}\,d\theta$$

olur. Fakat $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ için $\frac{\sin\theta}{\theta} \geqq \frac{2}{\pi}$ olduğundan

$$I = \lim_{R\to\infty} \left| \int_\Gamma \frac{e^{itz}\,dz}{z} \right| \leqq \lim_{R\to\infty} \left\{ 2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left| ie^{itR\cos\theta} \right| e^{-tR\sin\theta}\,d\theta \right\} <$$

$$< \lim_{R\to\infty} 2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-2tR\theta/\pi}\,d\theta = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{tR}\left[e^{-tR} - 1 \right] = 0$$

bulunur ki bu da Jordan lemmasının e^{itz}/z fonksiyonu için de geçerli oluşuna delâlet eder. Buna ve (III.8.5) e binâen $t<0$ için

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma+\gamma} \frac{e^{itz}\,dz}{z} = \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{itx}\,dx}{x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{itz}\,dz}{z} \right\}$$

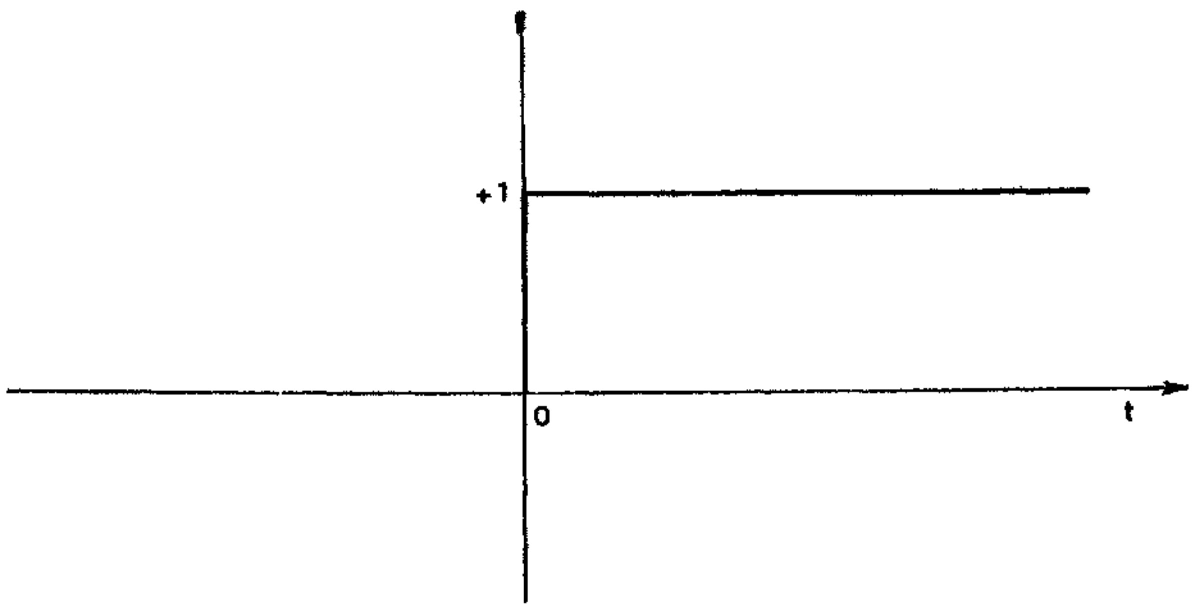
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}\,dx}{x} + 0 = 0$$

$\Gamma'+\gamma'$ çevresine gelince, bu çevre $z=0$ kutbunu ihtivâ etmektedir. Buna tekaabül eden rezidünün de 1 olduğu kolaylıkla tahkik olunur. Buna binâen ve e^{itz}/z nin Jordan lemmasını tahkik etmesinden dolayı $t>0$ için

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'+\gamma'} \frac{e^{itz}\,dz}{z} = \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{itx}\,dx}{x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{itz}\,dz}{z} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}\,dx}{x} + 0 = 1$$

bulunur. Buna göre $f(t)$ fonksiyonu



Şek. III.12 HEAVİSİDE Basamak Fonksiyonu.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}\,dx}{x}=\begin{cases}1, & \text{eğer } t>0 \text{ ise}\\ 0, & \text{eğer } t<0 \text{ ise}\end{cases}$$

özelliklerini ve dolayısıyla da Şekil: III.12 deki gibi grafik bir gösterilişi haiz olmaktadır.

(III.8.6) ile belirlenen $f(t)$ fonksiyonuna basamak ya da Heaviside fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyonun $1/x$ in Fourier dönüşmüşü olduğu görülmektedir.

(III.9) $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}$ F(sin θ, cos θ) dθ TİPİNDEKİ İNTEGRALLERİN HESABI.

Bu tip integrallerde eğer F integrantı $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ nin polinomlarının bir oranı şeklinde ise rezidüler metodu yardımıyla bu tip belirli reel integraller çok kere kolaylıkla hesaplanabilirler. Bu takdirde, eğer θ yı $z=e^{i\theta}$ birim çemberi üzerindeki z nin argümenti olarak telâkkî edecek olursak

$$\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}\,;\qquad \cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}\,;\qquad dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta \qquad \text{(III.9.1)}$$

olur ve integral de artık bu şartlar altında (C) birim çemberi boyunca z nin rasyonel bir fonksiyonunun integralini temsil eder ve integral de

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}F(\sin\theta\,,\,\cos\theta)\,d\theta=-i\oint_{C}\frac{1}{z}\,F\left\{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}dz$$

şekline girer

MİSÂL: 1. İlk bir misâl olmak üzere

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{5}{4}+\sin\theta}$$

integralini hesapaylalım. (III.9.1) dönüşümünü yaparsak

$$\frac{5}{4}+\sin\theta=\frac{5}{4}+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{1}{4iz}(2z^2+5iz-2)$$

ve dolayısıyla

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{5}{4}+\sin\theta}=\oint_C\frac{dz}{iz}\,\frac{4iz}{2z^2+5iz-2}$$

$$=\oint_C\frac{4\,dz}{2z^2+5iz-2}=\oint_C\frac{2\,dz}{(z+2i)\left(z+\frac{i}{2}\right)}$$

olur. Bu integralin integrantı $z=-2i$ ve $z=-i/2$ de iki basit kutbu haizdir. Ancak bunlardan yalnız $z=-i/2$ kutbu C birim çemberinin içinde kalmaktadır. Buna göre ve $z=-i/2$ deki rezidü de

$$\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\left\{\left(z+\frac{i}{2}\right)\frac{2}{(z+2i)\left(z+\frac{i}{2}\right)}\right\}=\frac{4}{3i}$$

olduğundan

$$I=2\pi i\,\frac{4}{3i}=\frac{8\pi}{3}$$

bulunur.

MİSÂL: 2. $$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2x}=\pi\sqrt{2}$$

olduğunu gösteriniz.

(III.9.1) dönüşümü dolayısıyla

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2x}=\oint_C\frac{dz}{iz}\,\frac{1}{1+\left[\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}\right]^2}=\frac{4}{i}\oint_C\frac{z\,dz}{z^4+6z^2+1}$$

olur. Bu integralin hesabını $u=z^2$ vazederek daha da basitleştirmek kaabildir; böylece

$$\frac{4z\,dz}{i(z^4+6z^2+1)}=\frac{2\,du}{i(u^2+6u+1)}$$

olur. Fakat z noktası C birim çemberini bir kere dolanırsa u aynı çemberi iki kere dolanmış olur. Şu hâlde $u=z^2$ dönüşümü dolayısıyla meydana gelen integrali iki ile çarpmak lâzımdır. Böylece

$$I=2\oint_C\frac{2du}{i(u^2+6u+1)}=\frac{4}{i}\oint_C\frac{du}{(u+3+\sqrt{8})(u+3-\sqrt{8})}$$

olur. İntegrantın kutuplarından ancak $u=-3+\sqrt{8}$ olanı C birim çemberi içindedir. Buna tekaabül eden rezidü ise $1/2\sqrt{8}$ olduğundan

$$I=\frac{4}{i}\,\frac{2\pi i}{2\sqrt{8}}=\pi\sqrt{2}$$

bulunur.

MİSÂL: 3. m bir tam sayı olmak üzere $I_1=\int_0^\pi\frac{\cos m\theta\,d\theta}{5-4\cos\theta}$ *yı hesaplayınız.*

Bu integral çift bir fonksiyonun integrali olduğundan

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\theta\,d\theta}{5-4\cos\theta}$$

dır. Şimdi

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\theta\,d\theta}{5-4\cos\theta}\,,\quad I_2=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin m\theta\,d\theta}{5-4\cos\theta}$$

vazedelim. Buna göre

$$I=I_1+iI_2=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\theta+i\sin m\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{im\theta}\,d\theta}{5-4\cos\theta}$$

olur. $z=e^{i\theta}$ dönüşümü yapılırsa I integrali, C ile gene merkezi orijinde olan birim daireyi göstererek,

$$I=I_1+iI_2=\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^m\,dz}{5z-2(1+z^2)}$$

şekline girer. I nın integrantı C içinde $z=1/2$ basit kutbunu haiz olup buna tekaabül eden rezidü de $1/3.2^m$ dir. Şu hâlde

$$I=I_1+iI_2=2\pi i\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{3.2^m}$$

yâni

$$I=\frac{\pi}{3.2^m}$$

bulunur.

(III.10) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos\ mx\\ \sin\ mx\end{Bmatrix} dx$ **TİPİNDEKİ İNTEGRALLERİN HESABI.**

Eğer $F(x)$ fonksiyonu Jordan şartlarını gerçekliyorsa, yâni $k>1$ ve m de sonlu bir sâbit olmak üzere $z=Re^{i\theta}$ için $|F(z)|\leqq M/R^k$ ise, Γ ile Şekil: III.10 daki yarım çemberi göstererek

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{imz}\ F(z)\ dz=0$$

olduğu gösterilebilir. Bu takdirde

$$2\pi i\sum_k A_{-1}^{(k)}=\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma+\gamma} e^{imz}\ F(z)\ dz=\lim_{R\to\infty}\left\{\int_\gamma e^{imz}\ F(z)\ dz+\right.$$

$$+\int_{\Gamma} e^{imz}\, F(z)\, dz \Big\} = \lim_{R\to\infty} \Big\{ \int_{-R}^{+R} e^{imx}\, F(x)\, dx + 0 \Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}\, F(x)\, dx \qquad \text{(III.10.1)}$$

olur.

Gerçekten de Jordan şartı $F(x)$ için geçerli ise $z = Re^{i\theta}$ vazederek

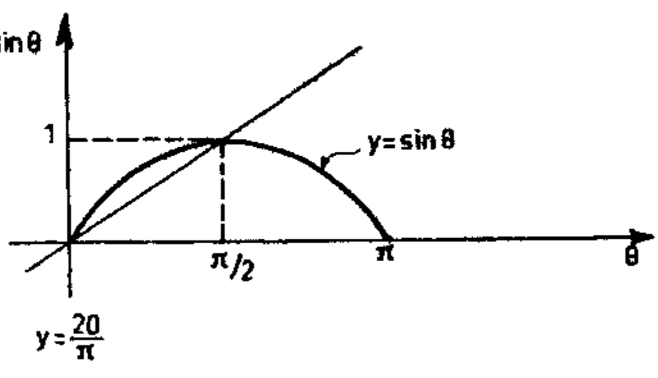
$$\int_{\Gamma} e^{imz}\, F(z)\, dz = \int_{0}^{\pi} e^{imRe^{i\theta}}\, F\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\, d\theta$$

olur ve buradan da

$$\left| \int_{0}^{\pi} e^{imRe^{i\theta}}\, F\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\, d\theta \right| \leqq \int_{0}^{\pi} \left| e^{imRe^{i\theta}}\, F\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta} \right| d\theta =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left| e^{imR\cos\theta - mR\sin\theta}\, F\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\, d\theta \right| = \int_{0}^{\pi} e^{-mR\sin\theta} \left| F\left(Re^{i\theta}\right) \right| R\, d\theta$$

$$\leqq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{0}^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$



Şekil. 13. III

olur. Fakat $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ için daima $\sin\theta \geqq 2\theta/\pi$ dir. Buna binâen

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta \leqq \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2mR\theta/\pi}\,d\theta = \frac{M\pi}{mR^{k-1}}(1-e^{-mR})$$

bulunur ki $R \to \infty$ için bu ifâdenin sıfıra gideceği de âşikârdır. Bu itibarla (III.10.1) e binâen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} F(x)dx = 2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)}$$

olur.

MİSÂL: 1. *$m<0$ olmak üzere:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-m}$$

olduğunu gösteriniz.

Bunun için

$$\oint_{\Gamma+\gamma} \frac{e^{imz}\,dz}{z^2+1}$$

integralini göz önüne alalım. İntegrantın $\Gamma+\gamma$ çevresi içinde $z=i$ noktasında basit bir kutbu vardır. $z=i$ deki rezidü

$$\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}$$

dir; diğer taraftan rezidü teoremi gereğince

$$2\pi i\frac{e^{-m}}{2i} = \pi e^{-m} = \oint_{\Gamma+\gamma} \frac{e^{imz}\,dz}{z^2+1} = \lim_{R\to\infty}\left\{\int_\gamma \frac{e^{imx}\,dx}{x^2+1} +\right.$$

$$\left.+\int_\Gamma \frac{e^{imz}\,dz}{z^2+1}\right\} = \lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx\,dx}{x^2+1} + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin mx\,dx}{x^2+1} + 0\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+1} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\, dx}{x^2+1}$$

olur. Bu ise, bir eşitliğin her iki yanındaki reel kısımların biribirlerine ve sanal kısımların da gene biribirlerine eşit olmaları gerektiği prensibine göre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+1} = \pi e^{-m} \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\, dx}{x^2+1} = 0$$

olduğunu göstermektedir.

MİSÂL : 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+5}\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Bunun için gene Şekil: III.10 daki çevre üzerinden

$$\oint_{\Gamma+\gamma} \frac{z\, e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\, dz$$

integralini göz önüne alalım. İntegrant $z = -1 \pm 2i$ basit kutuplarını haiz olup bunlardan ancak $z = -2i$ kutbu $\gamma+\Gamma$ çevresi içindedir ve buna tekaabül eden rezidü de

$$A_{-1} = \lim_{z \to -1+2i} \left\{ (z+1-2i) \frac{z\, e^{i\pi z}}{(z+1+2i)(z+1-2i)} \right\} = (-1+2i) \frac{e^{-(i+2)\pi}}{4i}$$

dir. Şu hâlde:

$$2\pi i\, A_{-1} = 2\pi i\, (-1+2i) \frac{e^{-i\pi}\, e^{-2\pi}}{4i} = \frac{\pi}{2}(1-2i)\, e^{-2\pi} = \oint_{\gamma+\Gamma} \frac{z\, e^{i\pi z}\, dz}{z^2+2z+5}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{\gamma} + \int_{\Gamma} \right\} = \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{-R}^{+R} \frac{x\, e^{i\pi x}\, dx}{x^2+2x+5} + \int_{\Gamma} \frac{z\, e^{i\pi z}\, dz}{z^2+2z+5} \right\}$$

dir. $R \to \infty$ için Γ üzerinden alınmış olan integralin değeri sıfıra gitmektedir. Şu hâlde limitte

$$\frac{\pi}{2}(1-2i)\,e^{-2\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos\pi x\,dx}{x^2+2x+5}+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\pi x\,dx}{x^2+2x+5}$$

ya da

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos\pi x\,dx}{x^2+2x+5}=\frac{\pi e^{-2\pi}}{2}\;;\;\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\pi x\,dx}{x^2+2x+5}=-\pi e^{-2\pi}$$

bulunur.

MİSÂL: 3. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ *olduğunu gösteriniz.*

Bu integrali hesaplamak için

$$\int_{\gamma'+\gamma+C+\Gamma}\frac{e^{iz}\,dz}{z}$$

integralini göz önüne alacağız. İntegrant $z=0$ da yâni tam reel eksene tekaabül eden çevre parçası üzerinde basit bir kutbu haiz olduğu için, bu integrali hesaplarken Şekil: III.14 deki, $z=0$ ı çevre dışı bırakan $\gamma'+C+\gamma+\Gamma$ çevresini göz önünde bulunduracağız. Şekildeki çevre içinde analitik olan integrant tekil noktaya sahip olmadığından Cauchy - Goursat teoremine göre

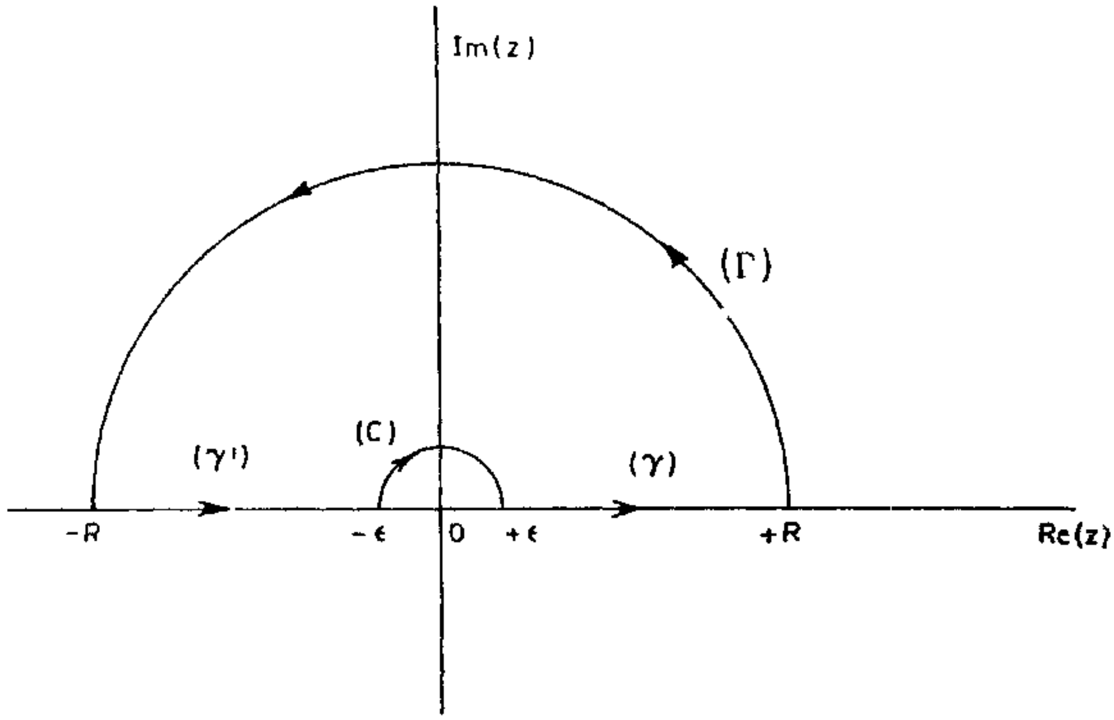
$$0=\oint_{\gamma'+C+\gamma+\Gamma}\frac{e^{iz}\,dz}{z}=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}dx}{x}+\int_{C}\frac{e^{iz}\,dz}{z}+\right.$$

$$\left.+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}dx}{x}+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}\,dz}{z}\right\}$$

olacaktır. Buradaki son integral Jordan lemmasına binâen $R\to\infty$ için sıfıra gider. C üzerinden olan integrali $\varepsilon\to 0$ için hesaplamak üzere $z=\varepsilon e^{i\theta}$ vazedelim. Bu takdirde

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_C \frac{e^{iz}\,dz}{z}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{}\cdot\frac{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} ie^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=$$

$$=i\int_{\pi}^{0}1\,.\,d\theta=-i\pi$$



Şek. III.14

olur. Diğer taraftan $(-R,\ -\varepsilon)$ limitleri arasında alınmış olan integrali alır da x i $-x$ e dönüştüren bir dönüşüm yaparsak limitler bu yeni değişken için $(R,\ \varepsilon)$ olurlar. Şu hâlde γ ve γ' üzerindeki integralleri

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}\,dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}\,dx}{x}=\int_{R}^{\varepsilon}\frac{e^{-ix}\,dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}\,dx}{x}$$

$$=-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}\,dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}\,dx}{x}=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx=2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

sonucunu verirler. Böylelikle Cauchy-Goursat teoreminin neticesi olarak yukarıdaki sonuçlar da göz önünde tutularak

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left\{ 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi \right\} = 0$$

yâni

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

bulunur.

(III.11) DALLANMA NOKTASINI HAİZ FONKSİYONLARIN BELİRLİ İNTEGRALLERİ.

Şimdiye kadar hep holomorf ve meromorf fonksiyonların yâni tek-değerli fonksiyonların integrallerini göz önüne aldık. Bu paragrafta ise dallanma noktasını haiz fonksiyonların yâni çok-değerli fonksiyonların integrallerini inceleyeceğiz. Şimdiye kadar öğrenmiş olduğumuz integrasyon metotları bu hâle de uygulanmaktadırlar; ancak, bilhassa integrasyon çevresini seçerken çok dikkatli davranmak lâzımdır. Bunu en iyi bir şekilde bir misâl üzerinde bilfiil görmek için meselâ merkezi orijinde olan R yarıçaplı C dairesi üzerinden

$$\oint_C \sqrt{z}\, dz$$

integralini hesaplayalım.

$f(z) = \sqrt{z}$, evvelce de görmüş olduğumuz gibi çift katlı bir fonksiyon olup $z=0$ noktasını dallanma noktası olarak kabul eder; yâni eğer $z = R\,e^{i\theta}$ vazedilecek ve muayyen bir $z_0 = R\,e^{i\theta_0}$ değerinden hareket edilecek olursa argümentin $\theta_0 + 2\pi$ değeri için $f(R, \theta_0 + 2\pi) = \sqrt{R} \times \times \exp[(i\theta_0/2) + i\pi] = -\sqrt{R}\exp(i\theta_0/2) = -f(R, \theta_0)$ ve $\theta_0 + 2.2\pi$ değeri için de gene $f(R, \theta_0 + 4\pi) = f(R, \theta_0)$ bulunur. Yâni fonksiyon, argümenti 2π kadar arttıkça haiz olduğu iki tabakalı Riemann yüzeyinin bir tabakasından müteâkip tabakasına geçmiş olmaktadır. Bu itibarla meselâ

$$I = \oint_C \sqrt{z}\, dz = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sqrt{R}\, e^{i\theta/2}\, iRe^{i\theta}\, d\theta = \frac{2}{3} R^{3/2} \Big[e^{i3\theta/2} \Big]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}$$

$$= -\frac{4}{3} R^{3/2} e^{i3\theta_0/2}$$

olacağından, integralin hem: 1) çevre üzerinde hareket edilen noktaya ve çevrenin yarı çapına, ve hem de: 2) bu noktada integrant için seçilen kol'a (yâni Riemann yüzeyi tabakasına) bağlı olacağı âşikârdır. Bu itibarla, içinde dallanma noktaları bulunan bir çevre boyunca $f(z)$ gibi bir fonksiyonun integrali ancak fonksiyonun kolu (yâni haiz olduğu Riemann yüzeyinin tabakalarından biri) ve z nin çevre üzerindeki hareket noktası tasrih edilmezse tâyin edilemez. Pratikte, dallanma noktası veyâ noktalarından itibaren, çevre üzerinde hareket ettiği vakit, z nin bir Riemann tabakasından bir diğerine geçmesine mâni olacak şekilde uygun bir kesim yapılır, ve hareket noktası olarak da bu kesimin dudaklarından z nin pozitif yönde çevreyi dolanmasını mümkün kılacak olanı seçilir.

Meselâ $f(z)$ ile n-katlı bir fonksiyonu gösterelim; öyle ki bunun dallanma noktası meselâ $z=a>0$ da bulunsun ve fonksiyonun kompleks düzlemde de m adet kutbu mevcûd olsun. Bu takdirde uygun bir çevre Şekil: III.15 de gösterilmiştir.

$z=a$ dan $z=R$ ye kadar olan bu kesim çevre üzerindeki z nin $f(z)$ fonksiyonunun hep aynı bir tabakasında kalmasını sağlar. z eğer kesimin üst dudağından hareket eder de çevreyi tamamladıktan sonra kesimin alt dudağına erişirse AB boyunca $f(z)=f(x)$ olan fonksiyon DC boyunca $f(z)=f(xe^{2\pi i})\neq f(x)$ olur. Göz önüne alınan $K=AB+\Gamma+DC+\gamma$ çevresi içinde artık birbiçim bir meromorf fonksiyon olan $f(z)$ ye rezidü teoremi uygulanabilir ve

$$2\pi i \sum_{k=1}^{m} A_{\ 1}^{(k)} = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \oint_K f(z)dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \Big\{ \int_{AB} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)\, dz$$

$$+ \int_{DC} f(x)\, e^{2\pi i/n} dx + \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

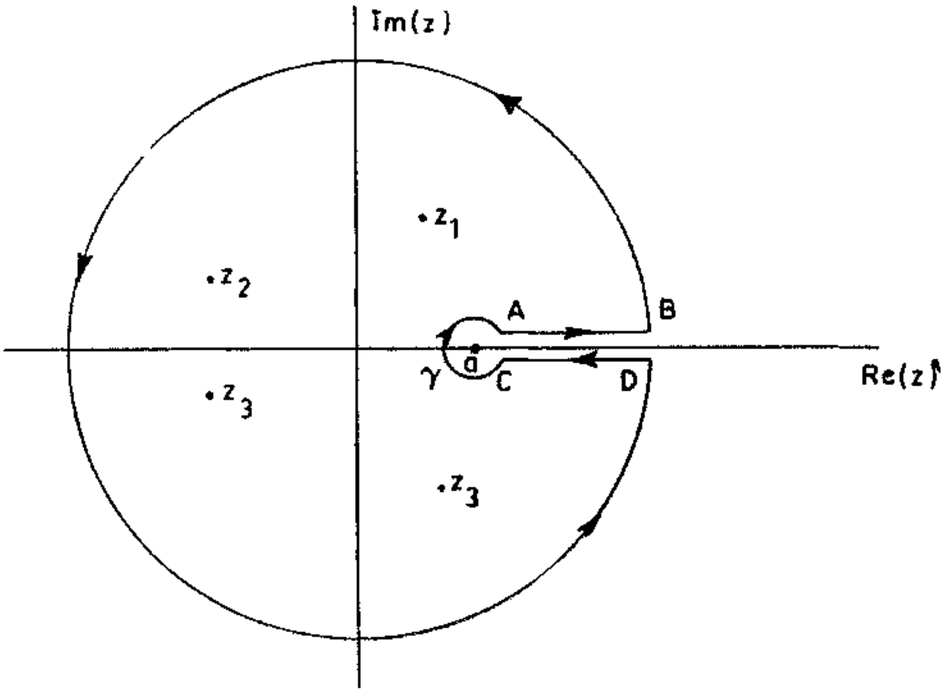
yazılır.

Bu mülâhazaları daha müşahhas kılmak amacıyla bazı örnekler verelim :

MİSÂL : 1. Merkezi orijinde bulunan, yarıçapı 2 ye eşit bir Γ *çemberi boyunca*

$$\oint_{\Gamma} \frac{\ln(z-1)}{z^2} dz$$

integralini hesaplayınız. $z = 2$ *noktasından ve logaritmanın birinci Riemann tabakasında bu noktadaki değerinden hareket ediniz.*



Şekil III. 15

Şekil : III.15 i göz önüne tutarak ve integrantın $z=0$ daki çift katlı kutbuna tekaabül eden rezidünün de -1 olduğuna işâret ederek, rezidü teoremine binâen

$$2\pi i(-1) = \int_{\Gamma} \frac{\ln(z-1)}{z^2} dz + \int_{2}^{1} \frac{\ln(x-1)+2\pi i}{x^2} dx + \int_{\gamma} \frac{\ln(z-1)\,dz}{z^2}$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx$$

olur. γ üzerinden alınmış olan integralde $z=1+\varepsilon e^{i\theta}$ vazedersek

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma} \frac{\ln(z-1)}{z^2} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{2\pi} \frac{\ln(\varepsilon e^{i\theta})\, i\, \varepsilon e^{i\theta} d\theta}{(1+\varepsilon e^{i\theta})^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{2\pi} \frac{(\ln \varepsilon + i\,\theta)\, i\, \varepsilon e^{i\theta}\, d\theta}{(1+\varepsilon e^{i\theta})^2} = 0$$

olur. Buna binâen

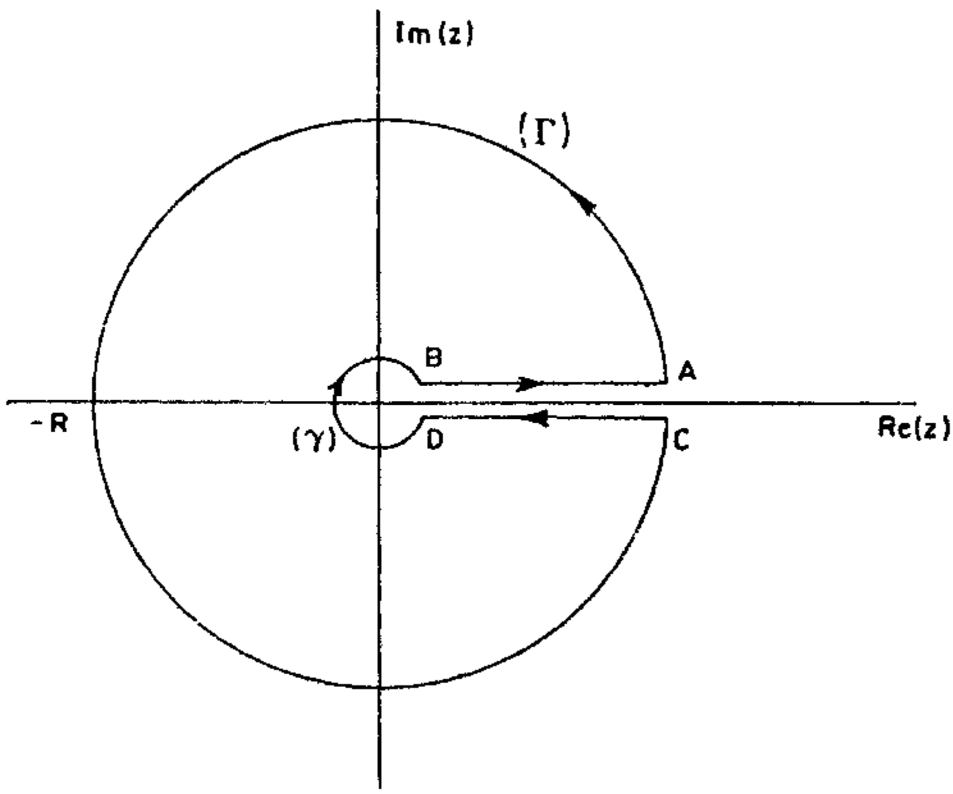
$$-2\pi i = \int_{\Gamma} \frac{\ln(z-1)}{z^2} dz + \int_{2}^{1} \frac{2\pi i}{x^2} dx$$

ve dolayısıyla

$$\int_{\Gamma} \frac{\ln(z-1)}{z^2} dz = -2\pi i + \pi i = -\pi i$$

bulunur.

MİSÂL : 2. $0 < p < 1$ *olmak üzere*



Şekil III. 16

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

olduğunu gösteriniz.

$f(z) = \dfrac{z^{p-1}}{1+z}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bunun $z = -1$ de $A_{-1} = -e^{ip\pi}$ rezidülü basit bir kutbu ve $z=0$ da da bir dallanma noktası vardır. Fonksiyonu birbiçim kılmak için Şekil: III.16 daki kesimli çevre göz önüne alınır. Rezidü teoremine dayarak $f(z)$ nin, içinde artık üniform bir meromorf fonksiyon olduğu bu çevre üzerinden integrali

$$2\pi i\left(-e^{ip\pi}\right) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \oint_K \frac{z^{p-1}\,dz}{1+z} = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \left\{ \int_\Gamma \frac{z^{p-1}\,dz}{1+z} + \int_{CD} \frac{\left(x\,e^{2\pi i}\right)^{p-1}dx}{1+x\,e^{2\pi i}}\right.$$

$$\left. + \int_\gamma \frac{z^{p-1}\,dz}{1+z} + \int_{BA} \frac{x^{p-1}dx}{1+x} \right\} = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{(R-\varepsilon)^{p-1}\,e^{i(p-1)\theta}\,i\,(R-\varepsilon)e^{i\theta}\,d\theta}{1+(R-\varepsilon)\,e^{i\theta}}\right.$$

$$\left. + \int_R^\varepsilon \frac{x^{p-1}\,e^{i2\pi(p-1)}}{1+x}dx - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^{p-1}\,e^{i(p-1)\varphi}\,i\,\varepsilon\,e^{i\varphi}\,d\varphi}{1+\varepsilon\,e^{i\varphi}} + \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} \right\}$$

$$= 0 - \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,e^{i2\pi p}}{1+x}dx + \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} + 0 =$$

$$= \left(1 - e^{2\pi p i}\right) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$$

veyâ

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = -\frac{2\pi i\,e^{ip\pi}}{1-e^{2ip\pi}} = \frac{2\pi i\,e^{ip\pi}}{e^{ip\pi}\left(e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}\right)} = \frac{2\pi i}{2i\sin p\pi}$$

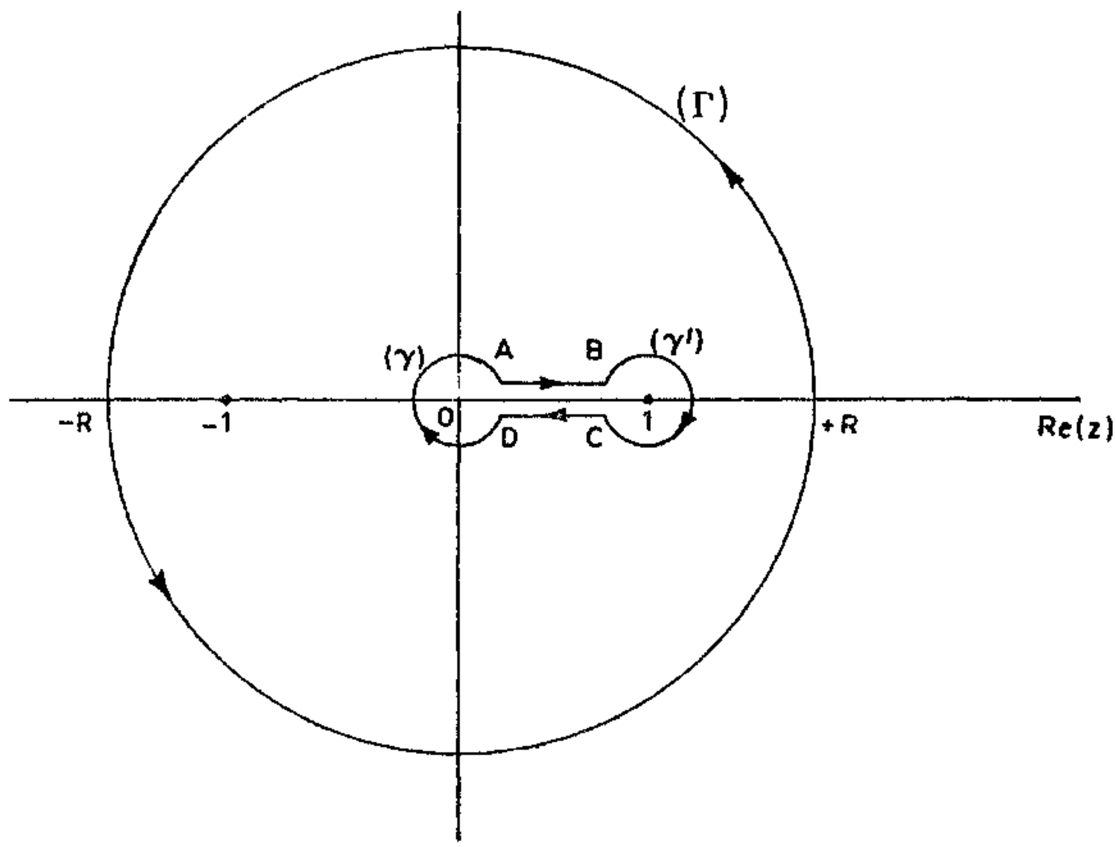
$$= \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

olur.

MİSÂL: 3. $I = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3} dx$ *integralini hesaplayınız.*

$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $z=-1$ de üç katlı bir kutbu haiz olup buna tekaabül eden rezidüsü de

$$A_{-1} = \lim_{z \to -1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[(1+z)^3 \frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3} \right] \right\} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{36} e^{-2\pi i/3}$$



Şekil III. 17

dür. Bundan başka $z=0$ ve $z=1$ noktaları da $f(z)$ nin dallanma noktalarıdır. I yi hesaplamak için uygun bir çevre Şekil: III.17 de gösterilmiştir. Bu çevre içinde $f(z)$ birbiçim bir meromorf fonksiyondur. Rezidü teoremine dayanarak

$$2\pi i\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{36}e^{-2\pi i/3}\right)=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\oint_K\frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}dz=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_\Gamma+\int_{AB}+\int_{\gamma'}+\right.$$

$$\left.+\int_{CD}+\int_\gamma\right\}=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt[3]{R^2e^{2i\theta}(1-Re^{i\theta})}\,iRe^{i\theta}\,d\theta}{(1+Re^{i\theta})^3}+\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt[3]{\varepsilon^2e^{2i\varphi}(1-\varepsilon e^{i\varphi})}\,i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\theta}{(1+e^{i\varphi})^3}+e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx\right\}$$

$$=0+\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx+0-e^{2\pi i/3}\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx$$

$$=\left(1-e^{2\pi i/3}\right)\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx$$

bulunur. Bu hesap sırasında $\exp(2\pi i/3)$ çarpanının ortaya çıkışı, γ çemberi etrafında 2π kadar dönüldüğünde integrantın $x=1$ deki dallanma noktası dolayısıyla $f(z)$ nin ikinci koluna geçilmiş olmasındandır. $f(z)$ fonksiyonu üst üste üç tabakadan müteşkkil olup z nin argümentinin $z=1$ dallanma noktası etrafında her 2π artışında $f(z)$ nin argümenti de $\exp(2\pi i/3)$ kadar artmakta ve $z=1$ etrafında Arg (z) nin 6π artmasından sonra ancak $f(z)$ esas koluna avdet etmektedir.

Bu sûretle, sonuç olarak,

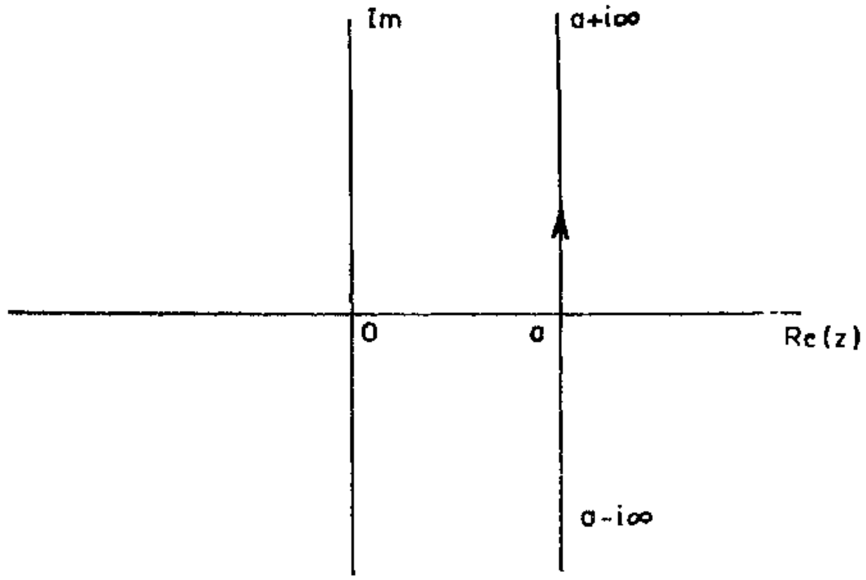
$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx=\frac{\pi\sqrt[3]{2}}{18\sqrt{3}}$$

bulunmuş olur.

(III.12) BROMWICH ÇEVRESİ.

Bromwich çevresi. Şekil: III.18 deki gibi, $(a-i\infty)$ noktası ile $(a+i\infty)$ noktasını birleştiren ve göz önüne alınan fonksiyonun bütün tekil noktalarını solda bırakan bir doğrudan ibârettir.

$F(z)$ ile bütün tekil noktaları Bromwich çevresinin solunda kalan bir fonksiyonu göstermek üzere



Şekil : III. 18

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) e^{izt}\, dz \tag{III.12.1}$$

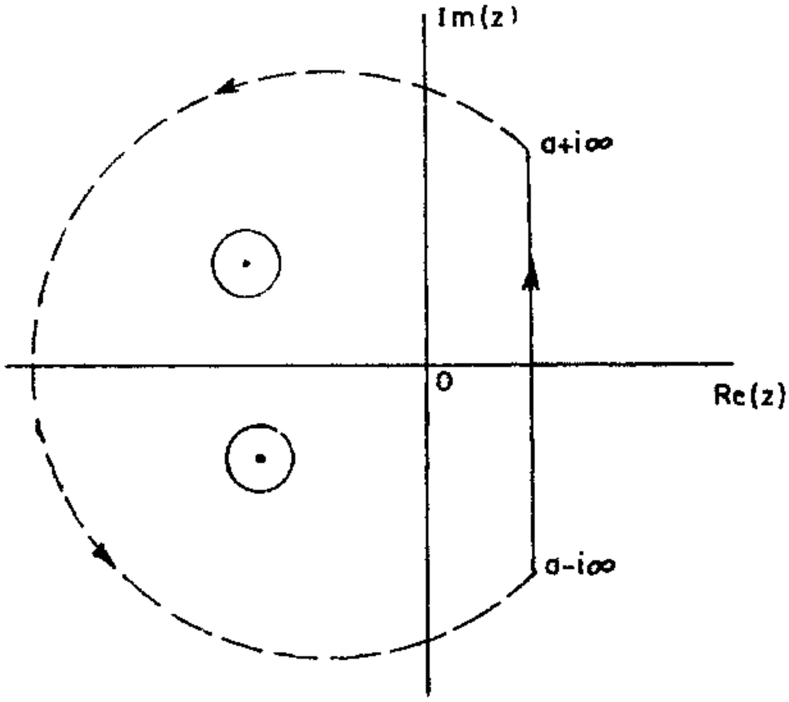
şeklindeki integrale *Bromwich-Wagner* integrali denilmekte olup buna, integral dönüşümlerle çözülen problemlerde çok rastlanır. Bromwich-Wagner integralleri, fonksiyonların *Fourier* ya da *Mellin* dönüşmüşlerinin hesabında karşımıza çıkar.

$F(z)$ sâdece kutupları haiz bir fonksiyon olduğunda Bromwich çevresine eşdeğer bir çevre Bromwich çevresini kiriş olarak kabul eden ve yarısı sanal eksenin solunda kalan çember parçasıdır. (Bk. Şekil: III.19).

MİSÂL : $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}\, dz$ *yi hesaplayalım.*

Burada integrant $z = -1$ de bir dallanma noktasını haiz olup buna tekaabül eden Riemann yüzeyi de iki tabakalıdır. Şu hâlde $-R$

den -1 e kadar bir kesim yaparak fonksiyon birbiçim kılınır. Bu türlü elde edilen $ABDEFGHJKA$ kapalı çevresi içinde integrant herhangi bir tekil nokta ihtivâ etmemektedir. Şu hâlde Cauchy - Goursat teoremine göre bu (C) çevresi üzerinden alınan integral sıfırdır:



Şekil: III. 19

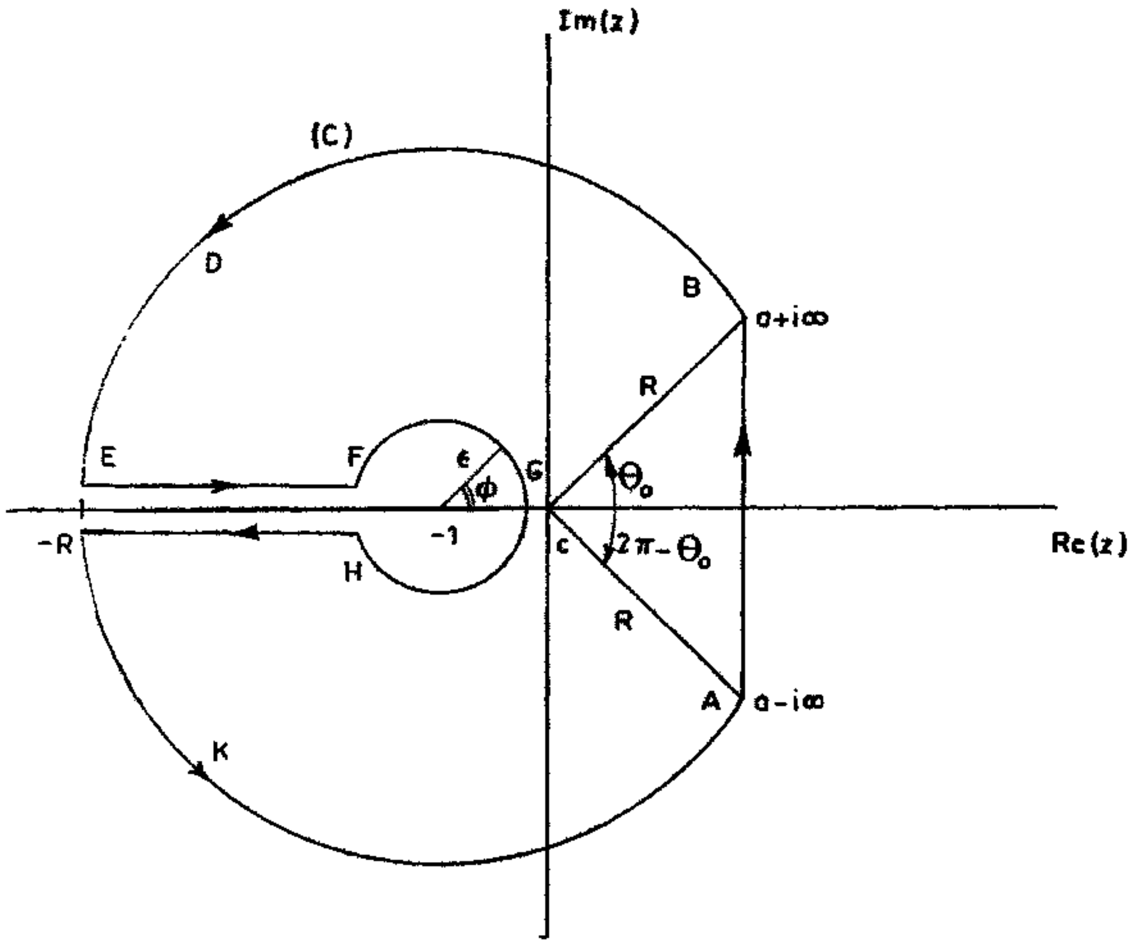
$$\oint_C \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} = 0$$

Bu ise

$$0 = \oint_C = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \left\{ \int_{AB} + \int_{BDE} + \int_{EF} + \int_{FGH} + \int_{HJ} + \int_{JKA} \right\}$$

demektir.

BDE ve JKA yolları boyunca $z = Re^{i\theta}$ vazedeceğiz. Bunlara tekaabül eden integrallerin limitleri de sırasıyla (θ_0, π) ve $(-\pi, 2\pi - \theta_0)$ olacaktır. Ancak, $R \to \infty$ için $\theta_0 \to \pi/2$ olduğuna dikkat etmek lâzımdır.



Şekil : III.20

FGH yolu için $z+1=\varepsilon e^{i\varphi}$ vazedilecektir. Bu yola tekaabül eden integralin limitleri de $(+\pi, -\pi)$ dir; $dz=i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi$ olur.

EF yolu için $z+1=\rho e^{i\pi}=-\rho$ vazedeceğiz. Buna göre $\sqrt{z+1}=$ $=\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt{\rho}$ olacak ve z için integralin $(-R, -1-\varepsilon)$ olan limitleri yeni integrasyon değişkeni için $(R-1, \varepsilon)$ olacaktır.

HJ yolu için $z+1=\rho e^{-i\pi}=-\rho$ ve $\sqrt{z+1}=\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{i\pi}{2}}=-i\sqrt{\rho}$ dur. ρ değişkeni için limitler de $(\varepsilon, R-1)$ olacaklardır. Son her iki yol için de $dz=-d\rho$ dur.

Bunlara binâen

$$0=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0\\ \theta_0\to\frac{\pi}{2}}}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{z+1}}+\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{e^{tRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta}{\sqrt{Re^{i\theta}+1}}+\int_{R-1}^{\varepsilon}\frac{e^{-t(1+\rho)}(-d\rho)}{i\sqrt{\rho}}\right.$$

$$\left.+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{t(\varepsilon e^{i\varphi}-1)}\,i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{\varepsilon}\,e^{i\varphi/2}}+\int_{\varepsilon}^{R-1}\frac{e^{-t(1+\rho)}(-d\rho)}{-i\sqrt{\rho}}+\int_{\pi}^{2\pi-\theta_0}\frac{e^{tRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}\,d\theta}{\sqrt{Re^{i\theta}}+1}\right\}$$

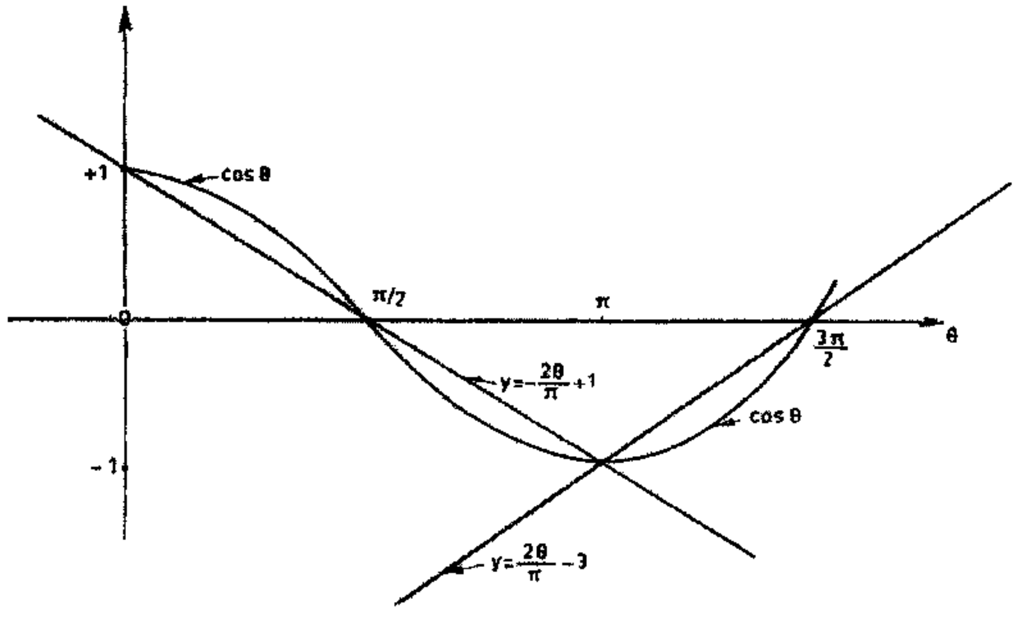
olur.

Bunlardan dördüncü integralin $\varepsilon\to 0$ için sıfır olduğu âşikârdır.

İkinci integralin $R\to\infty$ için sıfıra gittiğini göstermek amacıyla her şeyden önce Şekil: III.21 e göre $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ için

$$-\frac{2\theta}{\pi}+1\geqq\cos\theta$$

eşitsizliğinin geçerli olduğuna dikkati çekelim. Buna göre



Şekil: III.21

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{e^{tRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}\,d\theta}{\sqrt{Re^{i\theta}+1}}\right| \leqq \lim_{R\to\infty}\frac{R}{\sqrt{R}}\left|\int_{\pi/2}^{\pi}e^{tR\cos\theta}\,d\theta\right| \leqq$$

$$\leqq \lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\left|\int_{\pi/2}^{\pi}\exp\left[-tR\left(\frac{2\theta}{\pi}-1\right)\right]d\theta\right| =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\,e^{tR}\frac{\pi}{2tR}\left[-e^{-\frac{2tR}{\pi}\theta}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi e^{tR}}{2t\sqrt{R}}\left[e^{-tR}-e^{-2tR}\right]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{2tR}\left(1-e^{-tR}\right)=0$$

olur. Gene Şekil: III.21 den görüldüğü gibi $\pi \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{2}$ için

$$\frac{2\theta}{\pi}-3 \geqq \cos\theta$$

dır. Bu eşitsizlikten faydalanarak benzer şekilde altıncı integralin de $R\to\infty$ için sıfır olduğu kolaylıkla tesbit olunur. Buna göre

$$0=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{z+1}}+\int_{R-1}^{\varepsilon}\frac{e^{-t(1+\rho)}\,(-d\rho)}{i\sqrt{\rho}}+\int_{\varepsilon}^{R-1}\frac{e^{-t(1+\rho)}\,(-d\rho)}{i\sqrt{\rho}}\right.$$

$$=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{z+1}}+\frac{1}{i}\int_{\varepsilon}^{R-1}\frac{e^{-t(1+\rho)}\,d\rho}{\sqrt{\rho}}+\frac{1}{i}\int_{\varepsilon}^{R-1}\frac{e^{-t(1+\rho)}d\rho}{\sqrt{\rho}}\right\}$$

veyâ

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{z+1}}=2i\int_0^{\infty}\frac{e^{-t(1+\rho)}}{\sqrt{\rho}}\,d\rho=2ie^{-t}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t\rho}\,d\rho}{\sqrt{\rho}}\,.$$

olur. Şimdi $\sqrt{\rho}=u$ vazedelim; $d\rho/2\sqrt{\rho}=du$ olur ve böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\,2ie^{-t}\int_0^{\infty}2e^{-tu^2}\,du=\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

bulunur.

(III.13) ARGÜMENT PRENSİBİ.

Kapalı bir Γ eğrisi içinde $z=a$ noktasını n-ninci mertebeden bir kök ve $z=b$ noktasını da p-ninci mertebeden bir kutup olarak kabûl eden ve $z=b$ noktası hâriç analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=n-p \qquad \text{(III.13.1)}$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için $z=a$ ve $z=b$ nin etrafına kapalı ve biribirlerinin kesmeyen γ_1 ve γ_2 çevrelerini çizelim. Buna göre

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \qquad \text{(III.13.2)}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $z=a$ da n-ninci mertebeden bir kök olduğuna göre $f(z)$, $F(z)$ ile analitik ve γ_1 içinde sıfırdan farklı bir fonksiyonu göstererek,

$$f(z)=(z-a)^n\,F(z)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{F'(z)}{F(z)}+\frac{n}{z-a} \qquad \text{(III.13.3)}$$

olur. $f(z)$ fonksiyonu $z=b$ de p-ninci mertebeden bir kutbu haiz olduğundan bu nokta cıvarındaki Laurent serisi

$$f(z)=\frac{A_{-p}}{(z-b)^p}+\frac{A_{-p+1}}{(z-b)^{p-1}}+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-b}+A_0+A_1(z-b)+\cdots$$

veyâ

$$f(z)=\frac{1}{(z-b)^p}\Big[A_{-p}+A_{-p+1}(z-b)+\cdots$$
$$\cdots+A_{-1}(z-b)^{p-1}+A_0(z-b)^p+\cdots\Big]=\frac{G(z)}{(z-b)^p}$$

şeklinde olup $G(z)$ fonksiyonu da âşikâr olarak γ_2 içinde analitiktir. Buna göre

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{G'(z)}{G(z)}-\frac{p}{z-a} \tag{III.13.4}$$

olur. Bu itibarla (III.13.2) ifâdesi de (III.13.3) ve (III.13.4) ün ışığı altında

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{F'(z)}{F(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{n}{z-a}dz+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{G'(z)}{G(z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{p}{z-b}dz=n-p$$

bulunur; zirâ $F'(z)/F(z)$, γ_1 de ve $G'(z)/G(z)$ de γ_2 de analitik olduklarından birinci ve üçüncü integraller Cauchy - Goursat teoremine göre sıfırdırlar. Diğer integraller de (III.4.3) e dayanarak kolaylıkla hesaplanırlar.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu Γ içinde çok katlı kökler ayrı ayrı sayılmak ve $\mu=1,2,\cdots,k$ olmak üzere n_μ gibi k adet kökü, ve, çok katlı kutuplar da ayrı ayrı sayılmak ve $\nu=1,2,\cdots,l$ olmak üzere p_ν gibi l adet kutbu haiz ise bunları biribirlerini kesmeden çevreleyen kapalı basit eğrileri sırasıyla γ_μ ve γ_ν ile göstererek

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\mu}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\sum_{\nu=1}^{l}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\nu}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$
$$=\sum_{\mu=1}^{k}n_\mu-\sum_{\nu=1}^{l}p_\nu$$

olduğu kolaylıkla benzer şekilde ispatlanır.

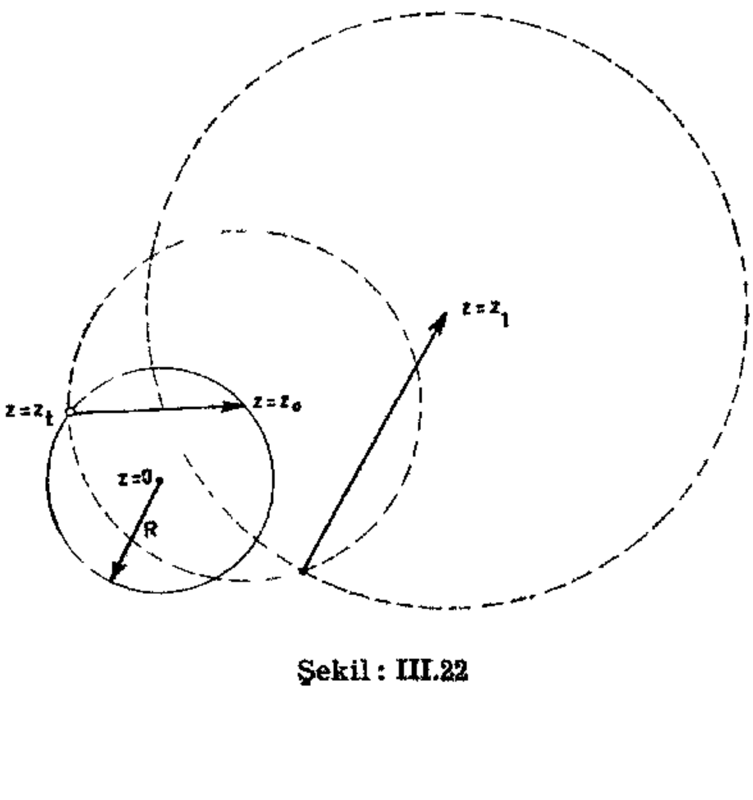
(III.14) ANALİTİK DEVAM

Analitik bir $f(z)$ fonksiyonu $z=0$ noktası cıvarında ve R yarıçapını haiz bir yakınsaklık dairesi içinde bir kuvvet serisi şeklinde verilmiş olsun. $f(z)$ nin $z=z_t$ gibi bir tekil noktası bu dairenin çemberi üzerinde bulunsun.

$|z|<R$ içinde $f(z)$ nin bütün mertebeden türevleri bilineceğine göre bu türevleri $|z|<R$ içindeki meselâ bir $z=z_0$ noktası için değerlendirmek kaabildir; böylelikle $f'(z_0), \cdots, f^{(n)}(z_0), \cdots$ bilinmiş olur. Bu takdirde $z=z_0$ a göre

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Taylor açılımı yapılabilir. Bu serinin R_0 yakınsaklık yarıçapı $z=z_0$ noktası ile en yakın tekil nokta, yâni $z=z_t$, arasındaki uzaklıktır. Böylelikle analitik $f(z)$ fonksiyonu haiz olduğu $|z|=R$ yakınsaklık dairesi dışına devam ettirilmiş olur. Hattâ $z=z_1$ noktası $|z|=R_0$ içinde olmak üzere $z=z_t$ deki tekil noktadan sonra gelen en yakın noktanın $z=z_1$ e uzaklığını R_1 yarıçapı olarak kabul eden bir daire daha çizilerek ve bu daire içinde başka hiçbir tekil nokta bulunmamasına dikkat ederek $f(z)$ yi analitik olarak kompleks düzlemin, $f(z)$ nin tekil



Şekil : III.22

noktaları hâriç bütün noktalarına bu şekilde biribirleri üzerine binmiş yakınsaklık daireleri yardımıyla teşmil etmek mümkün olur.

MİSÂL : *Şimdi bir misâl olmak ve analitik devamı daha müşahhas bir tarzda anlamak gâyesiyle*

$$1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{ve} \quad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

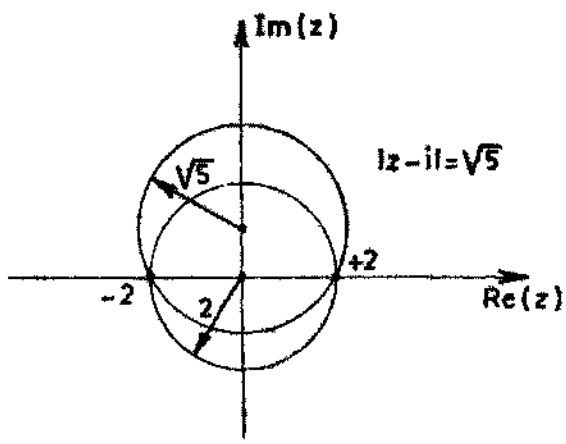
serilerinin biribirlerinin analitik devamları olduklarını göstereceğiz.

Bu serilerin yakınsak olabilmeleri için ardışık terimlerinin oranının mutlak değerinin 1 den küçük olması lâzım geldiği Analiz derslerinden bilinmektedir. Buna göre 1) ve 2) serileri için

$$1)\quad \left| \frac{\dfrac{z^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{z^n}{2^n}} \right| < 1 \quad \text{yâni} \quad |z| < 2, \quad \text{ve}$$

$$2)\quad \left| \frac{\dfrac{(z-i)^{n+1}}{(2-i)^{n+1}}}{\dfrac{(z-i)^n}{(2-i)^n}} \right| < 1 \quad \text{yâni} \quad |z-i| < \sqrt{2}$$

olmalıdır. Şu hâlde : 1) serisi için yakınsaklık dairesi $|z| < 2$, ve 2) serisi için de yakınsaklık dairesi $|z-i| < 5$ dir. (Bk. Şekil : III.23) Bu takdirde her iki seri de sırasıyla : 1) için, ilk terimi 1/2 ve terimlerinin



Şek. III.23

müşterek çarpanı $z/2$; 2) için ilk terimi $1/(2-i)$ ve terimlerinin müşterek çarpanı da $(z-i)/(2-i)$ olan geometrik serilerdir ve dolayısıyla

$$S_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2-z}$$

$$S_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2-i}}{1-\frac{z-i}{2-i}}=\frac{1}{2-z}=S_1(z)$$

bulunur. Şu hâlde her iki seri de ayrı ayrı yakınsaklık daireleri içinde aynı $S_1(z)=S_2(z)$ fonksiyonunu göstermekte olup biribirlerinin mütekaabil yakınsaklık dairelerine analitik devamlarını teşkil ederler. Şekil: III.23 den de görüldüğü gibi her iki yakınsaklık dairesi $z=-2$ ve $z=2$ noktalarında biribirlerini kesmektedirler. Diğer taraftan da son hesap $z=2$ nin her iki seri için de tekil nokta olduğunu göstermektedir.

Her analitik fonksiyonun, haiz olduğu yakınsaklık dairesi dışında analitik devamının, gerçekleştirilemeyeceği âşikârdır. Özellikle tanım bölgelerinin sınırı sırf tekil noktalardan müteşekkil fonksiyonların bu sınırın dışına analitik devamları imkânsızdır. Misâl olarak

$$f(z)=1+z+z^2+z^4+z^8+\cdots=1+\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n} \qquad \text{(III.14.1)}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu takdirde $z=1$ için bu serinin toplamı sonsuz olur ki bu da bu noktanın $f(z)$ için tekil bir nokta olduğunu göstermektedir. Fakat aynı şey $z^2=1$ için de doğrudur, zirâ

$$f(z)=z+f(z^2)$$

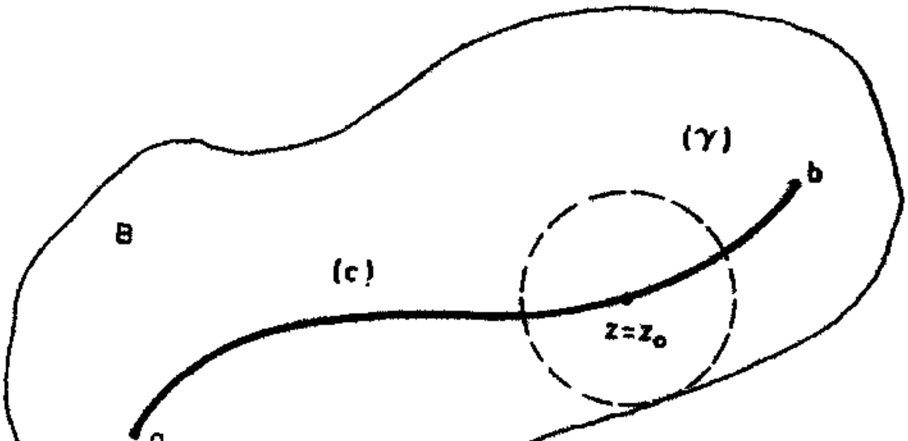
yazılabilir. $z^2=1$ için de $f(z)$ sonsuz olur. Kezâ

$$f(z)=z+z^2+f(z^4)$$
$$f(z)=z+z^2+z^4+f(z^8)$$
$$\vdots$$

yazılabileceği için $z=1$, $z^2=1$, $z={}^4=1$, $z^8=1, \cdots$ ilh $\cdots$ için hep $f(z)$ tin tekil noktaları elde edilmiş olur. Öte yandan bu tekil noktaların hepsi de $|z|=1$ dairesi üzerindedir ve kolayca görüldüğü gibi $|z|=1$ üzerinde bunlardan ∞ tâne mevcûttur. Bu itibarla (III.14.1) fonksiyonu $|z|=1$ dairesi dışına analitik olarak devâm ettirilemez. Çünkü bu iş için Şekil: III.22 deki gibi $|z|=1$ dairesi içinde muayyen bir $z=z_0$ noktasını merkez kabul ederek çizilecek ikinci bir daire ister istemez $|z|=1$ in üzerindeki tekil noktalardan ∞ tânesini ihtivâ edecektir.

Tabiî akla şimdi belirli bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun analitik devamının tek olup olmadığı suali gelebilir. Yâni bir bölgeden diğerine iki farklı yol boyunca analitik olarak devam ettirilen $f(z)$ fonksiyonunun acaba neticede teşmil edilmiş tanım bölgesindeki değeri ve türevleri yola tâbî olacak mıdır?

Bazı şartlar altında analitik devamın tekliği kolaylıkla ispatlanabilir. Bunun için önce belirli bir B bölgesinde analitik olan ve $C \subset B$ eğrisi üzerinde özdeş olarak sıfır olan bir $f(z)$ fonksiyonunun bütün B bölgesinde de sıfır olduğunu gösterelim. Bunun için, Şekil: III.24 deki gibi, (C) üzerinde bir z_0 noktası seçip bunun cıvarında $f(z)$ yi Taylor serisine açalım:

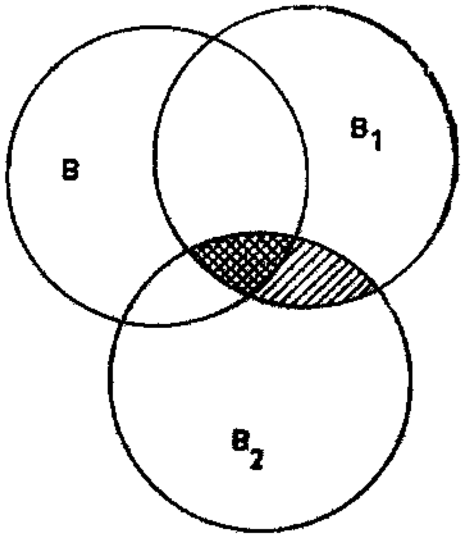


Şekil: III. 24

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots \qquad \text{(III.14.2)}$$

olur. Fakat $f(z)$ fonksiyonu C üzerinde özdeş olarak sıfır olduğundan C ye ait bütün noktalardaki bütün mertebelerden türevleri de sıfır olacak ve dolayısıyla (γ) yakınsaklık dairesi içinde (III.14.2) dolayısıyla $f(z)=0$ olacaktır. Eğer (C) eğrisi kapalı bir eğri olsaydı (C) üzerinde $f(z)=0$ olması dolayısıyla ve minimum modül teoremi gereğince (Bk. Problem: 24) C nin içinde de $f(z)=0$ olması temin edilmiş olacaktı. Böylelikle, C nin kapalı olmadığı hâl için γ içinde ve kapalı olduğu hâl için de C nin içinde başka bir eğri yayı seçer ve onun üzerindeki noktalar için yukarıdaki işlemleri tekrarlarsak $f(z)$ nin bütün B bölgesinde özdeş olarak sıfır olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi B bölgesinde analitik bir fonksiyon olan $f(z)$ nin analitik olarak devam ettirilmiş olduğu B_1 ve B_2 bölgelerini göz önüne alalım. $f(z)$ nin B_1 ve B_2 analitik devamı $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlarını vermiş olsun. Diğer taraftan B_3 de B ile arakesidi boş olmayan $(B_3 \cap B \neq 0)$ B_1 ile B_2 nin arakesit cümlesi olsun: $B_3 = B_1 \cap B_2$. Eğer $f_1(z)$ ile $f_2(z)$ nin B_3 ün B ile ortak olmayan kısmında biribirlerine özdeş olduklarını gösterebilecek olursak B de analitik olup da ayrı ayrı yollarla elde edilen $f(z)$ nin analitik devâmının tek olduğunu ispat etmiş olacağız.



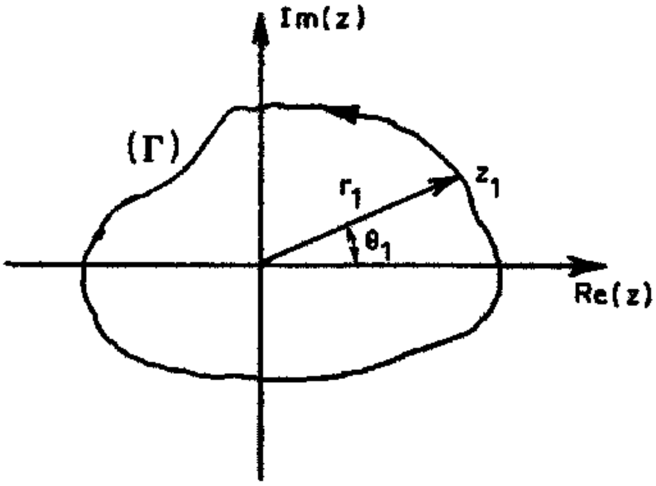
Şekil: III.25

Bunun için iki analitik fonksiyonun farkı olan $f_1 - f_2$ nin B_3 de analitik olacağına ve üstelik de B_3 ile B nin arakesit cümlesi için özdeş olarak sıfır olacağına nazar-ı dikkati çekelim. Yukarıda ispat ettiğimiz hususa dayanarak B_3 ün bu alt cümlesinde özdeş olarak sıfır olan $f_1 - f_2$ farkı B_3 ün şu hâlde bütün noktalarında özdeş olarak sıfır olacaktır. Bu ise $f(z)$ nin B_1 e analitik devamı olan $f_1(z)$ nin $f(z)$ nin

B_2 ye analitik devâmı olan $f_2(z)$ nin analitik devâmı olduğunu yâni $f(z)$ nin analitik devâmının, B ile B_3 ün arakesidi boş bir cümle olmadığı takdirde, tek olduğunu ispatlamaktadır.

PROBLEMLER

Problem: 1. $w^5=z$ fonksiyonu veriliyor. Saatin aksi yönünde, orijin etrafında dönüldüğü vakit 1,2,... ilh... devir sonra w nin z_1 de aldığı değerleri bulup, fonksiyonu birbiçim kılmak için ne lâzım geldiğini gösteriniz. (Bk. Şekil: III.26)



Şek. III.26

Problem: 2. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $|e^z| = e^x$, ve $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ için $e^{z+2k\pi i} = e^z$ olduğunu gösteriniz.

Problem: 3. sin z ve cos z nin köklerinin reel olduklarını ispatlayıp bu kökleri bilfiil bulunuz,

Problem: 4. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ve $w=u+iv$ olmak üzere $z=e^w$ ise $u=\ln r$ ve $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ olmak üzere $v=\theta+2k\pi$, yâni

$$w=\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$$

olduğunu gösteriniz.

Buna göre $\ln(1-i)$ nin değerlerini ve özellikle esas değerini tâyin ediniz.

Problem: 5. $f(z)=\ln z$ fonksiyonunun $z=0$ da bir dallanma noktasını haiz olduğunu gösteriniz.

Problem: 6. $w=f(z)=\sqrt{z^2+1}$ fonksiyonunun $z=\pm i$ de dallanma noktalarını haiz olduğunu ve bunlardan herhangi birini dolanan bir eğri üzerinde tam bir devrin w nin değerini değiştirdiğini fakat her iki dallanma noktasını dolanan kapalı basit bir eğri üzerindeki tam bir devrin w nin değerini değiştirmediğini gösteriniz.

Problem: 7. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\{z^2\}=z_0^2$ olduğunu ispatlayıp neticeyi geometrik olarak yorumlayınız.

Problem: 8.

$$\lim_{z\to i}\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}=4-4i$$

olduğunu ispatlayınız.

Problem: 9. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$ nin mevcûd olmadığını ispatlayınız.

Problem: 10. $f(z)=z^2$ nin $|z|<1$ içinde birbiçim bir şekilde sürekli olmasına karşılık $f(z)=1/z$ nin aynı bölgede birbiçim bir şekilde sürekli olmadığını gösteriniz.

Problem: 11. $w=\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}$ fonksiyonuna tekaabül eden Riemann yüzeyinin 6 tabakayı haiz olduğunu gösteriniz

Problem: 12. $\lim\limits_{z\to \exp(\pi i/3)}[z-\exp(\pi i/3)]\left(\frac{z}{z^3+1}\right)=\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$ olduğunu gösteriniz.

Problem: 13. $|z|=1$ dairesi içinde dört nokta hariç $f(z)=z/(z^4+1)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterip bu noktaları hesaplayınız.

Problem: 14. $f(z)=3z-2$ nin $|z|\leqq 10$ içinde birbiçim şekilde sürekli olduğunu gösteriniz.

Problem : 15. $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ vazederek $f(z)$ nin bir (Γ) eğrisi boyunca kompleks eğrisel integralini ayni eğri boyunca bir takım reel eğrisel integraller cinsinden ifâde ediniz.

Problem : 16. $\int F(z)G'(z)dz=F(z)\,G(z)-\int F'(z)\,G(z)dz$

kısmî integrasyon formülünü tesis ediniz, ve

$$\int z^2 \sin 4z\,dz \quad \text{ve} \quad \int_0^{2\pi} z^2 \sin 4z\,dz$$

integrallerine uygulayınız.

Problem : 17. $I=\int_{1-}^{+1} \frac{z-1}{z}\,dz$ integralini, integrasyon yolu $|z|=1$ dairesinin üst yarısı olmak üzere hesaplayınız. Eğer integrasyon yolu $|z|=1$ dairesinin alt yarısı ise I nin değeri ne olur?

Problem : 18. (Γ) integrasyon çevresi $|z|=1$ dairesi olmak üzere Cauchy-Goursat teoreminden faydalanarak

$$f(z)=\frac{z^2}{z-3}, \quad f(z)=z\,e^{-z}, \quad f(z)=\frac{1}{z^2+2z+2}$$

$$f(z)=\text{sech}\,z\,; \quad f(z)=\text{tg}\,z\,; \quad f(z)=\ln(z+2) \text{ için}$$

$$\int_{(\Gamma)} f(z)\,dz$$

yi hesaplayınız.

Problem : 19. $k=1,2,\cdots,n$ olmak üzere Γ_k lar, aynı bir kapalı Γ eğrisinin belirlediği iç bölgenin tamamen içinde kalan kapalı eğriler ise, $f(z)$ bu çok bağımlı bölgede analitik bir fonksiyon olduğunda,

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Gamma_k} f(z)\,dz$$

bağıntısının geçerli olduğunu gösteriniz.

Problem: 20. Γ ile $|z|=2$ çemberi gösterilmek üzere

$$f(z)=\oint_{\Gamma} \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,d\zeta$$

fonksiyonu veriliyor. $f(1-i)$ yi hesaplayınız.

Problem: 21. Cauchy integral formülü aracılığıyla, $x=\pm 1$ ve $y=\pm 1$ doğrularıyla teşkil edilen çevre üzerinden

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z}\,dz\,; \quad \oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z}\,dz\,; \quad \oint_{\Gamma} \frac{e^z\,dz}{z-\frac{i}{2}}\,; \quad \oint_{\Gamma} \frac{\cosh z}{z}\,dz$$

integrallerini hesaplayınız.

Problem: 22. İntegrantını önce basit kesirlere ayırıp sonra da Cauchy integral formülünü uyguluyarak $|\zeta|=2$ çemberi üzerinden

$$\oint_{\Gamma} \frac{3\zeta^2+\zeta}{\zeta^2-1}\,d\zeta$$

integralini hesaplayınız. Eğer Γ eğrisi $|\zeta-1|=1$ çemberi ise integralin değeri nedir?

Problem: 23. $|z|=1$ üzerinde

$$\oint_{\Gamma} \frac{3z^2+2z-1}{z}\,dz$$

integralini değerlendiriniz.

Problem: 24. $|f(z)|$ nin $f(z)$ nin analitik olduğu bir bölgenin bir iç noktasında minimum ya da maksimum değerine erişip erişemeyeceğini tartışınız. (Minimum ve maksimum modül teoremleri).

Problem: 25. a) $|z|=1$ çemberi üzerinden

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z-\frac{1}{2}}\,dz \quad \text{ve} \quad \oint_{\Gamma} \frac{\sin^6 z}{z-\frac{\pi}{6}}\,dz$$

integrallerini:

b) Tepe noktaları $2\pm i$ ve $-2\pm i$ olan bir dikdörtgen ile $-i$, $2-i$, $2+i$, i olan dikdörtgen üzerinden

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{\cos \pi z}{z^2-1}\,dz$$

integralini,

c) $|z-1|=4$ çemberi ile $|z-2|+|z+2|=6$ elipsi üzerinden

$$\oint_{\Gamma}\frac{e^{3z}}{z-\pi i}\,dz$$

integralini, ve

d) $|z|=5$ çemberi üzerinden de

$$\oint_{\Gamma}\frac{\sin 3z}{z+\dfrac{\pi}{2}}\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Problem: 26. $|z-a|=\rho$ dairesinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu için, $|f(z)|\leq M$ olmak üzere, $n=0,1,2,\cdots$ için

$$|f^{(n)}(a)|\leq\frac{M\cdot n!}{\rho^n}$$

olduğunu gösteriniz. (Bu eşitsizliğe *Cauchy eşitsizliği* denir).

Problem: 27. Cauchy eşitsizliği yardımıyla, $f(z)$ nin, sınırlı (yâni M sonlu olmak üzere $|f(z)|\leq M$) ve bütün kompleks düzlem üzerinden de analitik ise ancak bir sâbit olabileceğini gösteriniz. (*Liouville teoremi*).

Problem: 28. Aşağıdaki fonksiyonları, işâret edilen tekil noktalar cıvarında Laurent serilerine açarak bu serilerin yakınsaklık bölgelerini ifâde ediniz.

a) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z=1$ cıvarında

b) $(z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$, $z=-2$ cıvarında

c) $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$, $z=0$ cıvarında

d) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z=-2$ cıvarında

e) $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$, $z=3$ cıvarında.

Problem: 29. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ fonksiyonunu

a) $1<|z|<3$; b) $|z|>3$; c) $0<|z+1|<2$ ve d) $|z|<1$ için geçerli olacak şekilde Laurent serilerine açınız.

Problem: 30. Aşağıdaki fonksiyonları, işâret edilen nokta cıvarında, Laurent serilerine açınız.

a) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z=1$

b) $f(z)=(z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$; $z=-2$

c) $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$; $z=0$

d) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z=-2$

e) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$. $z=3$

Problem: 31. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ fonksiyonunu

a) $1<|z|<3$

b) $|z|>3$

c) $0<|z+1|<2$

d) $|z|<1$

için geçerli olacak şekilde Laurent serilerine açınız.

Problem : 32. Aşağıdaki fonksiyonların tekil noktalarını tesbit ederek sınıflandırınız :

$$f(z) = \frac{1}{(2\sin z - 1)^2} \;; \quad f(z) = \frac{z}{e^{\frac{1}{z}} - 1} \;;$$

$$f(z) = \cos\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \;; \quad f(z) = \operatorname{arctg}(z^2 + 2z + 2) \;;$$

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

AŞAĞIDAKİ PROBLEMLERDEKİ İNTEGRALLERİ REZİDÜLER METODU YARDIMIYLA HESAPLAYINIZ

Problem : 33. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}$$

Problem : 34. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Problem : 35. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{5\pi}{288}$$

Problem : 36. $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5 - 3\cos\theta}\, d\theta = 0$$

Problem : 37. $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$$

Problem : 38. $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\, d\theta}{5 - 4\cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}$$

Problem : 39. $m > 0$ için $$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$$

Problem : 40. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{(5-3\cos\theta)^4}\, d\theta = \frac{135\,\pi}{16,384}$

Problem : 41. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Problem : 42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{\pi}{2}$

Problem : 43. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$

Problem : 44. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}\, dx = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\, e^{-\pi/\sqrt{3}}$

Problem : 45. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a+b\cos\theta}$; $(a>|b|)$

Problem : 46. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$

Problem : 47. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Problem : 48. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2e}$

Problem : 49. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax\, dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}\, e^{-a} \quad (a \geqq 0)$

Problem : 50. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$; $(a>0,\ b>0)$

Problem: 51. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax\, dx}{(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)\, e^{-ab}$; $(a>0\ ,\ b>0)$.

Problem: 52. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^4+4}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-a} \sin a$; $(a>0)$

Problem: 53. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+1)\,(x^2+2x+2)} = -\frac{\pi}{5}$

Problem: 54. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

Problem: 55. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2+4x+5} = -\frac{\pi}{e} \sin 2$

Problem: 56. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x+a)^2+b^2}$

Problem: 57. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Problem: 58. a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}}$; $(k^2<1)$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}}$; $(k^2<1)$

Problem: 59. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1+k^2-2k\cos\theta} = \frac{\pi k^2}{1-k^2}$; $(k^2<1)$

Problem : 60. $$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{\sqrt{(a^2-1)^3}}$$

Problem : 61. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}\,dx}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin k\pi}\,; \quad (0<k<1).$$

Problem : 62. Merkezi orijinde bulunan ve yarıçapı da sırasıyla

$$\frac{1}{3}\,,\quad \frac{2}{3}\,,\quad 2$$

değerlerini alan bir C dairesi üzerinden

$$I = \oint_C \frac{z(2z^2-1)\,dz}{(z^2+1)\sin\dfrac{\pi}{z^2}}$$

integralini hesaplayınız.

Problem : 63. $$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{5+2\cos^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{35}}$$

Problem : 64. $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}$ dönüşümünü yaparak $|a|<1$ için

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-2a\sin\theta+a^2} = \frac{\pi}{1-a^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem : 65. $|z|=R$ çemberinin içinde ve üstünde holomorf bir $F(z)$ fonksiyonu verildiğinde Cauchy teoremi aracılığıyla, $|z_0|<R$ olmak üzere

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{(R^2-z_0z_0^*)F(z)dz}{(R^2-zz_0^*)(z-z_0)}$$

olduğunu gösterip, $r<R$ için bu ifâdeden, *Poisson formülü* diye bilinen

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-{}^2r)\,F(Re^{i\phi})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\,d\phi$$

ifâdesini çıkartınız.

Problem: 66. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$

Problem: 67. $f(z)$ fonksiyonu $|z|\to\infty$ için $z^{p+1}f(z)\to 0$ olacak şekilde z nin rasyonel bir fonksiyonu olduğunda

$$\int_0^\infty x^p f(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi p i}}\sum_k A_{-1}^{(k)}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem: 68. $-1<a<1$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{(1+x)^2}=\frac{\pi a}{\sin a\pi}$$

Problem: 69. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx=\frac{\pi}{4}\ln 2.$

Problem: 70. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+3x+2}\,dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

Problem: 71. $\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\ln^2[\pi^2+(\ln 2)^2]$

Problem: 72. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}\,dx}{\sqrt{x}\,(x+t)^2}=\frac{\pi}{2t^{3/2}\sqrt{1+t}}$; $(t>0$ ve reel).

Problem : 73. $$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)\,dx}{x^2+1} = \pi \ln 2.$$

İpucu : $f(z) = \ln(z+i)/(z^2+1)$ fonksiyonunu üst yarım kompleks düzlemdeki R yarıçaplı yarım daire üzerinden $R \to \infty$ için integre edin.

Problem : 74. $$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^3}{8}$$

Problem : 75. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\coth\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}$$

Problem : 76. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2a} \quad \frac{\pi}{2\sinh \pi a}$$

Problem : 77. $-\pi < a < \pi$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,\frac{\sinh ax}{\sinh \pi x}\,dx = \frac{\sin a}{\cos a + \cosh \lambda}$$

Problem : 78. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\ln x)}{x^4+1}\,dx = \frac{-\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

Problem : 79. $$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^4+1}\,dx = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}$$

Problem : 80. $|a| < 1$ ve $b > 0$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \frac{\sinh ax}{\sinh x}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2}\;\frac{\sin a\pi}{\cos a\pi + \cosh b\pi}\,.$$

Problem: 81. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Problem: 82. $0<|p|<1$ ve $0<|\alpha|<\pi$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \frac{x^{-p}\,dx}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \frac{\pi}{\sin p\pi}\,\frac{\sin p\alpha}{\sin\alpha}$$

Problem: 83. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2\cos\beta}\begin{Bmatrix}\cos(\alpha x^2\sin\beta)\\ \sin(\alpha x^2\sin\beta)\end{Bmatrix}.\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\begin{Bmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2}\end{Bmatrix}$$

Problem: 84. a) r reel olmak üzere

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta = \begin{cases} 0 & \text{eğer } |r|\leqq 1 \text{ ise} \\ \ln r^2 & \text{eğer } |r|\geqq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

b) Yukarıdaki sonuçtan faydalanarak

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin\theta\,d\theta$$

yı hesaplayınız.

Problem: 85. a ve t pozitif olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{tz}}{\sqrt{z}}\,dz=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

Problem: 86. a ve t pozitif olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}\operatorname{cotg}^{-1} z\,dz=\frac{\sin t}{t}$$

Problem : 87. Merkezi orijinde bulunan ve yarıçapı da 2 den büyük olan bir çember boyunca

$$I = \oint \frac{dz}{(z+2)\sqrt[5]{z^3(1-z^2)}}$$

yi hesaplayınız.

Problem : 88. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x^2)}}$ yi hesaplayınız.

Problem : 89. $\alpha > 0$ olmak üzere

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln x \; dx}{\sqrt{x}\,(x^2+\alpha^2)^2}$$

yi hesaplayınız.

Problem : 90. a ve b nin çeşitli değerleri için

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2} \cdot \frac{\sin ax}{x} dx$$

integralini tartışınız.

Problem : 91. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \frac{\pi \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}}$

Problem : 92. $I = \oint_{|z|=2} z^2 \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) dz = \frac{4\pi i}{3}$

Problem : 93. $I = \int_0^\infty \frac{\ln x \; dx}{(1+x^2)^2} = \frac{-\pi}{4}$

Problem : 94. $I = \int_0^\infty \frac{x \ln x \, dx}{(1+x^2)^3} = -\frac{1}{8}$

Problem: 95. $-1 < s < +1$ olmak üzere

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos \dfrac{\pi s}{2}}$$

Problem: 96. $$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}\,(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4\alpha^3\sqrt{\alpha}}\left[\frac{3}{2}\ln\alpha - \frac{3\pi}{4} - 1\right]$$

Problem: 97. a ve t pozitif ve n de pozitif tam sayı olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^n+1}\,dz = \frac{t^n}{n!}$$

Problem: 98. a, t ve h pozitif olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}\,dz}{z(1-e^{-hz})} = \frac{1}{2} + \frac{t}{h} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1} \frac{\sin \dfrac{2\pi nt}{h}}{n}$$

Problem: 99. $a > 0$ ve $t > 0$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}\sqrt{z}\,dz}{z^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sqrt{x}\,dx}{x^2+\omega^2}$$

Problem: 100. $a > 0$, $t > 0$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a-i\infty} \frac{\sqrt{p}\,e^{pt}\,dp}{1+\sqrt{p^3}} = \frac{4}{3}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sqrt{x}\,dx}{1+x^3}$$

olduğunu gösteriniz.

IV. Bölüm

DİK FONKSİYON SERİLERİ

(IV.1) DİK FONKSİYONLAR.

Belirli bir $[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve karelerinin integralleri alınabilen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$ gibi sonlu ya da sonsuz sayıda bir takım fonksiyonlar olsun. Eğer bunların ikişer ikişer çarpımlarının tanım bölgeleri üzerinden integralleri

$$\int_a^b \varphi_i^*(x)\,\varphi_k(x)\,dx=(\varphi_i\ ,\ \varphi_k)=\gamma\,\delta_{ik}=\begin{cases}\gamma & \text{eğer } i=k \text{ ise}\\ 0 & \text{eğer } i\neq k \text{ ise}\end{cases} \qquad \text{(IV.1.1)}$$

bağıntılarını gerçekliyorlarsa $\varphi_i(x)$, $(i=1,2,\cdots)$, fonksiyonlarının göz önüne alınan bölgede dik bir fonksiyon ailesi meydana getirdikleri söylenir ve bu fonksiyon ailesi $\left\{\varphi_i(x)\right\}$ ile gösterilir.

Eğer

$$\psi_i(x)=\frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{\gamma}}$$

vazedilirse (IV.1.1) formüllerine dayanarak

$$\int_a^b \psi_i^*(x)\,\psi_k(x)\,dx=(\psi_i\ ,\ \psi_k)=\delta_{ik} \qquad \text{(IV.1.2)}$$

bulunur. Bu takdirde $\{\psi_i\}$ dik fonksiyon ailesine *normlanmış bir dik fonksiyon ailesi* ya da *ortonormâl bir fonksiyon sistemi* adı verilir.

$[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve bu aralıkta karelerinin integralleri bir anlamı haiz, fakat aralarında diklik bağıntıları bulunmayan $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, $\cdots$ gibi fonksiyonlar verilmişse bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \chi_1(x) \\
\varphi_2(x) &= \lambda_{21}\,\chi_1(x) + \chi_2(x) \\
\varphi_3(x) &= \lambda_{31}\,\chi_1(x) + \lambda_{32}\,\chi_2(x) + \chi_3(x) \\
&\;\vdots \\
\varphi_i(x) &= \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik}\,\chi_k(x) + \chi_i(x) \\
&\;\vdots
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.1.3)}
$$

gibi $\chi_k(x)$ fonksiyonlarının lineer kombinezonları olan $\varphi_i(x)$ fonksiyonlarının dik fonksiyonlar olmalarını temin edecek şekilde λ_{ik} katsayılarını seçmenin mümkün olacağını göstereceğiz.

Bunun için önce ilk iki denklemi göz önüne alalım. $\varphi_1(x)$ ile $\varphi_2(x)$ biribirlerine dik iseler

$$0 = (\varphi_1\,,\varphi_2) = \lambda_{21}(\varphi_1\,,\chi_1) + (\varphi_1\,,\chi_2) = \lambda_{21}(\varphi_1\,,\varphi_1) + (\varphi_1\,,\chi_2)$$

yâni

$$\lambda_{21} = -\frac{(\varphi_1\,,\chi_2)}{(\varphi_1\,,\varphi_1)} = -\frac{(\varphi_1\,,\chi_2)}{\gamma}$$

ve dolayısıyla

$$\varphi_2(x) = \chi_2(x) - \frac{(\varphi_1\,,\chi_2)}{\gamma}\,\chi_1(x) = x_2(x) - \frac{(\varphi_1\,,\chi_2)\,\varphi_1(x)}{\gamma}$$

olur. Aynı şekilde, $\varphi_3(x)$ in $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ e dik olduğu yazılır. Bu iki şarttan da λ_{31} ve λ_{32} katsayıları belirlenir ve ilh...Böylece genel olarak $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{i-1}(x)$ e dik olan

$$\varphi_i(x) = \chi_i(x) - \frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{i-1} (\varphi_k\,,\ \chi_i)\ \varphi_k(x) \qquad \text{(IV.1.4)}$$

şeklindeki $\varphi_i(x)$ fonksiyonu da belirlenir.

$[a,b]$ aralığında tanımlanmış bu $\chi_k(x)$ fonksiyonlarından hareketle $\left\{\varphi_i(x)\right\}$ dik fonksiyon dizisini kurmaya *SCHMİDT dikleştirme işlemi* denir.

***MİSÂL:** Bir örnek olmak üzere* $[-1, 1]$ *aralığında*

$$\chi_k(x) = x^k \qquad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

fonksiyon dizisinden dik bir fonksiyon ailesi kurunuz.

Uygunluğu temin için k yı burada sıfırdan başlatmaktayız. Buna göre

$$\varphi_0(x)=1 \quad , \quad \lambda_{10} = -\frac{(\varphi_0, \chi_1)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = -\frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0$$

şu hâlde

$$\varphi_1(x) = x$$

bulunur. Dizinin üçüncü teriminin

$$\varphi_2(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

dördüncü ve beşinci terimlerinin de

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad , \quad \varphi_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

olduğu görülür. Böylece meydana gelen polinomlara *Legendre polinomları* adı verilir.

Fonksiyonların dikliği kavramını daha da genelleştirmek mümkündür. $p(x)$ ile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots$ gibi bir fonksiyon dizisinin tanım bölgesi olan $[a,b]$ aralığında negatif değerler almayan ve integrali haiz bir fonksiyonu göstermek üzere

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \gamma\,\delta_{ik} = \begin{cases} \gamma \text{ eğer } i=k \text{ ise} \\ 0 \text{ eğer } i \neq k \text{ ise} \end{cases} \tag{IV.1.5}$$

bağıntıları geçerli ise $\varphi_i(x)$ fonksiyonlarının $p(x)$ *ağırlık fonksiyonu*na göre dik bir fonksiyon ailesi teşkil ettikleri söylenir.

Schmidt dikleştirme ameliyesi $p(x) \neq 1$ olsa dahi geçerli. olan bir işlemdir ve yukarıdaki örnekte olduğu gibi gene $\chi_p(x) = x^k$ olmak üzere fakat 1 den farklı $p(x)$ ağırlık fonksiyonlarına göre diklik şartları vaz etmek sûretiyle gene Schmidt dikleştirme işlemi aracılığıyla dik polinom aileleri kurmak kaabildir. Aşağıdaki cetvel bunların en önemlilerini sinoptik bir tarzda ortaya koymaktadır.

Aralık	$p(x)$	Dik Polinomların Tipi
$(-1,1)$	1	$P_k(x)$ Legendre (Löjandr)
$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$T_k(x)$ Çebişef
$(-1,1)$	$(1-x^2)^{\nu-1/2}$	$C_k^{\nu}(x)$ Gegenbauer (Gegenbâver)
$(0,\infty)$	e^{-x}	$L_k(x)$ Laguerre (Lâger)
$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	$H_k(x)$ Hermite (Ermit)

Schmidt dikleştirme işlemiyle türetilmiş olan bu dik polinom ailelerinden başka dik fonksiyon ailelerine bir kaç misâl de aşağıda verilmiş bulunmaktadır.

1) $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ aralığında: $\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{a}\right\}$;

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\frac{(2i+1)\pi x}{a} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\,\delta_{ik}$$

2) $-\frac{a}{2} \leqq x \leqq \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leqq y \leqq \frac{b}{2}, \quad -\frac{c}{2} \leqq z \leqq \frac{c}{2}$ bölgesinde:

$$\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{a} \cos\frac{(2m+1)\pi y}{b} \cos\frac{(2n+1)\pi z}{c}\right\};$$

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} \left[\cos\frac{(2k+1)\pi x}{a} \cos\frac{(2m+1)\pi y}{b} \cos\frac{(2n+1)\pi z}{c} \times\right.$$

$$\times \cos \frac{(2k'+1)\,\pi x}{a} \cos \frac{(2m'+1)\,\pi y}{b} \cos \frac{(2n'+1)\,\pi z}{c} \Big] dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{abc}{8} \delta_{kk'}\, \delta_{mm'}\, \delta_{nn'}$$

3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ bölgesinde $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ küresel harmonik fonksiyonlardan müteşekkil dik fonksiyonlar ailesi (Not: Küresel harmonik fonksiyonlar küresel koordinatlar için yazılmış olan Laplace denkleminin değişken ayrışımında ortaya çıkan açılara bağlı kısmını tahkik eden fonksiyonlardır): $Y_{lm}(\theta,\varphi)$. Bu fonksiyonlar $p = \sin\theta$ ağırlık fonksiyonuna nazaran diklik bağıntılarını haizdirler:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)\, d\theta = \delta_{ll'}\, \delta_{mm'}\,.$$

(IV.2) DİK FONKSİYONLAR SERİSİNE AÇILIM.

Belirli bir B bölgesi için geçerli olan bir $\left\{\varphi_k(\vec{r})\right\}$ dik fonksiyon ailesi ve bir de gene B de tanımlanmış olan $f(\vec{r})$ fonksiyonu olsun. $f(\vec{r})$ nin B de $\left\{\varphi_l(\vec{r})\right\}$ cinsinden

$$f(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi_k(\vec{r}) \qquad \text{(IV.2.1)}$$

şeklinde bir seriye açılıp açılmayacağını inceleyelim. (IV.2.1) açılımının $f(\vec{r})$ yi en iyi bir şekilde temsil edebilmesi için acaba a_k katsayılarını ne türlü seçmek lâzımdır? Önce bu serideki terimlerin sayısının sonlu bir n sayısı olduğunu farzedelim. Buradaki «en iyi» tâbirinin katsayıların seçimini etkileyeceği açıktır.

$$\Delta(\vec{r}, a_k) = f(\vec{r}) - \sum_{k=1}^{n} a_k\, \varphi_k(\vec{r})$$

farkını göz önüne alırsak bu bize $f(\vec{r})$ nin $\varphi_k(\vec{r})$ lerle gösterilişindeki hâtâyı verir. Bunun minimum olması için en küçük kareler metodunda olduğu gibi

$$M_n = \int_B \left| f(\vec{r}) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(\vec{r}) \right|^2 d\vec{r} \tag{IV.2.2}$$

diye tanımlanan *ortalama kuvadratik hatâ*nın minimum olması gerektiği gösterilir. M_n ifâdesi $(k=1, 2, \cdots, n)$ olmak üzere n adet a_k parametresinin fonksiyonu olarak kabul edilecektir. Fakat a_k açılım katsayıları kompleks de olabileceklerinden esâsında M_n ifâdesi n adet a_k ve n adet de a^*_k parametresine, yâni toplam olarak $2n$ parametreye bağlıdır. Bu itibarla M_n yi minimum kılmak ancak M_n nin a_k ve a_k^* lara göre kısmî türevlerini sıfıra eşitlemekle mümkündür. M_n yi açıkça yazarsak

$$M_n = \int_B \left| f(\vec{r}) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(\vec{r}) \right|^2 d\vec{r} = \int_B \left[f^*(\vec{r}) - \sum_{k=1}^{n} a_k^* \varphi_k^*(\vec{r}) \right] \times$$

$$\times \left[f(\vec{r}) - \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m(\vec{r}) \right] d\vec{r}$$

$$= \int_B f^*(\vec{r}) f(\vec{r})\, d\vec{r} - \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \int_B f^*(\vec{r}) \varphi_k(\vec{r})\, d\vec{r} + a_k^* \int_B \varphi_k^*(\vec{r}) f(\vec{r})\, d\vec{r} \right]$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_k^* a_m \int_B \varphi_k^*(\vec{r}) \varphi_m(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$= (f,f) - \sum_{k=1}^{n} \left[(f,\varphi_k)\, a_k + (\varphi_k, f)\, a_k^* \right] + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m)\, a_k^* a_m$$

$$= (f,f) - \sum_{k=1}^{n} \left[(f,\varphi_k)\, a_k + (\varphi_k, f)\, a_k^* - \gamma a_k^* a_k \right] \tag{IV.2.3}$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial M_n}{\partial a_k} = -(f,\varphi_k) + \gamma a_k^* = 0 \rightarrow a_k^* = \frac{1}{\gamma}(f,\varphi_k) \qquad \text{(IV.2.4)}$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial a_k^*} = -(\varphi_k,f) + \gamma a_k = 0 \rightarrow a_k = \frac{1}{\gamma}(\varphi_k,f) \qquad \text{(IV.2.5)}$$

bulunur. (IV.2.4) ve (IV.2.5) in biribirinin kompleks eşleniği olduğu görülmektedir. Buna göre her iki formülü de, $\gamma = (\varphi_k,\varphi_k)$ olduğunu da göz önünde tutarak

$$a_k = \frac{\int_B \varphi_k^*(\vec{r})\, f(\vec{r})\, d\vec{r}}{\int_B \varphi_k^*(\vec{r})\, \varphi_k(\vec{r})\, d\vec{r}} \qquad \text{(IV.2.6)}$$

şeklinde yazabiliriz.

(IV.2.4) ve (IV.2.5) in ışığında (IV.2.3) ün son satırını yeniden yazarsak

$$M_n = (f,f) - \sum_{k=1}^{n} \left\{ (f,\varphi_k)\, a_k + (\varphi_k,f)\, a_k^* - \gamma a_k^* a_k \right\}$$

$$= (f,f) - \sum_{k=1}^{n} \left\{ \gamma a_k^* a_k + \gamma a_k a_k^* - \gamma a_k^* a_k \right\}$$

$$= (f,f) - \sum_{k=1}^{n} \gamma\, |a_k|^2$$

olur. Tanım dolayısıyla $M_n \geqq 0$ dır. Bundan ötürü son bağıntıdan

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqq \frac{1}{\gamma}(f,f) = \frac{1}{\gamma} \int_B |f(\vec{r})|^2\, d\vec{r} \qquad \text{(VI.2.7)}$$

bulunur ki eğer $\{\varphi_k(\vec{r})\}$ ortonormâl bir fonksiyon ailesi ise $\gamma = 1$ olacağından (IV.2.7) ifâdesi

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqq \int_B |f(\vec{r})|^2 \, d\vec{r} \qquad (IV.2.8)$$

ye indirgenmiş olur. Buna *Bessel eşitsizliği* adı verilmektedir. Eğer $n \to \infty$ için $M_n \to 0$ ise yâni

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \int_B |f(\vec{r})|^2 \, d\vec{r} \qquad (IV.2.9)$$

ise bu, $\left\{\varphi_k(\vec{r})\right\}$ sonsuz ortonormâl fonksiyon ailesinin

$$a_k = (\varphi_k, f) = \int_B \varphi_k^*(\vec{r}) \, f(\vec{r}) \, d\vec{r} \qquad (IV.2.10)$$

olmak üzere $f(\vec{r})$ fonksiyonunu B de

$$f(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \varphi_k(\vec{r}) \qquad (IV.2.11)$$

serisi aracılığıyla *ortalama olarak* temsil ettiğini ifâde eder. (IV.2.9) eşitliğine *PARSEVAL eşitliği* denir. Buna *tamlık bağıntısı* da denir. ve $f(\vec{r})$ nin $\left\{\varphi_k(\vec{r})\right\}$ lerle serisi hâlinde temsilindeki a_k katsayıları tamlık bağıntısını gerçekliyorlarsa $\left\{\varphi_k(\vec{r})\right\}$ ye *tam bir ortonormâl fonksiyon takımı* adı verilir.

Şimdi (IV.2.10) katsayılarının ışığı altında (IV.2.11) i yeniden yazalım:

$$f(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, f) \, \varphi_k(\vec{r})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_B \varphi_k^*(\vec{r}\,') \, f(\vec{r}\,') \, d\vec{r}\,' \right) \varphi_k(\vec{r})$$

$$= \int_B \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*(\vec{r'})\, \varphi_k(\vec{r}) \right\} f(\vec{r'})\, d\vec{r'}$$

olur. Eğer bu ifâde keyfî bir $f(\vec{r})$ fonksiyonu için geçerli ise integral altındaki parantezli ifâdenin acâib bir özelliği haiz olması lâzımdır. Bu öyle olmalıdır ki $f(\vec{r'})$ ile çarpılıp da B üzerinden integre edildi miydi f nin $\vec{r}$ deki değeri elde edilmiş olsun. Bu ise ancak, I. Bölümden bildiğimiz Dirac' ın delta fonksiyonu olabilir. Şu hâlde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*(\vec{r'})\, \varphi_k(\vec{r}) = \delta(\vec{r'} - \vec{r}) \qquad \text{(IV.2.12)}$$

olmalıdır.

$\left\{ \varphi_k(\vec{r}) \right\}$ lerin gerçekledikleri bu bağıntıya da *kapanış bağıntısı* adı verilir.

(IV.3) STURM - LIOUVILLE DENKLEMİNE GİRİŞ

Teorik fiziğin pekçok kolunda sık sık

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t) + \lambda'\psi(\vec{r},t) = A(\vec{r},t) + B(t)\,\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} + C(t)\,\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad \text{(IV.3.1)}$$

şeklinde lineer bir diferansiyel denklemle karşılaşılır. λ' ile bir parametre gösterilmektedir. λ', $A(\vec{r},t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ nin özel değerleri için denklem de bazı özel isimler alır:

1) Eğer $A(\vec{r},t) = 0$, $B =$ Sâbit, $C =$ Sâbit ise denkleme *telgrafçılar denklemi,*

2) $A = C = 0$ ise *difüzyon denklemi,*

3) $\lambda' = B = C = 0$ ise *Poisson denklemi,*

4) $\lambda' = A = B = 0$ ise *Dalga denklemi,*

5) $A = B = C = 0$ ise *Helmholtz denklemi,*

6) $\lambda' = A = B = C = 0$ ise *Laplace denklemi* denir.

$A(\vec{r},t)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu hâllerde $A=0$ için elde edilen özel homogen denklemin genel çözümü ile A fonksiyonlu, yâni homogen olmayan denklemin özel bir çözümünün lineer kombinezonu, göz önüne alınan denklemin genel çözümünü teşkil eder. Homogen denklemin genel çözümünü bulduktan sonra homogen olmayan denklemin özel bir çözümünü bulmak için meselâ, Analiz dersinden bilinen, Lagrange' ın *katsayıların değişimi metodu* gibi bir metot uygulamak çok kere kolaylıkla sonuca ulaşılmasını mümkün kılar. Bu itibarla homogen denklemin genel çözümünün bulunması ön plânda gelmektedir. Şu hâlde

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t)+\lambda'\psi(\vec{r},t)=B(t)\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}+C(t)\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad \text{(IV.3.2)}$$

denkleminin genel çözümünü bulmak için

$$\psi(\vec{r},t)=U(\vec{r})\;T(t) \qquad \text{(IV.3.3)}$$

şeklinde değişken ayrışımı yapıp gerek $U(\vec{r})$ ve gerekse $T(t)$ fonksiyonlarını ayrı ayrı tesbit etmeğe ve neticede bunların çarpımıyla $\psi(\vec{r},t)$ yi bulmağa çalışalım. (IV.3.3) ü (IV.3.2) ye yerleştirip de her iki yanı $U(\vec{r})$ $T(t)$ ile bölünce

$$\frac{1}{U(\vec{r})}\nabla^2U(\vec{r})+\lambda'=\frac{B(t)}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt}+\frac{C(t)}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} \qquad \text{(IV.3.4)}$$

elde edilir. Bu takdirde iki şık vardır:

1) ya (IV.3.4) ün sol yanı $f(\vec{r})$ ve sağ yanı de $g(t)$ gibi sırasıyla $\vec{r}$ ve t nin açık birer fonksiyonudur,

2) ya da (IV.3.4) un her iki yanı da aynı bir μ sâbitine eşittir.

Birinci hâlde (IV.3.4)

$$f(\vec{r})=g(t) \quad \text{ya da} \quad f(\vec{r})-g(t)=F(\vec{r},t)=0$$

şeklinde olurdu ki bu fonksiyonel bağıntı, $\vec{r}$ ve t nin birinden birinin diğerinin fonksiyonu olduğuna delâlet ederdi; bu ise $\vec{r}$ ve t nin bağımsız değişkenler olması keyfiyetiyle açık olarak çelişiktir. Bu çelişiklik ancak (IV.3.4) ün her iki yanı da aynı bir μ *ayrışım sâbitine* eşitse ortadan kalkar. Bu itibarla ve $\lambda' - \mu = \lambda$ vazederek (IV.3.4) den

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + \lambda\, U(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(IV.3.5)}$$

$$C(t)\,\frac{d^2T(t)}{dt^2} + B(t)\,\frac{dT(t)}{dt} - \mu\, T(t) = 0 \qquad \text{(IV.3.6)}$$

bulunur. Bunlardan (IV.3.6) denklemi ikinci dereceden âdî bir diferansiyel denklem olup ∇^2 nin ifâdesine bağlı değildir ve bunun integrasyonu herhangi bir zorluk arzetmez.

(IV.3.5) denklemi ise Helmholtz tipi bir denklem olup aynı zamanda Laplace denkleminin özdeğer probleminin vaz'ı olarak da telâkkî edilebilir. Buradaki Laplace operatörü (=*Lâplâsyen*), denklemin geçerli olduğu koordinat sistemine bağlıdır. Meselâ küresel koordinatlarda $U = U(r,\theta,\phi)$ olmak üzere (IV.3.5)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r^2}\,\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \lambda U = 0$$

(IV.3.7)

şeklini alır. Burada gene

$$U(r,\theta,\phi) = u(r)\; v(\theta)\; w(\phi)$$

vazederek değişkenlere ayrışım metodu mülâhazalarıyla neticede

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\,\frac{du}{dr}\right] + \lambda r^2\, u - \alpha u = 0 \qquad \text{(IV.3.8)}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\,\frac{dv}{d\theta}\right] + (\alpha \sin\theta)\, v - \frac{\beta}{\sin\theta}\; v = 0 \qquad \text{(IV.3.9)}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \beta^2\, w = 0 \qquad \text{(IV.3.10)}$$

şeklinde üç denklem elde edilir. Böylece kısmî türevli (IV.3.7) denkleminin çözümü bu üç âdî diferansiyel denklemin çözümüne indirgenmiş olmaktadır. Eğer α,β ve λ ayrışım sâbitlerinin, bu denklemlerin çözümlerini mümkün kılacak değerleri varsâ

$$U(r,\theta,\phi) = u(r\,;\lambda,\alpha)\; v(\theta\,;\alpha,\beta)\; w(\phi\,;\beta)$$

fonksiyonu Laplace operatörünün küresel koordinatlardaki bir özfonksiyonu olur. Şüphesiz ki bu denklemlerle birlikte *«sınır şartları»* nın da belirtilmesi lâzımdır. Esâsında α, β ve λ nın kabul edilebilir değerlerini tâyin eden de bu sınır şartlarıdır. Meselâ (IV.3.7) Helmholtz denklemini $r=R$ yarıçaplı bir kürenin içi için çözüp de bu çözümü $r=R$ için

$$\left.\begin{aligned} U&=0 \\ \frac{\partial r}{\partial U}&=0 \\ \frac{\partial r}{\partial U}+\sigma U&=0 \end{aligned}\right\}$$

sınır şartlarından birine tâbî tutarsak bu şartlar

$$\left.\begin{aligned} u(R)&=0 \\ u'(R)&=0 \\ u'(R)+\sigma\, u(R)&=0 \end{aligned}\right\}$$

olmasını intâceder. $u(r)$ nin $R=0$ da sürekli olması ve 1. mertebeden sürekli türevi haiz olmasını sart koşarsak bu, $u(0)$ ın sonlu kalmak mecbûriyetinde olması demektir. Eğer $U(r,\theta,\phi)$, kürenin içinde sürekli ise ve sürekli türevi haizse $w(0)=w(2\pi)$, $w'(0)=w'(2\pi)$ olur ki n bir tamsayı olmak üzere bu, $\beta=n^2$ olması demektir. Kezâ $U(r,\theta,\phi)$ nin kürenin kutupsal ekseni üzerinde sürekli olması ve sürekli türeve mâlik bulunması isteniyorsa $v(0)$, $v'(0)$, $v(\pi)$, $v'(\pi)$ nin de sonlu kalmaları elzem olur.

Gerek (IV.3.8), gerek (IV.3.9) ve gerekse (IV.3.10) denklemlerinin $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ *reel fonksiyonlar* olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\,\frac{dy(x)}{dx}\right]+Q(x)\,y(x)+\lambda\,R(x)\,y(x)=0 \qquad \text{(IV.3.11)}$$

şeklindeki bir denklemin özel hâlleri olduğunu görmek kolaydır. Bu denkleme STURM-LİOUVİLLE denklemi adı verilmektedir. Bu denklemin aşağıdaki tiplerden bir sınır şartına bağlı olarak çözülmesi *«STURM-LİOUVİLLE Problemi»* ni teşkil eder.

Sturm-Liouville probleminin sınır şartları $a \leqq x \leqq b$ olmak üzere şunlar olabilir:

1) $y(a)=0$ ve $y(b)=0$
2) $y'(a)=0$ ve $y'(b)=0$
3) $\sigma_1>0$; $\sigma_2>0$ olmak üzere
$y'(a)-\sigma_1\,y(a)=0$ ve $y'(b)+\sigma_2\,y(b)=0$
4) $y(a)=y(b)$ ve $P(a)\,y'(a)=P(b)\,y'(b)$
5) $P(a)=0$ olmak üzere $y(a)$ ve $y'(a)$ nın,
ve, $P(b)=0$ olmak üzere $y(b)$ ve $y'(b)$ nin sonlu kalmaları.

Bunlardan ilk üç tip şart sınırlara uygulanan sınır şartlarıdır. Dördüncüsü periyodiklik şartı olup beşinci şart da $y(x)$ in göz önüne alınan bölgede iyi davranan yâni uysal ve kaprissiz bir fonksiyon olmasını garantileyen bir şarttır. İlk üç sınır şartına *«homogen sınır şartları»* adı verilir ve homogen sınır şartlarına bağlı olarak vazedilen bir probleme de *«homogen bir problem»* denir. *«Inhomogen bir problem»* ise genellikle homogen olmayan bir diferansiyel denkleme ya da homogen olmayan sınır şartlarına bağlı olarak vaz edilen problem olarak karşımıza çıkar.

Belirli bir λ_i özdeğeri için (IV.3.11) denklemini gerçekleyen özfonksiyon $y_i(x)$ olsun:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\,\frac{dy_i}{dx}\right]+Q(x)\,y_i(x)+\lambda_i\,R(x)\,y_i(x)=0.$$

Aynı denklemin başka bir özdeğeri λ_j ve buna tekaabül eden özfonksiyon da $y_j^*(x)$ olmak üzere, yukarıdaki denklemi $y_j(x)$ ile çarpıp $a\leqq x\leqq b$ arasında x değişkenine göre integre edelim:

$$\int_a^b\left[y_j^*\,\frac{d}{dx}\left(P(x)\,\frac{dy_i}{dx}\right)+Q(x)\,y_j^*\,y_i+\lambda_i\,R(x)\,y_j^*\,y_i\right]dx=0 \tag{IV.3.12}$$

Bu ifâdede bir kere i ile j yi aralarında değiş tokuş ettikten sonra ifâdenin kompleks eşleniğini (IV.3.12) den çıkartalım:

$$\int_a^b\left[\,y_j^*(x)\,\frac{d}{dx}\left(P(x)\,\frac{dy_i}{dx}\right)-y_i(x)\,\frac{d}{dx}\left(P(x)\,\frac{dy_j^*}{dx}\right)\right]dx+$$

$$+(\lambda_i-\lambda_j^*)\int_a^b R(x)\,y_j^*(x)\,y_i(x)\,dx=0$$

veyâ sınır şartlarını da göz önünde tutarak

$$(\lambda_i-\lambda_j^*)\int_a^b R(x)\, y_j^*(x)\, y_i(x)\, dx=\left[P(x)\, y_j^*(x)\frac{dy_i(x)}{dx}-P(x)\, y_i(x)\frac{dy_j^*(x)}{dx}\right]_a^b=0$$

bulunur. Yâni $\lambda_i \neq \lambda_j^*$ için (IV.3.11) in özfonksiyonları $R(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre biribirlerine dıktirler. Eğer $i=j$ alırsak

$$(\lambda_i-\lambda_i^*)\int_a^b R(x)\left[y_i(x)\right]^2 dx=0$$

dan, integralin $\neq 0$ olması hasebiyle, $\lambda_i=\lambda_i^*$ yâni Sturm-Liouville denkleminin özdeğerlerinin ancak reel olabilecekleri keyfiyeti ortaya çıkmış olur.

Şu hâlde $y_i(x)$ özfonksiyonları için

$$\int_a^b R(x)\, y_i^*(x)\, y_j(x)\, dx=\gamma\delta_{ij} \tag{IV.3.13}$$

olacaktır. γ ile normlaştırma sâbiti gösterilmektedir.

Şu âna kadar (IV.3.1) denkleminin $A=0$ olması hâlinde (=homogel hâl) (IV.3.5) ve (IV.3.6) şeklinde iki denkleme indirgendiğini ve bunlardan ikisinin de seçilen koordinat sistemine göre, değişkenlere ayrışım metodu yardımıyla (IV.3.11) şeklinde Sturm-Liouville denklemlerine parçalanabildiğini ve bu sonuncuların özfonksiyonlarının da dik fonksiyonlar olduklarını ve normlaştırılabildiklerini gördük.

Acaba (IV.3.11) şeklindeki denklemlere ayrışan (IV.3.5) denkleminin genel çözümü (IV.3.11) denklemlerine tekaabül eden özfonksiyonlar yardımıyla nasıl ifâde olunabilir? Şimdi bu meseleyi daha yakından incelemek istiyoruz.

Bu itibarla, $\vec{r}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_N\vec{e}_N$ olmak üzere, $U(\vec{r})$ fonksiyonunun (IV.3.5) şeklinde ve N boyutlu bir uzaydaki bir koordinat sistemine göre ifâde edilmiş bir Helmholtz denklemini gerçeklediğini farzedelim. $U(\vec{r})$ nin tanım bölgesi olan B

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1 \, ; \; \cdots ; \; a_N \leqq x_N \leqq b_N$$

eşitsizlikleriyle belirlenmiş olsun. Bu takdirde

$$U(\vec{r}) = U(x_1 , x_2 , \cdots , x_N) = \prod_{i=1}^{N} u_i(x_i) \qquad \text{(IV.3.14)}$$

değişken ayrışımı yapmak sûretiyle $\nabla^2 U + \lambda U = 0$ denklemi, yukarıda da zikrettiğimiz vechile

$$\frac{d}{dx_i}\left[P_i(x_i)\frac{du_i(x_i)}{dx_i}\right] + Q_i(x_i)\, u_i(x_i) + \lambda^{(i)} R_i(x_i)\, u_i(x_i) = 0 \qquad \text{(IV.3.15)}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$

gibi N adet Sturm-Liouville denklemine parçalanmış olacaktır. Bu türlü tipik bir denklemin $u_m^{(i)}(x_i)$ özfonksiyonları (IV.3.12) ye binâen

$$\int_{a_i}^{b_i} R_i(x_i)\, u_m^{(i)}(x_i)\, u_n^{(i)}(x_i)\, dx_i = \gamma \delta_{mn}$$

bağıntılarını gerçeklemektedirler. Fakat eğer.

$$\sqrt{\frac{R_i(x_i)}{\gamma}}\; u_k^{(i)}(x_i) = \varphi_{ik}(x_i) \qquad \text{(IV.3.16)}$$

vazedecek olursak

$$\int_{a_i}^{b_i} \varphi_{im}^*(x_i)\, \varphi_{in}(x_i)\, dx_i = \delta_{mn} \qquad \text{(IV.3.17)}$$

bağıntıları câri olur.

Şimdi

$$\left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n}\right]_* = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_N=1}^{n}$$

olmak şartıyla $U(x_1 , x_2 , \cdots , x_N)$ nin

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n}\right] * \prod_{i=1}^{N} a_{ik_i}\, \varphi_{ik_i}(x_i) \qquad \text{(IV.3.18)}$$

şeklinde bir seri aracılığı ile en iyi bir şekilde temsil edilebilmesi için a_{ik_i} katsayılarının nasıl seçilmeleri lâzım geldiğini araştıralım. Bunun için gene eskisine benzer şekilde

$$M_n = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} \left| \prod_{i=1}^{N} u_i(x_i) - \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n}\right] * \prod_{i=1}^{N} a_{ik_i}\, \varphi_{ik_i}(x_i) \right|^2 dx_1 \cdots dx_N$$

ifâdesini göz önüne alalım. Buna binâen ve formalizmi ağırlaştırmamak için sâdece bu hesaplara münhasır kalmak üzere kompleks eşleniği, $*$ yerine, ifâdenin üzerine konmuş bir çizgiyle göstererek:

$$M_n = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} \left\{ \prod_{i=1}^{N} \bar{u}_i(x_i) - \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n}\right] * \prod_{i=1}^{N} \bar{a}_{ik_i}\, \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=1}^{N} u_j(x_j) - \left[\prod_{m=1}^{N} \sum_{k_m=1}^{n}\right] * \prod_{j=1}^{N} a_{jk_m}\, \varphi_{jk_m}(x_j) \right\} dx_1 \ldots dx_N =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} \Big\{ \prod_{i=1}^{N} \bar{u}_i(x_i) \prod_{j=1}^{N} u_j(x_j) - \prod_{i=1}^{N} \bar{u}_i(x_i) \times \left[\prod_{m=1}^{N} \sum_{k_m=1}^{n}\right] *$$

$$* \prod_{j=1}^{N} a_{jk_m}\, \varphi_{jk_m}(x_j) - \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n}\right] * \prod_{i=1}^{N} \bar{a}_{ik_i}\, \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \times \prod_{j=1}^{N} u_j(x_j) +$$

$$+ \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n}\right] \left[\prod_{m=1}^{N} \sum_{k_m=1}^{n}\right] * \left[\prod_{i=1}^{N} \bar{a}_{ik_i}\, \bar{\varphi}_{ik_i}(x_i) \prod_{j=1}^{N} a_{jk_m}\, \varphi_{jk_m}(x_j) \right] \Big\} dx_1 \cdots dx_N$$

$$= \int_B \overline{U}(\vec{r})\, U(\vec{r})\, d\vec{r} - \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n} \right] * \prod_{i=1}^{N} a_{ik_i}\, \overline{u}_i(x_i) \varphi_{ik_i}(x_i)\, dx_1 \cdots dx_N$$

$$- \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n} \right] * \prod_{i=1}^{N} \overline{a}_{ik_i}\, \overline{\varphi}_{ik_i}(x_i)\, u_i(x_i)\, dx_1 \cdots dx_N +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n} \right] * \left[\prod_{m=1}^{N} \sum_{k_m=1}^{n} \right] * \prod_{i=1}^{N} \overline{a}_{ik_i}\, a_{ik_m} \overline{\varphi}_{ik_i}(x_i)\, \varphi_{ik_m}(x_i)\, dx_1 \cdots dx_N =$$

$$= \int_B \left| U(\vec{r}) \right|^2 d\vec{r} - \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n} \right] * \left\{ \prod_{i=1}^{N} a_{ik_i} \int_{a_i}^{b_i} \overline{u}_i(x_i)\, \varphi_{ik_i}(x_i)\, dx_i + \right.$$

$$\left. + \prod_{i=1}^{N} \overline{a}_{ik_i} \int_{a_i}^{b_i} \overline{\varphi}_{ik_i}(x_i)\, u_i(x_i)\, dx_i \right\} + \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n} \right] *$$

$$* \left[\prod_{m=1}^{N} \sum_{k_m=1}^{n} \right] * \left\{ \prod_{i=1}^{N} \overline{a}_{ik_i}\, a_{ik_m} \int_{a_i}^{b_i} \overline{\varphi}_{ik_i}(x_i)\, \varphi_{ik_m}(x_i)\, dx_i \right\}$$

dir.

Fakat son terimdeki integralin değeri diklik bağıntıları sebebiyle sâdece $\delta_{k_i k_m}$ dir. Bu sebeple

$$\left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n} \right] * \left[\prod_{m=1}^{N} \sum_{k_m=1}^{n} \right] * \prod_{i=1}^{N} \overline{a}_{ik_i}\, a_{ik_m}\, \delta_{k_i k_m} =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{n} \right] * \prod_{i=1}^{N} \overline{a}_{ik_i} . a_{ik_i}$$

olur. Bu son neticeyi de göz önünde tutarak

$$M_n=(U,U)-\left[\prod_{i=1}^{N}\sum_{k_i=1}^{n}\right]*\left\{\prod_{i=1}^{N}a_{ik_i}\left(u_i\,,\,\varphi_{ik_i}\right)+\right.$$

$$\left.+\prod_{i=1}^{N}\bar{a}_{ik_i}\left(\varphi_{ik_i}\,,\,u_i\right)-\prod_{i=1}^{N}\bar{a}_{ik_i}\,a_{ik_i}\right\} \tag{IV.3.19}$$

bulunur. M_n nin minimum olabilmesi için açılım katsayıları

$$\frac{\partial M_n}{\partial a_{ik_i}}=0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial M_n}{\partial \bar{a}_{ik_i}}=0$$

şartlarını gerçeklemelidirler. İlk şart

$$-\frac{\prod\limits_{i=1}^{N}a_{ik_i}\left(u_i\,,\,\varphi_{ik_i}\right)}{a_{ik_i}}+\frac{\prod\limits_{i=1}^{N}\bar{a}_{ik_i}\,a_{ik_i}}{a_{ik_i}}=0$$

şeklinde yazılabilir. Yâhut da

$$\prod_{i=1}^{N}\bar{a}_{ik_i}\left(u_i\,,\,\varphi_{ik_i}\right)=\prod_{i=1}^{N}\bar{a}_{ik_i}\,a_{ik_i} \tag{IV.3.20}$$

olur. Benzer şekilde ikinci şarttan da

$$\prod_{i=1}^{N}\bar{a}_{ik_i}\left(\varphi_{ik_i}\,,\,u_i\right)=\prod_{i=1}^{N}\bar{a}_{ik_i}\,a_{ik_i} \tag{IV.3.21}$$

bağıntısı çıkartılır.

Buna binâen (IV.3.20) ve (IV.3.21) i (IV.3.19) ifâdesine ikaame ederek, ve tanım dolayısıyla da $M_n \geqq 0$ olduğundan,

$$\mathrm{Min}(M_n)=(U,U)-\left[\prod_{i=1}^{N}\sum_{k_i=1}^{n}\right]*\prod_{i=1}^{N}\left|a_{ik_i}\right|^2\geqq 0 \tag{IV.3.22}$$

bulunur. Bu, *Bessel eşitsizliği*nin genel hâlidir.

Eğer. $n \to \infty$ için $\mathrm{Min}(M_n) \to 0$ ise limitte

$$(U,U) = \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{\infty}\right] * \prod_{i=1}^{N} |a_{ik_i}|^2 \qquad \text{(IV.3.23)}$$

olur ki bu da *Parseval eşitliğinin* veyâ *tamlık bağıntısının* genel şeklini temsil eder.

(IV.3.20) ve (IV.3.21) bağıntıları

$$a_{ik_i} = (\varphi_{ik_i}\,,\ u_i) = \int_{a_i}^{b_i} \overline{\varphi}_{ik_i}(x_i)\ u_i(x_i)\ dx_i \qquad \text{(IV.3.24)}$$

$$\overline{a}_{ik_i} = (u_i\,,\ \varphi_{ik_i}) = \int_{a_i}^{b_i} \overline{u}_i(x_i)\,\varphi_{ik_i}(x_i)\ dx_i \qquad \text{(IV.3.25)}$$

olduğunu göstermektedir ki bu da a_{ik_i} katsayılarının $u_i(x_i)$ nin

$$u_i(x_i) = \sum_{k_i=1}^{\infty} a_{ik_i}\ \varphi_{ik_i}(x_i) \qquad \text{(IV.3.26)}$$

şeklindeki bir açılımının katsayıları olduğuna delâlet etmektedir. $n \to \infty$ için şu hâlde $U(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ de

$$U(\vec{r}) = U(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \left[\prod_{i=1}^{N} \sum_{k_i=1}^{\infty}\right] * \prod_{i=1}^{N} a_{ik_i}\ \varphi_{ik_i}(x_i) \qquad \text{(IV.3.27)}$$

ifâdesiyle verilecektir. Şu hâlde eğer

$$\Psi_{k_1k_2\ldots k_N}(\vec{r}) = \Psi_{k_1k_2\ldots k_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} \varphi_{ik_i}(x_i) =$$

$$= \varphi_{1k_1}(x_1)\ \varphi_{2k_2}(x_2) \ldots .\ \varphi_{Nk_N}(x_N) \qquad \text{(IV.3.28)}$$

vazedersek

$$U(\vec{r})=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=1}^{\infty} a_{1k_1}\, a_{2k_2}\cdots a_{Nk_N}\, \Psi_{k_1k_2\cdots k_N}(\vec{r}) \qquad \text{(IV.3.29)}$$

olur.

Meselâ

$$U\left(\pm\frac{A}{2}, x_2, x_3\right)=U\left(x_1, \pm\frac{B}{2}, x_3\right)=U\left(x_1, x_2, \pm\frac{C}{2}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)_{x_1=0}=\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}=\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)_{x_3=0}=0$$

şartları altında,

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2}+\lambda U(x_1, x_2, x_3)=0$$

denklemini gerçekleyen $U(x, x_2, x_3)$ fonksiyonunun

$$U(x_1, x_2, x_3)=u_1(x_1)\, u_2(x_2)\, u_3(x_3)$$

değişken ayrışımı neticesinde ve $\lambda=\alpha+\beta+\gamma$ olmak üzere elde edilen

$$\frac{d^2u_1}{dx_1^2}+\alpha u_1=0 \quad ; \quad \frac{d^2u_2}{dx_2^2}+\beta u_2=0 \quad ; \quad \frac{d^2u_3}{dx_3^2}+\gamma u_3=0$$

ın özfonksiyonları cinsinden ve (IV.3.29) a uygun olarak

$$U(x_1, x_2, x_3)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{k_3=1}^{\infty} a_{k_1}\, a_{k_2}\, a_{k_3} \cos\frac{(2k_1+1)\pi x_1}{A}\times$$
$$\times\cos\frac{(2k_2+1)\pi x_2}{B}\,\cos\frac{(2k_3+1)\pi x_3}{C}$$

şeklinde bir seri ile temsil edildiği görülür.

IV.3. alt-bölümünün sonucunu derli toplu olarak artık şu şekilde ifâde edebiliriz:

N boyutlu bir uzayda yazılmış olan $\nabla^2 U(\vec{r})+\lambda U(\vec{r})=0$ Helmholtz denkleminin ortonormâl fonksiyon aileleri yardımıyla sonsuz bir seri şeklındeki çözümü, bu denklemi

$$U(\vec{r})=U(x_1, x_2, \cdots, x_N)=\prod_{i=1}^{N} u_i(x_i)$$

değışken ayrışımıyla N adet

$$\frac{d}{dx_i}\left[P_i(x_i)\frac{du_i}{dx_i}\right]+Q_i(x_i)\,u_i(x_i)+\lambda_i\,R_i(x_i)\,u_i(x_i)=0$$

gibi Sturm-Liouville denklemine parçala.lıktan sonra, $u_{ik_i}(x_i)$ bu denklemin λ_{ik_i} özdeğerine tekaabül eden özfonksiyonu olmak ve

$$(\varphi_{im}, \varphi_{in})=\delta_{mn}$$

olacak şekilde

$$\varphi_{ik_i}(x_i)=\sqrt{\frac{R_i(x_i)}{\gamma}}\,u_{ik_i}(x_i)$$

vazedilmek sûretiyle elde edilen ve katsayıları da

$$a_{ik_i}=(\varphi_{ik_i}, u_i)$$

bağıntılarıyla verilen

$$u_i(x_i)=\sum_{k_i=1}^{\infty} a_{ik_i}\,\varphi_{ik_i}(x_i)$$

şeklindeki açılımların fonksiyonu olarak

$$U(\vec{r})=U(x_1, x_2, \ldots, x_N)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=1}^{\infty} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{Nk_N}$$
$$\times\varphi_{1k_1}(x_1)\,\varphi_{2k_2}(x_2)\cdots\varphi_{Nk_N}(x_N)$$

açılımıyla elde edilir.

(IV.4) EK OPERATÖRLER VE FONKSİYONLAR.

Her O operatörünün φ_i fonksiyonlarının, genellikle normlaştırılabilmelerine karşılık, ortonormâl bir fonksiyon ailesi meydana getirmesi beklenemez. Bununla beraber φ_i lerin tanım bölgesinde gene de ortonormâl bir fonksiyon ailesi inşâ etmek mümkündür. Bu bölümde, O gibi bir diferansiyel matris operatörüyle bunun özvektörleri olan kompleks değerli $\vec{\varphi}_i$ fonksiyonları yardımıyla, haiz olduğu $\vec{\psi}_k$ özvektörleriyle $\vec{\varphi}_i$ vektörleri arasında bunların ortak tanım bölgesi B de

$$\int_B \vec{\psi}_k^{+} \vec{\varphi}_i \, d\vec{r} = \int_B \tilde{\vec{\psi}}_p^{*} \vec{\varphi}_i \, d\vec{r} = (\vec{\psi}_k \, . \, \vec{\varphi}_i) = \delta_{ik} \qquad \text{(VI.4.1)}$$

şeklinde diklik bağıntıları bulunan bir O^+ operatörünün tanımlanıp inşâ olunabileceğini göstereceğiz.

Gerek O, gerekse O^+ operatörlerine tekaabül eden özdeğer problemlerinin vaz'ı

$$\begin{aligned} O \, \vec{\varphi}_i (\vec{r}) &= \lambda_i \, \vec{\varphi}_i (\vec{r}) \\ O^+ \, \vec{\psi}_k (\vec{r}) &= \mu_k \, \vec{\psi}_k (\vec{r}) \end{aligned} \qquad \text{(IV.4.2)}$$

şeklindedir. Bu ifâdelerden ilkinin soldan $\vec{\psi}_k$ ile skaler (iç) çarpımını, ikincisinin de sağdan $\vec{\varphi}_i$ ile skaler çarpımını teşkil edip taraf tarafa çıkartırsak

$$(\vec{\psi}_k \, , O \vec{\varphi}_i) - (O^+ \vec{\psi}_i \, , \varphi_i) = (\lambda_i - \mu_k^*) \cdot (\vec{\psi}_k \, , \vec{\varphi}_i) \qquad \text{(IV.4.3)}$$

yâni

$$(\lambda_i - \mu_k^*) \int_B \tilde{\vec{\psi}}_k^{*} \vec{\varphi}_i \, d\vec{r} = \int_B \left\{ \tilde{\vec{\psi}}_k^{*} O \vec{\varphi}_i - \widetilde{(O^+ \vec{\psi}_k)}^{*} \vec{\varphi}_i \right\} d\vec{r}$$

$$= \int_B \left\{ \tilde{\vec{\psi}}_k^{*} O \vec{\varphi}_i - \tilde{\vec{\psi}}_k^{*} (\widetilde{O^+})^{*} \vec{\varphi}_i \right\} d\vec{r} \qquad \text{(IV.4.4)}$$

bulunur.

Eğer O^+ operatörü

$$\int_B \vec{\tilde{\psi}}_k^* O \vec{\varphi}_i \, d\vec{r} = \int_B \overline{(O^+ \vec{\psi}_k)^*} \, \vec{\varphi}_i \, d\vec{r}$$

$$= \int_B \vec{\tilde{\psi}}^* (\widetilde{O^+})^* \vec{\varphi}_i \, d\vec{r} \qquad \text{(IV.4.5)}$$

bağıntısıyla tanımlanırsa yâni eğer

$$(\widetilde{O^+})^* = O$$

ise, ya da her iki tarafın önce kompleks eşleniği ve sonra da transpozesi alınarak,

$$O^+ = \tilde{O}^* \qquad \text{(IV.4.6)}$$

ise (IV.4.3) veyâ (IV.4.4) bağıntılarından derhal

$$(\lambda_i - \mu_k^*) \cdot (\vec{\psi}_k, \vec{\varphi}_i) = 0$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (IV.4.2) den, (IV.4.6) ya dayanarak

$$\tilde{O}^* \vec{\psi}_k = \mu_k \vec{\psi}_k \qquad \text{(IV.4.7)}$$

yazılabilir. Buradan her iki yanın kompleks eşleniği alınarak

$$\tilde{O} \vec{\psi}_k^* = \mu_k^* \vec{\psi}_k^* \qquad \text{(IV.4.8)}$$

bulunur. Bu ise O nun transpoze matrisi olan $\tilde{O}$ nın özdeğer probleminin vaz'ından başka bir şey değildir. Hâlbuki bir matrisle onun transpozesi aynı özdeğerleri haizdirler (Bk.I.BÖLÜM, Problem: 23).

Şu hâlde (IV.4.2) özdeğer problemleri (IV.4.6) ve (IV.4.8) bağıntılarının sonucu olarak

$$\begin{aligned} O \vec{\varphi}_i &= \lambda_i \vec{\varphi}_i \\ O^+ \vec{\psi}_k &= \lambda_k \vec{\psi}_k \end{aligned} \qquad \text{(IV.4.9)}$$

olur ve (IV.4.8) bağıntıları da

$$(\lambda_i - \lambda_k) \cdot (\vec{\psi}_k, \vec{\varphi}_i) = 0$$

yâni

$$(\vec{\psi}_k, \vec{\varphi}_i) = \int_B \widetilde{\vec{\psi}_k^*} \vec{\varphi}_i \, d\vec{r} = \delta_{ik} \qquad \text{(IV.4.10)}$$

şekline girer.

(IV.4.5) ve dolayısıyla (IV.4.6) ile tanımlanan $\mathbf{O}^+$ operatörüne $\mathbf{O}$ operatörüne *ek operatör* ve $\mathbf{O}^+$ ın özfonksiyonlarına da *ek fonksiyonlar* adı verilir. $\mathbf{O}^+$ ın $\mathbf{O}$ nun hermitsel eşleniği olduğu (IV.4.6) dan gö rülmektedir. Eğer özellikle

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}^+$$

ise bu takdirde $\mathbf{O}$ hermitsel operatörüne *kendi kendine ek operatör* adı verilir. $P(x)$ ve $Q(x)$ reel fonksiyonlar olmak üzere

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d}{dx}\right] + Q(x).$$

şeklinde tanımlanan Sturm-Liouville operatörünün kendi kendine ek bir operatör olduğu kolaylıkla gerçeklenebilir.

Eğer $\mathbf{O}$ ve $\mathbf{O}^+ = \widetilde{\mathbf{O}}^*$ operatörlerinin özfonksiyonlarının ortak B bölgesinde bir $\vec{f}(\vec{r})$ fonksiyonu verilirse bunu ya $\vec{\varphi}_i(\vec{r})$, ya da $\vec{\psi}_k(\vec{r})$ özfonksiyonları cinsinden seriye açabiliriz:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_i a_i \vec{\varphi}_i(\vec{r}) \qquad \text{(IV.4.11)}$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_k b_k \vec{\psi}_k(\vec{r}) \qquad \text{(IV.4.12)}$$

Buradaki a_i ve b_k açılım katsayıları ilk açılımın her iki yanının soldan $\vec{\psi}_i(\vec{r})$ ve ikinci açılımın da her iki yanının sağdan $\vec{\varphi}_k(\vec{r})$ ile skaler çarpımını teşkil ederek tesbit olunurlar:

$$a_i = (\vec{\psi}_i, \vec{f}) = \int_B \overset{\smile}{\vec{\psi}_i}{}^*(\vec{r}) \cdot \vec{f}(\vec{r})\, d\vec{r} \qquad \text{(IV.4.13)}$$

$$b_k = (\vec{f}, \vec{\varphi}_k) = \int_B \overset{\smile}{\vec{f}}{}^*(\vec{r}) \cdot \vec{\varphi}_k(\vec{r})\, d\vec{r} \qquad \text{(IV.4.14)}$$

Böylece, bir O operatörünün *B* bölgesinde tanımlanmış olan özfonksiyonları dik bir fonksiyon ailesi teşkil etmiyorlarsa *B* de gene O operatörü ve bunun özfonksiyonları yardımıyla nasıl bir dik fonksiyon ailesi inşâ edilebileceğini görmüş olmaktayız.

V. Bölüm

PERTÜRBASYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ

(V.I) SOYSUZLAŞMAMIŞ HALE TEKAABÜL EDEN PERTÜRBASYONLAR.

$O^{(0)}$ gibi diferansiyel bir matris operatörünün

$$O^{(0)}\vec{\varphi}_i^{(0)}(\vec{r}) = \lambda_i^{(0)}\,\vec{\varphi}_i^{(0)}(\vec{r}) \tag{V.1.1}$$

özdeğer problemini gerçekleyen bütün özdeğerleri biribirlerinden farklı olsunlar ve her bir özdeğere bir tek özfonksiyon tekaabül etsin. Ayrıca bu özfonksiyonlar aralarında $(\vec{\varphi}_i^{(0)}, \vec{\varphi}_k^{(0)}) = \delta_{ik}$ şeklinde diklik bağıntılarını haiz ortonormâl bir fonksiyon ailesi teşkil etsinler. Eğer $O^{(0)}$ operatörü fiziksel şartların değişmesiyle

$$O = O^{(0)} + Q$$

şekline girerse $O^{(0)}$ ın Q gibi bir pertürbasyona mâruz kaldığı söylenir. Q pertürbasyonunun birinci mertebeden sonsuz küçük bir pertürbasyon olması demek O nun özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının $O^{(0)}$ ınkilerden ancak birinci mertebeden sonsuz küçük kemmiyetler kadar farklı olmaları demektir. $O^{(0)}$ üzerindeki Q pertürbasyonunun $\lambda_i^{(0)}$ ve $\vec{\varphi}_i^{(0)}(\vec{r})$ üzerinde de

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \lambda_i^{(1)} \tag{V.1.2}$$

$$\vec{\varphi}_i = \vec{\varphi}_i^{(0)} + \sum_k a_{ik}^{(1)}\,\vec{\varphi}_k^{(0)} \tag{V.1.3}$$

şeklinde pertürbasyonlar doğurduğu düşünülürse, birinci mertebeden pertürbasyon teorisinin amacı sâdece, pertürbasyonsuz (V.1.1) probleminin çözümlerini ve bir de $O^{(0)}$ operatörü üzerinde vukuu bulan Q pertürbasyonunu bilerek pertürbasyonlu

$$(O^{(0)}+Q)\left(\vec{\varphi}_i^{(0)}+\sum_k a_{ik}^{(1)}\vec{\varphi}_k^{(0)}\right)=(\lambda_i^{(0)}+\lambda_i^{(1)})\left(\vec{\varphi}_i^{(0)}+\sum_k a_{ik}^{(1)}\vec{\varphi}_k^{(0)}\right) \tag{V.1.4}$$

denklemlerini bilfiil çözmeksizin, özdeğerlerde ve özfonksiyonlarda vukuu bulan birinci mertebeden sonsuz küçük pertürbasyonları tâyin etmektedir.

Buna dayanarak ve ikinci mertebeden sonsuz küçüklerin ihmâl olunabilecek derecede küçük kemmiyetler olduklarını farzederek (V.1.4) den

$$O^{(0)}\vec{\varphi}_i^{(0)}+\sum_k a_{ik}^{(1)}O^{(0)}\vec{\varphi}_k^{(0)}+Q\vec{\varphi}_i^{(0)}=$$

$$=\lambda_i^{(0)}\vec{\varphi}_i^{(0)}+\lambda_i^{(0)}\sum_k a_{ik}^{(1)}\vec{\varphi}_k^{(0)}+\lambda_i^{(1)}\vec{\varphi}_i^{(0)} \tag{V.1.5}$$

bulunur. Bir taraftan (V.1.1) i, diğer taraftan da $\{\vec{\varphi}_i^{(0)}\}$ lerin ortonormâl bir fonksiyon ailesi teşkil ettiklerini göz önünde tutarak (V.1.5) in her iki yanının $\vec{\varphi}_i^{(0)}$ ye göre skaler (iç) çarpımını teşkil edelim:

$$\sum_k a_{ik}^{(1)}\lambda_k^{(0)}\delta_{ik}+(\vec{\varphi}_i^{(0)},\ Q\vec{\varphi}_i^{(0)})=\lambda_i^{(0)}\sum_k a_{ik}^{(1)}\delta_{ik}+\lambda_i^{(1)}. \tag{V.1.6}$$

Bu ise

$$\sum_k a_{ik}^{(1)}\lambda_k^{(0)}\delta_{ik}=\lambda_i^{(0)}a_{ii}^{(1)};\quad \lambda_i^{(0)}\sum_k a_{ik}^{(1)}\delta_{ik}=\lambda_i^{(0)}a_{ii}^{(1)}$$

olması dolayısıyla özdeğerin birinci mertebeden pertürbasyonu için

$$\lambda_i^{(1)}=(\vec{\varphi}_i^{(0)},\ Q\vec{\varphi}_i^{(0)})=\int_B \tilde{\vec{\varphi}}_i^{(0)*}\,Q\,\vec{\varphi}_i^{(0)}\,d\vec{r}=\int_B \vec{\varphi}_i^{(0)+}\,Q\,\vec{\varphi}_i^{(0)}\,d\vec{r}$$

$$=Q_{ii} \tag{V.1.7}$$

bulunur.

Eğer (V.1.5) in her iki yanının da soldan $\vec{\varphi}_k^{(0)}$ ya göre skaler (*iç*) çarpımı teşkil edilirse bu sefer de $i \neq k$ için

$$a_{ik}^{(1)} = \frac{(\vec{\varphi}_k^{(0)}, \mathbf{Q}\,\vec{\varphi}_i^{(0)})}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} = \frac{\mathbf{Q}_{ki}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \tag{V.1.8}$$

bulunur. Buradan anlaşıldığına göre $\mathbf{Q}$ pertürbasyonunun «küçük» addedilebilmesi kezâ, bunun $\mathbf{O}^{(0)}$ ın özfonksiyonlarına nisbetle matrisel temsilindeki $\mathbf{Q}_{ki}$ elemanlarının $\mathbf{O}^{(0)}$ ın mütekaabil özdeğerleri arasındaki farkın mutlak değerine nisbetle küçük olmasına da bağlıdır.

$\mathbf{O} = \mathbf{O}^{(0)} + \mathbf{Q}$ pertürbasyonlu matrisinin özfonksiyonlarının ortonormâl olmaları için de (V.1.3) ile (V.1.8) i de göz önünde bulundurarak

$$\delta_{ik} = (\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_k) = \int_B \left(\vec{\varphi}_i^{(0)} + \sum_m a_{im}^{(1)} \vec{\varphi}^{(0)}_m\right)^+ \times$$

$$\times \left(\vec{\varphi}_k^{(0)} + \sum_n a_{kn}^{(1)} \vec{\varphi}_n^{(0)}\right) d\vec{r} = \delta_{ik} + a_{ik}^{(1)} + a_{ki}^{(1)*} + \mathcal{O}(2)$$

yâhut da

$$a_{ik}^{(1)} = -\,a_{ki}^{(1)*} = -\,(a_{ik}^{(1)})^+ \tag{V.1.9}$$

olması yâni $a_{ki}^{(1)}$ pertürbasyon matrisinin çarpık - hermitsel bir matris olması gerektiği bulunur. Şu hâlde (V.1.8) i de göz önünde tutarak, pertürbasyonlu (V.1.4) denkleminin

$$\vec{\varphi}_i = \vec{\varphi}_i^{(0)} + \sum_{k \neq i} a_{ik}\, \vec{\varphi}_k^{(0)} = \vec{\varphi}_i^{(0)} + \sum_{k \neq i} \frac{\mathbf{Q}_{ki}\, \varphi_k^{(0)}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}}$$

özfonksiyonlarının da ortonormâl bir fonksiyon ailesi teşkil etmeleri için $\mathbf{Q}$ pertürbasyon operatörünün hermitsel bir operatör olması yâni

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ = \widetilde{\mathbf{Q}^*}$$

bağıntısını gerçeklemesi gerektiği görülmektedir.

$a_{ik}^{(1)} = \alpha_{ik} + i\,\beta_{ik}$ vazederek (IV.1.9) dan $i = k$ için

$$Re(a_{ik}^{(1)}) = 0$$

olduğunu görmek kolaydır.

Daha da genel bir pertürbasyon formülü elde etmek mümkündür. Bunun için (V.1.4) ifâdesini (V.1.3) ü göz önünde tutarak

$$O^{(0)}\vec{\varphi}_i^{(0)} + \sum_k a_{ik}^{(1)} O^{(0)} \vec{\varphi}_k^{(0)} + Q\, \vec{\varphi}_i^{(0)} = \lambda_i\, \vec{\varphi}_i^{(0)} + \lambda_i^{(0)} \sum_k a_{ik}^{(1)} \vec{\varphi}_k^{(0)} +$$

$$+ \lambda_i^{(1)} \sum_k a_{ik}^{(1)} \vec{\varphi}_k^{(0)} + \lambda_i\, \vec{\varphi}_i^{(0)} \tag{V.1.10}$$

olur. (V.1.7) dolayısıyla her iki tarafın ilk terimleri biribirlerini götürürler. Ayrıca $\lambda_i a_{ik}^{(1)}$ gibi operatör olmayan birinci mertebeden sonsuz küçük kemmiyetlerin çarpımlarının da ikinci mertebeden sonsuz küçük olmaları hasebiyle ihmal edilebilecekleri hesaba katılır, ve (V.1.10) un böylece elde edilen şekli soldan $\varphi_j^{(0)}$ ile skaler olarak çarpılırsa $i \neq j$ için

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{(\vec{\varphi}_j^{(0)},\ Q\, \vec{\varphi}_i^{(0)})}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}} \tag{V.1.11}$$

bulunur, dolayısıyla da

$$\vec{\varphi}_i = \vec{\varphi}_i^{(0)} + \sum_j \frac{(\vec{\varphi}_j^{(0)},\ Q\, \vec{\varphi}_i)\, \varphi_j^{(0)}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}} \tag{V.1.12}$$

olur. Fakat bu ifâde pertürbasyonlu $\vec{\varphi}_i$ fonksiyonunu her iki yanında da ihtivâ etmektedir. Bunu integrasyonla yaklaşık olarak çözmek kaabildir. Bunun için toplamın içindeki skaler çarpımdaki $\vec{\varphi}_i$ yerine (V.1.12) ifâdesi olduğu gibi yerleştirilir; böylece birinci iterasyon yapılmış olur. Elde edilen ifâdedeki φ_i ler yerine gene (V.1.11) ifâdesi ikaame edilirse ikinci iterasyon yapılmış olur; ve bu böyle devam edip gider. Neticede

$$\vec{\varphi}_i = \vec{\varphi}_i^{(0)} + \sum_{k \neq i} \frac{\vec{\varphi}_k^{(0)}\, Q_{ki}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} + \sum_{k \neq i} \sum_{j \neq i} \frac{\vec{\varphi}_k^{(0)}\, Q_{kj}\, Q_{ji}}{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)})\,(\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)})} + \cdots$$

bulunur. (V.1.13)

(V.1.10) dan (V.1.11) i çıkarmadan önce yapılan ikazlar muvacehesinde, fakat bu sefer (V.1.10) u soldan $\varphi_i^{(0)}$ ile skaler olarak çarparak neticede

$$\lambda_i^{(1)} = (\vec{\varphi}_i^{(0)}, \, Q \, \vec{\varphi}_i) \qquad \text{(V.1.14)}$$

bulunur. ve böylece

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(0)} + (\vec{\varphi}_i^{(0)}, \, Q \, \vec{\varphi}_i) \qquad \text{(V.1.15)}$$

olur. Bu ifâde de gene iterasyonla yaklaşık olarak çözülebilir. Filhakika (V.1.15) ile pertürbasyonlu $\vec{\varphi}_i$ fonksiyonu yerine (V.1.13) ifâdesi ikaame edilir. Elde edilen ifâdedeki $\vec{\varphi}_i$ yerine gene (V.1.12) ifâdesi ikaame edilir ve bu ilh.... böyle gider. Neticede

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + Q_{ii} + \sum_{k \neq i} \frac{Q_{ki} \, Q_{ik}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} + $$

$$+ \sum_{k \neq i} \sum_{j \neq i} \frac{Q_{ik} \, Q_{kj} \, Q_{ji}}{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}) \, (\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)})} + \cdots \qquad \text{(V.1.16)}$$

bulunur.

Gerek (V.1.13) ve gerekee (V.1.16) formülleri daha sahih pertürbasyon formülleridir.

(V.2) MİSALLER.

(a) Şimdi ilk bir misâl olmak üzere elemanları skalerlerden ibâret bir matrise ait bir pertürbasyon problemi çözeceğiz.

$\varepsilon \ll 1$ olmak üzere

$$O = O^{(0)} + Q = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} + \varepsilon \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

olsun. Pertürbasyonsuz

$$O^{(0)} \, \vec{\varphi}_i^{(0)} = \lambda_i^{(0)} \, \vec{\varphi}_i^{(0)}$$

problemine tekaabül eden özdeğerler

$$\lambda_1^{(0)} = 3 \qquad \text{ve} \qquad \lambda_2^{(0)} = 1$$

ve normlaştırılmış özfonksiyonlar da

$$\vec{\varphi}_1^{(0)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{\varphi}_2^{(0)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

olup bu sonuncuların biribirlerine dik oldukları âşikârdır. Buna binâen genel formalizme göre

$$\lambda_1^{(1)} = Q_{11} = (\vec{\varphi}_1^{(0)}, Q\,\vec{\varphi}_1^{(0)}) = \frac{1}{2} \|1 \quad 1\| \,\varepsilon \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lambda_2^{(1)} = Q_{22} = (\vec{\varphi}_2^{(0)}, Q\,\vec{\varphi}_2^{(0)}) = \frac{1}{2} \|1 \quad -1\| \,\varepsilon \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} = \frac{5\varepsilon}{2}$$

ve

$$a_{21}^{(1)} = \frac{Q_{21}}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} = \frac{1}{(3-1)} \left\{ \frac{1}{2} \|1 \quad -1\| \,\varepsilon \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\} = -\frac{\varepsilon}{4}$$

$$a_{12}^{(1)} = \frac{Q_{12}}{\lambda_2^{(0)} - \lambda_1^{(0)}} = \frac{1}{(1-3)} \left\{ \frac{1}{2} \|1 \quad 1\| \,\varepsilon \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} \right\} = \frac{\varepsilon}{4}$$

bulunur. Buna göre

$$\lambda_1^{(1)} = 3 + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots \quad ; \quad \lambda_2^{(1)} = 1 + \frac{5\varepsilon}{2} + \cdots$$

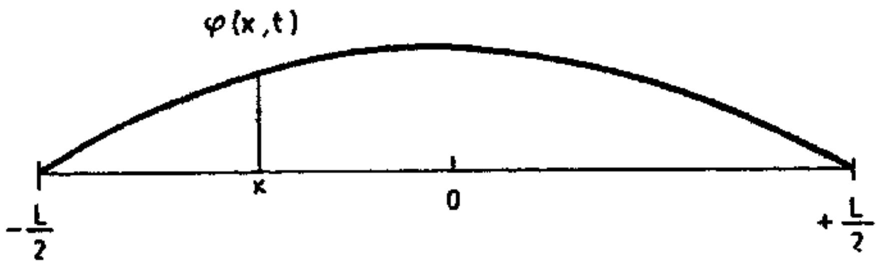
ve

$$\vec{\varphi}_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} - \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} + \cdots \# \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 - \frac{\varepsilon}{4} \\ 1 + \frac{\varepsilon}{4} \end{Vmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} + \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} + \cdots \# \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{Vmatrix} 1 + \frac{\varepsilon}{4} \\ 1 - \frac{\varepsilon}{3} \end{Vmatrix}$$

bulunur.

(b) L uzunluğunu haiz ve uçlarından tesbit edilmiş bir tel ρ_0 yoğunluğunu haiz bir maddeden yapılmış olup T gibi bir gerilimin uygulanmasıyla da serbest olarak titreşmeye terkolunmuş bulunmaktadır. Bu sırada yağmur yağmağa başlasa da telin yoğunluğu, üzerindeki ıslaklık dolayısıyla, $\delta\rho$ kadar artsa acaba bunun haiz olduğu en düşük frekansdaki izâfî azalmanın büyüklüğü ne kadar olur?



Şekil V. 1

Orijini L uzunluğunun tam ortasında alalım. Telin genliği olan $\varphi(x,t)$

$$T\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\rho_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{V,2.1}$$

denklemini gerçekler. Eğer $\varphi(x,t)=u^{(0)}(x)\,e^{i\omega t}$ vazedilirse

$$\frac{T}{\rho_0}\,\frac{d^2u^{(0)}}{dx^2}=-\omega^2u^{(0)} \tag{V.2.2}$$

olur. Bu $O^{(0)}=\frac{T}{\rho_0}\,\frac{d^2}{dx^2}$ operatörünün özdeğer probleminden başka bir şey değildir. (V.2.2) nin genel çözümü

$$u^{(0)}(x)=A\cos\omega\sqrt{\frac{\rho_0}{T}}\,x+B\sin\omega\sqrt{\frac{\rho_0}{T}}\,x$$

şeklindedir. Simetri dolayısıyla $(du^{(0)}/dx)_{x=0}=0$ olacağından $B=0$ bulunur. Diğer taraftan telin uçları sâbit olduğundan oralardaki genlik de sıfırdır: $u^{(0)}(\pm L/2)=0$. Böylece

$$\omega\sqrt{\frac{\rho_0}{T}}\,\frac{L}{2}=\frac{(2i+1)\pi}{2}$$

yâni

$$\omega^2=\left[\frac{(2i+1)\pi}{L}\right]^2\frac{T}{\rho_0}$$

olur. En düşük frekans $i=0$ a tekaabül etmektedir. Buna göre

$\lambda^{(0)}=\omega_0^2=\pi^2 T/L^2\rho_0$ dır. Şu hâlde

$$u_0^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{T}}\,\frac{\pi x}{L}\right)$$

dir. Burada $u_0^{(0)}$ ın katsayısı $u_0^{(0)}$ ın normlaştırma şartına göre yazılmıştır.

Eğer telin yoğunluğu $\delta\rho$ kadar bir pertürbasyona uğrarsa pertürbasyonlu yoğunluk

$$\rho=\rho_0+\delta\rho$$

ve pertürbasyonlu operatör de

$$\mathbf{O}=\mathbf{O}^{(0)}+\mathbf{Q}=\frac{T}{\rho}\,\frac{d^2}{dx^2}=\frac{T}{\rho_0\left(1+\dfrac{\delta\rho}{\rho_0}\right)}\,\frac{d^2}{dx^2}\cong\frac{T}{\rho_0}\left(1-\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)\frac{d^2}{dx^2}$$

$$=\frac{T}{\rho_0}\,\frac{d^2}{dx^2}-\frac{T\cdot\delta\rho}{\rho_0^2}\,\frac{d^2}{dx^2}$$

olur. Buna göre

$$\lambda_0^{(1)}=\int_{-L/2}^{+L/2}u_0^{(0)}(x)\,\mathbf{Q}u_0^{(0)}(x)\,dx=\int_{-L/2}^{+L/2}\sqrt{\frac{2}{L}}\left[\cos\sqrt{\frac{\rho_0}{T}}\,\frac{\pi x}{L}\right]\left[\left(-\frac{T.\delta\rho}{\rho_0^2}\,\frac{d^2}{dx^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\sqrt{\frac{\rho_0}{T}}\,\frac{\pi x}{L}\right]dx=\frac{2\pi^2.\delta\rho}{\rho_0\,L^3}\int_{-L/2}^{+L/2}\cos^2\sqrt{\frac{\rho_0}{T}}\,\frac{\pi x}{L}\,dx=\frac{\pi^2.\delta\rho}{\rho_0 L^2}$$

ve dolayısıyla

$$\lambda_0=\lambda_0^{(0)}+\lambda_0^{(1)}=\frac{\pi^2 T}{\rho_0 L^2}+\frac{\pi^2.\delta\rho}{\rho_0\,L^2}=\frac{\pi^2}{\rho_0 L^2}\,(T+\delta\rho)$$

olur. Frekanstaki izâfî artışın karesi

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)^2=\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(0)}}$$

olduğundan logaritma alarak

$$\ln \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(0)}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\delta\rho}{T}$$

bulunur.

(c) Eşitenerjili nötronların kararlı akısını veren difüzyon denklemi

$$D^{(0)} \nabla^2 \varphi^{(0)}(\vec{r}) - \Sigma_a^{(0)} \varphi^{(0)}(\vec{r}) + (\nu\Sigma_f)^{(0)} \varphi^{(0)}(\vec{r}) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada D difüzyon katsayısını, Σ_a makroskopik soğurma tesir kesidini, Σ_f makroskopik fisyon tesir kesidini ve ν de fisyon başına açığa çıkan ortalama nötron sayısını göstermektedir.

$$O^{(0)} = D\nabla^2 - \Sigma_a ; \quad \lambda^{(0)} = -(\nu\Sigma_f)$$

vazetmekle bu difüzyon denklemi

$$O^{(0)} \varphi^{(0)}(\vec{r}) = -(\nu\Sigma_f) \varphi^{(0)}(\vec{r})$$

şeklinde bir özdeğer probleminin vaz'ı olarak telâkkî olunabilir.

Şimdi nöton difüzyonunun vukuu bulduğu ortamdaki maddenin yoğunluğunda meydana gelen bir pertürbasyon dolayısıyla difüzyon katsayısının

$$D = D^{(0)} + \delta D$$

değerini aldığını düşünelim. Ayrıca $(x = x_0, \ y = y_0)$ doğrusu boyunca da Σ_a ya nisbetle $\delta\Sigma_a > 0$ kadar daha kuvvetli bir soğurucu yerleştirilmiş olsun. Ve nihayet ilk iki reaktiflik değişikliğini karşılamak üzere $(\nu\Sigma_f)$ üzerinde öyle bir pertürbasyon vukuu bulsun ki

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi^{(0)}(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r})$$

nötron akısı gene kararlı, yâni zamandan bağımsız kalsın. Pertürbasyonlu denklem

$$(D^{(0)} + \delta D) \nabla^2 (\varphi^{(0)} + \delta\varphi) - [\Sigma_a^{(0)} + (\Sigma_a^{(0)} + \delta\Sigma_a)\, \delta(x - x_0, \ y - y_0)] (\varphi^{(0)} + \delta\varphi) =$$
$$= -[\nu\Sigma_f + \delta(\nu\Sigma_f)] (\varphi^{(0)} + \delta\varphi)$$

olur. Buradaki Q pertürbasyon operatörü

$$Q=(\delta D)\,\nabla^2-(\Sigma_a^{(0)}+\delta\Sigma_a)\,\delta(x-x_0,y-y_0)$$

ile verilecektir.

Pertürbasyonsuz sistemin en küçük özdeğere tekaabül eden A, B ve C boyutlarını haiz paralel yüzlü bir ortam için çözümü

$$\varphi^{(0)}(x,y,z)=\sqrt{\frac{8}{ABC}}\cos\frac{\pi x}{A}\cos\frac{\pi y}{B}\cos\frac{\pi z}{C}$$

şeklinde olup bunun katsayısı normlaştırma şartına göre tâyin edilmiş bulunmaktadır. Buradaki A,B ve C ortamın boyutlarını göstermekte olup koordinat orijini ortamın simetri merkezi olarak seçilmiş ve nötron akısının da simetri eksenlerinde ekstremum değerler arzettiği fakat ortamın sınırlarında ise sıfır olduğu fiziksel şartlar olarak kabul olunmuştur. Ayrıca

$$B_m^2=\frac{\nu\Sigma_f-\Sigma_a}{D}=\frac{N_f}{N_s}\left(\frac{\nu\sigma_f-\sigma_a}{\sigma_s}\right)=\eta\left(\frac{\nu\sigma_f-\sigma_a}{\sigma_s}\right)=\frac{\pi^2}{A^2}+\frac{\pi^2}{B^2}+\frac{\pi^2}{C^2}$$

dir. Burada ise N_f nükleer yakıt çekirdeklerinin ve N_s de yavaşlatıcı maddenin çekirdeklerinin cm^3 başına sayısı olup nükleer yakıtın difüzlemediği ve yavaşlatıcısının da soğurucu olmadığı varsayılmıştır.

Buna göre meselâ

$$\delta(\nu\Sigma_f)=(\varphi^{(0)},\,Q\varphi^{(0)})=\frac{8}{ABC}\int_{-A/2}^{A/2}\int_{-B/2}^{B/2}\int_{-C/2}^{C/2}\cos\frac{\pi x}{A}\cos\frac{\pi y}{B}\cos\frac{\pi z}{C}\times$$

$$\times\left[\delta D\,.\,\nabla^2-(\Sigma_a^{(0)}+\delta\Sigma_a)\,\delta(x-x_0,y-y_0)\right]\cos\frac{\pi x}{A}\cos\frac{\pi y}{B}\cos\frac{\pi z}{C}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{8}{ABC}\int_{-A/2}^{A/2}\int_{-B/2}^{B/2}\int_{-C/2}^{C/2}\cos^2\frac{\pi x}{A}\cos^2\frac{\pi y}{B}\cos^2\frac{\pi z}{C}\Big[-B_m^2.\delta D-(\Sigma_a^{(0)}+\delta\Sigma_a)\cdot$$

$$\cdot\delta(x-x_0,\,y-y_0)\Big]\,dx\,dy\,dz=-\delta D.B_m^2-\frac{4}{AB}(\Sigma_a^{(0)}+\delta\Sigma_a)\cos^2\frac{\pi x_0}{A}\times$$

$$\times\cos^2\frac{\pi y_0}{B}$$

bulunur, ve $N_f \sigma_f = \Sigma_f$ olması hasebiyle

$$\frac{\delta(\nu\Sigma_f)}{\nu\Sigma_f} = \frac{\delta N_f}{N_f} = -\left\{\frac{\delta N_s}{N_s}\left(\frac{\nu\sigma_f - \sigma_a}{\nu\sigma_f\,\sigma_s}\right) - \frac{4\sigma_a(N_f+\delta N_f)}{AB\,\nu N_f\,\sigma_f}\cos^2\frac{\pi x_0}{A}\cos^2\frac{\pi y_0}{B}\right\}$$

veyâ

$$\frac{\delta N_f}{N_f} = \frac{-\dfrac{\delta N_s}{N_s}\left(\dfrac{\nu\sigma_f - \sigma_a}{\nu\sigma_f\,\sigma_s}\right) - \dfrac{4\sigma_a}{\nu\sigma_f\,AB}\cos^2\dfrac{\pi x_0}{A}\cos^2\dfrac{\pi y_0}{B}}{1 + \dfrac{4\sigma_a}{AB\,\nu\sigma_f}\cos^2\dfrac{\pi x_0}{A}\cos^2\dfrac{\pi y_0}{B}}$$

bulunur.

VI. Bölüm

VARYASYONLAR HESABI

(VI.1) GİRİŞ.

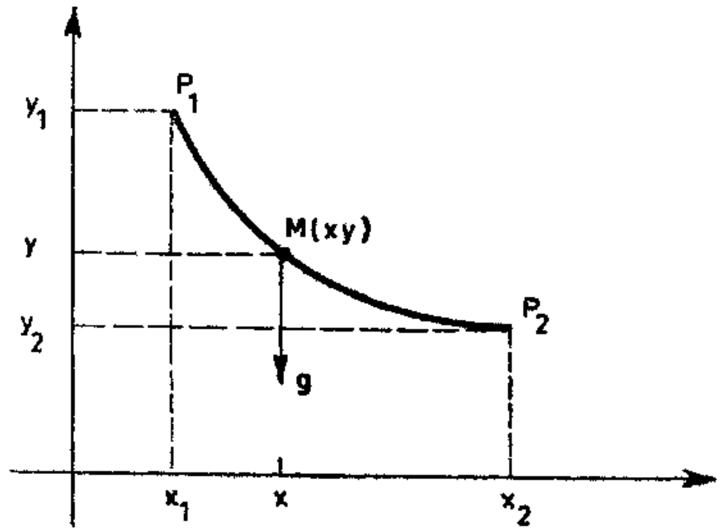
Diferansiyel hesap bize $f(x)$ gibi bir fonksiyonun ekstremum (yâni kararlı) değerlerini (maksimum ve minimumlarını) tâyin etmek için gerekli kuralları temin etmektedir. Buna göre, eğer belirli bir $x=x_0$ değeri için $f'(x_0)=0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun bu x_0 noktasında bir ekstremum noktası (yâni *kararlı=stasyoner* bir nokta) arzettiğini ve $f''(x_0)<0$ ise bu ekstremum noktasının bir izâfî maksimum, $f''(x_0)>0$ ise bir izâfî minimum ve $f''(x_0)=0$ ise teğeti x-ler eksenine paralel bir büküm noktası olduğunu biliyoruz. Varyasyonlar hesabı da klâsik diferansiyel hesabın maksimum-minimum hesaplarına benzer fakat bunlardan daha girift bir mesele ile uğraşmakta olup, en basit hâlinde, $f(x,y)$ gibi bir fonksiyonun belirli bir integralinin hangi şartlar altında minimum veyâ maksimum olacağını araştırmayı amaç edinmektedir.

Varyasyonlar hesabının uğraştığı problemlerin vaz'ına bir örnek olmak üzere pek tanınmış bir iki meseleye temas etmek faydalı ve öğretici olacaktır. Bunlardan biri *«brahistohron problemi»* diye tanınmaktadır. (Eski rumcada βραχιστοσ: brahistos=en kısa; χρονοσ: hronos=zaman). Brahistohron problemi, Arzda dik bir düzlem içinde ve üzerine tesir eden kuvvet sâdece yerçekimi kuvveti olduğunda maddesel bir noktanın farklı iki nokta arasını en kısa zamanda alabilmek için tâkib etmek zorunda olduğu yörüngeyi tesbit etmeğe mâtuftur.

Eğer yerçekimini negatif y-ler yönünde alırsak (Bk. Şekil: VI.1), $y_1>y_2$ olmak üzere $M(x,y)$ noktasının hızı Newton mekaniği kanunlarına göre, ve başlangıç hızı sıfır varsayılmak üzere,

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g(y_1-y)}$$

dir. P_1 den P_2 ye kadar geçen zaman ise



Şek : IV. 1

$$T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_1-y)}}\, dx$$

ile verilmiştir. Bunun minimum olması

$$T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \text{Minimum}, \quad \text{ya da:} \quad \delta T = \delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = 0$$

ile ifâde olunur. Bu son denklemi gerçekleyen $s=s(x,y)$ eğrisi brahistohron probleminin çözümünü teşkil eder.

İkinci bir misâl olarak da geodezik eğrilerini zikredebiliriz. İkinci Bölümü teşkil eden Tansör Hesabı bahsinde de işâret etmiş olduğumuz gibi geodezikler bir uzayda keyfî iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı tâyin eden eğriler olup bilindiği gibi ÖKLİT uzayları için doğrulardan ibârettir. Eğer uzayın metrik tansörü

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2, \ldots)$$

ise, sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesi

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^1, x^2, \ldots)\, dx^\mu\, dx^\nu$$

olur. Buna göre P_1 ve P_2 arasındaki en kısa yolu veren eğri

$$l = \int_{P_1}^{P_2} ds = \text{Minimum}$$

ifâdesiyle ya da bu ifâdenin varyasyonunun sıfır olmasıyla, yâni

$$\delta l = \delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0$$

ile belirlenir. Eğer x^{μ} koordinatları $x^{\mu} = x^{\mu}(t)$ şeklinde bir t parametresinin fonksiyonu iseler geodeziklerin parametrik denklemleri

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt}}\, dt = 0$$

şeklindeki varyasyon problemiyle elde edilir. Bu denklemi gerçekleyen $x^{\mu} = x^{\mu}(t)$ fonksiyonları geodezik eğrilerinin parametrik gösterilişini teşkil ederler. İleride bu problemleri ayrıntılarıyla çözeceğiz.

Varyasyon problemleri biri vaz, diğeri de çözüm olmak üzere iki safha arzederler. Varyasyonlar hesabının nev'i şahsına münhasır güçlüklerinden biri de formel olarak kusursuz bir şekilde vazedilebilen pekçok problemin hiçbir çözümü haiz olmamalarıdır. Buna bir misâl: düzlemde, x-ler ekseni üzerindeki iki noktayı, bu noktalarda eksene dik olmak üzere birleştiren sürekli eğriliği haiz en kısa eğrinin tesbiti probleminin vaz'ıdır. Bu problem matematik bakımından bir varyasyon problemi olarak kusursuzca vaz'edilebilmekle beraber herhangi bir çözümü haiz değildir. Zira böyle bir eğri, x - ler üzerinde göz önüne alınan iki noktayı birleştiren doğru parçasından daima daha büyük olacak fakat bunun uzunluğuna istenildiği kadar yaklaşabilecektir. Buna binâen, problemin vaz'ındaki şartları gerçekleyen eğriler arasında bir minimum değil fakat en büyük bir alt sınır mevcûd olacaktır.

Bu son misâl bizi vaz bakımından biraz daha zor bir varyasyon problemi nev'i ile karşılaştırmaktadır. *Yan şartlı varyasyon problemlemleri* diyebileceğimiz bu cins problemlere en tanınmış misâl olarak

«Dido problemi» ni gösterebiliriz. Bu problem aynı bir sonlu L uzunluğundaki çevreyi haiz kapalı ve kendi kendini kesmeyen bütün eğriler arasında maksimum alanı ihtivâ edeni tesbit etmeğe mâtuftur.

Bu eğrilerin parametrik bir gösterilişi

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

ise, $x(t_1) = x(t_2) = x_0$ ve $y(t_1) = y(t_2) = y_0$ olmak üzere problem

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt = L$$

yay uzunluğunun sâbit kalması şartı altında göz önüne alınan kapalı ve L uzunluğunu haiz eğrilerin kapsadıkları alanın maksimum olması,

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = \text{Maksimum}$$

yani bu alanın varyasyonunu sıfır olması,

$$\delta A = \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = 0$$

şeklinde vaz olunur.

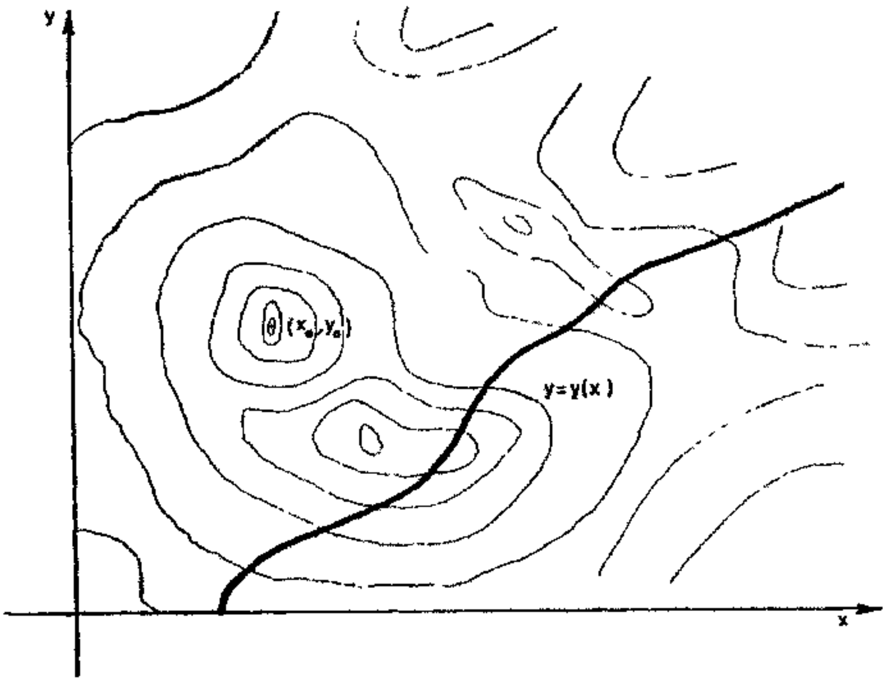
Varyasyonlar hesabının bu çeşit yan şartlı *«izoperimetri problemleri»*ni daha kolay inceleyebilmek için ileride kullanacağımız bir teknikle yakınlık peydahlamak üzere, önce bu tekniği âdî maksimum - minimum problemlerine uygulayarak somut misâller vermek istiyoruz.

(VI.2) LAGRANGE ÇARPANLARI METODU.

Analiz derslerinden, tek değişkenli olduğu kadar çok değişkenli fonksiyonların da maksimum ve mimumumlarının tâyin edilmesini biliyorsunuz. Meselâ $z = f(x,y)$ şeklinde bir fonksiyonun ekstremum noktası (veyâ noktaları), bilindiği gibi,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{VI.2.1}$$

denklemlerini aynı anda gerçekleyen (x,y) değer çiftleridir. (Bk: Şekil: VI.2). Bu ekstremum noktalarından biri (x_0, y_0), ve fonksiyonun



Şek: VI. 2

buradaki değeri de $f(x_0, y_0)$ olsun. Şimdi denklemi

$$y=g(x) \tag{VI.2.2}$$

ile verilmiş bir eğri olsun; biz de $f(x,y)=0$ fonksiyonunun bu $y=g(x)$ eğrisi boyundaki ekstremum noktalarını arayalım. Bu $y=g(x)$ eğrisinin tabiidir ki (x_0, y_0) ekstremum noktasından geçmesi gerekmez.

Dolayısıyla $f(x, y)=0$ ın $y=g(x)$ boyunca arzettiği ekstremumlar $f(x, y)=0$ ın herhangi bir (VI.2.2) şartına bağlı olmaksızın arzettiği ekstremumlardan farklı olacaktır. Şekil: VI.2 de $f(x, y)=0$ ın $y=g(x)$ boyunca arzettiği ekstremumlardan birisi meselâ (x_1, y_1) noktası olacaktır. Bu şartlı ekstremum problemini çözmek için

$$z=f(x, y)=f(x, g(x))$$

yazılabileceğine dikkati çektikten sonra

$$\frac{d}{dx} f(x, g(x))=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg(x)}{dx}=0 \tag{VI.2.3}$$

denklemi, aradığımız ekstremumu vermesi bakımından kâfî gelecektir. Böylelikle x_1 ve $y_1=g(x_1)$ değerleri (VI.2.3) ü gerçekleyen değerler olacaktır.

Fakat bu metot yerine, çok sayıda yan şartın mevcûd bulunduğu girift hâllerde büyük bir kolaylık sağlayan şu metot da uygulanabilir.

(VI.2.2) şartı $h(x,y)=0$ şekline konulabilir. Bu takdirde, λ evvelden bilinmeyen bir parametre olmak üzere

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda h(x,y) \tag{VI.2.4}$$

vazedelim ve $F(x,y)$ fonksiyonunu

$$h(x,y)=0 \tag{VI.2.5}$$

şartına bağlı olmak şartıyla ekstremum kılacak şekilde λ parametresini tâyin edelim. $F(x,y)$ nin (VI.2.5) şartı altında ekstremum arzetmesi demek

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial \lambda}=h(x,y)=0\\ &\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial h}{\partial x}=0\\ &\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial h}{\partial y}=0\end{aligned}\right| \tag{VI.2.6}$$

sistemini gerçekleyen x,y ve λ değerlerini tesbit etmektir.

İlk bakışta (VI.2.3) denklemi ile (VI.2.6) sisteminin biribirlerine eşdeğerliliği pek âşikâr gibi görünmüyorsa da eğer $h(x,y)=0$ ifâdesinin $g(x)-y=0$ şeklinde olduğunu göz önüne alıp da bunu (VI.2.6) nın son iki denklemine yerleştirirsek

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{dg}{dx}=0\\ &\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda=\frac{\partial f}{\partial g}-\lambda=0\end{aligned} \tag{VI.2.7}$$

olur, ve sonuncudan da λ nın değerini çekip (VI.2.7) nin birincisine vaz'edince

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial g}\frac{dg}{dx}=0$$

bulunur ki bu da (VI.2.3) den başkası değildir. Böylelikle (VI.2.3) ile (VI.2.6) nın eşdeğerliliğini müşâhede etmiş olmaktayız.

Çok daha genel bir tarzda

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad \text{(VI.2.8)}$$

fonksiyonu ve bağımsız $x_1, x_2, \cdots, x_n$ değişkenleri arasında da p adet

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_p(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \end{aligned} \qquad \text{(VI.2.9)}$$

bağıntısı verilmiş olsun. Her şeyden önce, yok etme yoluyla bu n adet değişken arasından p tânesi (VI.2.9) aracılığıyla yok edilir. Geri kalan bağımsız $r=n-p$ adet değişkeni $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_r$ ile, ve yok edilenleri de $y_1=x_{r+1}, y_2=x_{r+2}, \cdots, y_p=x_{r+p}=x_n$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_p) \qquad \text{(VI.2.10)}$$

ve $x=1,2,\ldots p$ olmak üzere

$$\varphi_\alpha=\varphi_\alpha(x_1,\ x_2,\ldots,x_r,\ y_1,\ldots,y_p)=0 \qquad \text{(VI.2.11)}$$

olur. Ayrıca yok edilen her bir y_i bağımlı değişkeni de bağımsız $x_1, x_2, \ldots, x_r$ değişkenlerinin fonksiyonları olacaklarından, $\alpha=1,2,\ldots,p$ olmak üzere

$$y_\alpha=\psi_\alpha(x_1,\ x_2,\ldots,x_r) \qquad \text{(VI.2.12)}$$

ifâdeleri $u=f(x_1,\ldots,x_r,\ y_1,\ldots,y_p)$ nin ekstremumlarının tesbitinde yan şartlar rolünü oynayacaklardır. (VI.2.12) yi (VI.2.10) a yerleştirmek sûretiyle u fonksiyonunun ekstremumları

$$\frac{du}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(VI.2.13)}$$

$$(i=1,2,\ldots,r)$$

sistemini gerçekleyeceklerdir. Buradaki $\partial y_\alpha/\partial x_i$ leri hesaplamak üzere (VI.2.11) i x_i ye göre türetelim:

$$\frac{d\varphi_\beta}{dx_i} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(VI.2.14)}$$

$$(i=1,2,\ldots,r\,;\ \beta=1,2,\ldots,p)$$

bulunur. Bu, i indisinin her değeri için p adet denklemden müteşekkil bir sistem teşkil eder. Bunların çözümleri mevcûd olduğu takdirde buradan $\partial y_\alpha/\partial x_i$ ler bulunup (VI.2.13) e ikaame edilerek, çözümleri ekstremum noktasının (veyâ noktalarının) değerlerine tekaabül eden r denklemden müteşekkil nihaî denklem sistemi elde edilmiş olur.

Fakat Lagrange çarpanları metoduyla çok daha basit ifâdeler elde etmek kaabil olur. Gerçekten de (VI.2.14) ü $\beta=1,2,\cdots p$ olmak üzere λ_β parametreleriyle çarpıp β üzerinden toplam yaparak (VI.2.13) e ilâve edelim:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(VI.2.15)}$$

$$(i=1,2,\cdots,r)$$

veyâhut da

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_\alpha} \right) \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(VI.2.16)}$$

$$(i=1,2,\cdots,r)$$

bulunur. Şimdi eğer λ_β parametrelerini (Lagrange çarpanlarını)

$$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_\alpha} = 0 \qquad \text{(VI.2.17)}$$

$$(\alpha=1, 2, \cdots, p)$$

sistemi gerçeklenecek şekilde seçerek (VI.2.16) sistemi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(VI.2.18)}$$

$$(i=1, 2, \cdots, r)$$

olur.

Şimdi $y_1 = x_{r+1}$, $y_2 = x_{r+2}$, $\cdots$, $y_p = x_{r+p}$ olduğunu hatırlayarak (VI.2.17) ve (VI.2.18) sistemlerini tek bir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(VI.2.19)}$$

$$(i=1, 2, \cdots, r+p=n)$$

denklemi şeklinde yazabiliriz. Buna göre, eğer

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \varphi_\beta \qquad \text{(VI.2.20)}$$

vazedilirse (VI.2.9) yan şartları altında $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nin ekstremumlarının tesbiti

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{p} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \varphi_j = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.2.21)}$$

$$(i=1,2, \ldots, n; \quad j=1,2, \ldots, p)$$

sistemlerinin çözümüne denk olur.

(VI.3) LAGRANGE ÇARPANLARI METODUNA ÖRNEKLER.

Lagrange çarpanları metodunun kolaylıkla anlaşılabilmesi için iki somut örnek göz önüne alacağız.

(a) $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2$ dairesi ve bir de (x_0, y_0) noktası veriliyor. R yarıçaplı daireye teğet ve merkezi de (x_0, y_0) olan ekstremum alanı haiz dairelerin teğet noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Aranan dairelerin alanı

$$S=\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]$$

dir. Buna göre $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2$ yan şartı temsil eder. Şu hâlde

$$F=\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]+\lambda[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-R^2]$$

ve

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2\pi(x-x_0)+2\lambda(x-\xi)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2\pi(y-y_0)+2\lambda(y-\eta)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-R^2=0$$

olur. Buradan da λ yı yok ettikten sonra teğet yerlerinin koordinatları bulunur. Özellikle $R=1$, $\xi=\eta=0$ alırsak teğet noktasının koordinatları olarak

$$x=\frac{\pm x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \quad \text{ve} \quad y=\frac{\pm y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

değerleri elde edilir.

(b) Sırasıyla $f_1(x,y)=0$ $f_2(x,y)=0$ ve $f_3(x,y)=0$ olan 3 eğri verildiğinde bunlara dayanan ekstremum alanlı üçgeni inşâ ediniz.

Böyle bir üçgen göz önüne alınan eğrilerin sırasıyla (x_1,y_1), (x_2,y_2) ve (x_3, y_3) noktalarını tepe olarak kabul ediyorsa

$$f_1(x_1, y_1)=0, \quad f_2(x_2, y_2)=0, \quad f_3(x_3, y_3)=0 \qquad \text{(VI.3.1)}$$

olmalıdır. Diğer taraftan tepe noktalarının koordinatları bilinen bir üçgenin alanı analitik geometriye göre

$$S=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)$$

dir. Şu hâlde $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ yeni değişkenler olmak üzere, Lagrange çarpanları metodu uyarınca (VI.3.1.) yan şartlarına göre ekstremumlarını arayacağımız fonksiyon

$$F=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)+\lambda_1 f_1(x_1, y_1)+$$
$$+\lambda_2 f_2(x_2, y_2)+\lambda_3 f_3(x_3, y_3)$$

dür. Buradan

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-y_3+y_2+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_1}=x_3-x_2+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=y_3-y_1+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2}=-x_3+x_1+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_2}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}=-y_2+y_1+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_3}=x_2-x_1+\lambda_3\frac{\partial f_3}{\partial y_3}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=f_1=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=f_2=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3}=f_3=0$$

bulunur.

$f_i(x, y)$ ler açık olarak verilmedikçe tabiîdir ki bilinmeyenlerin tâyini mümkün olamaz. Bununla beraber bu ekstremâl vasıflı üçgen hakkında gene de geometrik olarak bir şeyler söylemek mümkündür. Gerçekten de, üçgenin tepe noktalarından eğrilere çizilen teğetleri göz önüne alalım; analitik olarak bunlar

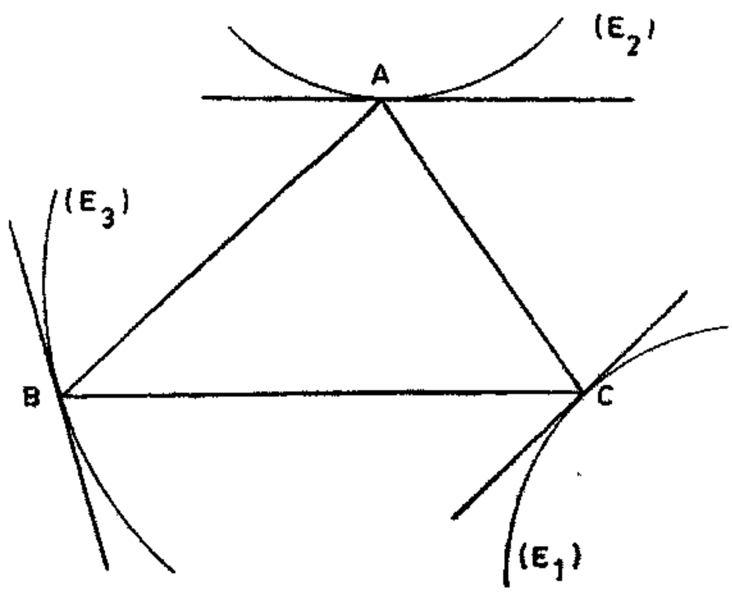
$$y'_1=-\frac{\dfrac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1}}, \quad y'_2=-\frac{\dfrac{\partial f_2(x_2, y_2)}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial f_2(x_2, y_2)}{\partial y_2}}, \quad y'_3=-\frac{\dfrac{\partial f_3(x_3, y_3)}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial f_3(x_3, y_3)}{\partial y_3}}$$

ifâdeleriyle verilirler. Hâlbuki Lagrange çarpanları metodunu kullanarak elde ettiğimiz denklemlerden kısmî türevlerin değerlerini çıkarıp da son ifâdelere yerleştirecek olursak

$$y_1' = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$y_2' = -\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$$

$$y_3' = -\frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial f_3}{\partial y_3}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Şek. VI.3

bulunur ki Şekil: VI.3 den de derhâl görüleceği üzere böyle bir üçgenin her bir kenarının, karşıt tepe noktasının dayandığı eğriye o tepe noktasında çizilen eğriye paralel olduğu anlaşılmaktadır.

(VI.4) VARYASYONLAR HESABININ TEMEL LEMMASI

LEMMA. $G(\vec{r})$ **belirli bir kapalı** B **bölgesinde sürekli bir fonksiyonu gösterdiğinde, eğer** B **nin** C **sınırında sıfır olan sürekli türetilebilir her** $\eta(\vec{r})$ **fonksiyonu için**

$$\int_B \eta(\vec{r})\, G(\vec{r})\, d\vec{r} = 0 \qquad \text{(VI.4.1)}$$

ise, bu takdirde B **içinde** $G(\vec{r}) = 0$ **dır.**

İSPAT. Farzedelim ki (VI.4.1) geçerli olsun; fakat ayrıca öyle-bir $\vec{r}_0 \in B$ mevcûd olsun ki $G(\vec{r}_0) > 0$ olsun. $G(\vec{r})$ fonksiyonunun sürekli olması dolayısıyla bu, $\vec{r}_0$ noktasının cıvarında $G(\vec{r})$ nin pozitif olacağı β gibi bir alt-bölge bulunması gerektiğini gösterir. ρ ile tamamem β içinde kalan bir dairenin yarıçapını gösterirsek $\vec{\xi} \in \beta$ olmak üzere

$$\text{her} \quad \vec{r} \in \beta \quad \text{için}: \ \eta(\vec{r}) = [(\vec{r} - \vec{\xi})^2 - \rho^2]^2 > 0\,, \ \text{ve}$$

$$\text{diğer bütün} \quad \vec{r} \in B \quad \text{için}: \ \eta(\vec{r}) = 0$$

vazedilebilir. Gerçekten de $\eta(\vec{r})$, β nın sınırında sıfır olacak şekilde tanımlanmıştır. Buna göre

$$\int_B \eta(\vec{r})\, G(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_B G(\vec{r})\, [(\vec{r} - \vec{\xi})^2 - \rho^2]^2\, d\vec{r} \quad > 0 \qquad \text{(VI.4.2)}$$

olur; çünkü sağdaki integrant β içinde pozitif definittir. Hâlbuki (VI.4.2), ispatın başında kabul etmiş olduğumuz (VI.4.1) varsayımıyla çelişiktir. Şu hâlde B içinde hiç bir $\vec{r}_0$ noktası yoktur ki $G(\vec{r})$ bu noktada pozitif definit olabilsin. Aynı sonuca B içinde belirli bir $\vec{r}_0$ noktasında $G(\vec{r}_0) < 0$ olduğunu kabul etmekle de ulaşılır. Şu hâlde B de $G(\vec{r}) = 0$ olmalıdır. Bu da zâten göstermek istediğimiz şeydir.

(VI.5) EULER - LAGRANGE DENKLEMLERİ.

Şimdi

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x\,,y\,,y')\,dx \tag{VI.5.1}$$

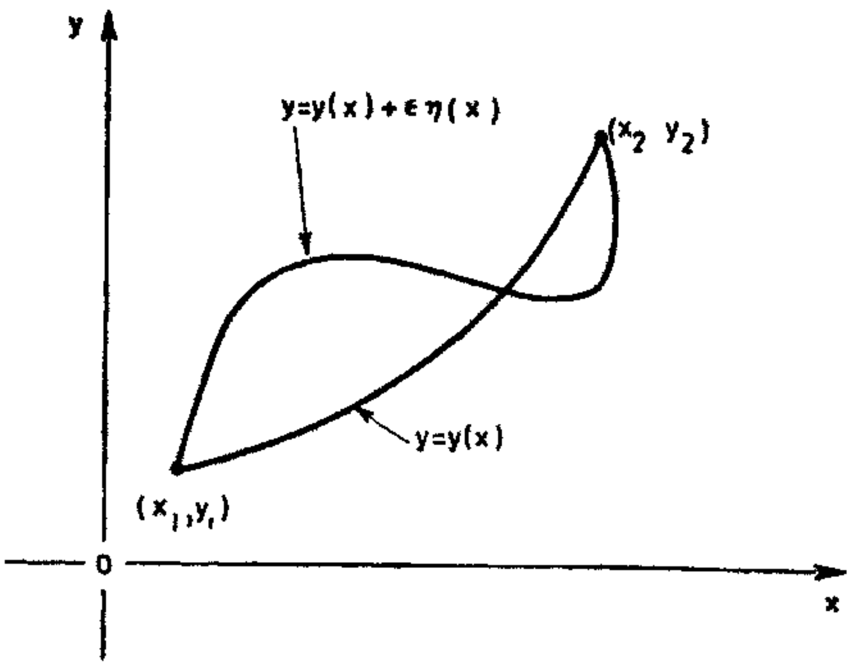
integralini

$$\left.\begin{aligned} y(x_1)&=y_1 \\ y(x_2)&=y_2 \end{aligned}\right\} \tag{VI.5.2}$$

sınır şartları altında *minimum* kılan ve hiç değilse iki kere türetilebilen

$$y=y(x)$$

fonksiyonunun ne gibi bir diferansiyel denklemi gerçeklediğini araştırmak istiyoruz. Buradaki $f(x,y,y')$ fonksiyonunun da keza iki kere



Şek. VI.4

türetilebilen bir fonksiyon olduğunu farzedeceğiz. Bundan başka, varlığını gördüğümüz bu minimumun mevcûdiyet ispatıyla burada uğraşmaktan imtinâ ediyoruz.

(VI.5.1) integralini minimum kılan $y=y(x)$ fonksiyonu yardımıyla, ve bir taraftan ε keyfî bir parametre; diğer taraftan da $\eta(x)$, $x=x_1$ ve $x=x_2$ noktalarında

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$$

şeklinde sıfır olan keyfî bir fonksiyon olmak üzere

$$Y(x)=y(x)+\varepsilon\,\eta(x) \qquad \text{(VI.5.3)}$$

ifâdesiyle belirlenen tek parametreli eğri ailesini göz önüne alalım. Bu eğri ailesinin bütün fertleri (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktalarından geçmekte ve (VI.5.1) i minimum kıldığını farzettiğimiz $y=y(x)$ fonksiyonu da bu ailenin $\varepsilon=0$ değerine tekaabül eden ferdini temsil etmektedir. Bu itibarla I integrali

$$I=I(\varepsilon)$$

şeklinde ε parametresinin bir fonksiyonu olarak gözükmekte olup I nin minimum değeri de I nin ε a göre türevinin $\varepsilon=0$ değerine tekaabül etmektedir:

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0. \qquad \text{(VI.5.4)}$$

Buna binâen (VI.5.3) aracılığıyla ve integrâl altında türev alma kuralını kullanarak (VI.5.1) in minimum olması için gerekli (VI.5.4) şartını gerçeklemeğe çalışalım:

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_1}^{x_2} f(x,Y,Y')\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\varepsilon}\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\eta+\frac{\partial f}{\partial Y'}\eta'\right)dx.$$

(VI.5.3) vazına göre $\varepsilon\to 0$ için $Y\to y$ ve $Y'\to y'$ olmaktadır. Bunu da göz önünde tutarak son ifâdeden

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0$$

yazılır. Bu integraldaki ikinci terimi kısmî integrasyonla belirleyip $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ olmasını da göz önüne alırsak

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\, dx = 0 \qquad \text{(VI.5.5)}$$

bulunur. Buradaki $\eta(x)$ fonksiyonu ile köşeli parantez içindeki ifâde Varyasyonlar Hesabının temel lemmasının şartlarını gerçeklediklerinden (VI.5.5) in gerçekleşebilmesi için $f(x,y,y')$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \text{(VI.5.6)}$$

EULER-LAGRANGE diferansiyel denklemini gerçeklemesi gerektiği görülür. Bu denklem f fonksiyonunun argümentlerinden birine bağlı olmadığı hallerde çok daha basit şekillere indirgenebilir. Meselâ f fonksiyonu y ye bağlı olmasın. Bu takdirde (VI.5.6)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \text{yâni} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{Sâbit} \qquad \text{(VI.5.7)}$$

olur. f eğer y' ye bağlı değilse (VI.5.6) ifâdesi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{(VI.5.8)}$$

şekline bürünür. f nin x değişkenine açıkça bağlı olmaması hâlinde dahi EULER-LAGRANGE denklemini birinci mertebeden bir denkleme indirgemek kaabildir. Filhakika bu takdirde

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+y''\frac{\partial f}{\partial y'}=y'\frac{\partial f}{\partial y}+y''\frac{\partial f}{\partial y'} \qquad \text{(VI.5.9)}$$

olduğunu göz önünde tutarak (VI.5.6) yı y' ile çarptıktan sonra elde edilen ifâdeye $y''(\partial f/\partial y')$ yü bir kere ilâve edip bir kere de çıkartalım:

$$0=y'\frac{\partial f}{\partial y}-y'\frac{d}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y'}=y'\frac{\partial f}{\partial y}-y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+y''\frac{\partial f}{\partial y'}-y''\frac{\partial f}{\partial y'}=$$

$$=\frac{df}{dx}-y''\frac{\partial f}{\partial y'}-y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+y''\frac{df}{\partial y'}-y''\frac{\partial f}{\partial y'}=$$

$$=\frac{df}{dx}-\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

yâni

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=\text{sâbit} \qquad \text{(VI.5.10)}$$

bulunur.

Şimdi bu sonuçların ışığı altında birkaç problem çözebiliriz. Meselâ brahistrohron problemini göz önüne alalım. Bu problem

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y_1-y}}\,dx$$

integralinin, limitleri arasındaki varyasyonunun sıfır olmasını gerekli kılıyordu. Diğer taraftan integrantın açıkça x değişkenine tâbî olmaması (VI.5.10) formülünün doğrudan doğruya uygulanmasını mümkün kılar. Eğer $x_1=y_1=0$ alırsak I nin integrantı daha da basitleşir ve, $1/\sqrt{2g}$ sâbit çarpanından sarf-ı nazar, (VI.5.10)

$$y(1+y'^2)=C$$

olur. $y'=\cot\theta$ vazedilirse

$$y=\frac{C}{1+y'^2}=\frac{C}{2}(1-\cos 2\theta)$$

bulunur. Öte yandan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dx}$$

veyâ

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{y'}\,\frac{dy}{d\theta} = C \operatorname{tg}\theta \sin 2\theta = \frac{C}{2}\,(1-\cos 2\theta)$$

yâni

$$x = \frac{C}{2}\,(2\theta - \sin 2\theta) + \theta_0$$

olur. $y=x=0$ için $\theta=0$ olursa $\theta_0=0$ olur. Öte yandan $C=2A$ ve $2\theta=\varphi$ vazederek

$$x = A(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = A(1-\cos\varphi)$$

bulunur ki bu parametrik denklemler brahistohron problemini çözen eğrinin bir *sikloyit* olduğunu göstermektedirler.

Varyasyonlar hesabının bu safhadaki ilgi çekici uygulamalarından biri de FERMAT ilkesidir. FERMAT ilkesi: Işığın yayıldığı bir ortamda iki nokta arasında izlediği yolun mümkün bütün yollar içinde ekstremâl bir zamanda katedilen yol olduğunu ifâde eder. Eğer belirli bir $z=$sâbit düzlemi içindeki ışınların yollarını incelersek bunlar yalnız x in fonksiyonu olurlar. Belirli iki (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktası arasındaki ds yay elemanlı bir yörünge üzerinde $u=u(y)$ hızını haiz ışının bu noktaları katetmek için sarfettiği zaman

$$T = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{u(y)} = \int_{x_2}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{u(y)}\,dx$$

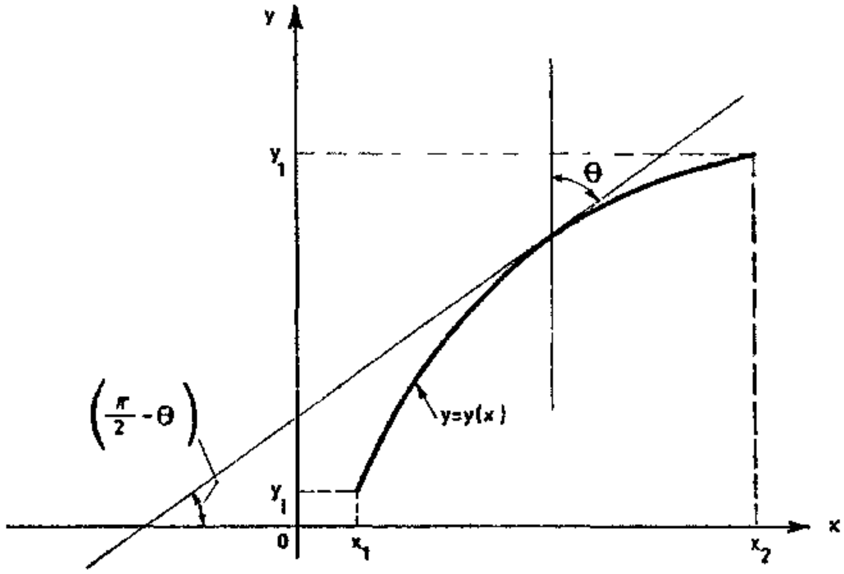
dir. Bunun ekstremum olması

$$f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{u(y)}$$

nin EULER-LAGRANGE denklemlerini gerçeklemesini gerektirir. f açık olarak x i ihtivâ etmediğinden EULER-LAGRANGE denklemlerinin (VI.5.10) şekline binâen

$$C=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}-\frac{2y'^2}{2u\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{u\sqrt{1+y'^2}} \qquad \text{(VI.5.11)}$$

bulunur. Burada, Şekil: VI.5 e göre



Şek. VI.5

$$y'=\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\mathrm{cotg}\,\theta$$

olduğundan (VI.5.11) ifâdesi

$$\frac{\sin\theta}{u}=C$$

şekline girer. Eğer farklı u_1 ve u_2 ışık hızına tekaabül eden iki ortam belirli bir düzlemle biribirleriden ayrılıyorlarsa birinci ortamda

$$\frac{\sin\theta_1}{u_1}=C_1$$

ve ikinci ortamda da

$$\frac{\sin\theta_2}{u_2}=C_2$$

olacaktır. Buna dayanarak bilhassa iki ortamı ayıran sınır düzleminde

$$\frac{\sin \theta_1}{u_1} = \frac{\sin \theta_2}{u_2}$$

olacaktır ki bu da ışığın bilinen kırılma kanunundan başka bir şey değildir.

(VI.6) ÇOK DEĞİŞKEN HALİ.

Şimdi

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f\left(q_1(t),\ q_2(t), \ldots, q_n(t);\ \dot{q}_1(t),\ \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_n(t), t\right) dt \qquad \text{(VI.6.1)}$$

şeklinde ve herbiri t parametresinin fonksiyonu olan n adet $q_i = q_i(t)$ fonksiyonuna ve bunların t ye göre birinci mertebeden türevlerine bağlı bir integrantı haiz bir integralin ekstremumlarını tâyin etmek istiyoruz. Bunun için

$$\delta I = 0$$

olmalıdır. I yi ekstremum kılan $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ fonksiyonlarını tesbit etmek üzere gene ε ile serbest değişen bir parametreyi ve $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ile de t_1 ve t_2 noktalarında sıfır olan yâni $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\alpha_i(t_1) = \alpha_i(t_2) = 0 \qquad \text{(VI.6.2)}$$

bağıntılarını gerçekleyen bir takım keyfî fonksiyonları göstermek üzere tek parametreli

$$Q_i(t) = q_i(t) + \varepsilon\, \alpha_i(t) \qquad \text{(VI.6.3)}$$

eğriler ailesini göz önüne alalım. I yi ekstremum kılan $q_i(t)$ fonksiyonlarının bu ailenin $\varepsilon = 0$ değerine tekaabül eden elemanları olduklarına nazarı dikkati çektikten sonra

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f\left(Q_1(t),\ Q_2(t), \ldots, Q_n(t);\ \dot{Q}_1(t), \ldots, \dot{Q}_n(t),\ t\right) dt$$

nin ekstremumunu bulmak için bunu ε a göre türetelim:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \frac{dQ_1}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_1} \frac{d\dot{Q}_1}{d\varepsilon} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial Q_n} \frac{dQ_n}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_n} \frac{d\dot{Q}_n}{d\varepsilon} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_1} \dot{\alpha}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial Q_n} \alpha_n + \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_n} \dot{\alpha}_n \right) dt \cdot$$

$\varepsilon = 0$ için $Q_i(t) \to q_i(t)$ ve $\dot{Q}_i(t) \to \dot{q}_i(t)$ olduğu için

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} \dot{\alpha}_1 \right) dt + \cdots +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \alpha_n + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_n} \dot{\alpha}_n \right) dt = 0 \qquad \text{(VI.6.4)}$$

olmalıdır. Bu son bağıntı, α_i ler keyfî seçilmiş olmak üzere bütün keyfî α_i ler için geçerli olmalıdır. Dolayısıyla özellikle meselâ $\alpha_1 \neq 0$ olduğu fakat diğer bütün α_i lerin sıfır olduğu hâl için de geçerli olmalıdır. Buna binâen ve $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) = 0$ olduğu da göz önünde tutularak kısmî integrasyonla

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} \right) \right] \alpha_1 \, dt = 0$$

bulunur ve Varyasyonlar Hesabının temel lemması gereğince de

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0 \qquad \text{(VI.6.5)}$$

olur. Benzer şekilde (VI.6.4) deki diğer integrallere de aynı biçim düşüncelerle aynı muamele uygulanır; ve sonuç olarak (VI.6.1) i ekstremum kılan fonksiyonların

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad \text{(VI.6.6)}$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

denklemlerini gerçeklemeleri gerektiği tesbit edilmiş olur.

(VI.6.6) denkleminin uygulanmasına geçmeden önce f nin homogen bir fonksiyon olması hâlinde (VI.6.2) varyasyon probleminin haiz olduğu bir özelliği ortaya koyacağız.

Bilindiği gibi k-nıncı mertebeden homogen bir fonksiyon diye

$$f(aq_1, aq_2, \ldots, aq_n) = a^k f(q_1, q_1, \ldots, q_n)$$

özdeşliğini gerçekleyen fonksiyonlara denir. Önce $y_1 = aq_2, \ldots, y_n = aq_n$ vazettikten sonra bu özelliğin her iki yanını da a ya göre türetecek olursak

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial a} = ka^{k-1} f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

bulunur ve üstelik bir de $a=1$ vazedilecek olursa homogen fonksiyonlar için EULER diferansiyel denklemi denen şu ifâde elde edilir:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i = k \,.\, f(q_1, \ldots, q_n). \qquad \text{(VI.6.7)}$$

Şimdi (VI.6.2) varyasyon problemini gerçekleyen f fonksiyonunun q_i lere göre k-nıncı mertebeden homogen bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Şu hâlde (VI.6.7) formülüne göre

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = k\, f(q_1, \ldots, q_n;\, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

olacaktır. Bu ifâdeyi t ye göre türetirsek

$$k\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] \qquad \text{(VI.6.8)}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sum_{i=1}^{n} E_i(f)\,\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\dot{q}_i \qquad \text{(VI.6.9)}$$

vazedilirse

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i - E_i(f)\,\dot{q}_i\right)$$

yazılabilmesi dolayısıyla (VI.6.8) ifâdesi

$$k\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) - E_i(f)\,\dot{q}_i\right] = \frac{df}{dt} - \sum_{i=1}^{n} E_i(f)\,\dot{q}_i$$

veyâhut da

$$\sum_{i=1}^{n} E_i(f)\,\dot{q}_i = (1-k)\frac{df}{dt} \qquad \text{(VI.6.10)}$$

şekline girmiş olur. Eğer homogen f fonksiyonu (VI.6.6) denklemlerini gerçekliyorsa yâni (VI.6.2) varyasyon probleminin çözümünü sağlıyorsa (VI.6.9) aracılığıyla ithâl edilmiş olan $E_i(f)$ fonksiyonu sıfır olacağından homogen f fonksiyonu (VI.6.10) a binâen bir ekstremâl eğri boyunca t ye göre sâbit olacaktır:

$$\frac{df}{dt} = 0. \qquad \text{(VI.6.11)}$$

Şimdi (VI.6.1) yerine

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\left[f(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)\right]^p dt \qquad \text{(VI.6.12)}$$

integraline tekaabül eden

$$\delta I = 0 \qquad \text{(VI.6.13)}$$

varyasyon problemini göz önüne alalım. Bu probleme tekaabül eden EULER-LAGRANGE denklemleri $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere

$$0=E_i(f^p)=\frac{\partial f^p}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^p}{\partial \dot{q}_i}\right)=pf^{p-1}\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right)-\right.$$

$$\left.-p(p-1)\,f^{p-2}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt}\right]=pf^{p-1}\,E_i(f)-p(p-1)\,f^{p-2}\,\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\frac{df}{dt} \qquad \text{(VI.6.14)}$$

şekline bürünürler.

Eğer f, ya da f^p birinci mertebeden pozitif homogen fonksiyonlar ise, bu takdirde (VI.6.11) ve (VI.6.14) e binâen

$$E_i(f)=E_i(f^p)=0 \qquad \text{(VI.6.15)}$$

olur ki bu ise (VI.6.1) ve (VI.6.12) ifâdelerine tekaabül eden varyasyon problemlerinin aynı ekstremâl eğrileri çözüm olarak kabul ettiklerini göstermektedir. Buna binâen, bu iki varyasyon probleminden birini çözmek diğerini çözmeğe eşdeğerdir.

Şimdi

$$\delta I=\delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}\,ds=0 \qquad \text{(VI.6.16)}$$

varyasyon problemi ile belirlenen geodezik eğrilerini daha kolaylıkla tesbit edebiliriz. Filhakika karekök içindeki ifâde koordinat türevlerine göre homogen bir fonksiyondur. Buna binâen
(VI.6.16) yerine

$$\delta\widetilde{I}=\delta\int_{s_1}^{s_2}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)ds=0 \qquad \text{(VI.6.17)}$$

şeklindeki varyasyon problemini çözebiliriz. Şu hâlde bu problemin çözümünü teşkil eden EULER-LAGRANGE denklemleri şu şekilde olacaklardır:

$$0=\mathrm{E}_\lambda(f^2)=\frac{\partial f^2}{\partial x^\lambda}-\frac{d}{ds}\frac{\partial f^2}{\partial \dot{x}^\lambda}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\delta^{\lambda\mu}\frac{dx^\nu}{ds}\right)$$

$$-\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\delta^{\lambda\nu}\right)=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-2\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-2\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-2g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$$

$$=\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\right]\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-2g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$$

$$=-2\Gamma_{\mu\nu,\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-2g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$$

veyâhut da her iki tarafı da $g^{\mu\sigma}/2$ ile çarpıp μ ve σ indisleri üzerinden toplam yaparak neticede

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2}+\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0 \qquad \text{(VI..18)}$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,n)$$

bulunur. (VI.6.16) dan (VI.6.18) e kadar olan bütün işlemlerde Einstein toplam kuralı kullanılmıştır. (VI.6.18), tamamen başka bir yolla Tansör Hesabı bahsinde elde etmiş olduğumuz n boyutlu bir Riemann uzayındaki geodezik eğrilerinin parametrik denklemlerinden başka bir şey değildir.

(VI.7) YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV İHTİVÂ EDEN İNTEGRANT HÂLİ.

Şimdiye kadar gözden geçirdiğimiz bütün varyasyon problemlerindeki integrantlar ancak birinci mertebeden türevler ihtivâ ediyorlardı. Daha genel varyasyon problemi olarak integrantın, $y=y(x)$ gibi bir fonksiyonun yüksek mertebeden türevlerinin fonksiyonu olduğu hâli göz önüne alabiliriz. Bu takdirde

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)dx \qquad \text{(VI.7.1)}$$

integraline tekaabül eden

$$\delta I = 0 \tag{VI.7.2}$$

varyasyon problemini çözebilmek için f nin tâbî olduğu $x, y, dy/dx, d^2y/dx^2, \cdots, d^n y/dx^n$ gibi $n+2$ değişkenin (x,y) düzleminde $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1 \leq y \leq y_2$ dikdörtgeni içinde tanımlanmış olduklarını ve f nin bütün bu değişkenlere nisbetle $n+1$ kere türetilebilen bir fonksiyon olduğunu kabul edeceğiz. (VI.7.2) varyasyon probleminin çözümünü teşkil eden $y = y(x)$ fonksiyonun da $2n$ kere sürekli olarak türetilebildiği ve $\alpha = 0,1, \cdots, n-1$ olmak üzere

$$\left(\frac{d^\alpha y(x)}{dx^\alpha}\right)_{x=x_1} = x_{1\alpha} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{d^\alpha y(x)}{dx^\alpha}\right)_{x=x_2} = x_{2\alpha} \tag{VI.7.3}$$

sınır şartlarını haiz olduğu varsayılacaktır.

Bu şartlar altında $y = y(x)$ in (VI.7.2) varyasyon probleminin çözümü olduğunu varsayarak ve $\eta(x)$ de

$$\alpha = 0,1,2, \ldots, n-1 \quad \text{için} \quad \left(\frac{d^\alpha \eta(x)}{dx^\alpha}\right)_{x=x_1} = \left(\frac{d^\alpha \eta(x)}{dx^\alpha}\right)_{x=x_2} = 0 \tag{VI.7.4}$$

sınır şartlarını haiz sürekli bir fonksiyon olmak üzere, tek bir ε parametresine bağlı

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\,\eta(x) \tag{VI.7.5}$$

eğri ailesini göz önüne alalım. Aşikâr olarak (VI.7.2) varyasyon probleminin çözümü olan $y = y(x)$ ekstremâl eğrisi de (VI.7.5) ailesine aittir. Gerçekten de

$$\varepsilon = 0 \quad \text{için} \quad Y(x) = y(x)$$

olmaktadır. Eğer

$$\widetilde{I}(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, Y, \frac{dY}{dx}, \ldots, \frac{d^n Y}{dx^n}\right) dx \tag{VI.7.6}$$

integraline tekaabül eden

$$\delta \widetilde{I}(\varepsilon) = 0$$

varyasyon problemini göz önüne alacak olursak $\varepsilon=0$ değeri için bunun (VI.7.2) varyasyon problemiyle çakışacağı âşikârdır. Buna binâen

$$\left(\frac{d\widetilde{I}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dY}{dx}\right)}\frac{\partial\left(\frac{dY}{dx}\right)}{\partial\varepsilon}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{d^nY}{dx^n}\right)}\frac{\partial\left(\frac{d^nY}{dx^n}\right)}{\partial\varepsilon}\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\frac{d\eta}{dx}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)}\frac{d^n\eta}{dx^n}\right)dx=0$$

olacaktır. Bu son ifâdedeki her bir terimi kısmî integrasyonla integre edip η nın da (VI.7.4) sınır şartlarını gerçeklediğini göz önünde tutarak, Varyasyonlar Hesabının temel lemmasından da faydalanmak sûretiyle neticede (VI.7.2) varyasyon problemini çözen $y=y(x)$ fonksiyonunun

$$E(f)=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)}\right)=0 \qquad \text{(VI.7.7)}$$

ifâdesini gerçeklemesi gerektiği tesbit edilir.

(VI.8) SERBEST SINIR ŞARTLARI.

Şimdiye kadar incelediğimiz varyasyon problemlerinde daimâ, problemi çözen ekstremâl fonksiyonların belirli bazı noktalarda önceden verilmiş sâbit bazı sınır değerlerini alacaklarını varsaydık. Şimdi ise bu sınır değerleri sâbit olmayıp meselâ önceden verilmiş bir eğri veyâ yüzey üzerinde herhangi bir noktadaki değerleri alabilecekleri hâli incelemek istiyoruz. Bu cins sınır şartlarına «*serbest* ya da *tabiî sınır şartları*» adı verilir. Bunun için ekstremâl $y=y(x)$ eğrisinin belirli bir $C(x,y)=0$ eğrisindan başladığını farzedelim; buna karşılık ekstremâl eğri sâbit bir x_1 noktasından geçsin. Bu takdirde

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

integralini, t_0 ve t_1 sâbit sınırları arasında değişen bir t parametresini ithâl ederek, $x=x(t)$ olması dolayısıyla

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F\left[x(t)\,,\ y(t)\,,\ \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t)\,,\ y(t)\,,\ \dot{x}(t)\,,\ \dot{y}(t)\big)dt \qquad \text{(VI.8.1)}$$

integraline dönüştürelim. t parametresini ithâl etmek sûretiyle integrasyon sınırlarının değişkenlerinden kurtulmuş bulunmaktayız. $x_1=x(t_1)$ ve $y_1=y(t_1)$ değerlerinin sâbit olmasına karşılık $C(x(t_0),\ y(t_0))=0$ olacak şekilde $x_0=x(t_0)$ noktasının $C(x,y)=0$ eğrisi üzerinde serbestçe kayabildiğini varsayıyoruz.

Şimdi $t=t_1$ de

$$\xi(t_1)=\eta(t_1)=0$$

olacak şekilde keyfî iki fonksiyon ile

$$\Psi(\varepsilon_1\,,\ \varepsilon_2)=C\big[x(t_0)+\varepsilon_1\,\xi(t_0)\,;\ y(t_0)+\varepsilon_2\,\eta(t_0)\big]=0 \qquad \text{(VI.8.2)}$$

olacak şekilde de ε_1 ve ε_2 diye iki parametre göz önüne alalım. Bu takdirde eğer $x=x(t)\,,\ y=y(t)$ eğrisi (VI.6.1) tekaabül eden varyasyon probleminin ekstremâl eğrisini gösteriyorsa

$$\Phi(\varepsilon_1\,,\varepsilon_2)=\int_{t_0}^{t_1} f(x+\varepsilon_1\,\xi\,,\ y+\varepsilon_2\,\eta\,,\ \dot{x}+\varepsilon_1\,\dot{\xi}\,,\ \dot{y}+\varepsilon_2\,\dot{\eta})\,dt \qquad \text{(VI.8.3)}$$

integralinin $\Psi(\varepsilon_1\,,\ \varepsilon_2)=0$ şartına bağlı kalarak $\varepsilon=\varepsilon_2=0$ için ekstremum olacağı âşikârdır.

Şu hâlde $\Phi(\varepsilon_1\,,\ \varepsilon_2)$ fonksiyonunun $\Psi(\varepsilon_1\,,\ \varepsilon_2)=0$ şartına bağlı olarak ekstremum olması gerekmektedir. Bu türlü şartlı ekstremumlar için

(VI.2) de ithâl etmiş olduğumuz. LAGRANGE çarpanları metoduna binâen

$$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)=\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)+\lambda\, \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

vazederek

$$0=\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}+\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\xi\right)_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \xi \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right] dt + \frac{\partial C}{\partial x}\lambda\xi$$

$$=-\xi \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}+\lambda\xi \frac{\partial C}{\partial x} \qquad \text{(VI.8.4)}$$

$$0=\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_2}\right)_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}+\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_2}\right)_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\eta\right)_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] \eta\, dt + \lambda\eta \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$=-\eta \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}+\lambda\eta \frac{\partial C}{\partial y} \qquad \text{(VI.8.5)}$$

$$0=\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \Psi(0,0) \qquad \text{(VI.8.6)}$$

bulunur. (VI.8.4) ile (VI.8.5) arasında η yok edilirse «kesişme şartı» denilen

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=0 \qquad \text{(VI.8.7)}$$

elde edilir. Bu şart $f=f(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ eğrisinin teğeti ve verilmiş olan sınır eğrisinin teğeti arasında bir bağıntıdır. Bu bağıntı $\partial C/\partial x$ ve $\partial C/\partial y$ ye göre lineer olduğundan eğer ekstremâl eğrinin teğeti biliniyorsa sınır eğrisininki de tek bir şekilde tâyin edilmiş demektir ki ancak bunun tersi doğru değildir.

Şimdi eğer ekstremâl eğrinin $y=y(x)$ şeklindeki gösterilişine dönecek olursak bu takdirde (VI.8.1) e dayanaraktan

$$f\big(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)\big)=\dot{x}\, F(x, y, \dot{y}/\dot{x})$$

olacağından (VI.8.7) kesişme bağıntısı

$$\frac{\partial(\dot{x}F)}{\partial\dot{x}}\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial(\dot{x}F)}{\partial\dot{y}}=\left[F+\dot{x}\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\right]\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\left[F+\dot{x}\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}\right]$$

$$=\left[F+\dot{x}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial(\dot{y}/\dot{x})}{\partial\dot{x}}\right]\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\left[F+\dot{x}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial(\dot{y}/\dot{x})}{\partial\dot{y}}\right]$$

$$=\left[F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad \text{(VI.8.8)}$$

şekline girer.

Mesele, $C(x\,,\,y\,,\,z)=0$ gibi belirli bir yüzeyden başlayıp da verilmiş bir $(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ noktasından geçen ve

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,y'\,,\,z')\,dx$$

ntegralini ekstremum kılan bir $y=y(x)$, $z=z(x)$ uzay eğrisi için de aynıdır. Burada da

$$f\big(x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t)\,,\,\dot{x}(t)\,,\,\dot{y}(t)\,,\,\dot{z}(t)\big)=\dot{x}F\left(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,,\,\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)$$

parametrik gösterilişinden hareketle kesişme bağıntısı olarak

$$\frac{\partial C}{\partial x}:\frac{\partial C}{\partial y}:\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{(VI.8.9)}$$

veyâ

$$\frac{\partial C}{\partial x}:\frac{\partial C}{\partial y}:\frac{\partial C}{\partial z}=\left[F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right]:\frac{\partial F}{\partial y'}:\frac{\partial F}{\partial z'} \qquad \text{(VI.8.10)}$$

bağıntıları elde edilir.

MİSÂL: (x,y) düzleminin belirli bir noktasını $y=g(x)$ eğrisine birleştiren en kısa yolu tâyin ediniz.

Burada mesele x_1 ve y_1 sâbit olmak ve x_0 ile y_0 da $y_0=g(x_0)$ bağıntısını gerçeklemek üzere

$$I = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

integralinin değerlerini ekstremum kılan $y = y(x)$ ekstremâl eğrisini elde etmektir. İntegrant $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$ şeklinde olduğundan (VI.8.8) e binâen ve $C(x,y) = y - g(x)$ olmak üzere

$$\left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] \cdot 1 + \frac{dg}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

veyâ

$$\sqrt{1+y'^2} + (g' - y') \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

olur. Bu bağıntı ise

$$y' = -\frac{1}{g'}$$

şekline büründüğünden aranan ekstremâl eğrinin (x_1, y_1) noktasından $y = g(x)$ yi dik açı altında kesen bir eğri (tabiî, burada bir doğru) olması icâbettiğini göstermektedir.

(VI.9) VARYASYONLAR HESABININ TERS PROBLEMİ.

$$\delta I = \delta \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx = 0 \qquad \text{(VI.9.1)}$$

şeklindeki bir varyasyon problemine çözüm olarak ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olan

$$E_y(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \text{(VI.9.2)}$$

şeklindeki EULER diferansiyel denkleminin tekaabül ettiğini gördük. Şüphesiz bu denklemi

$$E_y(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y} - \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\, y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\, y''\right\} = 0 \qquad \text{(VI.9.3)}$$

şeklinde de yazmak kaabildir.

Fakat tersine olarak iki parametreli her eğri ailesine de veyâhut da başka bir deyişle

$$y'' = F(x,y,y') \qquad \text{(VI.9.4)}$$

şeklindeki ikinci mertebeden bir diferansiyel denkleme, ekstremâl eğrileri (VI.9.4) ile çıkışan, yâni (VI.9.4) ün (VI.9.2) veyâ (VI.9.3) EULER denkleminin çözümü olduğu (VI.9.1) gibi bir varyasyon problemi tekaabül eder mi?

Bunu görebilmek için verilmiş olan (VI.9.4) eğer (VI.9.1) varyasyon probleminin çözümlerinin gerçekledikleri bir diferansiyel denklem ise (VI.9.1) in çözümüne tekaabül eden (VI.9.3) EULER denklemini (VI.9.4) ün de gerçeklemesi gerekeceğine dikkati çekelim. Buna ve (VI.9.3) e göre

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\, y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\, F\right\} = 0 \qquad \text{(VI.9.5)}$$

olması gerekir. Burada $\partial^2 f/\partial y'^2 = z$ vazedip de y' ye göre türev olarak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \left\{\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\, y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'}\, F + z\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} = 0$$

veyâ

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\, y' + \frac{\partial z}{\partial y'}\, F + z\,\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \text{(VI.9.6)}$$

olur. Bu (VI.9.6) denklemi z cinsinden birinci mertebeden kısmî türevli bir diferansiysl denklem olup genel çözümü de keyfî bir $\Phi(x, y, y')$ fonksiyonuna bağlıdır. Bu denklem

$$z = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \qquad \text{(VI.9.7)}$$

fonksiyonunu bu $\Phi(x, y, y')$ keyfî fonksiyonu cinsinden tâyin eder. (VI.9.7) den iki kere integrasyonla da (VI.9.1) varyasyon probleminin integrantı olan f fonksiyonu da x ve y nin iki keyfî fonksiyonunu muhtevî olarak elde edilir. Bu son keyfî fonksiyonların da (VI.9.5) şartı gerçeklenecek şekilde tâyin edilmeleri gereklidir. Bu şart ise bu keyfî fonksiyonlardan ancak birini yok etmeğe yarar. Buna binâen ekstremalleri muayyen bir ikinci mertebeden diferansiyel denklemin çözümleri olan sonsuz tâne varyasyon problemi vazedilebileceği görülmektedir.

(VI.10) İZOPERİMETRİ PROBLEMLERİ.

(VI.1) de de temas etiğimiz gibi çok kere

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')dx = \text{sâbit} \tag{VI.10.1}$$

şartı altında

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \tag{VI.10.2}$$

integralinin ekstremumlarını tâyin etmek arzu edilebilir. (VI.10.1) yan şartını haiz olarak (VI.10.2) ye tekaabül eden varyasyon problemine *izoperimetri problemi* adı verilir.

İzoperimetri problemini çözebilmek için $y = y(x)$ eğrisinin problemin şartlarına uygun ekstremâl eğriyi temsil ettiğini kabul ederek $\eta_1(x)$ ve $\eta_2(x)$

$$\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = \eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0 \tag{VI.10.3}$$

şeklinde sınırlarda sıfır olan ve türevi haiz keyfî iki fonksiyon, ε_1 ile ε_2 de iki parametre olmak üzere

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon_1\eta_1(x) + \varepsilon_2\eta_2(x) \tag{VI.10.4}$$

şeklinde iki parametreli ve $y = y(x)$ ekstremâl eğrisini $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ için özel hâl olarak kabul eden bir eğri ailesi ithâl edelim. Burada bundan evvelki birçok varyasyon problemlerinde olduğu gibi bir parametreli bir eğri ailesi ithâl etmemiz meseleyi halletmez; zirâ bu tek parametrenin değerinde vukuu bulan herhangi bir değişiklik genellikle, sâbit bir değeri haiz olması istenen J yi tâdil eder.

(VI.10.3) şartları ε_1 ve ε_2 nin bütün değerleri için (VI.10.4) eğrilerinin aynı sınır noktalarından geçmelerini sağlar. Bu takdirde

$$\widetilde{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')\, dx \qquad \text{(VI.10.5)}$$

$$\widetilde{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, Y, Y')\, dx - J = 0 \qquad \text{(VI.10.6)}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ için bu ifâdelerin

$$\widetilde{I}(0,0) = I$$

$$\widetilde{J}(0,0) = J = \text{sâbit}$$

ifâdelerine yâni göz önüne almış olduğumuz varyasyon problemlerinin verilerine müncer olacakları ve gene

$$\widetilde{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{sâbit}$$

şartı altında

$$\delta \widetilde{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$$

varyasyon probleminin de

$$\widetilde{J}(0,0) = J = \text{sâbit}$$

$$\delta \widetilde{I}(0,0) = \delta I = 0$$

varyasyon problemimizi vereceği âşikârdır. Diğer taraftan da ε_1 ve ε_2 parametrelerinin $\widetilde{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathit{sâbit}$ bağıntısı dolayısıyla tamamen keyfî ve biribirlerinden bağımsız olarak değişemeyecekleri âşikârdır.

Bu şartlar altında (VI.10.1) şartına bağlı olarak (VI.10.2) nin ekstremumlarını bulma problemi, âdî mânâda $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ için (VI.10.6) şartına bağlı olarak (VI.10.5) fonksiyonunun ekstremumlarını bulmağa denktir. λ ile bir LAGRANGE çarpanını gösterecek olursak

$$f^*=f+\lambda g \tag{VI.10.7}$$

vazetmek sûretiyle ε_1 ve ε_2 nin fonksiyonu olan

$$I^*(\varepsilon_1\,,\,\varepsilon_2)=\widetilde{I}(\varepsilon_1\,,\,\varepsilon_2)+\lambda\left[\widetilde{J}(\varepsilon_1\,,\,\varepsilon_2)-J\right]=\int_{x_1}^{x_2} f^*(x,Y,Y')\,dx-\lambda J \tag{VI.10.8}$$

ifâdesini göz önüne alalım. Buradaki λ çarpanı her problemin kendi özel şartlarıyla belirlenecektir. Şu hâlde varyasyon problemimizin çözümü $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ için

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial I^*}{\partial \varepsilon_i}\right)_0=0 \qquad (i=1,2) \\ &\left(\frac{\partial I^*}{\partial \lambda}\right)_0=0 \end{aligned}\right\} \tag{VI.10.9}$$

ile verilecektir. Burada, parantezin altındaki 0 indisi $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ vazedilmesine işâret etmektedir. Buna göre, $i=1,2$ için, (VI.10.9) dan

$$\frac{\partial I^*}{\partial \varepsilon_i}=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f^*}{\partial Y}\,\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_i}+\frac{\partial f^*}{\partial Y'}\,\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_i}\right\}dx=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f^*}{\partial Y}\,\eta_i+\frac{\partial f^*}{\partial Y'}\,\eta_i'\right\}dx$$

$$=\left[\frac{\partial f^*}{\partial Y'}\,\eta_i\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta_i\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f^*}{\partial Y'}\right)dx+\int_{x_1}^{x_2}\eta_i\,\frac{\partial f^*}{\partial Y}\,dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\eta_i\left\{\frac{\partial f^*}{\partial Y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f^*}{\partial Y'}\right)\right\}dx=0$$

bulunur. η_i ile parantez içindeki ifâde Varyasyonlar Hesabının temel lemmasının şartlarını gerçeklediklerinden

$$\frac{\partial I^*}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial f^*}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f^*}{\partial Y'}\right) \qquad \text{(VI.10.10)}$$

$$(i=1,2)$$

olduğu sonucuna varılır. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ için bu iki denklem, göz önüne almış olduğumuz varyasyon probleminin çözümünü sağlayan tek bir

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \text{(VI.10.11)}$$

denklemine gider. Bu ikinci dereceden diferansiyel denklemin genel çözümü 3 parametreyi hâvîdir. Bunlardan ikisi denklemin integrasyonuyla ortaya çıkar ve $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$ sınır şartlarıyla tesbit olunurlar. Üçüncü parametre ise (VI.10.7) dolayısıyla ortaya çıkan λ çarpanı olup bu da

$$\left(\frac{\partial I^*}{\partial \lambda}\right)_0 = \int_{x_1}^{x_2} g(x,y,y')dx - J = 0 \qquad \text{(VI.10.1)}$$

şartıyla tâyin olunur.

Eğer

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i\big(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_n(t)\big)\, dt = C_i \qquad \text{(VI.10.12)}$$

şartları altında

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f\big(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_n(t)\big)dt \qquad \text{(VI.10.13)}$$

integralinin ekstremumları yâni

$$\delta I = 0 \qquad \text{(VI.10.14)}$$

denklemini gerçekleyen $q_k=q_k(t)$, $(k=1,2,\ldots,n)$, ekstremâl fonksiyonları aranıyorsa göstermek kaabildir ki bu problem de yukarıdakine benzer şekilde, fakat bu sefer m adet λ_i çarpanı seçip

$$f^* = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i \tag{VI.10.15}$$

vazederek

$$\frac{\partial f^*}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^*}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{VI.10.16}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

denklemlerinin (VI.10.12) şartları altında çözümlerini bulmak sûretiyle halledilir.

MİSÂL: 1. — Sâbit bir L uzunluğunu haiz bir ip verildiğinde bununla x-ekseni arasında kalan maksimum alanı tesbit ediniz.

İpin x-eksenini kestiği noktaları x_1 ve x_2 ile gösterelim. Buna binâen L uzunluğu

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

olacaktır. İp ile x-ekseni arasındaki A alanı ise

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx$$

den ibâret olacaktır. Şu hâlde

$$f^* = y + \lambda \sqrt{1+y'^2}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f^*}{\partial y'} = 1 - \frac{d}{dx} \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

olmalıdır. Bu ise x e göre integre edildiğinde

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - x_0$$

verir. Buradan

$$dy = \frac{\pm(x-x_0)dx}{\sqrt{\lambda^2-(x-x_0)^2}}$$

ve dolayısıyla

$$y = \mp\sqrt{\lambda^2-(x-x_0)^2}+y_0$$

ve

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\lambda^2$$

bulunur. Bu ise aranan ekstremâl eğrinin λ *yarıçaplı bir yarım daire olduğunu göstermektedir. Ayrıca* $\lambda = L/\pi$ *olduğu anlaşılmaktadır.*

MİSÂL: 2. — İki noktaya raptedilmiş olan bir kablonun kendi ağırlığı altında alacağı şekli tesbit ediniz.

Sükûnet hâlinde ağırlık merkezi mümkün olan en alçak durumda bulunduğundan, göz önüne alınan problem de

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

yan şartı altında, iki noktaya tesbit edilmiş olan kablonun meydana getirdiği şeklin yatay olarak seçeceğimiz x*-eksenine göre statik momentinin minimumunu bulmaya müncer olmaktadır.* x *eksenine göre* $y=y(x)$ *eğrisinin statik momenti*

$$M = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

dir. Şu hâlde

$$f^* = y\sqrt{1+y'^2}+\lambda\sqrt{1+y'^2}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f^*}{\partial y'} = 0$$

olmalıdır. f^* *fonksiyonu açık olarak* x *değişkenine tâbi olmadığından (VI.5.10) a binâen*

$$C_1=f^*-y'\frac{\partial f^*}{\partial y'}=(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-y'^2\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}$$

olur. Bu ise

$$y+\lambda=C_1\sqrt{1+y'^2}$$

demektir. Şimdi

$$\frac{dy}{dx}=y'=sh\ t$$

olacak şekilde bir parametre ithâl edecek olursak

$$y+\lambda=C_1\ ch\ t \qquad (VI.10.17)$$

bulunur. Diğer taraftan buradan $dy=C_1\ sh\ t\ dt$ *olduğundan*

$$dx=\frac{dy}{sh\ t}=C_1\ dt$$

yâni

$$x=C_1\ t+C_2$$

elde edilir. Bu son denklem ile (VI.10.17) arasında t parametresi yok edilecek olursa, neticede, aranan eğrinin

$$y+\lambda=C_1\ ch\left(\frac{x-C_2}{C_1}\right)$$

fonksiyonu ile gösterilen bir zincir eğrisi olduğu tesbit edilmiş olur.

(VI.11) ÇOKKATLI İNTEGRALLERİN EKSTREMUMLARI.

Şimdiye kadar hep tekkatlı integrallerin ekstremumlarını araştırdık. Bu bölümde ise çiftkatlı integrallere tekaabül eden varyasyon problemine temas edeceğiz. Daha çokkatlı integrallere genelleştirme ise kolaylıkla yapılabileceğinden burada bunun ayrıntılarına girmekten vaz geçiyoruz.

(x,y) düzleminin kapalı bir B bölgesi sürekli ve çift noktası olmayan kapalı bir C eğrisi ile sınırlanmış olsun. Bu takdirde B de tanımlanmış bulunan ve C üzerinde de önceden verilmiş değerler alan bir $f(x,y,z,p,q)$ fonksiyonunun

$$I = \iint_B f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \qquad \text{(VI.11.1)}$$

şeklindeki integralinin ekstremum değerlerini hesaplamak istiyoruz. Burada $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$ vazedilmiş olup f fonksiyonu da bütün argümentlerine göre iki kere türetilebilen bir fonksiyon olarak kabul edilmektedir.

$\delta I = 0$ varyasyon problemini çözebilmek için, $\eta(x, y)$ ile

$$\forall (x, y) \in C \Longrightarrow \eta(x, y) = 0 \qquad \text{(VI.11.2)}$$

olacak şekilde sürekli türetilebilen bir fonksiyonu göstermek üzere tek bir ε parametresini haiz

$$Z(x, y) = z(x, y) + \varepsilon\, \eta(x, y) \qquad \text{(VI.11.3)}$$

eğri ailesini seçelim. Eğer $z(x, y)$ ile $\delta I = 0$ varyasyon problemini çözen ekstremâl fonksiyonu gösterirsek

$$\widetilde{I}(\varepsilon) = \iint_B f(x, y, Z, P, Q)\, dx\, dy \qquad \text{(VI.11.4)}$$

fonksiyonunun ekstremumları $\varepsilon = 0$ için (VI.11.1) inkine müncer olur. Buna göre $\partial \widetilde{I}(\varepsilon)/\partial \varepsilon$ un $\varepsilon = 0$ değerini hesaplamamız lâzımdır:

$$\delta I = \left(\frac{\partial \widetilde{I}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_B \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right) dx\, dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_B \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\eta + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$= \iint_B \left(\frac{\partial f}{\partial z}\eta + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dx\, dy = 0$$

olur. Bu ifâdedeki son iki terim göz önünde tutulursa bunlara

$$\iint_B \left(G \frac{\partial H}{\partial x} + F \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx\,dy = - \iint_B H \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx\,dy$$
$$+ \oint_C H(G\,dy - F\,dx)$$

şeklindeki GREEN formülünü uygulayarak

$$0 = \delta I = \iint_B \frac{\partial f}{\partial z} \eta\,dx\,dy - \iint_B \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \right\} dx\,dy$$
$$+ \oint_C \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial p} dy - \frac{\partial f}{\partial q} dx \right\}$$

olur. Son integral B nin C sınırı üzerinde alınmış olmak hasebiyle (VI.11.2) ye binâen sıfırdır. Buna göre

$$\iint_B \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \right\} dx\,dy = 0$$

bulunur. η fonksiyonu B de sürekli ve C sınırında sıfır olduğundan, Varyasyon Hesabının temel lemması gereğince son bağıntı bize B içinde her yerde

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) = 0 \qquad \text{(VI.11.5)}$$

olduğunu gösterir. Bu ise $z = z(x, y)$ ekstremâl eğrisini belirleyen ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Buna *OSTROGRADSKİ denklemi* denir.

Bir B bölgesinin C sınırı üzerinde z nin $z = g(x, y)$ gibi belirli bir fonksiyona müncer olması şartı altında

$$I(z(x, y)) = \iint_B (p^2 + q^2)\,dx\,dy \qquad \text{(VI.11.6)}$$

nin ekstremum olması keyfiyeti incelenebilir. Bu takdirde OSTROGRADSKİ formülünün uygulanmasıyla z nin, B bölgesi içinde,

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

LAPLACE denklemini gerçeklemesi gerektiği görülür. Bir fonksiyonun B gibi bir bölgede LAPLACE denklemini sağlayan, bölgenin sınırında da önceden verilmiş olan fonksiyona dönüşen bir fonksiyonu tesbit etmeğe B için bir *DİRİCHLET problemini* çözmek denir.

(VI.11.6) fonksiyonelinin ekstremumunun minimum olduğu ispatlanır.

MİSAL. — Kapalı bir uzay eğrisinden geçen öyle bir yüzey bulunuz ki bunun üzerinde C nin sınırladığı alan minimum olsun.

$z=z(x,y)$ bir yüzeyi gösteriyorsa bunun üzerindeki bir B bölgesinin alanının

$$A(z(x,y)) = \int\int_B \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \int\int_B \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

ile verildiği bilinmektedir. Şu hâlde problemimiz $\delta A=0$ olacak şekilde $z=z(x,y)$ eğrisinin tesbitini öngörmektedir. Ostrogradski formülünün uygulanması sonucunda z nin

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0$$

diferansiyel denklemini gerçeklemesi gerektiğini göstermektedir. Bu denklemi sağlayan yüzeylerin ortalama eğrilikleri sıfır olan yüzeyler oldukları gösterilir. Bu yüzeylere genellikle «minimal yüzeyler» adı verilmektedir.

Eğer ekstremumu aranan fonksiyonel $\partial z/\partial x_i = p_i$ olmak üzere

$$I = \int\int\cdots\int_B f(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

ise buna tekaabül eden varyasyon problemini çözen z nin

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0 \qquad \text{(VI.11.7)}$$

şeklinde bir denklemi sağlayacağı kolaylıkla gösterilir.

MİSAL. Bir S yüzeyi ile çevrili bir B bölgesi, nötronları fisyon yoluyla çoğaltan bir ortamı temsil etmektedir. $\varphi=\varphi(x, y, z, t)$ nötron akısı S üzerinde sıfır olduğuna göre

$$I_1 = \iiint_B \varphi^2(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz = 1$$

şartı altında, ortamdaki $\vec{J} = -D\,\overrightarrow{grad}\,\varphi'(x, y, z, t)$ akım yoğunluğu vektörünün uzunluğunun karesinin B de stasyoner olması için φ ne şekilde olmalıdır?

Şu hâlde

$$I_2 = \iiint_B \left|\vec{J}(x, y, z, t)\right|^2 dx\, dy\, dz =$$

$$= D^2 \iiint_B \left|\overrightarrow{grad}\,\varphi(x, y, z, t)\right|^2 dx\, dy\, dz$$

$$= D^2 \iiint_B \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz$$

integrali $I_1=1$ şartı altında stasyoner olmalıdır. Buna göre ve Lagrange çarpanı olarak, kolaylık olsun diye $(-\lambda D^2)$ almak sûretiyle

$$f^* = D^2 \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} - \lambda D^2 \varphi^2$$

vazederek (VI.11.7) ye binâen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \lambda\varphi = \nabla^2\varphi + \lambda\varphi = 0$$

bulunur. Bu ise zamana bağlı bir denklem değildir; yan şartı da göz önünde tutarak şu hâlde $\varphi=\varphi(x,y,z)$ olacağı görülür. φ yi veren bu kısmî türevli denklem zâten nötronların zamana bağlı olmayan difüzyon denkleminden başka bir şey değildir. Buradaki λ parametresine gelince bu, sınır şartıyla tâyin olunacaktır.

(VI.12) VARYASYONLAR HESABININ TEORİK MEKANİĞE UYGULANMASI.

Şimdiye kadar Varyasyonlar Hesabına dair görmüş olduğumuz misâller bu matematik aracın uygulamalarının çeşitliliği ve sağladığı geniş inceleme imkânları hakkında oldukça geniş bir fikir verebilecek niteliktedirler. Varyasyonlar Hesabının fizik ve mühendisliğe uygulamaları çoktur. Fakat biz burada bunun özellikle Teorik Mekaniğe uygulanması hakkında bazı bilgiler vermek istiyoruz.

Mekaniğin elemanter formülâsyonu bilindiği gibi NEWTON'un yaptığı şekilde kuvvet kavramına dayanır. Bununla beraber mekaniği kuvvetten başka temellere dayandırmak da mümkündür. Bunlardan biri de enerji kavramıdır. Eğer enerji kavramını HAMİLTON'un görüş açısından ele alırsak kuvvet kavramından farklı, fakat onunla telif edilebilir olduğu kolaylıkla gösterilebilen bir ilke mâhiyetini haiz bir temel postülât aracılığıyla bütün mekaniği inşa edebiliriz. *HAMİLTON ilkesi* dediğimiz bu postülât, yervektörünün bileşenlerine ve bunların zamana göre türevlerine bağlı olduğu kabul edilen K kinetik enerjisi ile, sâdece yer koordinatlarına bağlı olan V potansiyeli arasındaki

$$L=K-V$$

farkının t_1 ve t_2 anları arasındaki integralinin stasyoner olmasını öngörmektedir:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(K-V)\,dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)\,dt=0. \tag{VI.12.1}$$

Bu türlü bir varyasyon problemine tekaabül eden diferansiyel denklemlerin

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \qquad \text{(VI.12.2)}$$

şeklinde oldukları bilinmektedir. Bunlara LAGRANGE hareket denklemleri adı verilir.

Enerjinin korunum ilkesi izole bir sistemin toplam enerjisinin sâbit kalmasını öngörür: $K+V=\textit{Sâbit}$. Şu hâlde toplam enerjinin varyasyonu sıfır olmalıdır:

$$\delta(K+V)=\delta K+\delta V=0.$$

Buradan δV nin değeri çıkartılarak (VI.12.1) HAMİLTON varyasyon ilkesine ikaame edildi miydi ***MAUPERTUİS***, ya da ***en küçük aksiyon ilkesi*** denilen

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} 2K\,dt=0 \qquad \text{(VI.12.3)}$$

varyasyon ilkesi elde edilmiş olur. Fakat $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(ds/dt)^2$ olması dolayısıyla

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{\frac{2K}{m}}}$$

yazılabilir. Buna binâen s_1 ile s_2, t_1 ile t_2 anlarına tekaabül eden ve (VI.12.1) yi çözen ekstremâl eğri üzerindeki iki noktayı göstermek üzere

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} 2K\,dt=\delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{2mK}\,ds=\delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{2m(H-V)}\,ds=0 \qquad \text{(VI.12.3')}$$

olur. Burada kinetik enerjinin H toplam enerjisi ile V potansiyel enerjisi arasındaki fark olduğu keyfiyeti göz önüne alınmış bulunmaktadır.

Bir Riemann uzayı için (VI.12.3') den

$$\delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{2m(H-V)}\,\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}}\,ds=0 \qquad \text{(VI.12.4)}$$

bulunur. Eğer göz önüne aldığımız m kütleli nokta üzerine hiçbir dış kuvvet tesir etmiyorsa, yâni $V=0$ ise, enerjinin korunum ilkesine göre bunun H toplam enerjisi sâbit olacağından (VI.12.3′) varyasyon ilkesi

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}}\, ds = 0 \qquad \text{(VI.12.5)}$$

ifâdesine müncer olur. Hâlbuki bu varyasyon problemini çözen eğrilerin s_1 ile s_2 den geçen geodezik eğrileri olduklarını biliyoruz. Şu halde sâbit bir kinetik enerjiyi haiz olarak serbest harekete terkedilen bir cisim, içinde bulunduğu RİEMANN uzayının geodezikleri boyunca hareket edecektir. Bu, NEWTON' un eylemsizlik ilkesinin RİEMANN uzaylarına genelleştirilmesini teşkil etmektedir.

(VI.5) de

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{u} = 0 \qquad \text{(VI.12.6)}$$

şeklinde ifâde olunan FERMAT ilkesini görmüştük. Bu, en genel halde, u hızıyla yayılan dalgasal bir bir hareketin (özellikle ışığın) s_1 ve s_2 noktalarını katetmek için sarfettiği zamanın minimum olmasına tekaabül etmekteydi.

(VI.12.3) ve (VI.12.6) ifâdelerini karşılaştıracak olursak bunlar, gerek $K=H-V$ kinetik enerjisini haiz bir maddî noktanın ve gerekse u yayılma hızını haiz bir dalganın s_1 ile s_2 noktaları arasını katetmek üzere aynı şekli haiz tek bir varyasyon prensibine ve dolayısıyla aynı bir yayılım kanununa uyduklarını göstermektedir. Buna binâen her iki hareket şeklini karakterize eden fiziksel büyüklükler arasında bir bağıntı kuracak olursak her iki yayılım şeklinin de tek bir kanunu gerçeklemeleri dolayısıyla maddî bir noktanın yayılımına bir dalganın yayılımını ve tersine olarak da bir dalganın yayılımına da maddî bir noktanın yayılımını tekaabül ettirebiliriz. Burada bahis konusu olan sâdece matematik bir tekaabüliyettir. Kat'iyyen meselâ maddî noktaya bir dalga refâkat ettirmek diye bir şey vârid olamaz. Ancak bu derîn tekaabüliyet dolayısıyla maddî noktanın da bir dalganın vasıflarını, dalganın da bir maddî noktanın vasıflarını haiz olarak ortaya çıkmaları beklenebilir. Böylece sırf maddî nokta ve sırf dalga, hiç değilse, teorik olarak ortadan kalkmakta ve yerlerine her ikisini hâvî daha derin ikicil görünüşlü fiziksel bir gerçek kaaim olmaktadır. İşte modern fizikte, dalga-tânecik ikicilliğinin yâni ışığın bazan foton gibi tâneciksel bir yapıyı, bazan da dalgasal yapıyı veyâhut da meselâ elektronun bazan dalgasal, bazan da tâneciksel bir görünüşü haiz olarak ortaya çıkmasının anahtarı buradadır.

(VI.12.3) ve (VI.12.6) aynı şekli haiz olduklarından bunların temsil ettikleri fiziksel olaylar arasında birebir bir tekaabüliyet olabilmesi için her iki integrantın biribirleriyle orantılı olmaları lâzımdır. Bu orantı katsayısını a ile gösterirsek

$$\frac{a}{u} = \sqrt{2m(H-V)} = \sqrt{2mK} = \sqrt{\frac{2m^2}{2}v^2} = p$$

olmalıdır. Ve bu göz önüne aldığımız dalga ya da maddî noktanın mâhiyeti ne olursa böyle olmalıdır. u, dalga hareketinin hızı olmak hasebiyle

$$u = \lambda\nu$$

dür. λ, dalgaboyunu ve ν de frekansı göstermektedir:

$$\frac{a}{\lambda\nu} = p. \qquad \text{(VI.12.7)}$$

Bu ifâdenin fiziksel boyutlarını göz önüne alırsak a sâbiti

$$[a]=[p][\lambda][\nu]=(MLT^{-1})(L)(T^{-1})=ML^2T^{-2}=[E],$$

yâni a nın bir enerjinin boyutlarını haiz olması gerektiği bulunur.

Şimdi a yı tâyin edebilmek için özellikle elektromagnetik bir radyasyonun meydana getirdiği dalgasal hareketi göz önüne alalım. Elektromagnetik radyasyonun kâh fotoelektrik olayında olduğu gibi tâneciksel bir mâhiyeti, kâh girişim olayında olduğu gibi dalgasal bir mâhiyeti haizmiş gibi davrandığını biliyoruz. Öte yandan fotonun p impulsu olarak

$$p=\frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(VI.12.8)}$$

olduğu bilinmektedir. Buna binâen (VI.12.7) ye göre a nın

$$a = h\nu \tag{VI.12.9}$$

olması gerektiği görülmektedir. Filhakika : $[h\nu] = ML^2T^{-2}$ olduğu da kolaylıkla gerçeklenebilir.

Şu hâlde ne türlü bir maddî nokta olursa olsun buna o türlü bir dalga hareketi tekaabül ettirilebilmektedir ki bunun dalga uzunluğu

$$\lambda = \frac{h}{\lambda} \tag{VI.12.10}$$

olsun; ve ne türlü bir dalga hareketi olursa olsun buna da impulsu

$$mv = p = \frac{h}{\lambda} \tag{VI.12.11}$$

olan bir maddî nokta tekaabül ettirilebilmektedir. h nın çok küçük bir değeri haiz olması dolayısıyla makroskopik büyüklükler için (VI.12.10) ve (VI.12.11) formüllerinin hiçbir pratik değeri haiz olmayacakları âşikârdır. Meselâ 100 km/h hızı olan 1500 kg lık bir otomobile tekaabül eden dalgasal hareketin dalga uzunluğu

$$\frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{1500 \times \dfrac{10^5}{3600}} = 1{,}6 \cdot 10^{-40}\, m$$

olduğundan bu dalgasal hareket hiçbir zaman fiziksel olarak ölçebileceğimiz şekilde ortaya çıkmayacaktır, zirâ en ileri âletlerin dahi 10^{-40} m mertebesinde bir uzunluğu ölçebilecek hassasiyetleri yoktur. Buna karşılık 10000 km/sec hızını haiz bir elektrona tekaabül eden dalga hareketinin dalgaboyu

$$\frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \times 10^7} = 0{,}8 \cdot 10^{-10}\, m = 0{,}8\ \mathring{A}$$

olacağından bu hem elektronun boyutlarına nisbetle çok büyük bir değerdir, ve hem de kolaylıkla ortaya konabilir; ve nitekim elektronların da, diğer temel tâneciklerin de tıpkı dalgalar gibi de davrandıkları tespit edilmiştir. Bu meyânda elektronlarla yapılmış olan girişim deneylerini zikredebiliriz.

VII. Bölüm

ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN VARYASYON İLKESİ.

(VII.1) ÖZDEĞERLERİN BİR VARYASYON PROBLEMİYLE KARAKTERİZE EDİLMESİ.

L ve **M** iki operatör, $\vec{\varphi}_k = \vec{\varphi}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ vektörü de tanımlandığı B bölgesinde sonlu uzunluğu haiz kompleks bir vektör olduğunda

$$\mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k = \lambda\,\mathbf{M}\,\vec{\varphi}_k \qquad \text{(VII.1.1)}$$

ile belirlenen genelleştirilmiş özdeğer problemini göz önüne alalım. Böyle bir problem, genellikle $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \cdots$ şeklinde bir özdeğer dizisine tekaabül etmek üzere $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \cdots, \vec{\varphi}_k, \cdots$ şeklinde bir özvektör dizisinin varlığını ortaya koyar. Diğer taraftan

$$\mathbf{L}^+ = \widetilde{\mathbf{L}}^* \quad , \quad \mathbf{M}^+ = \widetilde{\mathbf{M}}^* \qquad \text{(VII.1.2)}$$

aracılığıyla **L** ve **M** ye ek olan operatörler tanımlanırsa (VII.1.1) e tekaabül eden ek özdeğer problemi

$$\mathbf{L}^+\,\vec{\psi}_k = \lambda_k\,\mathbf{M}^+\,\vec{\psi}_k \qquad \text{(VII.1.3)}$$

şeklinde olur. IV. Bölümde ek operatörlerin aynı özdeğerleri haiz olduklarını göstermiş bulunduğumuzdan (VII.1.3) de de (VII.1.1) deki aynı λ_k özdeğerini kullanmakta sakınca yoktur. Gene aynı bölümden hatırlanacağı vechile ek operatör tanımı **L** ve **M** operatörleri için

$$\left.\begin{aligned}(\vec{\psi}_k\,,\ \mathbf{L}\vec{\varphi}_k)&=\big((\mathbf{L}^+\vec{\psi}_k)\,,\ \vec{\varphi}_k\big)\\(\vec{\psi}_k\,,\ \mathbf{M}\vec{\varphi}_k)&=\big((\mathbf{M}^+\vec{\psi}_k)\,,\ \vec{\varphi}_k\big)\end{aligned}\right\}\qquad\text{(VII.1.4)}$$

bağıntılarını gerektirmektedir.

Bu bölümün amacı (VII.1.1) özdeğer problemini gerçekleyon λ_k özdeğerlerinin

$$(\vec{\psi}_k\,,\ \mathbf{M}\,\vec{\varphi}_k)=\big((\mathbf{M}^+\vec{\psi}_k)\,,\ \vec{\varphi}_k\big)\qquad\text{(VII.1.5)}$$

yan şartı altında

$$\delta(\vec{\psi}_k\,,\ \mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k)=\delta\big((\mathbf{L}^+\vec{\psi}_k)\,,\ \vec{\varphi}_k\big)\qquad\text{(VII.1.6)}$$

olmasını sağlayan bir varyasyon problemi çerçevesi içinde

$$\lambda_k=\frac{(\vec{\psi}_k\,,\ \mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k)}{(\vec{\varphi}_k\,,\ \mathbf{M}\,\vec{\varphi}_k)}\qquad\text{(VII.1.7)}$$

ifâdesi aracılığıyla belirlenebileceğini göstermekten ve bu özellikten pratik sonuçlar elde etmekten ibârettir.

Burada,

$$\xi_i \leqq x_i \leqq \eta_i$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

şartıyla belirlenen bir B bölgesi verildiğinda $(\vec{\psi}_k\,,\ \mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k)$ gibi bir ifâdenin

$$(\vec{\psi}_k\,,\ \mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k)=\int_{\xi_1}^{\eta_1}\int_{\xi_2}^{\eta_2}\cdots\int_{\xi_n}^{\eta_n}\widetilde{\vec{\psi}_k}{}^*(x_1\,,\cdots,\,x_n)\,\mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k(x_1\,,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

demek olduğunu hatırlatalım.

(VII.1.5) ve (VII.1.6) ifâdeleriyle belirlenen izoperimetri problemine dönecek olursak bunu çözen $\vec{\varphi}_k$ vektörünün bileşenleri olan $\varphi_{k,\nu}$ fonksiyonları,

$$F_k = \vec{\psi}_k{}^{+} \mathbf{L} \vec{\varphi}_k - \lambda_k \vec{\psi}_k{}^{+} \mathbf{M} \vec{\varphi}_k$$
$$= (\mathbf{L}^{+} \vec{\psi}_k)^{+} \vec{\varphi}_k - \lambda_k (\mathbf{M}^{+} \vec{\psi}_k)^{+} \vec{\varphi}_k$$

yâhut da $\vec{\psi}_k$ ve $\vec{\varphi}_k$ nın bileşenleri aracılığıyla **L** ve **M** operatörlerinin matris elemanlarını tebârüz ettirmek sûretiyle

$$\left.\begin{aligned} F_k &= \psi^{+}{}_{k,\mu}\, \mathbf{L}_{\mu\nu}\, \varphi_{k,\nu} - \lambda_k\, \psi^{+}{}_{k,\mu}\, \mathbf{M}_{\mu\nu}\, \varphi_{k,\nu} \\ &= (\mathbf{L}^{+} \vec{\psi}_k)^{+}{}_{\nu}\, \varphi_{k,\nu} - \lambda_k (\mathbf{M}^{+} \vec{\psi}_k)^{+}{}_{\nu}\, \varphi_{k,\nu} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.1.8)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial \psi^{+}{}_{k,\mu}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F_k}{\partial \left(\dfrac{\partial \psi^{+}{}_{k,\mu}}{\partial x_i}\right)} = 0 \\ \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_{k,\nu}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F_k}{\partial \left(\dfrac{\partial \varphi_{k,\nu}}{\partial x_i}\right)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.1.9)}$$

denklemleri aracılığıyla temin edileceklerdir. Buradaki n gerek $\vec{\psi}_k$ ve gerekse $\vec{\varphi}_k$ vektörlerinin bileşen adedini göstermektedir. F_k fonksiyonunun (VII.1.8) ifâdeleri göz önünde tutularak (VII.1.9) dan

$$\mathbf{L}_{\mu\nu}\, \varphi_{k,\nu} = \lambda_k\, \mathbf{M}_{\mu\nu}\, \varphi_{k,\nu}\, ; \quad (\mu,\nu = 1,2,\ldots,m) \qquad \text{(VII.1.10)}$$

$$(\mathbf{L}^{+} \psi_k)^{+}{}_{\nu} = \lambda_k (\mathbf{M}^{+} \psi_k)^{+}{}_{\nu}\, ; \quad (\mu,\nu = 1,2,\ldots,m) \qquad \text{(VII.1.11)}$$

bulunur. Bu ifâdelerin ise vektörel hâllerinin

$$\mathbf{L} \vec{\varphi}_k = \lambda_k \mathbf{M} \vec{\varphi}_k \qquad \text{(VII.1.1)}$$

$$\mathbf{L}^{+} \vec{\psi}_k = \lambda_k \mathbf{M}^{+} \vec{\psi}_k \qquad \text{(VII.1.3)}$$

olduğu âşikârdır. Böylelikle çözümü (VII.1.1) özdeğer problemi olan bir izoperimetri problemi vazetmenin her zaman mümkün olduğunu göstermiş bulunuyoruz.

Şimdi

$$\delta\left\{\frac{(\vec{\psi}_k\,,\,\mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k)}{(\vec{\psi}_k\,,\,\mathbf{M}\,\vec{\varphi}_k)}\right\}=0 \qquad \text{(VII.1.12)}$$

olması şartlarını araştıralım. Eğer $\vec{\varphi}_k$ ve $\vec{\psi}_k$ (VII.1.12) nin çözümü iseler, sâbit bir katsayı farkıyla (VII.1.5) şartı altında (VII.1.6) nın da çözümü olurlar. Bunun tersinin de geçerli olduğu âşikârdır. Dolayısıyla, sâbit bir katsayıdan sarf-ı nazar, her iki varyasyon problemi de biribirlerine tamamen denktirler. Bunu, (VII.1.12) nin (VII.1.1) i verdiğini tahkik etmek sûretiyle doğrudan doğruya da görebiliriz. Bunun için

$$I=(\vec{\psi}_k\,,\,\mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k) \quad ; \quad K=(\vec{\psi}_k\,,\,\mathbf{M}\,\vec{\varphi}_k)$$

vazedip I/K oranının birinci varyasyonunu göz önüne alalım; yâni ε keyfî bir parametre ve $\vec{\chi}=\vec{\chi}(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n)$ de n adet bileşeni haiz ve

$$\vec{\chi}(\xi_1\,,\xi_2\,,\cdots,\xi_n)=\vec{\chi}(\eta_1\,,\eta_2\,,\cdots,\eta_n)=0$$

şartlarını gerçekleyen bir vektör olmak üzere

$$\vec{\Phi}_k=\vec{\varphi}_k+\varepsilon\,\vec{\chi}$$

$$\vec{\Psi}_k=\vec{\psi}_k+\varepsilon\,\vec{\chi}$$

vektörlerini göz önüne alalım. Eğer $\vec{\varphi}_k$ ve $\vec{\psi}_k$, I/K yı minimum kılan vektörlerse, bu takdirde $\varepsilon=0$ için $\vec{\Phi}_k\to\vec{\varphi}_k$ ve $\vec{\Psi}_k\to\vec{\varphi}_k$ olacağından göz önüne aldığımız minimum problemimiz

$$\delta\left(\frac{I}{K}\right)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{I(\varepsilon)}{K(\varepsilon)}\right]_{\varepsilon=0}=0$$

şekline girer. Buna göre

$$\delta\left(\frac{I}{K}\right)=\left\{\frac{K(\varepsilon)\dfrac{\partial I(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-I(\varepsilon)\dfrac{\partial K(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}}{[K(\varepsilon)]^2}\right\}_{\varepsilon=0}=0 \qquad \text{(VII.1.13)}$$

yâni eğer $I(\varepsilon)/K(\varepsilon)$ oranının minimum değerine λ_k diyecek olursak S.D. ile «stasyoner değer» i göstermek sûretiyle

$$S.D.\frac{I(\varepsilon)}{K(\varepsilon)}=\frac{I(0)}{K(0)}=\lambda_k \qquad \text{(VII.1.14)}$$

ve bu takdırde de (VII.1.13) den

$$\begin{aligned}0=\left(\frac{\partial I}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}-\lambda_k\left(\frac{\partial K}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}&=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\vec{\Psi}_k,\ \mathbf{L}\vec{\Phi}_k\right)_{\varepsilon=0}-\\ -\lambda_k\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\vec{\Psi}_k,\ \mathbf{M}\vec{\Phi}_k\right)_{\varepsilon=0}&=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\vec{\psi}_k+\varepsilon\vec{\chi},\ \mathbf{L}(\vec{\varphi}_k+\varepsilon\vec{\chi})\right)-\\ -\lambda_k\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\vec{\psi}_k+\varepsilon\vec{\chi},\ \mathbf{M}(\vec{\varphi}_k+\varepsilon\vec{\chi})\right)_{\varepsilon=0}&\end{aligned} \qquad \text{(VII.1.15)}$$

olur. Buradan bileşenlere geçilir ve $\vec{\Psi}_k$ ile $\vec{\Phi}_k$ nın bileşenleri için $\Psi_{k,\mu}$ ve $\Phi_{k,\mu}$ vazedilirse

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial\Psi_{k,\mu}}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\Psi_{k,\mu}}=\chi_\mu\frac{\partial}{\partial\Psi_{k,\mu}}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial\Phi_{k,\mu}}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\Phi_{k,\mu}}=\chi_\mu\frac{\partial}{\partial\Phi_{k,\mu}}$$

yazılabileceğinden neticede gene vektörleri göz önünde tutarak $\varepsilon=0$ için (VII.1.14) den

$$(\vec{\chi},\ \mathbf{L}\vec{\varphi}_k)-\lambda_k(\vec{\chi},\ \mathbf{M}\vec{\varphi}_k)=0$$

bulunur. Bu ise

$$\int_{\xi_1}^{\eta_1}\int_{\xi_2}^{\eta_2}\cdots\int_{\xi_n}^{\eta_n}\vec{\chi}\left\{\mathbf{L}\vec{\varphi}_k-\lambda_k\mathbf{M}\vec{\varphi}_k\right\}dx_1\,dx_2\ldots dx_n=0$$

demektir. Varyasyonlar Hesabının temel lemması ise, bu takdirde,

$$\mathbf{L}\vec{\varphi}_k=\lambda_k\mathbf{M}\vec{\varphi}_k$$

olduğunu bildirir, Şu hâlde I/K oranın $\vec{\varphi}_k$ vektörü için minimum değeri (VII.1.1) özdeğer problemine tekaabül eden özdeğerinden ibârettir, Bu, kezâ, (VII.1.1) in bir özdeğerinin, (VII.1.12) şeklindeki bir varyasyon probleminin bir çözümü olarak da yorumlanabileceğini göstermektedir.

Diğer taraftan

$$S.D. \quad \frac{(\vec{\psi}_k \, , \, \mathbf{L}\,\vec{\varphi}_k)}{(\vec{\psi}_k \, , \, \mathbf{M}\,\vec{\varphi}_k)} = \lambda_k \tag{VII.1.13}$$

olması keyfiyeti çok ilgi çekici bir sonuçtur, zirâ bu formül, belirli bir bölgede tanımlanmış bir özdeğer probleminin özfonksiyonlarının şeklini yaklaşık olarak bilmekle, bunlara tekaabül eden özdeğerlerin yaklaşık değerlerini büyük bir sıhhatle belirlememizi sağlar. Gerçekten de (VII. 1.13) deki oran (VII.1.1) - (VII.1.3) özdeğer problemini gerçekleyen $\vec{\varphi}_k$ ve $\vec{\psi}_k$ fonksiyonları için stasyoner olduğundan bu fonksiyonlar yerine aynı sınır şartlarını haiz biraz farklı fonksiyonlar almak oranın (yâni λ_k özdeğerinin) gene de çok sıhhatli bir değerini temin edecektir. Bunu iki misâl yardımıyla ortaya koymak istiyoruz.

MİSÂL: 1. $y(0)=y(1)=0$ **olmak üzere**

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2=0 \tag{VII.1.14}$$

denkleminin en küçük özdeğerini yaklaşık olarak tâyin ediniz.

Bu denklem harmonik osilâtör denklemi olup mâlûm olduğu vechile $\lambda_k{}^2=k^2\pi^2$ *olmak üzere* $y_k=\sin(k\pi x)$ *şeklinde özel çözümleri haizdir. En küçük özdeğer olan* $\lambda_1{}^2=\pi^2$ *ye tekaabül eden çözüm de* $y_1=\sin \pi x$ *dir.* $0 \leqq x \leqq 1$ *aralığında bu fonksiyona kabaca bir tarzda* $\bar{y}_1=x(1-x)$ *parabolü ile bir yaklaşıklık yapmak kaabildir. Filhakika* y_1 *in vazedilmiş olan sınır şartlarını gerçeklemekte olduğu âşikârdır. Pratikte, çok kere, göz önüne alınan özdeğer probleminin çözümleri bilinmediğinden ya verilen sınır şartlarına uygun keyfî bir sürekli fonksiyon alınır, ya da eğer deneyler aranan özdeğere tekaabül eden özfonksiyonun değişimi hakkında bilgi vermişlerse gene vazedilmiş olan sınır şartlarını sağlayan ve fakat deneyin vermiş olduğu değişimlere uyan bir fonksiyon seçilir.*

(VII.1.4) denklemi genel STURM-LİOUVİLLE denkleminin özel bir hâlidir. Öte yandan STURM-LİOUVİLLE denkleminin kendi kendine ek bir denklem olduğunu da (IV.4) bölümünden bilmekteyiz. Bu denkleme tekaabül eden operatörlerin $\mathbf{L}=d^2/dx^2$ *ve* $\mathbf{M}=-1$ *olduğu görülmektedir. Şu hâlde* λ_1^2 *nin yaklaşık değeri olan* $[\lambda_1^2]$

$$[\lambda_1^2]=\frac{\int_0^1\left(\bar{y}_1\frac{d^2\bar{y}_1}{dx^2}\right)dx}{\int_0^1(-1)\,\bar{y}_1^2\,dx}=\frac{\int_0^1\bar{y}_1\frac{d^2\bar{y}_1}{dx^2}\,dx}{\int_0^1\bar{y}_1^2\,dx}$$

$$=\frac{\int_0^1 2x\,(1-x)\,dx}{\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)\,dx}=10$$

dur. Bu değer gerçek $\lambda_1^2=\pi^2=9{,}8687$ *değerinden ancak %2 kadar fark etmektedir.*

MİSAL: 2. — $y(1)=0$ **, ve** $|y(0)|<\infty$ **olmak ve** $0\leq x\leq 1$ **içinde geçerli olmak şartıyla**

$$\frac{d}{dx}(xy')+\lambda^2xy=0 \tag{VII.1.15}$$

özdeğer probleminin en küçük özdeğerini tâyin ediniz.

(VII.1.15) denklemi

$$\left(\frac{d}{dx}+x\frac{d^2}{dx^2}\right)y=-\lambda^2xy$$

şeklinde 2. mertebeden STURM-LİOUVİLLE tipinden bir diferansiyel denklemdir; dolayısıyla bu denklem kendi kendine ektir. Burada

$$\mathbf{L} = x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \quad , \quad \mathbf{M} = -x$$

olduğu gözükmektedir. Denklemin 2. mertebeden olması

$$\bar{y}_1 = 1 - x^2$$

şeklinde bir deneme fonksiyonu seçilmesini telkin etmektedir. Bunun sınır şartlarına da uyduğu görülmektedir. Şu hâlde

$$[\lambda_1^2] = \frac{\int_0^1 \bar{y}_1 \cdot \left(x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right)\bar{y}_1\, dx}{\int_0^1 (-x)\cdot \bar{y}_1^2\, dx} = \frac{\int_0^1 4\,(x - x^3)\, dx}{\int_0^1 (x - 2x^3 + x^5)\, dx} = 6$$

olur. Hâlbuki (VII.1.15) bir BESSEL denklemi olup çözümü de $J_0(\lambda x)$ şeklinde sıfırıncı mertebeden birinci cins BESSEL fonksiyonudur. (VII.1.15) in λ özdeğerlerinin en küçüğüne tekaabül eden çözümü $J_0(\lambda_1 x)$ olup burada λ_1 aynı zamanda $J_0(x)=0$ denkleminin ilk sıfırına tekaabül eder ve $\lambda_1 = 2{,}40483\cdots$ dür. Buna göre $\lambda_1^2 = 5{,}7831$ olacağından demek ki varyasyonel işlem yoluyla λ_1^2 yi yaklaşık olarak % 3,6 lık bir hatâ ile tesbit etmiş olmaktayız.

(VII.2) RAYLEIGH-RITZ VARYASYON METODU.

RAYLEIGH-RITZ varyasyon metodu diye bilinen metot yukarıda takdim olunandan daha genel olup

$$\mathbf{L}\vec{\varphi} = \lambda\,\mathbf{M}\vec{\varphi} \quad , \quad \mathbf{L}^{+}\vec{\Psi} = \lambda\,\mathbf{M}^{+}\vec{\Psi}$$

şeklindeki bir özdeğer probleminin tek bir özdeğerinin yaklaşık değerini vermekten ziyâde birden fazla özdeğerinin yaklaşık değerlerini tâyin etmeğe mâtuftur. Bunun için λ özdeğerinin

$$[\lambda] = \frac{(\vec{\Psi}\, ,\, \mathbf{L}\vec{\varphi})}{(\vec{\Psi}\, ,\, \mathbf{M}\vec{\varphi})} \qquad \text{(VII.1.13)}$$

ile verilmekte olduğunu göz önünde tutalım. Buradan λ için varyasyon ilkesi

$$\delta I = \delta \left\{ (\vec{\psi}, \; \mathbf{L}\vec{\varphi}) - [\lambda] (\vec{\psi}, \; \mathbf{M}\vec{\varphi}) \right\} = 0 \qquad \text{(VII.2.1)}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $\vec{\psi}$ ve $\vec{\varphi}$ yi

$$\vec{\psi} = \sum_m A_m \vec{\psi}_m \,, \qquad \vec{\varphi} = \sum_n B_n \vec{\varphi}_n \qquad \text{(VII.2.2)}$$

şeklinde serilerle ifâde edelim. Tabiîdir ki bu serilerin dik fonksiyon serileri olması tercih edilen bir keyfiyettir.

$$\mathbf{L}_{mn} = \int \vec{\psi}_m^{+} \, \mathbf{L} \vec{\varphi}_n \, d\vec{r} \,; \qquad \mathbf{M}_{mn} = \int \vec{\psi}_m^{+} \, \mathbf{M} \vec{\varphi}_n \, d\vec{r} \qquad \text{(VII.2.3)}$$

vazederek

$$I = (\vec{\psi}, \; \mathbf{L}\vec{\varphi}) - [\lambda] (\vec{\psi}, \; \mathbf{M}\vec{\varphi})$$

fonksiyonu (VII.2.2) açılımları muvacehesinde açık olarak

$$I = \sum_m \sum_n A_m B_n \left\{ \mathbf{L}_{mn} - [\lambda] \, \mathbf{M}_{mn} \right\} \qquad \text{(VII.2.4)}$$

olur.

(VII.2.2) açılımlarını yaparken belirsiz bıraktığımız A_m ve B_n katsayılarını şimdi o türlü hesaplayalım ki $I = I(A_m, B_n)$ stasyoner olsun. Şu hâlde

$$\frac{\partial I}{\partial A_m} = \sum_n B_n \left\{ \mathbf{L}_{mn} - [\lambda] \, \mathbf{M}_{mn} \right\} = 0 \,, \qquad (m = 1, 2, \ldots) \qquad \text{(VII.2.5)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial B_n} = \sum_m A_m \left\{ \mathbf{L}_{mn} - [\lambda] \, \mathbf{M}_{mn} \right\} = 0 \,, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{(VII.2.6)}$$

olmalıdır. Bunlar A_m ve B_n bilinmeyenleri cinsinden iki ayrı homogen denklem sistemi olup aynı esas determinantı haizdirler; şu hâlde bu homogen sistemlerin sıfırdan farklı çözümlerinin mevcûd olması için

$$|L_{mn} - [\lambda]\, M_{mn}| = 0 \qquad \text{(VII.2.7)}$$

olmalıdır. Eğer (VII.2.2) açılımlarındaki fonksiyonlar tamlık ve kapanış bağıntılarını gerçekleyen dik fonksiyon aileleri meydana getiriyorlarsa bu takdirde (VII.2.7) de $[\lambda]$ yerine sâdece λ yazmak gerekir, zirâ $\{\vec{\psi}_m\}$ ve $\{\vec{\varphi}_n\}$ fonksiyon aileleri $\vec{\psi}$ ve $\vec{\varphi}$ nin tam gösterilişlerini temin ediyorlarsa (VII.2.7) denklemi de λ ların tam değerlerini verecektir.

RAYLEİGH-RİTZ varyasyon ilkesini daha iyi kavramak için (VII.1) deki aynı iki misâli ele alacağız:

MİSÂL: 1. $y(0)=y(1)=0$ olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

denkleminin en küçük iki özdeğerini tâyin ediniz.

İstenilen özdeğerlerin yaklaşık değerlerini tâyin edebilmek için

$$\varphi_1 = x(1-x) \quad ve \quad \varphi_2 = x(1-x)(1+ax)$$

diğe iki fonksiyonun y yi

$$y = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

şeklinde belirlediklerini kabul edelim. Gerek φ_1 ve gerekse φ_2 sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilmişlerdir. a sâbiti de φ_1 ile φ_2 nin biribirine dik olmalarını temin edecek şekilde tâyin olunacaktır:

$$b_{12} = \int_0^1 \varphi_1 \varphi_2 \, dx = 0$$

$a = -2$ için $b_{12} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Gene kolayca şu değerler hesaplanır:

$$a_{11} = \int_0^1 (\varphi_1')^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

$$a_{22}=\int_0^1 (\varphi_2')^2\,dx=\frac{1}{5}$$

$$a_{12}=\int_0^1 \varphi_1'\varphi_2'\,dx=0$$

$$b_{11}=\int_0^1 \varphi_1^2\,dx=\frac{1}{30}$$

$$b_{22}=\int_0^1 \varphi_2^2\,dx=\frac{1}{210}\,.$$

Buna dayanarak bu probleme tekaabül eden (VII.2.7) determiuant denkleminin

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\frac{[\lambda^2]}{30} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}-\frac{[\lambda^2]}{210} \end{vmatrix}=0$$

şeklinde olduğu ve köklerinin de

$$[\lambda_1^2]=10\,,\quad [\lambda_2^2]=42$$

olduğu görülür. Halbuki

$$\lambda_1^2=\pi^2=9{,}8687$$
$$\lambda_2^2=4\pi^2=39{,}4748$$

dir.

MİSAL: 2. $y(1)=0$ ve $|y(0)|<\infty$ olmak ve $0\leq x\leq 1$ içinde geçerli olmak şartıyla

$$\frac{d}{dx}(xy')+\lambda^2 xy=0$$

özdeğer probleminin en küçük iki özdeğerini tâyin ediniz.

$y=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2=c_1(1-x^2)+c_2(1-x^2)(x^2+a)$ vazedelim. Burada da φ_1 ve φ_2 sınır şartlarını tahkik edecek şekilde seçilmişlerdir. a sâbitine gelince bu da

$$b_{12}=\int_0^1 x\varphi_1\varphi_2\,dx=0$$

olacak şekilde tâyin edilir ve $a=-1/4$ bulunur. Bir evvelki misâlde olduğu gibi a_{ik} ve b_{ik} lar hesaplanır:

$$a_{11}=1\,;\quad a_{12}=\frac{1}{12}\,;\quad a_{22}=\frac{11}{48}\,;\quad b_{11}=\frac{1}{6}\,;\quad b_{22}=\frac{1}{160}$$

Böylece (VII.2.7) ye tekaabül eden determinant denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{[\lambda^2]}{6} & \dfrac{1}{12} \\ \\ \dfrac{1}{12} & \dfrac{11}{48}-\dfrac{[\lambda^2]}{160} \end{vmatrix}=0$$

olur ve bunun kökleri olarak da

$$[\lambda_1^2]=5{,}86\,,\quad [\lambda_2^2]=36{,}86$$

ya da kare kök olarak

$$[\lambda_1]=2{,}42\,,\quad [\lambda_2]=6{,}07$$

bulunur. Halbuki $J_0(x)$ in ilk sıfırının tam değerleri

$$\lambda_1=2{,}40483\ldots,\quad \lambda_2=5{,}52008\ldots$$

dir. Birinci özdeğerdeki izafî hatânın %0.8 olmasına karşılık ikincisindeki %10 civarındadır.

VIII. Bölüm

FİZİĞİN ÖZEL FONKSİYONLARI

(VIII.1) BAZI HATIRLATMALAR.

VI. Bölümde Teorik Fiziğin pek çok kolunda sık sık rastlanılan

$$\nabla^2 \psi(\vec{r},t) + \lambda' \psi(\vec{r},t) = A(\vec{r},t) + B(t) \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} + C(t) \frac{\partial^2 \psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \qquad \text{(VIII.1.1)}$$

denkleminin özel hâllerini gözden geçirmiş ve muhtelif dik koordinat sistemlerinde bu denklemin uzay kısmının daha basit diferansiyel denklemlere ayrışabileceğini ve her bir denklemin de

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + Q(x)\,y(x) + \lambda\,R(x)\,y(x) = 0 \qquad \text{(VIII.1.2)}$$

STURM - LİOUVİLLE denkleminin şeklini haiz olacağına işâret etmiştik. Ayrıca bu denklemi gerçekleyen y_i özfonksiyonlarının da $R(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre aralarında biribirlerine dik olduklarını göstermiştik :

$$\int_a^b R(x)\,y_i(x)\,y_k(x)\,dx = \gamma\delta_{ik} \qquad \text{(VIII.1.3)}$$

idi ve γ da normalizasyon sâbitini göstermekteydi.

Bu bölümde $P(x)$, $Q(x)$ in bazı özel şekilleri için STURM - LİOUVİLLE denkleminin çözümlerinin özelliklerine temas etmek istiyoruz. Burada (VIII.1.2) denkleminin inceleyeceğimiz özel şekilleri fizikte en çok rastlanılan şekiller olup bunların çözümleri olan fonksiyonlar da sık sık karşımıza çıkan ve önemlerine binâen herbirinin ayrı bir ismi bulunan fonksiyonlardır. Bu münâsebetle inceleyeceğimiz bu fonksiyonlara «fiziğin özel fonksiyonları» adı verilir.

(VIII.2) STURM-LİOUVİLLE DENKLEMİNİN SERİLERLE ÇÖZÜMÜ.

(VIII.1.2) STURM-LİOUVİLLE denklemini

$$f(x) = \frac{P(x)}{\dfrac{dP(x)}{dx}} \; ; \qquad g(x) = \frac{Q(x)+\lambda R(x)}{\dfrac{dP(x)}{dx}}$$

vazetmek sûretiyle

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + f(x)\,\frac{dy(x)}{dx} + g(x)\,y(x) = 0 \qquad \text{(VIII.2.1)}$$

şekline indirgemek de kaabildir. Verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları eğer, sınırlı sayıda kutup noktası hâriç olmak üzere, analitik fonksiyonlarsa x_0 ile bunların kutup noktalarından farklı bir noktayı göstererek, $x=x_0$ ın göz önüne alınan diferansiyel denklemin âdî bir noktası olduğu söylenir. Böyle bir âdî nokta cıvarında diferansiyel denklemin bir kuvvet serisi şeklinde çözümünü inşâ etmek kaabildir. Genelliği bozmaksızın $x_0=0$ varsayılabilir. Gerçekten de $x=x_0$ âdî bir nokta olmak üzere her zaman $\xi=x-x_0$ şeklinde yeni bir bağımsız değişken ithâliyle de (VIII.2.1) denkleminin orijinde âdî bir noktayı haiz olması sağlanabilir. Böylece genel olarak $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $x_0=0$ da analitik olmaları hasebiyle bu nokta cıvarında bunları

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k \qquad \text{(VIII.2.2)}$$

şeklinde TAYLOR serilerine açmak mümkün olur. Bunların ortak yakınsaklık daireleri $|x|=R$ olsun. Bu takdirde (VIII.2.1) in genel çözümü için de

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k \qquad \text{(VIII.2.3)}$$

vazetmek kaabildir. (VIII.2.2) ve (VIII.2.3) ifâdeleri (VIII.2.1) denklemine yerleştirilip de x in muhtelif kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenince

$$\begin{aligned} 2c_2+ a_0 c_1+ b_0 c_0&=0 \\ 6c_3+2a_0 c_2+ a_1 c_1+b_0 c_1+b_1 c_0&=0 \\ 12c_4+3a_0 c +2a_1 c_2+a_2 c_1+b_0 c_2+b_1 c_1+b_2 c_0&=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &=0 \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Burada c_0 ile c_1 e keyfî değerler verilmek sûretiyle c_2 katsayısı birinci denklemden tesbit edilir. Sonra ikinci denklemden c_3 katsayısı c_0,c_1 ve c_2 nin fonksiyonu olarak tâyin olunur. ve ilh... bu böyle devam eder. Ancak bütün bu işlerin bir anlamı olabilmesi için (VIII.2.3) vaz'ının, bu türlü tesbit edilen c_k katsayılarının değerleri muvâcehesinde yakınsak bir ifâde teşkil etmesi gereklidir. Gerçekten de $y(x)$ in de, bu şartlar altında, $f(x)$ ve $g(x)$ in ortak yakınsaklık dairesi olan $|x|=R$ içinde yakınsak olduğu ispatlanır (Meselâ bk. John W. Dettman. Mathematical Methods in Physics and Engineering, Mc Graw-Hill Book Comp., Inc, 1962).

Eğer $x=x_0$ noktası $f(x)$ ya da $g(x)$ in bir kutup noktası ise x_0 ın, diferansiyel denklemin bir *tekil noktasını* teşkil ettiği söylenir. Eğer $(x-x_0).f(x)$ ve $(x-x_0)^2 \cdot g(x)$ ifâdeleri $x=x_0$ analitik iseler, x_0 noktasına *düzenli tekil nokta,* aksi hâlde ise *düzensiz tekil nokta* denir.

Düzenli bir tekil nokta cıvarında göz önüne alınan diferansiyel denklemin çözümünü gene bir kuvvet serisi şeklinde inşâ etmek kaabildir. Bunun için $x_0=0$ farzedelim ve sonra da diferansiyel denklemi x^2 ile çarpalım. Buna göre

$$x^2 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + \left[x f(x)\right]\left[x \frac{dy(x)}{dx}\right] + x^2 g(x) y(x) = 0 \qquad \text{(VIII.2.4)}$$

olur. $xf(x)$ ve $x^2g(x)$, $x_0=0$ in düzenli tekil bir nokta olması sebebiyle, $x=0$ da analitik olduklarından bu nokta cıvarında

$$x f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k , \quad x^2 g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \qquad \text{(VIII.2.5)}$$

şeklinde Taylor serilerine açılabilirler. Bunların ortak yakınsaklık dairesi gene $|x|=R$ olsun. Bu takdirde

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha} \tag{VIII.2.6}$$

şeklinde bir çözüm farzedelim. (VIII.2.6) ve (VIII.2.5) vaz'ları (VIII.2.4) denklemine ikaame edilecek olursa x in çeşitli kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitledikten sonra

$$\left.\begin{aligned} &c_0\Big[\alpha(\alpha-1)+\alpha a_0+b_0\Big] = 0 \\ &c_k\Big[(\alpha+k)(\alpha+k-1)+a_0(\alpha+k)+b_0+ \\ &\quad+\sum_{j=0}^{k-1} c_j\Big[(\alpha+j)a_{k-j}+b_{k-j}\Big] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{VIII.2.7}$$

$$(k=1, 2, \cdots)$$

bağıntıları elde edilir. Bunlardan birincisi c_0 keyfî olduğuna ve α nın da

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha a_0+b_0=0 \tag{VIII.2.8}$$

«indis denklemi» nin bir çözümü olması gerektiğine delâlet etmektedir. Bu denklem ise α cinsinden ikinci dereceden bir denklemdir. Bunun kökleri α_1 ve α_2 olsunlar. Eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ise ve üstelik $(\alpha_2-\alpha_1)$ farkı da bir tamsayı değilse (VIII.2.7) nin ikinci denklemi (VIII.2.4) ün biribirinden bağımsız iki özel çözümünü temin eder. Bunların lineer kombinezonu *serilerin yakınsak olmaları şartı altında* denklemin genel çözümünü verir.

Fakat eğer $\alpha_1=\alpha_2$ ise yâni indis denklemi bir çifte kökü haiz ise bu metot ancak bir tek özel çözüm verir. Diğer taraftan n ile bir tamsayıyı göstermek üzere eğer $\alpha_2=\alpha_1+n$ ise, $k=n$ hâli göz önüne alındığında, (VIII.2.7) denklemleri α_1 ve α_2 için şu şekilde yazılırlar:

k=n, (n=1,2,...), α_1 için:

$$c_0\left[\alpha_1(\alpha_1-1)+\alpha_1\, a_0+b_0\right]=0 \qquad \text{(VIII.2.8)}$$

$$c_n\left[(\alpha_1+n)\,(\alpha_1+n-1)+a_0(\alpha_1+n)+b_0\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1} c_j\left[(\alpha_1+j)\,a_{n-j}+b_{n-j}\right]=0 \qquad \text{(VIII.2.9)}$$

k=n, (n=1,2,...), $\alpha_2=\alpha_1+n$ için:

$$c_0\left[(\alpha_1+n)\,(\alpha_1+n-1)+a_0(\alpha_1+n)+b_0\right]=0 \qquad \text{(VIII.2.10)}$$

$$c_n\left[(\alpha_1+2n)\,(\alpha_1+2n-1)+a_0(\alpha_1+2n)+b_0\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1} c_j\left[(\alpha_1+n+j)a_{n-j}+b_{n-j}\right]=0. \qquad \text{(VIII.2.11)}$$

(VIII.2.10) ve (VIII.2.11) denklemleri $\alpha_2=\alpha_1+n$ için göz önüne alınmış olan diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümünden birini sonsuz bir polinom şeklinde tâyin ederler. Ancak indis denkleminin α_1 köküne tekaabül eden ikinci çözümün bu metot yardımıyla her zaman inşâ edilemeyeceği âşikârdır.. Gerçekten de, indis denkleminin α_2 köküne tekaabül eden çözümü temin eden denklemlerden (VIII.2.10) yardımıyla, α_1 köküne tekaabül eden sonsuz polinom şeklindeki çözümün katsayılarının, (VIII.2.11) bağıntısına göre,

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j\left[(\alpha_1+n+j)a_{n-j}+b_{n-j}\right]=0$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

şeklindeki bağıntıları gerçeklemeleri gerektiği görülmektedir; halbuki α_1, a_{n-j} ler ve b_{n-j} ler önceden bilindiğine göre c katsayılarının fevkalâde sınırlı özel hâller dışında ve bir de bütün c_j lerin sıfır olması hâli hâriç olmak üzere bu bağıntıları gerçeklemeleri beklenemez. Bu itibarla fevkalâde sınırlı belki birkaç özel hâl dışında genel olarak bütün katsayılar sıfır olacaklardır. Bu keyfiyet ise göz önüde almış olduğumuz metodun bu hâle tekaabül eden ikinci lineer bağımsız çözümü inşâdaki aczini ortaya koymaktadır.

Eğer $\alpha_1=\alpha_2$ ise ve üstelik $(\alpha_2-\alpha_1)$ farkı da pozitif bir tamsayı değilse gerek α_1 ve gerekse α_2 için elde edilen iki ortak özel çözümün aynı $|x|=R$ yakınsaklık dairesi içinde yakınsak oldukları ispatlanır.

Eğer metot iki bağımsız özel çözüm vermiyorsa, bu takdirde $u(x)$ ile göz önüne almış olduğumuz diferansiyel denklemin bildiğimiz çözümünü göstermek üzere

$$y(x)=u(x)\,v(x)$$

vazedelim. Bu takdirde $v(x)$ in gerçekleyeceği diferansiyel denklemin

$$v''+\left(\frac{2u'}{u}+f\right)v'=0 \qquad \text{(VIII.2.12)}$$

şeklinde olduğu görülür. Bu ise v' cinsinden birinci dereceden bir denklem olup

$$\frac{dv}{dx}=\frac{A}{u^2}\exp\left\{-\int f(x)\,dx\right\} \qquad \text{(VIII.2.13)}$$

şeklinde bir çözümü haizdir. buradan

$$v(x)=A\int\left\{u^{-2}\exp\left[-\int_0^x f(x')\,dx'\right]\right\}dx+B \qquad \text{(VIII.2.14)}$$

ve

$$y=uv=A\,u(x)\int\left\{\frac{1}{[u(x)]^2}\exp\left[-\int_0^x f(x')\,dx'\right]\right\}dx+B\,u(x) \qquad \text{(VIII.2.15)}$$

olur ki bu da tam çözümü göstermektedir. Buna göre ikinci bağımsız çözüm

$$u\cdot\int\frac{1}{u^2}\exp\left[-\int_0^x f(x')\,dx'\right]dx \qquad \text{(VIII.2.16)}$$

şeklindedir. Bunun bir uygulamasını görmek için BESSEL diferansiyel denkleminin kuvvet serisi şeklindeki çözümünü göz önüne alacağız.

(VIII.3) BESSEL DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE BESSEL DENKLEMLERİ.

BESSEL diferansiyel denklemi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0 \qquad \text{(VIII.3.1)}$$

şeklindedir. Bunun genel çözümünü bir kuvvet serisi aracılığıyla temsil edebilmek için $x=0$ ın düzenli bir tekil nokta olduğuna işâret ettikten sonra

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k+\alpha}$$

vazedelim. Bu hâlde tekaabül eden (VIII.2.8) indis denkleminin

$$\alpha^2 - \nu^2 = 0$$

olduğunu ve dolayısıyla $\alpha_1 = -\nu$ ve $\alpha_2 = +\nu$ yazılabileceğini görmek kolaydır. Şu hâlde eğer ν bir tamsayı değilse

$$y_1 = x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k$$

ve

$$y_2 = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k$$

şeklinde iki bağımsız çözüm elde edilir. Bunun, meselâ, birincisini (VIII.3.1) e ikaame etmek sûretiyle

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k+2\nu)\, c_k\, x^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k+\nu+2} = 0$$

bulunur. Bütün x lerin katsayıları sıfır olmalıdır. Özellikle $x^{\nu+1}$ inki için de

$$(1+2\nu)\, c_1 = 0$$

yazılacaktır. Eğer $\nu \neq -1/2$ ise $c_1 = 0$ olmalıdır. Diğer katsayılar da

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}$$

rekürans bağıntısıyla bulunacaklardır. Fakat $c_1=0$ olması dolayısıyla son bağıntı aracılığıyla bütün tek indislerin özdeş olarak sıfır oldukları anlaşılmaktadır. İndis denklemi dolayısıyla c_0 keyfî olduğundan bütün katsayıları c_0 cinsinden

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}\cdot n!\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}$$

şeklinde ifâde etmek kaabil olur.

Öte yandan *gamma fonksiyonunun* tanımı gereğince

$$\Gamma(\nu+n+1) = (\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)$$

olduğundan, keyfî c_0 için de

$$c_0 = 2^\nu\,\Gamma(\nu+1)$$

seçerek

$$Y_1 = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}x\right)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \qquad \text{(VIII.3.2)}$$

olduğu tesbit edilir. Buna birinci cins ve ν - nüncü mertebeden BESSEL fonksiyonu adı verilir. Kezâ

$$Y_2 = J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}x\right)^{2n-\nu}}{n!\,\Gamma(-\nu+n+1)} \qquad \text{(VIII.3.3)}$$

olur, ve BESSEL denkleminin genel çözümü de artık

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \qquad \text{(VIII.3.4)}$$

şeklindedir.

Eğer $\nu=0$ ise (VIII.3.2) ile (VIII.3.3) ün aynı bir ifâdeye müncer oldukları görülür. Eğer $\nu=m$ şeklinde bir tamsayı ise

$$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$$

olduğu görülebilir: yâni ν nün bir tamsayı olması hâlinde J_{-m} ile J_m arasında bir bağıntı vardır. Bu takdirde ikinci bir bağımsız çözüm (VIII.2.13) e dayanarak ve keyfî olarak $A=\pi/2$ seçerek

$$Y_m(x)=\frac{\pi}{2}J_m(x)\int_0^x \frac{1}{\left[J_m(x')\right]^2}\exp\left[-\int_0^{x'}\frac{d\xi}{\xi}\right]dx'$$

$$=\frac{\pi}{2}J_m(x)\int_0^x \frac{dx'}{x'\left[J_m(x')\right]^2} \qquad \text{(VIII.3.5)}$$

bulunur. $Y_m(x)$ fonksiyonuna da m-ninci mertebeden ikinci cins BESSEL fonksiyonu adı verilmektedir.

(VIII.3.2) ye göre $x=0$ ın $J_m(x)$ in m-ninci mertebeden bir kökü olduğu anlaşılmaktadır. Bu takdirde $x=0$ değeri $x\left[J_m(x)\right]^2$ nin $(m+1)$-inci mertebeden bir kökü ve $\frac{1}{x}\left[J_m(x)\right]^2$ nin de $(2m+1)$ inci mertebeden bir kutbu olacaktır. Özellikle $m=0$ için, yâni $J_0(x)$ fonksiyonu göz önüne alındığında, $Y_0(x)$ in (VIII.3.5) e binâen $x=0$ da logaritmik bir tekil noktayı haiz olduğu anlaşılmaktadır.

(VIII.4) DİK POLİNOMLAR

Bundan önceki paragraflarda STURM-LİOUVİLLE denkleminin âdî (veyâ düzgün) noktaları ile düzenli tekil noktaları civarında kuvvet serisi şeklindeki çözümlerinden ve bunların hangi şartlar altında yakınsak olduklarından bahsettik. Diğer taraftan STURM-LİOUVİLLE denkleminin çeşitli özdeğerlerine tekaabül eden çözümlerinin kendi aralarında dik oldukları da evvelce genel bir tarzda ispatladığımız bir keyfiyettir. Bu itibarla bu çözümler dik polinom aileleri teşkil etmektedirler. Öte yandan $\left\{\varphi_i(x)\right\}$ gibi dik bir polinom ailesi verilmişse bu ailenin fertleri arasında, belirli bir $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_a^b w(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \gamma\,\delta_{ik} \tag{VIII.4.1}$$

şeklinde diklik şartları var olacaktır. Özellikle $i < n$ için de

$$\int_a^b w(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0\,, \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{VIII.4.2}$$

yazılabilecektir.

Bundan başka x in i-ninci kuvvetinin, a_k katsayılarını uygun seçmek şartıyla

$$x^i = \sum_{k=0}^{i} a_k\,\varphi_k(x) = a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + \cdots + a_i\,\varphi_i(x) \tag{VIII.4.3}$$

şeklinde yazılabileceği âşikârdır. $\varphi_k(x)$ ler arasındaki (VIII.4.1) diklik bağıntılarını kullanarak

$$a_k = \frac{\displaystyle\int_a^b w(x)\,x^i\,\varphi_k(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b w(x)\left[\varphi_k(x)\right]^2 dx} \tag{VIII.4.4}$$

olduğu kolaylıkla tesbit edilir.

Şimdi (VIII.4.3) açılımı yerine

$$x^i = a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + \cdots + a_i\,\varphi_i(x) + a_{i+1}\,\varphi_{i+1}(x) + \cdots + a_n\,\varphi_n(x) \tag{VIII.4.5}$$

şeklinde bir açılım düşünelim. (VIII.4.4) e binâen a_n katsayısı

$$a_n = \frac{\int_a^b w(x)\, x^i\, \varphi_n(x)\, dx}{\int_a^b w(x) \left[\varphi_n(x)\right]^2 dx}$$

şeklinde olacaktır. Fakat $i < n$ olduğundan (VIII.4.5) şeklindeki bir açılım ancak

$$a_{i+1} = a_{i+2} = \cdots = a_n = 0$$

ise ya da $i = n$ ise geçerlidir. Şu hâlde $i < n$ için a_n katsayısı sıfır olmalıdır. Bu ise

$$i = 0,1,2, \cdots, n-1 \quad \text{için:} \quad \int_a^b w(x)\, x^i\, \varphi_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{(VIII.4.6)}$$

olmasını intâceder. Binâenaleyh $\left\{\varphi_k(x)\right\}$ dik polinom ailesinin her ferdi kendi derecesinden daha küçük olan her monoma diktir; ve bunun neticesi olarak da bu dik polinom ailesine ait n-ninci mertebeden bir $\varphi_n(x)$ polinomu da derecesi kendininkinden küçük olan her polinoma dik olur.

n-ninci dereceden her $\varphi_n(x)$ polinomunun reel ya da kompleks, tek katlı ya da çokkatlı n adet kökü haiz olduğu mâlûmdur. Fakat eğer $[a,b]$ aralığında $\left\{\varphi_k(x)\right\}$ gibi dik bir polinom ailesi tanımlanabiliyorsa bu dik polinomların kökleri hakkında daha kesin olarak konuşmak mümkündür. Gerçekten de, dik polinomlardan müteşekkil bir ailenin bütün fertleri için, bütün köklerin reel ve tekkatlı ve üstelik hepsinin de $\left\{\varphi_k(x)\right\}$ in tanım bölgesi olan $[a,b]$ aralığında bulunduklarını göstereceğiz.

$w(x)$ ağırlık fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında işâretini değiştirmemesi şartı altında ve $\left\{\varphi_n(x)\right\}$ dik polinomlar ailesine ait diklik şartları meyânında, $n = 0$ için,

$$\int_a^b w(x)\, \varphi_0(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0$$

da yazılabileceği ve $\varphi_0(x)$ in de bir sâbitten ibâret olduğu göz önünde tutulacak olursa, buradan $\varphi_n(x)$ in $[a,b]$ içinde hiç değilse bir kere işâretini değiştirmek zorunda olduğu (yâni hiç değilse bir kökü bulunduğu) sonucu çıkar; zirâ eğer aksi vârid olsaydı integrantın $[a,b]$ boyunca hep aynı işâreti haiz olması ile integralin sıfır olması keyfiyetleri biribirleriyle çelişik olurlardı. Şu hâlde $\varphi_n(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ içinde hiç değilse bir kere işâret değiştirmektedir.

Şimdi $\varphi_n(x)$ in $[a,b]$ aralığı içinde haiz olduğu reel tekkatlı kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ile gösterelim $(p < n)$. Bu takdirde

$$F(x) = \varphi_n(x) \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_p) = \psi_{n-p}(x)(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \cdots (x - x_p)^2$$

fonksiyonu ya sıfır veyâ negatif, veyâhut da ya sıfır veyâ pozitif değerler alabilir ve sıfırları da hep çiftkatlı olacağından bunlar aynı zamanda ya minimumlara veyâhut da maksimumlara tekaabül edecektir. Yâni $F(x)$ hep aynı işâreti haiz bir fonksiyondur. Eğer $\varphi_n(x)$ çiftkatlı kökleri haizse bu köklerin varlığının $F(x)$ fonksiyonunun işâreti üzerine tesir etmeyeceği âşikârdır. Diğer taraftan, yukarıda ispatladığımız vechile $\{\varphi_k(x)\}$ gibi dik bir polinom ailesinin her ferdi, derecesi kendisininkinden daha küçük olan bir polinoma dik olduğundan ve $p < n$ olması dolayısıyla

$$\int_a^b w(x) \Big[(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_p) \Big] \varphi_n(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, F(x)\, dx = 0$$

dır. Hâlbuki $w(x).F(x)$ in her zaman aynı işâreti haiz bir integrant olması bunun $[a,b]$ üzerindeki integralinin sıfır olmasıyla bağdaştırılamaz. Dolayısıyla $p = n$ olup $\varphi_n(x)$ de $[a,b]$ de n adet reel ve tekkatlı kökü haizdir, ve zâten bu kökler de $\varphi_n(x)$ in mevcûd köklerinin tümünü teşkil ederler.

Gerçekledikleri diferansiyel denkleme bağlı olmaksızın dik polinomlar arasında, A_n, B_n ve C_n sâbitler olmak üzere

$$\varphi_{n+1}(x) - (A_n\, x + B_n)\, \varphi_n(x) + C_n\, \varphi_{n-1}(x) = 0 \qquad \text{(VIII.4.7)}$$

şeklinde bir rekürans bağıntısı vardır.

Gerçekten de, A_n katsayısını o türlü seçelim ki

$$\varphi_{n+1}(x) - xA_n\, \varphi_n(x)$$

ifâdesi en fazla n-ninci dereceden bir polinom olsun. Buna dayanarak

$$\varphi_{n+1}(x) - xA_n\, \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \varphi_k(x) \qquad \text{(VIII.4.8)}$$

yazılabilir. a_k katsayılarını hesaplamak için (VIII.4.8) in her iki yanını $w(x)\,\varphi_k$ ile çarpıp $[a, b]$ aralığı üzerinden integre edelim. Bu takdirde, diklik şartlarından ötürü kolaylıkla

$$a_k = -A_n \frac{\int_a^b w(x)\Big[x\,\varphi_k(x)\Big]\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\Big[\varphi_k(x)\Big]^2 dx} \qquad \text{(VIII.4.9)}$$

bulunur. Paydaki $x\, \varphi_k(x)$ polinomunun derecesi $(k+1)$ dir. Hâlbuki $\varphi_n(x)$, derecesi n den küçük bütün polinomlara dik olduğundan

$$k = 0, 1, \cdots, n-2 \text{ için:} \quad \int_a^b w(x)\Big[x\,\varphi_k(x)\Big]\varphi_n(x)\,dx = 0$$

dır. Bundan ötürü (VIII.4.9) ile belirlenen a_k katsayıları arasında sıfırdan farklı olanlar sâdece a_{n-1} ve a_n dir.

Böylelikle (VIII.4.8)

$$\varphi_{n+1}(x) - xA_n\, \varphi_n(x) = a_{n-1}\, \varphi_{n-1}(x) + a_n\, \varphi_n(x)$$

olur ki bu da zâten varlığını göstermek istediğimiz rekürans bağıntısıdır.

(VIII.5) LEGENDRE FONKSİYONLARI.

Eğer $\nabla^2 U=0$ şeklindeki LAPLACE denklemini küresel koordinatlarda yazacak olursak bu,

$$U(r,\theta,\phi)=R(r)\,P(\theta)\,Q(\phi) \qquad \text{(VIII.5.1)}$$

değişken ayrışımı yapıldıktan sonre,

$$Q''(\phi)+m^2\,Q(\phi)=0 \qquad \text{(VIII.5.2)}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\,\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right]-\left(\frac{m^2}{\sin\theta}\right)P(\theta)+\left[n(n+1)\sin\theta\right]P(\theta)=0 \qquad \text{(VIII.5.3)}$$

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\,\frac{dR(r)}{dr}\right]-n(n+1)\,R(r)=0 \qquad \text{(VIII.5.4)}$$

şeklinde üç bağımsız denklem verir. Bu denklemlerdeki m^2 ve $n(n+1)$ büyüklükleri değişkenlere ayrışım parametreleridir. Bu denklemlerden ilki ile sonuncusu kolaylıkla çözülür ve

$$Q(\phi)=A_1\,e^{im\phi}+A_2\,e^{-mi\phi} \qquad \text{(VIII.5.5)}$$

$$R(r)=A\;r^n+\frac{A_4}{r^{n+1}} \qquad \text{(VIII.5.6)}$$

verirler. İkinci denklemin çözümünü ise maalesef bilinen âdi fonksiyonlar aracılığıyla elde etmek mümkün değildir. Bunun için önce $\cos\theta=x$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılarak denklem

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{d\,P(x)}{dx}\right]-\frac{m^2}{1-x^2}\,P(x)+n(n+1)\,P(x)=0 \qquad \text{(VIII.5.7)}$$

şekline sokulur. Şu hâlde bu denklemin çözümleri için x in tanım bölgesi sâdece $[-1,+1]$ aralığından ibâret olacaktır. Bu denklemin çözümlerini $P_n^m(x)$ ile göstereceğiz. Şimdi

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\,V(x) \qquad \text{(VIII.5.8)}$$

vazedecek olursak

$$P'(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,V'(x)-mx\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\,V(x)$$

$$P''(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,V''(x)-2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\,V'(x)$$

$$-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\,V(x)+m(m-2)\,x(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}\,V(x)$$

olduğundan bunlar (VIII.5.7) ye ikaame edildiğinde

$$(1-x^2)\,V''(x)-2x(m+1)\,V'(x)+\Big[n(n+1)-m(m+1)\Big]\,V(x)=0 \qquad \text{(VIII.5.9)}$$

denklemi elde edilir. Şimdi (VIII.5.7) nin $m=0$ a tekaabül eden

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)\,P_n=0 \qquad \text{(VIII.5.10)}$$

ya da

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}-2x\frac{dP_n}{dx}+n(n+1)\,P_n=0 \qquad \text{(VIII.5.10')}$$

hâlini göz önüne alıp bunu m kere türetelim. Böylece

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}P_n(x)}{dx^{m+2}}-2x(m+1)\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}+$$

$$+\Big[n(n+1)-m(m+1)\Big]\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=0 \qquad \text{(VIII.5.11)}$$

bulunur. (VIII.5.8) vaz'ının ışığı altında (VIII.5.11) in (VIII.5.9) ile mukayesesi

$$P_n{}^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m} \qquad \text{(VIII.5.12)}$$

olduğunu göstermektedir. Şu hâlde daha basit bir denklem olan (VIII.5.10) veyâ (VIII.5.10') yü çözersek $P_n{}^m(x)$ i de (VIII.5.12) bağıntısı yardımıyla elde etmiş oluruz.

$P_n(x)$ fonksiyonlarına LEGENDRE fonksiyonları, $P_n{}^m(x)$ fonksiyonlarına da *asosye* LEGENDRE fonksiyonları adı verilir.

(VIII.5.10') LEGENDRE diferansiyel denkleminin polinomsal bir çözümünü elde etmek için

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad \text{(VIII.5.13)}$$

vazedelim. Bu vaz'ı (VIII.5.10') ye ikaame edersek

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k\, x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k\, x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

ya da terimleri düzenleyerek

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[n(n+1)\, c_k + (k+2)\,(k+1)\, c_{k+2}\right] x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k\, x^k$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k\, x^k = 0$$

bulunur. Bu son ifâdeden görüldüğü gibi x in çeşitli üslerine tekaabül eden katsayıların sıfır olması lâzımdır. Bu takdirde

$$k=0, 1, 2, \cdots \quad \text{için}: \quad c_{k+2} = \frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+2)\,(k+1)}\, c_k \qquad \text{(VIII.5.14)}$$

olması lâzım geldiği kolaylıkla gerçeklenir.

n nin tamsayı olmaması hâlinde $c_0=0$ fakat $c_1=0$ seçilirse x in sâdece çift kuvvetlerini, ve eğer $c_0 \neq 0$ fakat $c_1=0$ seçilirse de x in sâdece tek kuvvetlerini ihtivâ eden seri şeklinde iki ayrı çözüm elde edilir. Bunların biribirlerinden lineer bağımsız oldukları âşikârdır. Bu itibarla bu iki ayrı çözümün lineer bir kombinezonu (VIII.5.10') LEGENDRE denkleminin genel çözümünü teşkil eder.

Eğer n bir tamsayı değilse bütün c_{k+2} katsayılarını hem tek, hem de çift seri için belirlemek kaabildir; ancak bu takdirde bu serilerin $x=\pm 1$ değerleri için ıraksak oldukları ispatlanmıştır. Bu noktalarda da yakınsak çözümler elde edebilmek için n nin behemehâl bir tamsayı olması iktizâ etmektedir. Gerçekten de, n bir tamsayı olmak üzere, eğer $n=2$ gibi bir çift sayı ise

$$c_{2\nu+2} = c_{2\nu+4} = \cdots = 0$$

ve eğer $n = (2\nu + 1)$ gibi bir tek sayı ise

$$c_{2\nu+3} = c_{2\nu+5} = \cdots = 0$$

bulunur. Dolayısıyla LEGENDRE denkleminin çözümünü teşkil eden seriler sonlu terimi haiz olacaklarından $x = \pm 1$ de de sonlu kalırlar.

Eğer c_0 ya da c_1 katsayısı, çözümün $x = 1$ noktasınd a 1 değerini haiz olacak şekilde seçilmişse (VIII.5.10') denkleminin çözümlerine *LEGENDRE polinomları* adı verilir. Bunların ilk birkaçı

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{5}(5x^3 - 3x)$$

$$\vdots$$

şeklindedir. Genel olarak n - ninci mertebeden LEGENDRE polinomu, n nin çift ya da tek olmasına göre $N = n/2$ ya da $N = (n - 1)/2$ olmak üzere

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \cdot (2n - 2k)!}{2^2 \cdot k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\, x^{n-2k} \qquad \text{(VIII.5.15)}$$

bağıntısıyla belirlenir. Bu son ifâde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n\, k!\,(n-k)!} \; \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2k}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!} \; \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, n!}{k!\,(n-k)!}\, x^{7n-2k}$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, n!}{k!\,(n-k)!}\, x^{2n-2k} \cdot 1^{2k}$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, n!}{k!\,(n-k)!}\, x^{2n-k} \cdot 1^{k}$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \qquad \text{(VIII.5.16)}$$

şekline de indirgenebilir. Bu ifâdeye RODRİGUES formülü denilmektedir.

(VIII.5.10) denklemi esas itibariyle $R(x)=1$ olmak üzere (VIII.1.2) şeklinde bir STURM-LİOUVİLLE denklemi olduğundan bu denklemin muhtelif özdeğerlerine tekaabül eden özfonksiyonları arasında

$$I_{mn} = \int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \gamma\, \delta_{mn}$$

şeklinde diklik bağıntıları mevcûd olacaktır. Buradaki normlaştırma sâbitini tesbit etmek için RODRİGUES formülüne binâen

$$I_{mn} = \frac{1}{2^{m+n}} \frac{1}{m!\; n!} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2-1)^m\right]\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n\right] dx$$

yazılabileceğine işâret edelim. Bu ifâdeyi n kere kısmî integrasyon metoduyla integre edecek olursak

$$I_{mn} = \frac{-1}{2^{m+n}} \frac{1}{m!\; n!} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} (x^2-1)^m\right]\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n\right] dx$$

. . . .

$$= \frac{(-1)^n}{2^{m+n}} \frac{1}{m!\; n!} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n} (x^2-1)^m\right] (x^2-1)^n dx$$

olur. Eğer $m<n$ ise

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n}(x^2-1)^m=0$$

olacağından $I_{mn}=0$ bulunur. Fakat eğer $m=n$ ise gene n adet kısmî integrasyonla

$$I_{nn}=\int_{-1}^{+1}\Big[P_n(x)\Big]^2dx=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}\Big[\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n\Big]^2dx$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}(x^2-1)^n\,dx$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\;\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\;\frac{2}{2n+1}$$

bulunur. Şu hâlde

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn} \qquad \text{(VIII.5.17)}$$

dir. Buna mukabil asosye LEGENDRE polinomları için diklik bağıntıları da

$$\int_{-1}^{+1}P_l^m(x)\,P_{l'}^m(x)=\frac{2}{2l+1}\;\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \qquad \text{(VIII.5.18)}$$

dir. Buna binâen $[-1,+1]$ aralığı için de «*uslu*» bir $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,P_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,P_n^m(x) \qquad \text{(VIII.5.19)}$$

şeklinde tam serilere açmak mümkündür ve buradaki açılım katsayıları da

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{+1} P_n^m(x) f(x)\, dx \qquad \text{(VIII.5.20)}$$

formülleriyle belirlenecektir.

m nin tamsayı olması hâlinde (VIII.5.10) diferansiyel denklemine tekaabül eden indis denklemi tekil noktaların cıvarında $\alpha^2 = 0$ şeklindedir. Dolayısıyla seriye açma yoluyla, denklemin iki bağımsız çözümünden ancak biri tâyin edilebilir. Diğer bağımsız çözümü elde etmek için (VIII.5.10′) denkleminin ışığında (VIII.5.15) ifâdesinden, $Q_n(x)$ ile gösterilen bu bağımsız çözümün

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{1}{[P_n(x)]^2} \exp\left[-\int_0^x \frac{-2x'\, dx'}{1-x'^2}\right] dx$$

$$= P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)\,[P_n(x)]^2}$$

olduğu bulunur. Âdet olduğu üzere $Q_n(x)$ daha ziyâde

$$Q_n(x) = -P_n(x) \int_{\infty}^{x} \frac{d\xi}{(\xi^2-1)\,[P_n(\xi)]^2} \qquad \text{(VIII.5.21)}$$

diye tanımlanmaktadır.

$q_{n-1}(x)$ ile $(n-1)$-inci dereceden bir polinomu göstermek şartıyla $Q_n(x)$ in

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x)\, ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + q_{n-1}(x) \qquad \text{(VIII.5.22)}$$

şekline indirgenebildiğini göstermek kaabildir. Fakat $Q_n(z)$ çokdeğerli bir fonksiyon olduğundan bunu tekdeğerli kılmak için kompleks düzlem -1 ilâ $+1$ e kadar kesilir ve $Q_n(z)$ de reel $z = 1$ için reel olarak tanımlanır.

Eğer $-1 < x < +1$ ise, buna göre

$$Q_n(x \pm i\,\varepsilon) = \frac{1}{2} P_n(x) \left[ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \mp i\pi \right] + q_{n-1}(x)$$

dir, ve dolayısıyla $Q_n(x)$ in de (VIII.5.22) ye binâen

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \left[Q_n(x+i\varepsilon) + Q_n(x-i\varepsilon) \right]$$

şeklinde aritmetik ortalama olarak tanımlanabileceği görülmektedir.

LEGENDRE polinomları dik polinomlar olduklarından bunlar hakkında (VIII.4.7) şeklinde rekürans bağıntıları vardır. Ancak A_n, B_n ve C_n belirsiz katsayılarını tâyin etmek için $P_n(x)$ in tanım bağıntısı olan (VIII.5.15) i P_{n-1}, P_n ve P_{n+1} için yazıp (VIII.4.7) ye ikaame edelim. Belirsiz katsayılar metodundan faydalanarak neticede

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) - (2n-1)\, x\, P_n(x) + n\, P_{n-1}(x) = 0 \qquad \text{(VIII.5.23)}$$

bulunur.

$\left\} \varphi_n(x) \right\{$ gibi dik polinomların *doğuran fonksiyonları* diye o türlü $d(x,t)$ fonksiyonlarına denir ki $\varphi_n(x)$ ler, $d(x,t)$ nin t cinsinden kuvvet serisine açılımının katsayıları olsunlar, yâni

$$d(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\, t^n$$

olsun. Buna göre LEGENDRE polinomlarının doğuran fonksiyonu

$$d(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n \qquad \text{(VIII.5.24)}$$

şeklinde olacaktır.

$d(x,t)$ yi tesbit etmek için önce CAUCHY integral teoremine göre

$$\frac{d^n[(1-x^2)^n]}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{(1-z^2)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz$$

yazılabileceğine işâret edelim. Bu hatırlatmadan sonra (VIII.5.16) RODRIGUES formülünü kullanarak $P_n(x)$ in

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n[(1-x^2)^n]}{dx^n}=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(1-z^2)^n}{(z-x)^{n+1}}dz \quad \text{(VIII.5.25)}$$

şeklindeki integral gösterilişini elde etmiş oluruz. Buradaki çevre integrali $z=x$ noktasını ihtivâ eden bir çevre boyunca alınacaktır.

Şimdi (VIII.5.25) ifâdesini (VIII.5.24) e ikaame edecek olursak

$$d(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}t^n\left(\frac{1-z^2}{z-x}\right)^n$$

olur. Hâlbuki sağdaki toplam bir geometrik seridir. Buna göre

$$d(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z-x}\left\{\frac{1}{1-\frac{(-1)t}{2}\frac{1-z^2}{z-x}}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{2}{t}\frac{dz}{z^2-\frac{2}{t}z-\left(1-\frac{2}{t}x\right)}$$

olacaktır. Buradaki integrant

$$z=\frac{1}{t}\pm\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}x+1}$$

kutuplarını haiz olup bunlardan ancak eksi işâretlisi x noktasının yakınında olup bu kutbu ihtivâ eden bir çevre üzerinden integrâl alınırsa rezidü metodu yardımıyla

$$d(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \quad \text{(VIII.5.26)}$$

bulunur. $x=\cos\theta$ olduğundan doğuran fonksiyon

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\,t^n \quad \text{(VIII.5.27)}$$

şeklinde de yazılır.

Şimdi $P_n(\cos\theta)$ için, n indisinin çok büyük bir tamsayı olması hâlinde geçerli olacak olan asimtotik bir formül elde etmek istiyoruz. Bunun için önce (VIII.5.3) den

$$\frac{d^2 P_n(\theta)}{d\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta \frac{dP_n(\theta)}{d\theta} + n(n+1)\, P_n(\theta) = 0 \qquad \text{(VIII.5.28)}$$

yazılabildiğine işâret edelim. Eğer

$$P_n(\theta) = \frac{u(\theta)}{\sqrt{\sin\theta}}$$

vazedilirse $u(\theta)$ için

$$\frac{d^2 u(\theta)}{d\theta^2} + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\sin^2\theta}\right] u(\theta) = 0$$

denklemi bulunur. Eğer n kâfi derecede büyükse, θ nın $\sin\theta$ nın köklerine yakın değerleri hâriç olmak üzere yaklaşık olarak,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 u = 0$$

yazılır. Buna göre $P_n(\cos\theta)$ nın $n \to \infty$ için asimtotik ifâdesi

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{A_n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \phi_n\right]}{\sqrt{\sin\theta}} \qquad \text{(VIII.5.29)}$$

olur. Diklik bağıntılarından,

$$\int_0^\pi \sin\theta \left[P_n(\cos\theta)\right]^2 d\theta = \frac{2}{2n+1} \qquad \text{(VIII.5.30)}$$

olması gerektiğinden (VIII.5.29) u (VIII.5.30) a ikaame etmek sûretiyle

$$A_n \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

bulunur.

Esasına bakılırsa bizim, θ nın 0 ve π değerleri için (VIII.5.29) asimtotik formülünü kullanmamamız gerekir. Fakat $P_n(t)$ fonksiyonu

$t=\pm 1$ de sonlu kalan bir polinomdur. Bu itibarla, kâfî derecede büyük n ler için θ nın 0 ve π değerleri cıvarındaki değerleri dolayısıyla ortaya çıkan hatânın önceden verilmiş kâfî derecede küçük bir ε kemmiyetinden daha da küçük kalacağı gösterilebilir.

Asimtotik (VIII.5.29) daki ϕ_n fazını hesaplamak üzere $\theta=\pi/2$ için doğuran fonksiyonun ifâdesini göz önüne alalım:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)\, t^n.$$

Sol taraf eğer binom açılımına tâbî tutulursa n nin tek değerleri için $P_n(0)$ ın sıfır olması gerektiği ve n nin çift değerleri için de $P_n(0)$ ın işâretinin değişmesi lâzım geldiği görülür. Buna göre $\phi_n=-\pi/4$ olmasına hükmedilir. Şu hâlde $n \to \infty$ için $P_n(\cos\theta)$ nın asimtotik ifâdesi

$$0 \leqq \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi-\varepsilon < \pi$$

için

$$P_n(\cos\theta) \backsimeq \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\theta}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] \qquad \text{(VIII.5.31)}$$

olur. Benzer şekilde $n \to \infty$ ve $0 \leqq \varepsilon \leqq \theta \leqq \pi-\varepsilon < \pi$ için

$$P_n{}^m(\cos\theta) \backsimeq \frac{1}{n^m} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\theta}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right] \qquad \text{(VIII.5.32)}$$

olduğu gösterilebilir.

(VIII.6) KÜRESEL HARMONİK FONKSİYONLAR.

Küresel harmonik fonksiyonlar diye küresel koardinatlarda ifâde edilen LAPLACE denkleminin θ ve φ açılarına bağlı kısmını gerçekleyen fonksiyonlara denir. Tanım olarak

$$Y_{lm}(\Omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \times \begin{cases} (-1)^m & \text{eğer } m \geqq 0 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } m < 0 \text{ ise} \end{cases} \qquad \text{(VIII.6.1)}$$

dir. Bu ifâdenin, kezâ

$$Y_{lm}(\Omega)=\frac{1}{2^l(l!)}\sqrt{\frac{2l+1}{4}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, e^{im\phi}(-\sin\theta)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(\cos^2\theta-1)^l$$

(VIII.6.2)

şeklinde yazılabileceği de gerçeklenebilir. Bu her iki tanımdan da

$$Y_{l,-m}(\Omega)=(-1)^m Y_{lm}{}^*(\Omega) \qquad \text{(VIII.6.3)}$$

olduğu görülmektedır. Küresel harmoniklerin tanımındaki katsayı bunların ortonormal bir fonksiyon dizisi meydana getirmelerini temin edecek şekilde seçilmiştir:

$$\int Y_{lm}{}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega)\, d\Omega=\int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} Y_{lm}{}^*(\theta,\phi)\, Y_{l'm'}(\theta,\phi) \sin\theta\, d\theta$$

$$=\delta_{ll'}\,\delta_{mm'} \qquad \text{(VIII.6.4)}$$

Eğer $f(\theta,\phi)=f(\Omega)$ ile *«uslu»* değişen bir fonksiyonu gösterirsek bunu

$$f(\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_{lm}(\Omega) \qquad \text{(VIII.6.5)}$$

şekilde küresel harmonik fonksiyonlar cinsinden bir seriye açmak mümkün olur. Bu açılımın katsayılarının

$$a_{lm}=\int Y_{lm}{}^*(\Omega')\, f(\Omega')\, d\Omega' \qquad \text{(VIII.6.6)}$$

ifâdesi tarafından verileceği kolaylıkla görülür. Bunu (VIII.6.5) açılımına ikaame edersek

$$f(\Omega)=\int \left\{ \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}{}^*(\Omega')\, Y_{lm}(\Omega)\right\} f(\Omega')\, d\Omega'$$

bulunur. Bu ise

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}{}^*(\Omega')\, Y_{lm}(\Omega)=\delta(\Omega-\Omega') \qquad \text{(VIII.6.7)}$$

olduğunu göstermektedir. (VIII.6.7) ifâdesine *kapanış bağıntısı* adı verildiği mâlûmdur.

Öte yandan $\delta(\Omega-\Omega')$ nün yalnız Ω ve Ω' doğrultuları arasındaki γ açısına tâbî olduğu âşikârdır. Gerçekten de eğer (θ,ϕ) ile Ω doğrultusuna ve (θ,ϕ) ile de Ω' doğrultusuna tekaabül eden zenit ve azimüt açılarını gösterecek olursak küresel trigonometrinin temel bağıntılarına göre

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

dür. Şu hâlde $\delta(\Omega-\Omega')$ yü $P_l(\cos\gamma)$ cinsinden

$$\delta(\Omega-\Omega')=\sum_{l=0}^{\infty} b_l P_l(\cos\gamma) \qquad \text{(VIII.6.8)}$$

şeklinde bir seriye açabiliriz. Bu açılımın b_l katsayılarının (VIII.5.19) a dayanarak

$$b_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}\delta(\Omega-\Omega')P_l(\cos\gamma)\,d(\cos\gamma)$$

$$=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\delta(\Omega-\Omega')\,P_l(\cos\gamma)\,d\Omega$$

$$=\frac{2l+1}{4\pi}P_l(1)=\frac{2l+1}{4\pi} \qquad \text{(VIII.6.9)}$$

bulunur. Buna göre, (VIII.6.8) ve (VIII.6.9) a binâen (VIII.6.7) için

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^{*}(\Omega')Y_{lm}(\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\gamma)$$

ya da

$$P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^{*}(\Omega')\,Y_{lm}(\Omega)$$

$$=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\,P_l^{|m|}(\cos\theta)P_l^{|m|}(\cos\theta')\,e^{im(\phi'-\phi)}$$

$$=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^{m}(\cos\theta)\,P_l^{m}(\cos\theta')\cos m\,(\phi'-\phi)$$

(VIII.6.10)

bulunur. $P_l(\cos\gamma)$ nın bu açılım ifâdesine küresel harmonik fonksiyonların açılım teoremi adı verilir.

IX. Bölüm

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER

(IX.1) GİRİŞ.

İntegral dönüşümler birçok problemlerde büyük bir kolaylık sağlayan bir metot olarak karşımıza çıkmaktadırlar.

$f(x)$ gibi bir fonksiyon verildiğinde $K(x,k)$ çekirdeğine göre bunun integral dönüşmüşü diye

$$\mathbf{T}\left\{ f(x) \right\} = F(k) = \int_a^b K(x,k)\, f(x)\, dx \qquad \text{(IX.1.1)}$$

ifâdesine denir. Buradaki a ve b integrasyon limitleri $K(x,k)$ ile birlikte verilirler. Bu, esâsında,

$$O\, f(x) = F(k)$$

şeklinde, bir $f(x)$ fonksiyonuna bir $F(k)$ fonksiyonunun tekaabül ettirilmesinden başka bir şey değildir. Şu hâlde bir integral dönüşümün verilmesi demek $f(x)$ temel fonksiyonlarıyla bunların dönüşmüşleri denilen $F(k)$ fonksiyonları arasında bir nevî sözlük meydana getirmek demektir. Dönüşmüş fonksiyonların muamelesi temel fonksiyonlardan daha kolay ise şüphesiz ki bir problemi dönüşmüş fonksiyonlar cinsinden ele almak da büyük kolaylıklar arzedecektir. İleride bunun gerçekten de böyle olduğunu müşâhede edeceğiz.

İntegral dönüşümler özellikle diferansiyel veyâ integro-diferansiyel denklem sistemlerinin çözülmesinde mühim bir kolaylaştırıcı rol oynarlar. Filhakika ileride göreceğimiz vechile gâyet girift integro-diferansiyel denklemleri integral dönüşüm metotlarıyla muâmeleye tâbî tutmak sûretiyle bunları sâdece âdî cebirsel denklemlere dönüştürmek mümkün olmaktadır. Bu ise kayda değer bir basitliktir. Biz bu IX. Bölümde pratikte en çok kullanılan birkaç farklı integral dönüşümü ve bunların pratik hesap kurallarını gözden geçirip bunlar hakkında bazı somut uygulamalar vermekle yetineceğiz.

(IX.2) FOURİER DÖNÜŞÜMÜ.

$f(x)$ gibi bir fonksiyonun FOURİER dönüşmüşü diye

$$T\left\{f(x)\right\}=F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, f(x)\, dx \qquad \text{(IX.2.1)}$$

ile belirlenen $F(k)$ fonksiyonuna denir. Bir fonksiyonun Fourier dönüşmüşü olan $F(k)$ fonksiyonu bilindiğinde temel fonksiyonu da buna dayanarak elde etmek kaabildir. $f(x)$ temel fonksiyonunu $F(k)$ dönüşmüş fonksiyonunun fonksiyonu olarak veren formüle *«tersinim formülü»* adı verilir. Fourier dönüşümüne ait tersinim formülünü matematik kesinlikten uzak fakat kolay bir şekilde tesis edebilmek üzere $h(x)$ şeklinde bir «tek fonksiyon»un $0\leqq x\leqq L$ aralığında

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

şeklindeki Fourier serisine açılımını göz önüne alalım. Böyle bir açılımın katsayılarının, sinüs fonksiyonları için geçerli olan

$$\int^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\, dx=\frac{L}{2}\,\delta_{mn}$$

diklik bağıntıları dolayısıyla

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

şeklinde ifâdelerle belirlendikleri kolaylıkla görülür. A_n açılım katsayılarının bu ifâdeleri $h(x)$ açılımına yerleştirilecek olursa

$$h(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^L h(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} \, d\xi \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \text{(IX.2.2)}$$

bulunur. Şimdi bu serinin $L \to \infty$ için davranışını inceleyelim. Bunun için $k_n = n\pi/L$ diye yeni bir değişken ithâl edelim. Buna göre $\Delta k = k_{n+1} - k_n = \pi/L$ olacak ve dolayısıyla (IX.2.2) de

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta k) \left[\int_0^L h(\xi) \sin (k_n \xi) \, d\xi \right] \sin (k_n x)$$

yazılabilecektir. Âşikâr olarak $L \to \infty$ yâni $\Delta k \to 0$ için bu son ifâdedeki toplam işâreti integral ile ikaame olunacaktır:

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\xi \, h(\xi) \sin (k\xi) \sin (kx) \qquad \text{(IX.2.3)}$$

Eğer elimizde $g(x)$ gibi bir «çift fonksiyon» olsa idi benzer açılım ve ara hesaplar neticesinde

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\xi \, g(\xi) \cos (k\xi) \cos (kx) \qquad \text{(IX.2.4)}$$

bulunacaktı. Gerek (IX.2.3) de ve gerekse (IX.2.4) ξ ve k üzerinden integrasyonun alt limitleri $-\infty$ a kadar aşikâr olarak uzatılabilir ve

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, h(\xi) \sin (k\xi) \sin (kx)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, g(\xi) \cos (k\xi) \cos (kx)$$

yazılır.

Ne tek ne de çift olmayan bir $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsa her zaman bunu bir çift fonksiyon ile bir tek fonksiyonun toplamı olarak

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$$

şeklinde yazmanın mümkün olacağı âşikârdır. Burada ilk parantez bir çift fonksiyona, ikinci parantez ise bir tek fonksiyona delâlet etmektedir.

$h(x)$ gibi bir tek fonksiyon ile $g(x)$ gibi bir çift fonksiyon için

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cos(kx)\,dx=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(kx)\,dx=0$$

bağıntıları geçerli olduğundan $f(x)$ için

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\left[f(\xi)-f(-\xi)\right]\sin(k\xi)\sin(kx)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\left[f(\xi)+f(-\xi)\right]\cos(k\xi)\cos(kx)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\left\{f(\xi)\cos\left[k(\xi-x)\right]+f(-\xi)\cos\left[k(\xi+x)\right]\right\} \tag{IX.2.5}$$

yazılır. Hâlbuki (IX.2.5) in integrantının ξ ye göre bir çift fonksiyon olduğu âşikârdır. Buna dayanarak

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\, f(\xi)\cos\left[k(\xi-x)\right] \tag{IX.2.6}$$

olur. Öte yandan ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f(\xi) \sin\left[k(\xi - x)\right]$$

k ya nisbetle bir *«tek fonksiyon»* dur. Bu itibarla

$$i \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f(\xi) \sin\left[k(\xi - x)\right] = 0 \qquad \text{(IX.2.7)}$$

dır. (IX.2.6) ile (IX.2.7) nin toplamı

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f(\xi) \cos\left[k(\xi - x)\right] +$$

$$+ i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f(\xi) \sin\left[k(\xi - x)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f(\xi)\, e^{ik(\xi - x)} \qquad \text{(IX.2.8)}$$

olur. Buradan ise $f(x)$ in Fourier dönüşmüşünün (IX.2.1) ile verilmiş olan tanımını göz önünde tutarak

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{-ikx}\, dk \qquad \text{(IX.2.9)}$$

bulunur ki bu da Fourier dönüşmüşü bilindiği takdirde temel fonksiyonun tâyinini sağlayan, aradığımız tersinim formülünden başka bir şey değildir. Bu itibarla (IX.2.1) ve (IX.2.9) formülleri arasındaki mükemmel simetriye de dikkati çekmek gerekir.

Fourier dönüşmüşünün şu özellikleri haiz olduğu doğrudan doğruya tanım bağıntısından hareketle kolaylıkla gösterilebilir ;

$$\mathbf{T}\left\{ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \right\} = c_1 \mathbf{T}\left\{ f_1(x) \right\} + c_2 \mathbf{T}\left\{ f_2(x) \right\} \qquad \text{(IX.2.10)}$$

(c_1 ve c_2: iki sâbit)

$$\mathbf{T}\left\{f(cx)\right\}=\frac{1}{c}F\left(\frac{k}{c}\right) \tag{IX.2.11}$$

$$\mathbf{T}\left\{\left[f(x)\right]^*\right\}=F^*(-k) \tag{IX.2.12}$$

$$\mathbf{T}\left\{f(x+a)\right\}=F(k)\,e^{-ika} \tag{IX.2.13}$$

$$\mathbf{T}\left\{f(x)\,e^{iax}\right\}=F(k+a) \tag{IX.2.14}$$

$$\mathbf{T}\left\{f(cx+a)\right\}=\frac{1}{c}\,e^{-\frac{iak}{c}}\,F\left(\frac{k}{c}\right) \tag{IX.2.15}$$

$$\mathbf{T}\left\{f(cx)\,e^{iax}\right\}=\frac{1}{c}F\left(\frac{k+a}{c}\right). \tag{IX.2.16}$$

Fourier dönüşümü teorisini fiziğin sınır-değer problemlerine uygularken $f(x)$ gibi bir fonksiyonun n-ninci türevinin Fourier dönüşmüşünü ifâde edebilmek de önemlidir. Tanıma dayanarak

$$\mathbf{T}\left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n f(x)}{dx^n}\,e^{ikx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\,e^{ikx}\right]_{-\infty}^{\infty}-\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\,e^{ikx}\,dx$$

olur. Eğer $|x|\to\infty$ için $(n-1)$-inci türev sıfıra gidiyorsa, yâni

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}=0$$

ise

$$\mathbf{T}\left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\}=-ik\,\mathbf{T}\left\{\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right\} \tag{IX.2.17}$$

olur; ve eğer

$$m=1,2,\cdots,n-1 \text{ için}: \lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{d^m f}{dx^m}\right)=0$$

ise

$$\mathrm{T}\left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\}=(-ik)^n\cdot\mathrm{T}\left\{f(x)\right\} \qquad \text{(IX.2.18)}$$

ifâdesi bulunur.

MİSÂL : 1. $\frac{d^2 f(x)}{dx}+\omega^2 f(x)=g(x)$ **denklemini** $|x|\to\infty$ **için** $\frac{df}{dx}=f(x)=0$ **olması şartı altında çözünüz.**

ÇÖZÜM : Burada ω^2 *ve* $g(x)$ *bilinen büyüklükleri göstermektedir.* $\mathrm{T}\left\{g(x)\right\}=G(k)$ *vazedelim. Bu takdirde her iki tarafın Fourier dönüşmüşünü alarak*

$$(-ik)^2 F(x)+\omega^2 F(k)=G(k)$$

$$F(k)=\frac{G(k)}{\omega^2-k^2}$$

ve buradan da ters Fourier dönüşmüşüne geçerek denklemin verilen sınır şartları altındaki çözümünün

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(k)\,e^{-ikx}}{\omega^2-k^2}\,dx$$

olduğu bulunur.

Bu misâl integral dönüşüm metodunun kudreti hakkında bir fikir vermektedir. İki satırda sınır şartlarını da gerçekleyen çözümü derhâl yazıvermenin kolaylığı inkâr edilemez. Bu, integral dönüşüm metoduna has bir özelliktir; yâni bu metotla bir diferansiyel denklem çözüldü müydü ayrıca sonucun sınır şartlarını gerçeklemesini sağlayaca şexilde bir takım parametrelerin tâyinine ihtiyaç yoktur. Netice, daima otomatikman sınır şartlarını sağlayacak şekilde elde edilmektedir.

MİSAL: 2.

$$|x| \to \infty \quad \text{için} \quad f_1 = \frac{df_1}{dx} = \frac{d^2f_1}{dx^2} = \frac{d^3f_1}{dx^3} = f_2 = \cdots = f_3 = \cdots = \frac{d^3f_3}{dx^3} = 0$$

olmak şartı ile

$$a_{11}\frac{d^3 f_1(x)}{dx^3} + a_{12}\frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} + a_{13} f_3(x) = g_1(x)$$

$$a_{21} f_1(x) + a_{22}\frac{df_2(x)}{dx} + a_{23}\frac{d^2 f_3(x)}{dx^2} = g_2(x)$$

$$a_{31} f_1(x) + a_{32} f_2(x) + a_{33}\frac{d^2 f_3(x)}{dx^2} = g_3(x)$$

sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM: Bütün sistemin Fourier dönüşümünü almak sûretiyle

$$\begin{aligned}
&a_{11}(-ik)^3 F_1(k) + a_{12}(-ik)^2 F_2(k) + a_{13} F_3(k) = G_1(k)\\
&a_{21} F_1(k) + a_{22}(-ik) F_2(k) + a_{23}(-ik)^2 F_3(k) = G_2(k)\\
&a_{32} F_1(k) + a_{32} F_2(k) + a_{33}(-ik)^2 F_3(k) = G_3(k)
\end{aligned}$$

ve

$$\vec{f}(x) = \begin{Vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{Vmatrix}, \quad \vec{F}(k) = \begin{Vmatrix} F_1(k) \\ F_2(k) \\ F_3(k) \end{Vmatrix}, \quad \vec{G}(k) = \begin{Vmatrix} G_1(k) \\ G_2(k) \\ G_3(k) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} i\, a_{11}\, k^3 & -a_{12}\, k^2 & a_{13} \\ a_{21} & -i\, a_{22}\, k & -a_{23}\, k^2 \\ a_{31} & a_{32} & -i\, a_{33}\, k^2 \end{Vmatrix}$$

vazederek

$$\mathbb{A}\, \vec{F}(k) = \vec{G}(k)$$

veyâ $\mathbb{A}^{-1}$ *in varlığı şartı altında*

$$\vec{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{A}^{-1}(k) \cdot \vec{G}(k)\, e^{-ikx}\, dk$$

bulunur.

Fourier dönüşümünün önemli bir özelliği *konvolüsyon teoremi*yle ortaya çıkmaktadır:

$$f_1 * f_2 = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) \cdot f_2(y) dy$$

ile tanımlanan $h(x)$ fonksiyonuna f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu adı verilir. $h(x)$ in Fourier dönüşmüşünü bulmak için $a = -y$ vazederek (IX.2.13) den

$$\mathrm{T}\left\{f(x-y)\right\} = F(k)\, e^{iky} = \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ikx}\, dx$$

yazılabileceğini göz önünde tutarak

$$H(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky}\, f_2(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, f_1(x)\, dx$$

$$= \sqrt{2\pi}\, F_1(k) \cdot F_2(k) \qquad \text{(IX.2.19)}$$

neticesine varılır; yâni iki fonksiyonun konvolüsyonunun Fourier dönüşmüşü Fourier dönüşmüşlerinin çarpımının $\sqrt{2\pi}$ mislidir.

Bazı bellibaşlı fonksiyonların Fourier dönüşmüşlerinin cetveli aşağıda verilmiştir. Fourier dönüşümü hakkında çok daha tam cetvelleri «A. ERDELYİ, W. MAGNUS, F. OBERHETTİNGER and F. TRİCOMİ: *Tables of İntegral Transforms* (2. cild), Mc Graw Hill (1954)» de bulmak mümkündür.

$\vec{x} = \vec{e}_i\, x_i$ ve $\vec{k} = \vec{e}_i\, k_i$ olmak üzere, (i ler üzerinden toplam var), $f = f(\vec{x})$ gibi n bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun ($i = 1, \ldots, n$) Fourier dönüşmüşü

CETVEL : IX. 1

	$f(x)$	$F(k)$
1)	$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2)	$0 < s < 1$ için: $\lvert x\rvert^{-s}$	$\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)$
3)	$\frac{1}{\lvert x\rvert}$	$\frac{1}{\lvert k\rvert}$
4)	$\lvert x\rvert < a: \ (a^2 - x^2)^{-1/2}$ $\lvert x\rvert > a: \quad 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, J_0(ak)$
5)	$\sin(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \sin\left(\frac{k^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
6)	$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{k^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
7)	e^{-ax^2}, $Re(a) > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{k^2}{4a}}$
8)	$\frac{e^{-a\lvert x\rvert}}{x}$, $Re(a) > 0$	$\frac{\left\{(k^2+a^2)^{1/2}+a\right\}^{1/2}}{(k^2+a^2)^{1/2}}$
9)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\lvert k\rvert}$

$$F(\vec{k}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n \text{ adet}} f(\vec{x})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x} \qquad \text{(IX.2.20)}$$

şeklinde tanımlanır. $F(\vec{k})$ ya $f(\vec{k})$ in n boyutlu Fourier dönüşmüşü adı verilir. Ters dönüşümün de

$$\vec{f(x)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d\vec{k} \qquad \text{(IX.2.21)}$$

ile verileceği ve keza $f_1(\vec{x})$ ve $f_2(\vec{x})$ gibi aynı sayıda bağımsız değişkeni haiz iki fonksiyonun konvolüsyonunun $H(\vec{k})$ Fourier dönüşmüşü için

$$H(\vec{k}) = (\sqrt{2\pi})^n F_1(\vec{k}) \cdot F_2(\vec{k}) \qquad \text{(IX.2.22)}$$

bağıntısının geçerli olduğu gösterilir.

Tek boyutlu Fourier dönüşümü için bulunan genel kurallar n boyutlu Fourier dönüşümü için de tesis edilir. Özellikle $j=1,2,\cdots,n$ olmak üzere $|x_j| \to \infty$ için $f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to 0$ ise

$$\mathbf{T}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x} = -ik_j F(\vec{k})$$

olduğu ve keza gene $j=1,2,\cdots,n$ olmak üzere $|x_j| \to \infty$ için $f(x)$ in, $f(x)$ in x_j ye göre ilk $(m-1)$ türevinin sıfır olması hâlinde

$$\mathbf{T}\left\{\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x} = (-ik_j)^m F(\vec{k}) \qquad \text{(IX.2.23)}$$

olduğu tesbit edilir.

$n = 2$ ve 3 e tekaabül eden hâller pratik uygulamada önem arzetmektedir. Eğer

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{ve} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

vazedilecek olursa f ve türevleri için yukarıdaki uygun sınır şartları muvâcehesinde

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_1^2 f)\, e^{i(\xi x+\eta y)}\, dx\, dy = -(\xi^2+\eta^2)\, F(\xi,\eta) \qquad \text{(IX.2.24)}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 f)\, e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}\, dx\, dy\, dz = -(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\, F(\xi,\eta,\zeta) \tag{IX.2.25}$$

olduğu kolayca hesaplanır. Buradaki $F(\xi,\eta)$ ve $F(\xi,\eta,\zeta)$ fonksiyonları $f(x,y)$ ve $f(x,y,z)$ fonksiyonlarına tekaabül eden 2 ve 3 boyutlu Fourier dönüşümlerini göstermektedir.

Şimdi somut bir misâlle Fourier dönüşümü metodunu uygulamak için koordinat orijininde $t=0$ anında T_0 şiddetinde bir ısı kaynağı ithâl edilen sonsuz üç boyutlu bir ortamdaki sıcaklık dağılımını tesbit etmek istiyoruz. Bu takdirde sıcaklık dağılımını veren denklemin

$$\nabla^2 T(x,y,z,t) + T_0\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z)\, \delta(t) = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{IX.2.26}$$

şeklinde olduğu Teorik Fizikte gösterilir. $T=T(x,y,z,t)$ ile ortamda yere ve zamana bağlı sıcaklık dağılımı gösterilmektedir. Fiziksel açıdan, uzay değişkenlerinin sonsuzdaki değerleri için gerek t ve gerekse T nin birinci mertebeden kısmî türevlerinin sıfıra gidecekleri âşikârdır. Bu itibarla zemin Fourier dönüşümünün uygulanması için uygundur. Bu takdirde

$$\overline{T}(\xi,\eta,\zeta,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,y,z,t)\, e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}\, dx\, dy\, dz$$

ile T nin 3-katlı Fourier dönüşmüşünü gösterip (IX.2.26) nın 3-katlı Fourier dönüşmüşünü alalım. Bu takdirde, (IX.2.25) i de göz önünde bulundurarak

$$-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\cdot \overline{T}(\xi,\eta,\zeta,t) + T_0 \frac{\delta(t)}{(\sqrt{2\pi})^3} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \overline{T}(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}$$

ya da

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\, \overline{T} = \overline{T}_0 \frac{\delta(t)}{(\sqrt{2\pi})^3}$$

bulunur ki bu âdî diferansiyel denklem çözüldüğünde

$$\overline{T}(\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{\varkappa T_0}{(\sqrt{2\pi})^3}\,e^{-\varkappa(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}+C$$

elde edilir. C ile muayyen bir integrasyon sâbitine işâret olunmaktadır. Şimdi tersinim formülü aracılığıyla $T(x,y,z,t)$ temel fonksiyonuna dönecek olursak

$$T(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\varkappa T_0}{(\sqrt{2\pi})^3}\,e^{-\varkappa(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)t}\,e^{-i(\xi x+\eta y+\zeta z)}\right.$$

$$\left.+\,C\,e^{-i(\xi x+\eta y+\zeta z)}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

dır. Bu ise

$$T(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\varkappa\,T_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\varkappa\xi^2t-i\xi x)}\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\varkappa\eta^2t-i\eta y)}\,d\eta\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\varkappa\zeta^2t-i\zeta z)}\,d\zeta+C\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

demektir.

Şimdi

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-(\varkappa\xi^2t-i\xi x)\right]d\xi=$$

$$=e^{\frac{x^2}{4\varkappa t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\xi\sqrt{\varkappa t}-\frac{ix}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)^2\right]d\xi$$

yazılabilir. Eğer

$$\xi\sqrt{\varkappa t}-\frac{ix}{2\sqrt{\varkappa t}}=u\,;\qquad d\xi=\frac{du}{\sqrt{\varkappa t}}$$

değişken dönüşümü yapılırsa I_x integrali

$$I_x = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}}{\sqrt{\varkappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}}{\sqrt{\varkappa t}} \sqrt{\pi}$$

olur. Benzer şekilde I_y ve I_z integrallerini de benzer şekilde muameleye tâbî tutacak olursak neticede

$$T(x,y,z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \left(\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t}}\right)^3 \varkappa\, T_0\, e^{-\frac{1}{4\varkappa t}(x^2+y^2+z^2)} + C\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$= \frac{\varkappa\, T_0 \exp\left[-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4\varkappa t}\right]}{(4\pi\varkappa\, t)^{3/2}} + C\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

bulunur. Fakat

$$\lim_{x,y,z \to \pm\infty} T(x,y,z,t) = 0$$

olduğundan $C=0$ olduğu anlaşılır ve nihaî sonuç olarak da

$$T(x,y,z,t) = \frac{\varkappa\, T_0 \,.\, \exp\left[-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4\varkappa t}\right]}{(4\pi\varkappa t)^{3/2}}$$

ya da $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ile göz önüne alınan (x, y, z) noktasının orijine uzaklığını göstererek

$$T(r,t) = \frac{\varkappa\, T_0 \cdot e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}}{(4\pi\varkappa t)^{3/2}} \qquad \text{(IX.2.27)}$$

elde edilir.

(IX.3) LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Laplace dönüşümü tanımını vermeden önce HEAVİSİDE basamak fonksiyonunun

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ \dfrac{1}{2} & \text{eğer} \quad x = 0 \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer} \quad x > 0 \quad \text{ise} \end{cases} \qquad \text{(IX.3.1)}$$

şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon olduğunu hatırlatalım. Diğer taraftan $\delta(x)$ DİRAC fonksiyonunu da göz önünde tutarsak

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ \frac{1}{2} & \text{eğer} \quad x = 0 \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer} \quad x > 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. Buna binâen

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x) \qquad \text{(IX.3.2)}$$

olduğu âşikârdır. Diğer taraftan $H(x)$ in $f(x)$ gibi bir fonksiyonla çarpımı $f(x)$ in bütün $x < 0$ için sıfır olmasını sağlayan bir ameliye olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu itibarla HEAVİSİDE fonksiyonuna $x < 0$ için fonksiyonların sıfır olmalarını temin eden bir operatör gözü ile bakabiliriz.

Şimdi

$$g(\xi) = \sqrt{2\pi}\, f(\xi)\, e^{-c\xi} H(\xi)$$

ile $F(\eta)$ gibi bir fonksiyonun FOURİER dönüşmüşünü gösterelim. HEAVİSİDE basamak fonksiyonunun yukarıda hatırlatılan özelliklerini göz önünde bulundurarak (IX.2.9) Fourier tersinim formülü gereğince

$$F(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{-i\eta\xi}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2\pi}\, f(\xi)\, e^{-c\xi} H(\xi)\right] \times$$

$$\times e^{-i\eta\xi}\, d\xi = \int_{0}^{\infty} f(\xi)\, e^{-(c+i\eta)\xi}\, d\xi \qquad \text{(IX.3.3)}$$

olur. Diğer taraftan $F(\eta)$ nın FOURİER dönüşmüşü de

$$g(\xi)=\sqrt{2\pi}\, f(\xi)\, e^{-c\xi}\, H(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta$$

olacaktır. Bu son ifâdeden

$$f(\xi)\, H(\xi)=\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta)\, e^{(c+i\eta)\,\xi}\, d\eta \qquad \text{(IX.3.4)}$$

elde edilir. Şimdi

$$\xi=x\,, \qquad c+i\eta=s\,, \qquad d\eta=\frac{ds}{i}$$

vazedelim. Bu değişken dönüşümüne göre (IX.3.4) deki integralin limitleri $c-i\infty$ ve $c+i\infty$ olacaktır; şu hâlde (IX.3.3) ve (IX.3.4) ifadeleri de

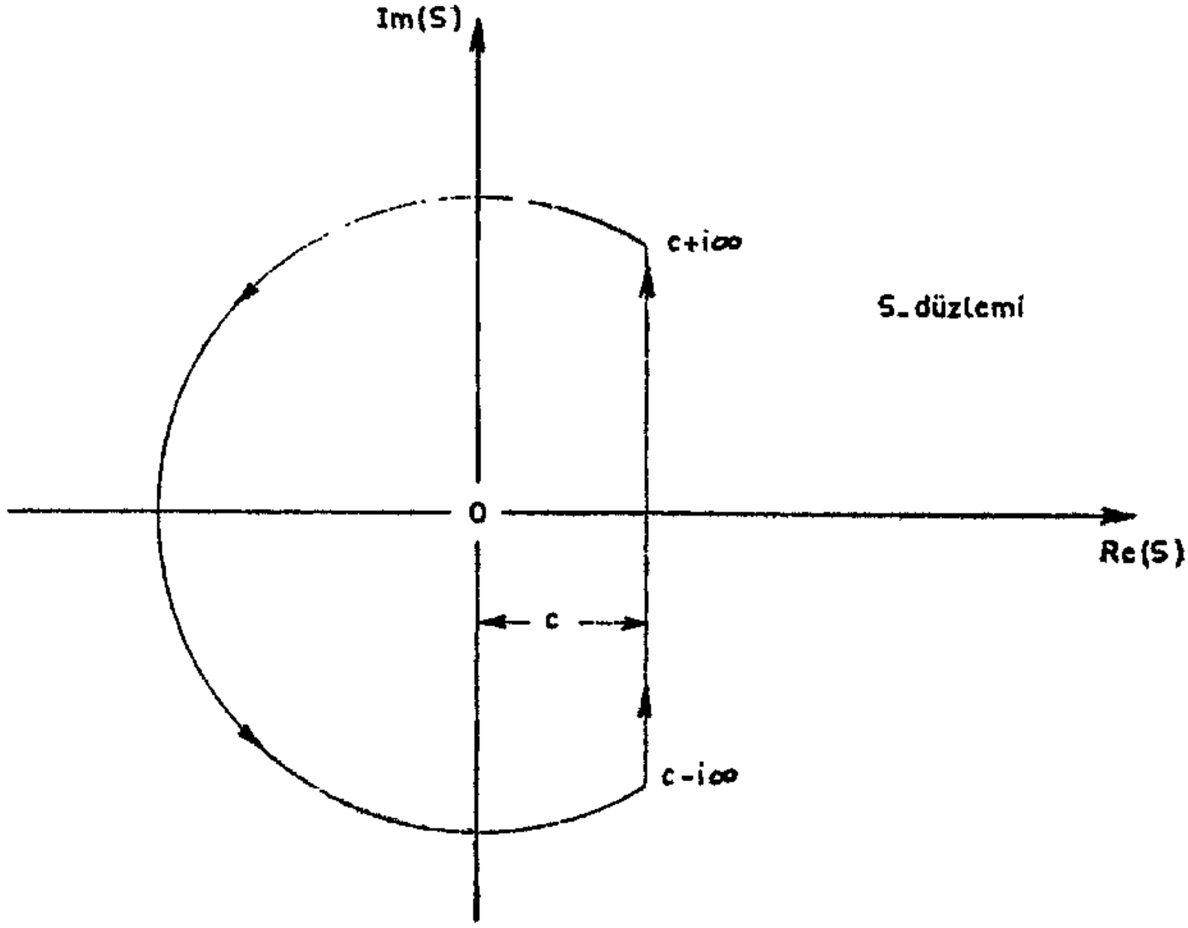
$$\mathfrak{L}\Big\{f(x)\Big\}=F(s)=\int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-sx}\, dx \qquad \text{(IX.3.5)}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\}=f(x)H(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{sx}\, ds \qquad \text{(IX.3.6)}$$

şekline girer. $F(s)$ ye $f(x)$ fonksiyonunun LAPLACE dönüşmüşü adı verilir. (IX.3.5) ifâdesi LAPLACE dönüşümünün tanımı olup (IX.3.6) ifâdesi de bu dönüşüme tekaabül eden ters dönüşümü tanımlamaktadır. Bu sonuncu formülde $H(x)$ in varlığı dolayısıyla LAPLACE dönüşümünün sadece $x>0$ için tanımlanmış fonksiyonlar için geçerli olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısiyle aksi söylenmedikçe bu bölümde $f(x)$ gibi bir fonksiyonun daimâ yalnız $x>0$ için tanımlanmış olduğunu kabul edecek ve bu itibarla da LAPLACE dönüşümünün tersinim formülü için sâdece

$$\mathfrak{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\}=f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{sx}\, ds \qquad \text{(IX.3.7)}$$

yazacağız. Buna göre LAPLACE dönüşümünün tersini almak için Şekil: IX.1 deki gibi bir çevre üzerinden integral almak lâzımdır.



Şekil : IX.1.

MİSAL : f(x)=1 in LAPLACE dönüşmüşünü hesaplayınız :

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-sx} dx = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$$

LAPLACE dönüşümünün tersinim formülünden faydalanarak bu sonucu gerçekleyelim.

$c>0$ *olmak üzere*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{sx} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}}{s} ds$$

integralini Şekil: IX.1 deki bir çevre üzerinden aldığımızda

$$f(x)=1$$

bulunur.

LAPLACE dönüşümünün bellibaşlı özelliklerini doğrudan doğruya (IX.3.5) ve (IX.3.7) tanım bağıntılarından hareketle tesbit etmek mümkündür. Bunların ayrıntılı hesaplarını bir alıştırma olmak üzere okuyucuya bırakarak sâdece özelliklerini sıralamakla yetiniyoruz.

1) $$\mathfrak{L}\left\{\sum_i c_i f_i(x)\right\} = \sum_i c_i \mathfrak{L}\left\{f_i(x)\right\} \qquad \text{(IX.3.8)}$$

2) $$\mathfrak{L}\left\{e^{ax} f(x)\right\}=F(s+a) \qquad \text{(IX.3.9)}$$

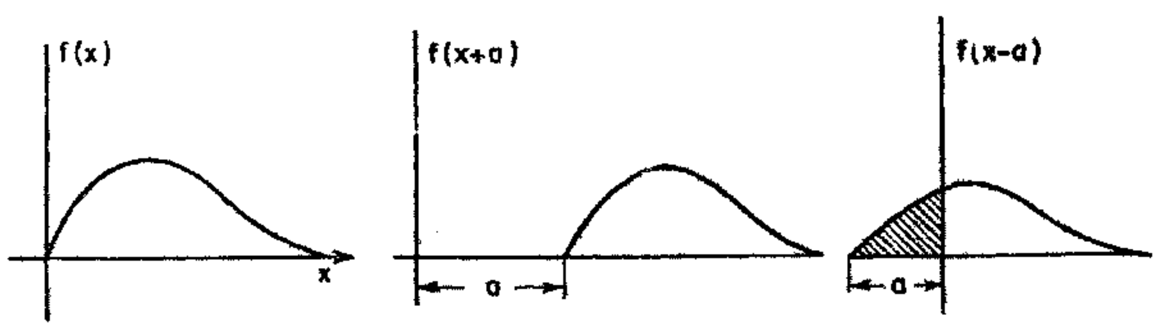
3) $$\mathfrak{L}\left\{x f(x)\right\}=-\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\left\{f(x)\right\}$$

$$\mathfrak{L}\left\{x^n f(x)\right\}=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathfrak{L}\left\{f(x)\right\} \qquad \text{(IX.3.10)}$$

4) $$\mathfrak{L}\left\{x^{-n} f(x)\right\} = \int_s^\infty \cdots \int_s^\infty \mathfrak{L}\left\{f(x)\right\}(ds)^n \qquad \text{(IX.3.11)}$$

5) $$\mathfrak{L}\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (a>0) \qquad \text{(IX.3.12)}$$

6) $$\mathfrak{L}\left\{f(x+a)\right\} = e^{as} F(s), \quad (a>0) \qquad \text{(IX.3.13)}$$



Şek. IX.2

NOT: Bu son formülü uygularken, kaydırma dolayısıyla $f(x)$ in $x<0$ kısmına geçecek parçasının, LAPLACE dönüşümü ancak $x>0$ için tanımlandığından, kesilip atılması lâzım geldiğine işâret olunmalıdır. (Bk. Şekil: IX.2).

7) $$\mathfrak{L}\left\{\frac{d\,f(x)}{dx}\right\}=s\;\mathfrak{L}\left\{f(x)\right\}-f(+0) \tag{IX.3.14}$$

$$\mathfrak{L}\left\{f'(x)\right\}=\int_0^\infty f'(x)\;e^{-sx}\,dx=\Big[f(x)\;e^{-sx}\Big]_0^\infty+s\int_0^\infty f(x)\;e^{-sx}\,dx$$

$$=s\,\mathfrak{L}\left\{f(x)\right\}-f(+0)$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\}=s^n\,\mathfrak{L}\left\{f(x)\right\}-s^{n-1}f(+0)-s^{n-2}f'(+0)\cdot\cdots$$

$$\cdots\cdot-f^{n-1}(+0). \tag{IX.3.15}$$

8) $$\mathfrak{L}\left\{\int_0^x f(\xi)d\xi\right\}=\frac{1}{s}\mathfrak{L}\left\{f(\xi)\right\} \tag{IX.3.16}$$

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right\}=\int_0^\infty\left[\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right]e^{-sx}\,dx$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_\xi^\infty f(\xi)\,e^{-sx}\,dx\right]d\xi=\frac{1}{s}\int_0^\infty f(\xi)e^{-s\xi}dx$$

9) $$\mathfrak{L}\left\{\int_0^x\cdots\int_0^x f(\xi)\,(d\xi)^n\right\}=\frac{1}{s^n}\,\mathfrak{L}\left\{f(\xi)\right\} \tag{IX.3.17}$$

10) *Konvolüsyon Özelliği:*

$$\mathfrak{L}\left\{f*g\right\}=\mathfrak{L}\left\{\int_0^x f(y)\;g(y-x)\;dy\right\}=\mathfrak{L}\left\{f(x)\right\}\cdot\mathfrak{L}\left\{g(x)\right\} \tag{IX.3.18}$$

CETVEL : IX.2

	$f(x)$	$F(s)$
1	$x^n e^{-ax}$	$\Gamma(n+1)(s+a)^{-n-1} \quad Re(s) > Re(a)$
2	$\cos ax$	$\dfrac{s}{s^2+a^2} \quad Re(s) > Im(a)$
3	$\sin ax$	$\dfrac{a}{s^2+a^2} \quad Re(s) > Im(a)$
4	$x \cos ax$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \quad Re(s) > Im(a)$
5	$x \sin ax$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2} \quad Re(s) > Im(a)$
6	$\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cos(2a\sqrt{x})$	$\dfrac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{s}} \quad Re(s) > 0$
7	$\sin(2a\sqrt{x})$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{a^2}{s}} \quad Re(s) > 0$
8	a	$\dfrac{a}{s} \quad Re(s) > 0$
9	e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a} \quad Re(s) > Re(a)$
10	$\cosh ax$	$\dfrac{s}{s^2-a^2} \quad Re(s) > Re(a)$
11	$\sinh a$	$\dfrac{a}{s^2-a^2} \quad Re(s) > Re(a)$
12	$\dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{-a/x}, \lvert \arg a \rvert < \dfrac{\pi}{2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}\, e^{-2\sqrt{as}}, \quad \lvert \arg s \rvert < \dfrac{\pi}{2}$
13	$J_n(ax)$, $Re(n)>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \left(\dfrac{a}{s+\sqrt{s^2+a^2}} \right)^n, Re(s)>Im(a)$
14	$\dfrac{1}{x} J_n(ax)$, $Re(n)>0$	$\dfrac{1}{n} \left(\dfrac{a}{s+\sqrt{s^2+a^2}} \right)^n, Re(s) > Im(a)$
15	$x^n J_n(ax)$, $Re(n)>-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) \dfrac{(2a)^n}{(s^2+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}, Re(s)>Im(a)$

Bu özellikler arasında, bilhassa, bir fonksiyonun türevlerinin LAPLACE dönüşmüşleri çok ilgi çekicidir; çünkü fonksiyonun ve LAPLACE dönüşmüşü alınan türevden bir mertebe daha düşük olan türevlerinin $x=+0$ daki değerlerleri de, yâni fonksiyonun başlangıç değerleri de, kendiliklerinden ortaya çıkmaktadırlar. Bu itibarla LAPLACE dönüşümünün bilhassa başlangıc dèğerlerinin göz önüne alındığı problemlere uygulanacağı anlaşılmaktadır. Meselâ mekanik, elektrik vs... gibi ancak bir $t=0$ ânından itibâren varlıklarını belirten değişken büyüklüklerin bahis konusu olduğu yerlerde t zaman değişkenine göre LAPLACE dönüşümü yapmak daimâ faydalı bir usûldür.

Cetvel: IX.2 de sık sık kullanılan bazı fonksiyonların LAPLACE dönüşmüşleri verilmiş bulunmaktadır.

LAPLACE dönüşümünün diferansiyel denklemlere uygulanması ilgi çekicidir.

MİSAL: 1. $x(t)+c_0\, x(t)=f(t)$ **denklemini çözünüz.**

Her iki tarafın LAPLACE dönüşümünü alarak

$$s\, X(s)-x(+0)+c_0\; X(s)=F(s)$$

ve buradan da

$$X(s)=\frac{F(s)}{s+c_0}+\frac{x(+0)}{s+c_0} \qquad \text{(IX.3.19)}$$

bulunur. Bu ifâdeden hareketle, $x(t)$ fonksiyonunu bulmak için tersinim formülünden faydalanarak ters LAPLACE dönüşümü yapılır. Bunu doğrudan doğruya yapmaktansa CETVEL: IX. 2 den faydalanmak daha kolaydır.

Ancak (IX.3.18) konvolüsyon özelliğine ve CETVEL: IX.2 nin de 9. satırına binâen (IX.3.19) un yanındaki ilk terim

$$F(s)\cdot\frac{1}{s+c_0}=\mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\}\cdot\mathfrak{L}\left\{ e^{-c_0 t} \right\}=\mathfrak{L}\left\{ \int_{0}^{\tau} f(\tau)\, e^{-c_0(t-\tau)}\, d\tau \right\}$$

yazılabileceğinden $x(t)$ yi bulmak için (IV.3.19) a ters LAPLACE dönüşümü uygulandığında

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot\frac{1}{s+c_0}\right\}=e^{-c_0t}\int_0^t f(\tau)\,e^{-c_0\tau}\,d\tau$$

olur. Buna binâen netice olarak

$$x(t)=e^{-c_0t}\int_0^t f(\tau)\,e^{-c_0\tau}\,d\tau+x(+0)\,e^{-c_0t}$$

bulunmuş olur.

Görülüyor ki bir diferansiyel denkleme LAPLACE dönüşümünün uygulanması onu cebirsel bir denkleme dönüştürmektedir. Bu arada, diferansiyel denklemi gerçekleyen fonksiyonun başlangıç şartları da kendiliğinden göz önüne alınmış olmaktadır. Bu cebirsel denklem, aranan fonksiyonun LAPLACE dönüşmüşü çıkarıldıktan sonra tersinim formülü ya da, doğrudan doğruya LAPLACE dönüşüm cetvelleri aracılığıyla, temel fonksiyon tâyin olunur. Netice, evvelce başlangıç şartları zâten uygulanmış bulunduğundan, hiç bir integrasyon parametresi ihtivâ etmez.

Eğer verilen diferansiyel denklemi gerçekleyen fonksiyonun ait olduğu uzaya *temel fonksiyon uzayı* ve LAPLACE dönüşümünün ait olduğu uzaya da *tasvir uzayı* diyecek olursak LAPLACE dönüşümü aracılığıyla diferansiyel denklemler çözme metodunu şu şekilde şemalandırabiliriz:

TEMEL UZAY:	(Diferansiyel denklem+Başlangıç Şartları)		Çözüm
	↓		↑
	$\mathfrak{L}$ Dönüşümü		$\mathfrak{L}^{-1}$ Dönüşümü
	↓		↑
TASVİR UZAYI:	Cebrik Denklem	⟶	Çözüm.

MİSAL: 2. x(0)=0 ve x′(0)=2 başlangıç şartları altında

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+10\frac{dx(t)}{dt}+74\,x(t)=28\sin 4t$$

denklemini çözünüz.

Denklemin LAPLACE dönüşümünü alacak olursak

$$s^2X(x)-s\,x(0)-x'(0)+10[s\,X(s)-x(0)]+74\,X(s)=\frac{112}{s^2+16}$$

veyâ başlangıç şartlarını göz önünde tutarak

$$s^2X(s)-2+10s\,X(s)+74\,X(s)=\frac{112}{s^2+16}$$

veyâ

$$X(s)=\frac{112}{(s^2+16)(s^2+10s+74)}+\frac{2}{s^2+10s+74}$$

bulunur. Buradaki kesirleri kısmî kesirlere parçalayalım ;

$$\frac{1}{s^2+10s+74}=\frac{A}{s+5-7i}+\frac{B}{s+5+7i}$$

olsun. Buradan kolaylıkla

$$A=\frac{1}{14\,i}\,;\quad B=-\frac{1}{14\,i}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{112}{(s^2+16)(s^2+10s+74)}=\frac{C}{(s+4i)}+\frac{D}{(s+4i)}+\frac{E}{s+5-7i}+\frac{F}{s+5+7i}$$

yazmak sûretiyle

$$C=-\frac{7}{1241}(20+29i)\qquad D=-\frac{7}{1241}(20-29i)$$

$$E=\frac{4}{1241}(35+4i)\qquad F=\frac{4}{1241}(35-4i)$$

olduğu tesbit edilir. Buna göre

$$X(s)=-\frac{7}{1241}\,\frac{20+29\,i}{s-4\,i}-\frac{7}{1241}\,\frac{20-29\,i}{s+4\,i}+\frac{4}{1241}\,\frac{35+4\,i}{s+(5-7\,i)}$$

$$+\frac{4}{1241}\,\frac{35-4\,i}{s+(5+7\,i)}+\frac{1}{14\,i}\,\frac{1}{s+(5-7\,i)}-\frac{1}{14\,i}\,\frac{1}{s+(5+7\,i)}$$

olacaktır. LAPLACE dönüşüm cetvellerine göre ters dönüşüme tekaabül eden fonksiyonları tesbit ederek:

$$x(t) = -\frac{7}{1241}(20+29i)e^{4it} - \frac{7}{1241}(20-29i)e^{-4it}$$

$$+\frac{4}{1241}(35+4i)e^{-(5-7i)t} + \frac{4}{1241}(35-4i)e^{-(5+7i)t}$$

$$+\frac{1}{14i}e^{-(5-7i)t} - \frac{1}{14i}e^{-(5+7i)t}$$

$$= -\frac{7}{1241}\left[20(e^{4it}+e^{-4it})+29i(e^{4it}-e^{-4it})\right]$$

$$+\frac{4}{1241}\left[35(e^{7it}+e^{-7it})+4i(e^{7it}-e^{-7ti})\right]e^{-5t}$$

$$+\frac{1}{14i}\left[e^{7it}-e^{-7it}\right]e^{-5t}$$

$$= -\frac{14}{1241}(20\cos 4t - 29\sin 4t) + \frac{8}{1241}(35\cos 7t -$$

$$-4\sin 7t)e^{-5t} + \frac{1}{7}(\sin 7t)e^{-5t}$$

bulunur.

MİSAL: 3. $x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0$ **başlangıç şartları altında**

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dx^{n-1}} + \cdots + c_1\frac{dx(t)}{dt} + c_0 x(t) = f(t)$$

şeklindeki sâbit katsayılı diferansiyel denklemi çözünüz.

Her iki tarafın da LAPLACE dönüşümünü alalım ve başlangıç şartlarını uygulayalım. Bu takdirde

$$s^n X(s) + c_{n-1}s^{n-1}X(s) + \cdots + c_1 s X(s) + c_0 X(s) = F(s)$$

olur. Kısaca

$$\frac{1}{Q(s)} = P(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0$$

vazedecek olursak bir evvelki denklemden

$$X(s)=\frac{1}{P(s)}\cdot F(s)=Q(s)\cdot F(s)$$

olur. Eğer $\mathfrak{L}^{-1}\left\{Q(s)\right\}$ *tesbit edilebilirse konvolüsyon teoremi gereğince derhâl*

$$x(t)=q(t) * f(t)=\int_0^\tau q(\tau)\, f(\tau-t)\, d\tau$$

olduğu görülür.

Özel bir hâl olarak $P(s)=0$ *denkleminin bütün köklerinin biribirlerinden farklı olduklarını varsayalım. Bu takdirde*

$$P(s)=(s-a_1)\,(s-a_2)\cdots(s-a_n)$$

yazılabilecek ve dolayısıyla da

$$Q(s)=\frac{1}{P(s)}=\frac{b_1}{s-a_1}+\frac{b_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{b_n}{s-a_n}$$

şeklinde bir basit kesirlere parçalama mümkün olabilecektir. Buradaki b_n *katsayılarını hesaplayabilmek için bütün ifâdeyi* $1\leqq\nu\leqq n$ *olmak üzere* $s-a_\nu$ *ile çarpalım, ve sonra da* $s\to a_\nu$ *limitini alalım. Bu takdirde sağdaki kısmî kesirler toplamında* ν*-nüncüsü hâriç diğer bütün terimler sıfır olurlar.* ν*-nüncü terim de*

$$\lim_{s\to a_\nu}\frac{b_\nu\,(s-a_\nu)}{s-a_\nu}=b_\nu$$

şekline bürünür. Şu hâlde $P(a_\nu)=0$ *olduğunu da göz önünde tutarak*

$$b_\nu=\lim_{s\to a_\nu}\frac{s-a_\nu}{P(s)}=\lim_{s\to a_\nu}\frac{1}{\dfrac{P(s)-P(a_\nu)}{s-a_\nu}}=\frac{1}{P'(a_\nu)}$$

olacaktır. Buna binâen

$$Q(s) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{P'(a_\nu)} \cdot \frac{1}{s-a_\nu}$$

veyâ

$$q(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{P'(a_\nu)} \cdot e^{a_\nu t}$$

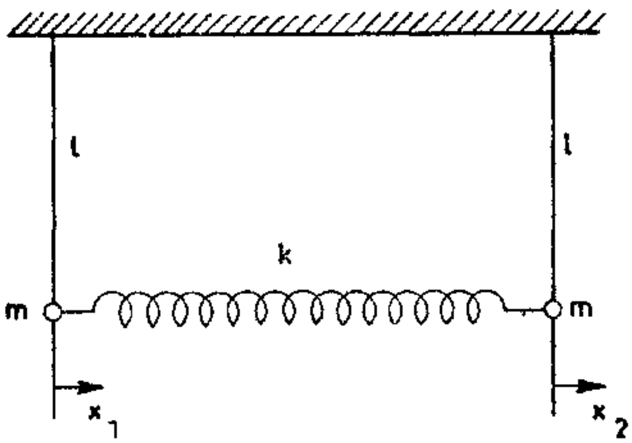
ve dolayısıyla

$$x(t) = \int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{P'(a_\nu)} e^{a_\nu \tau} f(\tau-t)\, d\tau$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{P'(a_\nu)} \int_0^t f(\tau-t)\, e^{a_\nu \tau}\, d\tau$$

bulunur.

MİSAL: 4. Şek: IX.3 de gösterildiği gibi kuple iki sarkaç verilmektedir. Bu takdirde her iki sarkacın genliklerinini zamanın fonksiyonu olarak $x_1(0)=x_2(0)=0$ $\dot{x}_1(0)=v$, $\dot{x}_2(0)=0$ başlangıç şartları altında belirleyiniz.



Şek. IX 3

g ile yerçekimi ivmesini göstererek NEWTON hareket denklemleri

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x_2 + k(x_1 - x_2)$$

şeklindedirler. Her iki denklemin LAPLACE dönüşümünü alırsak

$$m \left[s^2 X_1(s) - s x_1(0) + \dot{x}_1(0) \right] = -\frac{mg}{l} X_1(s) + k \left[X_2(s) - X_1(s) \right]$$

$$m \left[s^2 X_2(s) - s x_2(0) - \dot{x}_2(0) \right] = -\frac{mg}{l} X_2(s) + k \left[X_1(s) - X_2(s) \right]$$

ve sınır şartlarının uygulanmasıyla

$$m \left[s^2 X_1(s) - v \right] = -\frac{mg}{l} X_1(s) + k \left[X_2(s) - X_1(s) \right]$$

$$m s^2 X_2(s) = -\frac{mg}{l} X_2(s) + k \left[X_1(s) - X_2(s) \right]$$

olur. Bu, X_1 ve X_2 bilinmeyenleri cinsinden âdî bir cebirsel denklem sistemidir. Buradan her iki bilinmeyen de kolaylıkla çıkartılıp ters LAPLACE dönüşümü yapılacak olursa $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ elde edilir. Meselâ

$$X_1(s) = \frac{v\left(s^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)}{\left(s^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)\left(s^2 + \frac{g}{l}\right)} = \frac{v}{2}\left[\frac{1}{s^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} + \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}}\right]$$

elde edilir ve buradan da

$$x_1(t) = \frac{v}{2}\left[\frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}\, t}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}} + \frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\right]$$

bulunur. $x_2(t)$ de benzer şekilde belirlenir.

X. Bölüm

GREEN FONKSİYONU

(X.1) GENEL TANIM.

D ile $\vec{r} = x_k \vec{e}_k$ vektörünün x_k bileşenlerine tesir eden lineer bir diferansiyel operatörü gösterelim. Bu takdirde

$$\mathbf{D}\,\psi(\vec{r}) = 0 \qquad (X.1.1)$$

homogen bir diferansiyel denklemi ve

$$\mathbf{D}\,\psi(\vec{r}) = f(\vec{r}) \qquad (X.1.2)$$

de sağ-yanlı bir diferansiyel denklemi temsil eder. Bu denklemleri gerçekleyen fonksiyonlar uygun sınır şartlarına tâbi kılınacaklardır. Sağ-yanlı denklemin sağ yanı $f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ olduğu takdirde (X.1.2) nin çözümü mevcûd ve tek değerli ise bu çözümün, vaz edilen sınır şartlarına uyan şekline *GREEN fonksiyonu* adı verilir. Şu hâlde bu fonksiyon vazedilmiş sınır şartları altında

$$\mathbf{D}\,G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \qquad (X.1.3)$$

denklemini gerçekleyecektir. Bu denklemin sağ yanı $\vec{r}$ ve $\vec{r}\,'$ ye bağlı olduğundan çözümün de aynı değişkenlere bağlı olması tâbiîdir. Bunun içindir ki

$$G = G(\vec{r}, \vec{r}\,') \qquad (X.1.4)$$

yazılmış bulunmaktadır.

Şimdi (X.1.3) ifâdesinin her iki yanını da $f(\vec{r}\,')$ ile çarpıp $\vec{r}\,'$ nün değişim bölgesi olan B bölgesi üzerinden integre edelim:

$$\int_B f(\vec{r}\,')\,\mathbf{D}\,G(\vec{r},\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' = \int_B \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'.$$

Bu ifâdenin sol yanında, $\mathbf{D}$ nin yalnız $\vec{r}$ nin bileşenlerine tesir etmesi dolayısıyla $\mathbf{D}$ integral dışına alınabilir; ifâdenin sağ yanı ise DİRAC fonksiyonunun özelliği göz önünde tutularak yeniden yazılırsa

$$\mathbf{D}\left[\int_B G(\vec{r},\vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'\right] = f(\vec{r}) \qquad \text{(X.1.5)}$$

ifâdesi bulunur. (X.1.5) in (X.1.2) ile karşılaştırılması (X.1.2) nin göz önüne alınan sınır şartlarına uygun çözümü olan $\psi(\vec{r})$ nin

$$\psi(\vec{r}) = \int_B G(\vec{r},\vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' \qquad \text{(X.1.6)}$$

ile verildiğini göstermektedir. Buna göre eğer (X.1.2) gibi bir diferansiyel denklemi belirli bir B bölgesinin sınırında geçerli olan bazı sınır şartları altında çözmek istersek (X.1.3) denklemini gerçekleyen GREEN fonksiyonu yardımıyla (X.1.6) ifâdesini teşkil etmemiz kâfîdir.

(X.2) EK SINIR - DEĞER PROBLEMİ

Teorik Fizikte karşımıza çıkan $\mathbf{D}$ diferansiyel operatörleri daha ziyâde ikinci mertebeden diferansiyel operatörlerdir. Bu itibarla biz de bundan sonra $\mathbf{D}$ yi ikinci mertebeden addedeceğiz. Bu takdirde $u(\vec{r})$ ve $v(\vec{r})$ iki keyfî fonksiyonu göstermek ve $P_k(u, v)$ de u ile v ye ve bir de bunların en fazla birinci mertebeden kısmî türevlerine bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$u\widetilde{\mathbf{D}}v - v\mathbf{D}u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} P_k(u, v) \qquad \text{(X.2.1)}$$

ifâdesiyle belirlenen $\breve{\mathbf{D}}$ operatörüne $\mathbf{D}$ ye *ek - operatör* adı verilir.

Bu tanım ifâdesinin sağ yanı n boyutlu bir uzayda kartezyen bir koordinat sisteminde

$$\vec{P}(u, v) = \sum_{k=1}^{n} \vec{e}_k P_k(u, v)$$

gibi bir vektörün diverjansı şeklindedir. Buna binâen (X.2.1) ifâdesinin kapalı bir B bölgesi üzerinden integrali alınırsa GAUSS formülü gereğince bu ifâdenin sağını bir yüzey integraline dönüştürmek mümkündür. dS ile yüzey elemanını ve N_k ile de dS ye tekaabül birim normâl vektörünün bileşenlerini göstermek üzere (X.1.7) den

$$\int_B (u\breve{\mathbf{D}}v - v\mathbf{D}u)\,d\vec{r} = \int_S \sum_{k=1}^{n} N_k P_k(u,v)\,dS \qquad \text{(X.2.2)}$$

olacaktır.

Bu son ifâdenin çok özel, fakat o nisbette de kullanışlı bir hâlini elde etmek için $\vec{A}$ gibi bir vektöre GAUSS integral formülünü uygulayalım:

$$\int_B \operatorname{div} \vec{A}\, d\vec{r} = \int_S \vec{A}\cdot\vec{N}\, dS = \int_S \sum_{k=1}^{n} N_k A_k\, dS = \int_S A_N\, dS \qquad \text{(X.2.3)}$$

Burada A_N ile, kolayca anlaşılacağı vechile $\vec{A}$ vektörünün $\vec{N}$ birim normâl vektörü üzerine izdüşümü gösterilmektedir. $\vec{A}$ vektörünün ψ gibi skaler bir fonksiyonun gradyenti ile φ gibi skaler bir fonksiyonun çarpımı şeklinde ifâde edilebilmesi hâlinde, yâni

$$\vec{A} = \varphi\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \psi = \varphi \sum_{k=1}^{m} \vec{e}_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

için

$$\vec{A} \cdot \vec{N} = A_N = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N}$$

olması hasebiyle (X.1.9) dan

$$\int_B \operatorname{div} (\varphi \, \overrightarrow{\text{grad}} \, \psi) \, d\vec{r} = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} \, dS$$

veyâ

$$\int_B (\overrightarrow{\text{grad}} \, \varphi) \, (\overrightarrow{\text{grad}} \, \psi) \, d\vec{r} + \int_B \varphi \, \nabla^2 \psi \, d\vec{r} = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} \, dS \qquad \text{(X.2.4)}$$

bulunur. Bu formülde φ ile ψ yi değiş tokuş ederek ve böylece elde edilen ifâdeyi de (X.2.4) den çıkartarak

$$\int_B (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) \, d\vec{r} = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS \qquad \text{(X.2.5)}$$

ifâdesi elde edilir. Bu ifâde (X.1.8) in özel bir hâli olarak gözükmekte ve bu hâl için $\mathbf{D} = \widetilde{\mathbf{D}} = \nabla^2$ olduğu anlaşılmaktadır. (X.2.4) formülünün *birinci GREEN teoreminin* ve (X.2.5) formülünün de *ikinci GREEN teoreminin* temelini teşkil ettiği söylenir.

Kapalı bir sınır için, ya da kapalı bir sınırın sürekli deformasyonuyla sonsuza kadar uzatılmış bir sınır için geçerli olan sınır şartlarına *gerçek sınır şartları* adı verilir. İkinci hâl bahis konusu olduğunda bu, göz önüne alınan çözümün asimtotik davranışının önceden tesbit edilmiş olmasına denktir.

Böylece

$$\mathbf{D} \psi(\vec{r}) = f(\vec{r}) \qquad \text{(X.2.6)}$$

gibi bir diferansiyel denklemin gerçek sınır şartlarına

$$\widetilde{\mathbf{D}} \, \widetilde{\psi}(r) = f(\vec{r}) \qquad \text{(X.2.7)}$$

şeklindeki diferansiyel denklemin aynı sınır üzerinde geçerli olan

$$\sum_{k=1}^{n} N_k P_k(\psi, \widetilde{\psi}) = 0 \tag{X.2.8}$$

şeklindeki *ek sınır şartları* tekaabül ettirilir. Ek sınır şartlarına binâen (X.2.2) ifâdesi sıfır olacaktır:

$$\int_B (\psi \widetilde{\mathbf{D}} \widetilde{\psi} - \widetilde{\psi} \mathbf{D} \psi)\, d\vec{r} = 0 \tag{X.2.9}$$

Ek GREEN fonksiyonu ek sınır şartlarına tâbî olarak

$$\widetilde{\mathbf{D}}\, G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{X.2.10}$$

denkleminin çözümü şeklinde tanımlanır.

Eğer (X.2.9) da $\widetilde{\psi} = \widetilde{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ vazedilirse (X.2.6) ve (X..10) un ışığı altında

$$\int_B (\psi \widetilde{\mathbf{D}} \widetilde{\psi} - \widetilde{\psi} \mathbf{D} \psi)\, d\vec{r} = \int_B (\psi\, \widetilde{\mathbf{D}} \widetilde{G} - \widetilde{G}\, \mathbf{D} \psi)\, d\vec{r} =$$

$$= \int_B \left\{ \psi(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}')\, f(\vec{r}) \right\} d\vec{r} = 0$$

ve dolayısıyla

$$\psi(\vec{r}') = \int_B \widetilde{G}(\vec{r}, \vec{r}')\, f(\vec{r})\, d\vec{r}$$

bulunur. Bunu (X.1.6) ile karşılaştırırsak

$$\psi(\vec{r}) = \int_B G(\vec{r}, \vec{r}')\, f(\vec{r}')\, d\vec{r}'$$

olması dolayısıyla keyfî bir $f(\vec{r})$ için

$$\widetilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}) \tag{X.2.11}$$

olduğu sonucu elde edilir. Bu GREEN fonksiyonunun çok önemli bir özelliğini teşkil etmektedir.

Eğer meselâ LAPLACE operatörü için gördüğümüz vechile $\mathbf{D}=\breve{\mathbf{D}}$ ise $\mathbf{D}$ nin kendi kendine ek bir diferansiyel operatör olduğu söylenir. Bu takdirde $G=\breve{G}$ olacağından (X.2.11) vâsıtasıyla, kendi kendine ek bir diferansiyel denklem için GREEN fonksiyonunun simetrik bir fonksiyon olduğu görülmektedir:

$$\breve{G}(\vec{r}, \vec{r}')=G(\vec{r}', \vec{r}) \tag{X.2.12}$$

(X.2.9) bağıntısı yardımıyla bir başka önemli sonuç daha elde edilebilir:

$$\breve{\mathbf{D}}\breve{\psi}=0 \tag{X.2.13}$$

ek homogen denklemi ek sınır şartlarını gerçekleyen ve özdeş olarak sıfır olmayan bir $\breve{\psi}$ çözümünü haiz ise (X.2.6) diferansiyel denklemi, (X.2.6) ve (X.2.12) bağıntıları hasebiyle

$$\int_B \breve{\psi}\,\mathbf{D}\,\psi\, d\vec{r}=\int_B \breve{\psi} f\, d\vec{r}=0 \tag{X.2.14}$$

olmasından ötürü, f ancak $\breve{\psi}$ ya dik ise çözümü haiz olacaktır.

Eğer kendi kendine ek bir diferansiyel denklem göz önüne alınıyorsa (X.1.2) sağ yanlı denkleminin çözümü olabilmesi için $f(\vec{r})$ nin, (X.1.1) homogen denkleminin sınır şartlarını gerçekleyen her çözümüne dik olması gerekir. Aksi hâlde hiçbir $\psi(\vec{r})$ çözümü mevcûd olamaz.

Eğer (X.2.13) ek homogen diferansiyel denklemi vaz edilen sınır şartlarına uyan $\breve{\psi}_\nu(\vec{r})$ gibi çözümleri haiz ise bunların lineer bir kombinezonu da gene (X.2.13) ek homogen diferansiyel denkleminin bir çözümü olacaktır. Eğer $\breve{\psi}_\nu(\vec{r})$ fonksiyonları ortonormâl fonksiyonlarsa bu takdirde

$$g(\vec{r}, \vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')-\sum_\nu \breve{\psi}_\nu(\vec{r})\,\psi_\nu(\vec{r}')$$

ifâdesi (X.2.13) ün herhangi bir çözümüne dik olur. Filhakika $\breve{\psi}_\mu(\vec{r}')$ böyle bir çözüm olduğu takdirde

$$\int_B g(\vec{r},\vec{r}\,')\,\widetilde{\psi}_\mu(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_B \left\{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - \sum_\nu \widetilde{\psi}_\nu(\vec{r})\,\widetilde{\psi}_\nu(\vec{r}\,')\right\}\widetilde{\psi}_\mu(\vec{r})\,d\vec{r}$$

$$= \widetilde{\psi}_\mu(\vec{r}\,') - \sum_\nu \widetilde{\psi}_\nu(\vec{r}\,') \int_B \widetilde{\psi}_\nu(\vec{r})\,\widetilde{\psi}_\mu(\vec{r})\,d\vec{r} = \widetilde{\psi}_\mu(\vec{r}\,') - \sum_\nu \widetilde{\psi}_\mu(\vec{r}\,')\,\delta_{\mu\nu}$$

$$= \widetilde{\psi}_\mu(r') - \widetilde{\psi}_\mu(r') = 0$$

olur. Binâenaleyh $g=f$ vazedilirse (X.2.14) dolayısıyla

$$\mathbf{D}\,G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - \sum_\nu \widetilde{\psi}_\nu(\vec{r})\,\widetilde{\psi}_\nu(\vec{r}\,') \tag{X.2.15}$$

denklemi bir çözümü haiz olacaktır. Bu denklemi gerçekleyen $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ fonksiyonuna genelleştirilmiş GREEN fonksiyonu adı verilmektedir.

Ek homogen

$$\widetilde{\mathbf{D}}\,\widetilde{\psi}(\vec{r}) = 0$$

diferansiyel denkleminin $\widetilde{\psi}_\nu(\vec{r})$ çözümlerinin

$$\mathbf{D}\,\psi(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

denkleminin sağ yanındaki $f(\vec{r})$ ye dik olduklarını gördüktü. Buna binâen, (X.2.15) ifâdesini $f(\vec{r}\,')$ ile çarpıp integre edelim:

$$\int_B f(\vec{r}\,')\,\mathbf{D}\,G(\vec{r},\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' = \int_B f(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' - \int_B \sum_\nu \widetilde{\psi}_\nu(\vec{r})\,\psi_\nu(\vec{r})\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'$$

$$= \mathbf{D}\int_B G(\vec{r},\vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,dr' = f(\vec{r})$$

olur. Bu ise sağ-yanlı denklemin çözümünün gene

$$\psi(\vec{r}) = \int_B G(\vec{r},\vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' \tag{X.2.16}$$

şeklinde olduğunu göstermektedir.

Kompleks bir fonksiyon uzayı göz önüne alındığında eğer aynı sınır şartlarını tahkik eden keyfî iki $u(\vec{r})$ ve $v(\vec{r})$ fonksiyonu için

$$\int_B \left[u(\mathbf{D}\,v)^* - u^*\,\mathbf{D}\,v\right] d\vec{r} = 0 \qquad (X.2.17)$$

ise **D** operatörüne *hermitsel* denildiğini önceden görmüştük. Bu şartlar altında

$$G^*(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(\vec{r}\,', \vec{r}) \qquad (X.2.18)$$

olduğu ve (X.2.14) yerine

$$\int \psi^* f\, d\vec{r} = 0, \qquad (X.2.19)$$

(X.2.15) yerine de

$$\mathbf{D}\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') - \sum_\nu \widetilde{\psi}_\nu(\vec{r}\,')\, \widetilde{\psi}_\nu(\vec{r}) \qquad (X.2.20)$$

yazmak gerektiği kolaylıkla tahkik olunur.

(X.3) DİK SERİLERE AÇILIMLAR.

Şimdi **L** ile hermitsel bir diferansiyel operatör gösterelim ve

$$\mathbf{L}\,\psi(\vec{r}) - \lambda\psi(\vec{r}) = f(\vec{r}) \qquad (X.3.1)$$

sağ - yanlı denklemini nazar - ı itibara alalım. **L** operatörüne tekaabül eden özdeğer problemi de

$$\mathbf{L}\,\varphi_n(\vec{r}) = \lambda_n\,\varphi_n(\vec{r}) \qquad (X.3.2)$$

olsun. $\varphi_n(\vec{r})$ özfonksiyonlarının tanım bölgesinin, (X.3.1) i tahkik eden $\psi(\vec{r})$ fonksiyonunun tanım bölgesinin aynı olduğu ve aynı sınır şartlarını gerçeklediklerini kabul edersek gerek $\psi(\vec{r})$ ve gerekse $f(\vec{r})$ yi dik $\left\{\varphi_n(\vec{r})\right\}$ fonksiyonları cinsinden seriye açmak mümkün olur.

$\left\{\varphi_n(\vec{r})\right\}$ ler normalize edilmemişlerse, γ normalizasyon çarpanı olmak üzere

$$\int_B \varphi_m(\vec{r})\,\varphi_n(\vec{r})\,d\vec{r} = \gamma\delta_{mn} \tag{X.3.3}$$

yazılacaktır.

Şu hâlde

$$\psi(\vec{r}) = \sum_n a_n\,\varphi_n(\vec{r}) \tag{X.3.4}$$

$$f(\vec{r}) = \sum_n f_n\,\varphi_n(\vec{r}) \tag{X.3.5}$$

yazılabilecek ve buradaki f_n katsayıları da

$$f_n = \frac{1}{\gamma}\int_B \varphi_n^*(\vec{r})\,f(\vec{r})\,d\vec{r} = \frac{1}{\gamma}(\varphi_n, f) \tag{X.3.6}$$

bağıntılarıyla belirlenecektir. (X.3.4) ve (X.3.5) i (X.3.1) e yerleştirmek sûretiyle

$$\sum_n c_n(\lambda_n - \lambda)\,\varphi_n(\vec{r}) = \sum_n f_n\,\varphi_n(\vec{r})$$

ve buradan da

$$c_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} = \frac{(\varphi_n(\vec{r}\,'),\,f(\vec{r}\,'))}{\gamma(\lambda_n - \lambda)} = \frac{1}{\gamma(\lambda_n - \lambda)}\int_B \varphi_n^*(\vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' \tag{X.3.7}$$

bulunur. Şu hâlde (X.3.1) in çözümü olan $\psi(\vec{r})$ fonksiyonu (X.3.4) ve (X.3.7) ye göre

$$\psi(\vec{r}) = \sum_n \frac{\varphi_n(r)}{\gamma(\lambda_n - \lambda)}\int_B \varphi_n^*(\vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' \tag{X.3.8}$$

veyâ

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \sum_n \frac{\varphi_n^*(\vec{r}\,')\,\varphi_n(\vec{r})}{\gamma(\lambda_n - \lambda)} \tag{X.3.9}$$

vazederek

$$\psi(\vec{r}) = \int_B G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,f(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' \tag{X.3.10}$$

olur. Böylece göz önüne aldığımız hâle tekaabül GREEN fonksiyonunu tesbit etmiş olmaktayız.

İÇİNDEKİLER

DÜZELTME

105. sayfada 8. satırda

$$A_{p:qr} = \frac{\partial A_{p:q}}{\partial x^q} - \ldots\,.$$

yerine

$$A_{p:q} = \frac{\partial A_{p:q}}{\partial x^r} - \ldots\,.$$

okunmalıdır.