İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ NÜKLEER ENERJİ ENSTİTÜSÜ

GENEL YAYINLAR No. 3

NÖTRONLARIN DİFÜZYON TEORİSİ

2. CİLD

Yazan :

Atom Müh., Dr. rer. nat.
AHMED YÜKSEL ÖZEMRE
Çekmece Nükleer Araştırma
ve Eğitim Merkezi
Teorik Fizikçilerinden

Matbaa Teknisyenleri Basımevi
Divanyolu, Bıçkiyurdu Sokak 12
İSTANBUL — 1963

Eserin sahibi : Nükleer Enerji Enstitüsü

Bu kitabımı da, mânevî eğitimimde en

müessir rolü icrâ etmiş olan

İnsân-ı Kâmil

ALİ FUAD GÖNÜLEREN'in

azîz rûhuna âcizâne ithaf ediyorum.

MÜELLİFİN ÖNSÖZÜ

«Nötronların Difüzyon Teorisi» nin bu ikinci cildi de, tıpkı birincisi gibi, muhtelif zamanlarda İstanbul Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsünde aynı isim altında ve İstanbul Teknik Üniversite Nükleer Enerji Enstitüsünde «Reaktör Teorisi : II» adı altında vermiş olduğum derslerin notlarının derlenip genişletilmesinden meydana gelmiştir.

Bu ikinci cild, bellibaşlı hatlarıyla, heterogen çoğaltkan ortamların teorisine, ortamların kritikliğini tâdil eden muhtelif olayların incelenmesine, reaktör kinetiğine, reaktörlerde vuku bulan pertürbasyonların teorisine ve nihâyet nötronların transport teorisine hasredilmiş olup 13 ders ile 4 ekden müteşekkildir. İncelenen bahislerin vahdetini bozmamak için, dersleri iki ilâ üç saat içinde anlatabilecek kadar kısa tutmak bu sefer maalesef mümkün olamamıştır. Bu itibarla bilhassa «Heterogen Ortamlarda Wigner - Seitz Metodu» ve «Reaktör Kinetiğine Giriş» derslerini ikiye ve hattâ üçe bölerek anlatmak uygun olacaktır kanaatındayım.

Bu cildi de zahmetsizce tâkibedebilmek için Üniversitelerimizde okutulmakta olan Matematik Analiz seviyesinde iyi bir bilgi kifâyet edecektir.

Kitabın, sâdece, 1) NORDHEİM denkleminin tâdil edilmiş difüzyon denkleminden çıkarılması, 2) çokgruplu difüzyon denklemlerinin P_1 takribiyeti vâsıtasıyla en genel transport denkleminden elde edilmeleri, ve 3) çok bölgeli reaktörlerde çokgruplu difüzyon teorisine göre ortalama nötron ömrünün hesabı bakımından bir orijinallik arzettiğini tahmin ediyorum. Özellikle, NORDHEİM denklemini çıkarırken tatbik ettiğim metot, klâsik kitaplardaki gibi, difüzyon denklemi ile ona kuple olan ve gecikmiş nötronları doğuran ana çekirdeklerin konsantrasyonlarını veren 6 denklem yerine, kaynak terimi uygun bir şekilde tâdil edilmiş olan tek bir difüzyon denklemini hareket noktası ittihaz ederek mühim bir sâdelik arzetmekte ve, birinci cildin başındanberi yürütmekte olduğumuz «bütün bilgileri difüzyon denkleminden hareketle elde etme» politikasına çok daha uymaktadır. Çokgruplu difüzyon denklemlerinin P_1 takribiyeti çerçevesi içinde en genel transport denkleminden çıkarılması da azîz talebem ve meslekdaşım Dr. Erdoğan Şuhubi ile müştereken neşrettiğimiz bir çalışmanın sonucudur.

Birinci cild gösterilen bütün ihtimâma rağmen bazı dizgi hatâlarını hâvi olarak çıkmıştı. Bunların bir kısmı zamanında farkedilerek, kitabın arkasına bir yanlış-doğru cetveli ilâve etmek mümkün olmuştu. Birinci cildin neşrinden sonra farkına varılan hatâlar için de bu ikinci cildin sonuna bir düzeltme cetveli ilâve ettik. Birinci cildi tedrisata zamanında yetiştirebilme endişesi dolayısıyla gösterilen acelenin sebep olduğu bu durum kitabın ikinci baskısında telâfi edilecektir. İlk ciltteki hatâlar için dikkatimi çeken bütün talebelerime ve meslekdaşlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Bu cildin basımı için çok daha geniş bir zaman ayrılmış olduğundan dizgi hatâlarının çok az olması temin edilmiştir.

Muhakkak ki bu cild de birtakım eksiklikler ve uslûp hatâları ihtivâ etmektedir. Kitabın ne dereceye kadar müfîd olacağını gene ancak göreceği alâka gösterebilecektir. Bu hususta yapılacak olan her türlü tavsiye ve kritik ihtarları her zamanki gibi şükrânla karşılayacağımı belirtmek isterim.

Bu ikinci cildi yazabilme güc ve sabrını lûtfeylediği için ALLAH'a hamdetmekteyim. Azîz eşime de, kitabın yazılışı esnâsında gösterdiği anlayış ve mânevî destek için çok müteşekkirim. Matbaa Teknisyenleri Basımevi bu ciltte de mûtadı olan titizliğini ve itinâsını esirgememiş, resimleri ise gene Çekmece Nükleer Araştırma ve Eğitim Merkezinin ressamı Necdet Bey her zamanki ustalığıyla çizmiştir. Her ikisine de pekçok teşekkürler ederim. Ayrıca, pek ağır maddî külfetine rağmen ve birinci cildin neşrinden oldukça kısa bir zaman sonra, bu cildin Enstitüsünün neşriyâtı arasında çıkmasında gösterdiği yakın ilgi için İstanbul Teknik Üniversite Nükleer Enerji Enstitüsü Direktörü Prof. Nejat Beye de teşekkürlerimi arzederim.

Kadıköy, 1963 Sonbaharı **Ahmed Yüksel ÖZEMRE**

ÖNSÖZ

Dr. Ahmed Yüksel Özemre tarafından hazırlanmış olan Nötronların Difüzyon Teorisi isimli eserin ikinci cildini takdim etmekle şeref duymaktayım.

Bu eserle Enstitümüz yayınları yeni bir kıymet kazanmış ve öğrencilerimiz mükemmel bir ders kitabına sahip olmuşlardır.

Bu ikinci ciltte Enstitümüz tedrisatının Reaktör Teorisi - II dersinin müfredatına tekabül etmek üzere, Heterojen Sistemlerin tetkikine, Reaktör Kinetiğine, Pertürbasyon ve Transport teorilerine yer verilmiştir.

Birinci ciltte olduğu gibi kitabın hazırlanmasında pedagojik bakımdan benzerlerine nazaran daha iyi bir tertip kullanılmış ve muhteva bakımından da yine bazı yenilikler ithal edilmiştir.

Birinci ciltte müşahede etmiş olduğumuz bütün diğer bilgileri Difüzyon denkleminden hareket ederek elde etmek metodu daha ileri kısımlar ihtiva eden bu ikinci ciltte kullanılmış olduğu Nordheim denkleminin çıkarılışından görülmektedir. Bu suretle eser baştan sona kadar bütünlük ve sadelik havası için gerekli konuları incelemiş bulunmaktadır.

Enstitümüzde Dr. Erdoğan ŞUHUBİ'nin müellifin idaresi altında yapmış bulunduğu bitirme çalışmasının, çok guruplu difüzyon denklemlerinin genel transport denkleminden çıkarılmasında kullanılması ayrıca bir iftihar vesilesidir. Burada Enstitümüzde bitirme çalışması gibi mütevazi bir çerçeve içinde dahi kıymetli çalışmalar yapılabildiğinin bir misalini görmekle bahtiyarım.

Dr. Ahmed Yüksel ÖZEMRE'ye büyük gayretler sarfederek kısa bir zaman içinde bu iki cildi tamamlayarak bize çok değerli bir ders ve referans kitabı kazandırmış olmasından dolayı teşekkürlerimi arzetmek isterim.

25/Ekim/1963
Nejat AYBERS

İÇİNDEKİLER

İthaf		III
Önsöz		V
Müellifin Önsözü		VII
İçindekiler		IX
I. Ders	**Heterogen Ortamlarda Nötron Difüzyonu : «Wigner - Seitz Metodu»**	**1**
1.	Heterogen Düzenlerin Lüzûmu	1
2.	Heterogen Sistemlerde Hesap Mototları	4
3.	Wigner - Seitz (Birim Hücre) Metodu	6
3a.	f Ilık Kazanç Katsayısının Tâyini	7
3b.	Rezonansa Tutulmama İhtimâlinin Tâyini : Yakıt Çubuklarının Kendi Kendilerini Perdelemeleri Olayının p ye Tesiri	17
3b′.	Heterogenliğin Doğurduğu Geometrik Durumun p ye Tesiri	27
3c.	Hızlı Fisyon Katsayısının Hesabı	31
4.	Heterogen Reaktörlerde Makroskopik Büyüklükler	37
5.	Heterogen Ortamın Anizotropluğu : M^2 ve τ nun Tâyini	39
6.	Heterogen Ortamların Glôbâl Çoğalma Katsayıları	43
	Alıştırmalar	44
II. Ders.	**Heterogen Ortamlarda Birim Hücre Hesaplarına Örnek**	**46**
	Alıştırmalar	61
III. Ders	**Heterogen Ortamlarda Nötron Difüzyonu «Feinberg - Galanin Metodu»**	**62**
1.	Heterogen Ortamlar İçin Feinberg - Galanin Metodunun Temel Faraziyeleri	62

2.	Nötron Akısının Tâyini	67
3.	Ilıklık Sâbitinin Tâyini	70
4.	Feinberg - Galanin Metoduna Göre Sonsuz ve Sonlu Şebekelerin Kritiklik Şartları	71
	Bibliyografya	73
IV. Ders.	**Çoğaltkan Ortamların Fisyon Ürünleriyle Zehirlenmesi**	**75**
1.	Fisyon Ürünlerinin Nötron Bilânçosuna Tesiri	75
2.	Çoğaltkan Ortamların Xe^{135} ile Zehirlenmeleri	77
3.	Çoğaltkan Ortamların Sm^{149} ile Zehirlenmeleri	83
4.	Zehirlenmenin Sebep Olduğu Reaktiflik Kaybı	86
5.	Nükleer Zehirlerin Tesiri Altındaki Bir Reaktörün Gücünün Sâbit Kalması	89
6.	Geçici Zehirler Ve Reaktörlerin Kontrolunda Haiz Oldukları Önem	90
	Alıştırmalar	95
V. Ders.	**Temperatur Değişmelerinin Çoğaltkan Ortamlardaki Etkilerinin İncelenmesine Giriş**	**96**
1.	Çoğaltkan Ortamların Özelliklerinin Temperatur Değişimlerine Bağlılığı	96
2.	Temperatur Değişmelerinin Makroskopik Özelliklere Etkisi	97
3.	Temperatur Değişimlerinin Mikroskopik Özelliklere Tesiri	101
	Alıştırmalar	113
VI. Ders	**Reaktör Kinetiğine Giriş**	**114**
1.	Reaktör Kinetiğinin Gâyesi	114
2.	Reaktörün Ateşlenmesi	116

3. Nötron Kaynağı Olarak Kararlı Nötron Akısı 122
4. Gecikmiş Nötronların Nötron Akısına İştirâkleri 123
5. Reaktiflik Birimleri 135
6. Tek Bir Gecikmiş Nötron Grubu Hâli 137
7. Büyük Reaktiflikler Hâli 140
8. Küçük Reaktiflik Hâli 142
9. Negatif Reaktiflikler Hâli 144
10. Reaktifliğin Lineer Olarak Değişmesi Hâli 146
11. Reaktifliğin Sinüs Gibi Değişmesi Hâli; Transfer Fonksiyonu 149
12. Xe^{135} İle Zehirlenmeye Tekâbül Eden Reaktör Transfer Fonksiyonu 154
13. Transfer Fonksiyonu Vâsıtasıyla Reaktörün Denge Durumlarının Tesbiti 156
14. Reaktör Kinetiğinin Ters Problemi 158
Bibliyografya 159

VII. Ders. Kontrol Çubuklarının Teorisine Giriş 161
1. Kontrol Çubukları 161
2. Kontrol Çubukları İçin Sınır Şartları 162
3. Külrengi Kontrol Çubuklu Silindirik Reaktör 166
4. «Kara» Kontrol Çubuklu Silindirik Reaktör 167
5. Kontrol Çubuklarının İki Gruplu Hesabı 168
6. Silindirik Bir Reaktördeki Eksendışı Bir Kontrol Çubuğu 175

VIII. Ders. Pertürbasyon Teorisi 181
1. Pertürbasyon Teorisinin Matematik Esasları 181
2. Pertürbasyon Teorisinin Fizikî Esasları 186
3. İstatistiksel Ağırlık ve Önem Fonksiyonu 190

4. Çokgruplu Difüzyon Teorisinde Pertürbasyon Hesabı 194
Alıştırmalar 198

IX. Ders. Nötronların Transport Teorisine Giriş : Genel Transport Denklemi 199

1. Âdî Difüzyon Denkleminin Yetersizliği 199
2. Genel Târifler Ve Tahditler 200
3. Genel Transport Denkleminin Birinci Şekli 203
4. Transport Denkleminin Sınır Şartları 206
5. İkinci Kademeden Nötronların Ortalama Sayısı Kavramı Ve Genel Transport Denkleminin İkinci Şekli 208
6. $c(\vec{r}, E', t')$ $f(E', \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}; t')$ nün Şekli 210

X. Ders, Eşitenerjili Nötronların Transport Teorisine Giriş 215

1. Eşitenerjili Nötronlar İçin Transport Denklemi 215
2. Eşitenerjili Nötronlar İçin Karşıtlık Teoremi 218
3. Eşitenerjili Nötronların Transport Denkleminin Bir İntegrâl Denkleme İrcaı 221
4. (X. 3. 12) nin Basit Hâller İçin Çözümü 224
5. Çoğaltkan Bir Ortam İçin Transport Denkleminin İntegrâl Şekli 227
6. Yabancı Kaynak İhtivâ Etmeyen Sonsuz Homogen Çoğaltkan Ortam 228

Alıştırmalar 231

XI. Ders. Küresel Harmonikler Metodu 233

1. Düzlemsel Geometri İçin Küresel Harmonikler Metodu 233
2. P_n Takribiyetinin Formel Çözümü 239
3. P_1 Takribiyeti : Âdî Difüzyon Denklemi 240
4. Genelleştirilmiş Fick Kanunu 242

5. Küresel Harmonikler Metodu İçin Sınır Şartları 243

Alıştırmalar 246

XII. Ders. Transport Denkleminin Düzlemsel Geometri İçin Çözümüne Giriş 247

1. Sonsuz Ortamdaki İzotrop Düzlemsel Kaynak Hâli 247

2. Milne Problemi 252

3. Milne Probleminde Uzatılmış Uzunluğun İfâdesi 255

Bibliyografya 264

XIII. Ders. Transport Denkleminin Çokgruplu Difüzyon Denklemlerine İrcaı 265

1. P_1 Takribiyetine Göre Çokgrup Denklemleri 265

2. F. Stummel Denklemleri 275

Bibliyografya 279

EK I. Heterogen Reaktörde Güç Hesabı 280

EK II. Çok Bölgeli Rektörlerde Ortalama Nötron Ömrünün Çokgruplu Pertürbasyon Teorisine Göre Hesabı 282

EK III. Legendre Polinomları 291

EK IV. İntegrâl Üstel Fonksiyonlar 298

GENEL BİBLİYOGRAFYA 304

2. CİLDİN YANLIŞ - DOĞRU CETVELİ 306

1. CİLDİN YANLIŞ - DOĞRU CETVELİNE EK 307

I. DERS

Heterogen Ortamlarda Nötron Difüzyonu:

«WİGNER - SEİTZ METODU»

Heterogen düzenlerin çoğaltkan ortamların kritikliğine etkileri - Wigner - Seitz birim hücre metodu - Ilık kazanç katsayısı - ζ zarar katsayısı - Heterogen ortamlardaki ılık kazanç katsayısının homogen ortamlardakinden daha küçük oluşu keyfiyeti - f_{het} in nükleer yakıt şebekesine göre değişmesi - p rezonansa tutulmama ihtimâli - Etkin yutulma tesir kesidi - Rezonans integrâli - Rezonansa tutulmama ihtimâlinin heterogen düzenler için daha büyük değeri haiz olması keyfiyeti - p nin şebekeye göre değişimi - Hızlı fisyon katsayısı ve hesabı - Heterogen ortamlarda makroskopik büyüklüklerin hesabı - Heterogen ortamların kritikliği ve yaklaşık metotlar.

1. Heterogen Düzenlerin Lüzûmu. — 1. ciltte çoğaltkan ortamlarda nötron çoğalımının incelenmesi için lâzım gelen k_∞, D, L^2, τ, $P(B^2)$ v.s. gibi büyüklükler ve bunları hesaplama metotları izâh edilmişti. Sonlu bir çoğaltkan ortamın kararlı bir şekilde işliyebilmesinin, kendisini karakterize eden $k_{et} = k_\infty . P(B^2)$ ifâdesinin birden büyük olmasına bağlı olduğuna da bu vesîleyle işâret edilmişti. k_{et} etkin çoğalma katsayısının kesirli kısmı evvelce de belirtilmiş olduğu gibi :

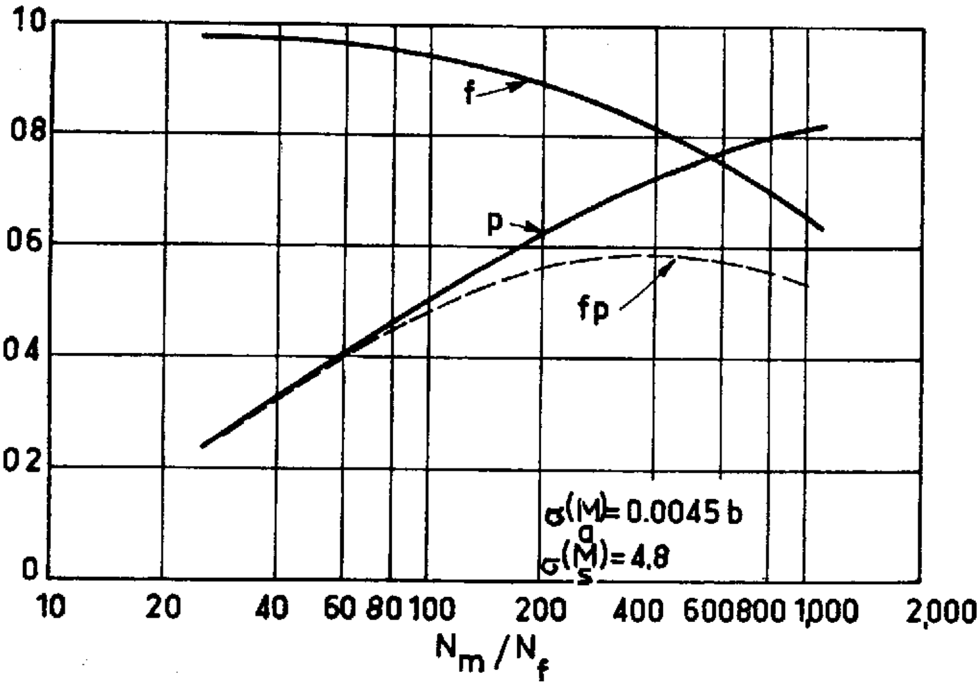
(a) ortamdaki nötron seviyesini arttırmak için istenildiği zaman kullanılabilmek üzere,

(b) zamanla ortaya çıkan nükleer zehirlenmeleri telâfi etmek, veyâ

(c) ortama ithâl edilen yabancı maddelerden ileri gelen reaktifiklik düşüklüklerini telâfi etmek için nötron yutucu çubuklar vâsıtasıyla depo edilir.

Sonlu bir ortam verildiği takdirde, nötronların bu ortamdan dışarı sızmamalarının ihtimâli olan $P(B^2)$ büyüklüğü âşikâr olarak 1 den küçüktür. Buna binâen $k_\infty . P(B^2)$ çarpımını 1 den büyük kılabilmek için k_∞ un mümkün olduku kadar 1 den büyük olmasını temin etmek lâzımdır.

Tabiî uranyumla H_2O (âdi su), D_2O (ağır su), Be (berilyum), BeO (berilyum oksit veyâ glüsin), C (grafit) gibi nötron yavaşlatıcılar göz önüne alındıkları takdirde bunlardan ancak «tabiî uranyum-ağırsu» karışımıyla homogen bir kritik reaktör meydana getirilebileceği anlaşılmıştır. Meselâ «tabiî uranyum-grafit» bileşiminden müteşekkil bir homogen ortam göz önüne alalım. Böyle bir sistem için $k_\infty = \eta \varepsilon fp$ ifâdesinde $\eta = 1{,}33$ ve $\varepsilon = 1{,}05$ dir. Diğer taraftan gerek f, gerekse p çoğaltkan ortamdaki yavaşlatıcı çekirdeklerin N_m sayısının fisyonluk çekirdeklerin N_f sayısına olan oranına bağlıdırlar. Şekil : I. 1 de homogen bir tabiî uranyum- grafit karışımına tekabül eden f nin, p nin ve fp çarpımının N_m/N_f nin fonksiyonu olarak değişimleri görülmektedir. η ve ε un yukarıda verilmiş olan değerlerinden $k_\infty > 1$ olabilmesi için fp çarpımının 0,73 den daha büyük olması lâzım geldiği anlaşılmaktadır. Hâlbuki Şekil : I. 1 den de âşikâr olarak görüldüğü üzere fp çarpımının maksimum değeri ancak 0,59 dur.

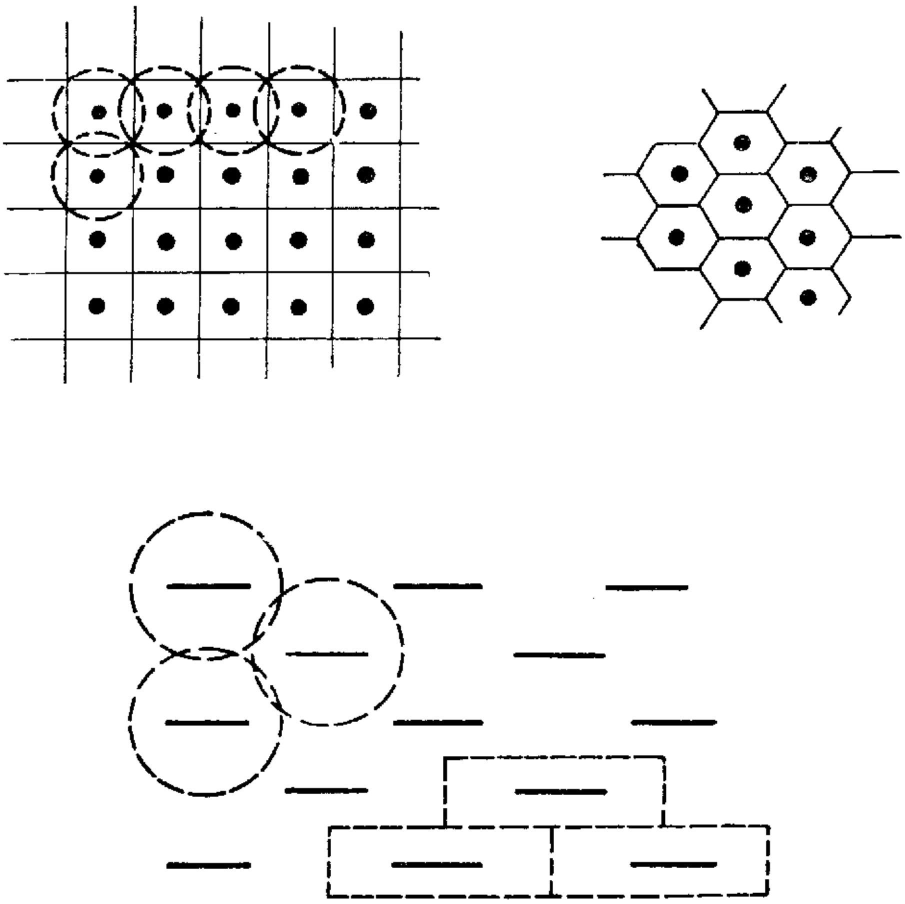


Şekil : I. 1. Homogen tabiî uranyum — grafit karışımı için f, p ve fp nin N_m/N_f nin fonksiyonu olarak değişimleri.

Bununla beraber, homogen bir «tabiî uranyum-grafit» reaktörü yapmaktan vazgeçerek, tabiî uranyumla grafiti heterogen bir şekilde birleştirmek suretiyle $k_\infty > 1$ elde etmenin mümkün olduğu anlaşılmıştır. Hattâ heterogen tertipte H_2O veyâ Be ile dahi yakıtı tabiî uranyum olan kritik çoğaltkan ortamlar da yapılabilmiştir.

Biz bu derste heterogen atom reaktörlerinin başlıca nötronik özellik-lerine temas edeceğiz.

Önce târif olarak, heterogen reaktör diye katı nükleer yakıtın bir nötron yavaşlatıcı ortam içine muayyen bir şebeke uyarınca yerleştirilmiş olduğu nötron çoğaltıcı düzene diyeceğiz.



Şekil: I. 2. Muhtelif düzgün şebeke şekilleri ve bunlara tekabül eden birim hücrelerin tâyini.

Katı nükleer yakıtı nötron yavaşlatıcı ortam içine küpler veyâ küreler olarak üç boyutlu bir şebeke uyarınca yerleştirmek kâbil olduğu gibi, daha ziyâde tercih edilen bir düzen olmak üzere uzun silindirik veyâ paralelyüzlü çubuklar hâlinde iki boyutlu bir şebeke uyarınca yerleştirmek de kâbildir. Bu sonuncu hâlde şebekeler çeşitli şekiller arzedebilirler. Misâl olarak Şekil : I. 2 de kare ve altıgen şekilli düzgün şebekelerle yakıt birimleri levha şeklinde olan bir başka düzgün şebeke ve bunlara tekabül eden birim hücre düzenleri görülmektedir.

Bu şebekeler, simetri merkezlerinde nükleer yakıt çubuğu bulunan dikdörtgen veyâ altıgen dik kesidi haiz prizmaların yanyana konmasından meydana gelmişlerdir. Her elemanter prizma «*hücre*» adını almaktadır. Komşu iki nükleer yakıt çubuğu arasındaki uzaklığa da «*şebekenin adımı*» denir.

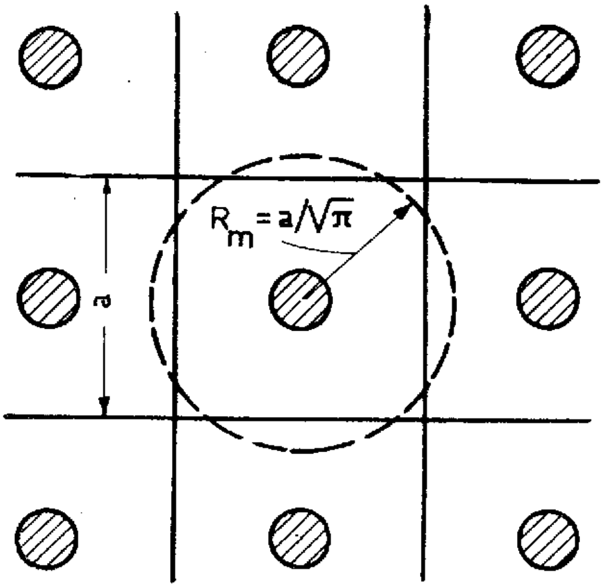
Bir şebekenin geometrik vasıflarını değiştirmek suretiyle göz önüne alınan çoğaltkan ortamın nötronik vasıflarını değiştirmek kâbildir. Bu hususta epeyi geniş bir serbestlik derecesi vardır. Meselâ düzgün bir şebekenin adımı tâdil edilebilir : nükleer yakıt çubukları arasındaki uzaklık böylece aynı bir miktarda azaltılmış veyâ çoğaltılmış olur; veyâhut da şebekenin adımı ortamın dış yüzeyine yakınlaştıkça gitgide daha küçük değerler alan bir manzara arzeder. Bu son hâlde, ortamın içindeki nükleer yakıt dağılımı merkezden dış yüzeye doğru tedricen kesâfet kazanıyor demektir. Böylelikle reaktördeki nötron dağılımı ve buna bağlı olarak da güç dağılımı daha yayvan ve dolayısıyla daha birbiçim olur.

Nükleer yakıtın şeklini ve yapısını değiştirmek suretiyle de ortamın kritikliği üzerine tesir edilebileceği âşikârdır; yakıt çubuğunun içinin boş, dolu veyâ ince levhalar ilh... şeklinde olmasına göre kritiklik üzerinde müsbet veyâ menfi tesirler elde edilebilir. Nükleer yakıt olarak tabiî uranyum ihtivâ eden heterogen bir ortamın k_∞ çoğalma katsayısını hesaplarken bunun terkibine giren her bir çarpanı büyük bir hassasiyetle hesaplamak lâzımdır, zirâ bu cins sistemlerde, nükleer yakıtla nötron yavaşlatıcı ortamın en uygun (*optimum*) düzenleri için dahi elde edilen k_∞ çoğalma katsayısı 1 den ancak yüzde birkaç kadar daha büyük olmaktadır. Dolayısıyla η, ε, f ve p nin hesaplarında yapılacak küçük hatâlar fevkalâde büyüyerek kritik kütle gibi hayatî önemi haiz bazı büyüklüklerin hesaplanmasında büyük hatâlara sebep olurlar.

2. Heterogen Sistemlerde Hesap Metotları. Heterogen sistemlerin nötronik vasıflarını tâyin ederek kritiklik şartını tesis etmek ve nötron akısının dağılımını incelemek için hareket noktasını, şüphesiz ki, ortamın heterogenliğinin arzettiği geometrik ve fizikî şartları da göz önünde bulundurarak, k_∞ sonsuz çoğalma katsayısının ve dolayısıyla bunun terkibine giren dört çarpanın ayrı ayrı hesaplanması teşkil etmektedir.

Bunun için başlıca iki metot vardır : a) Wigner - Seitz metodu diye bilinen «*birim hücre metodu*» , ve b) Feinberg-Galanin metodu. Wigner -

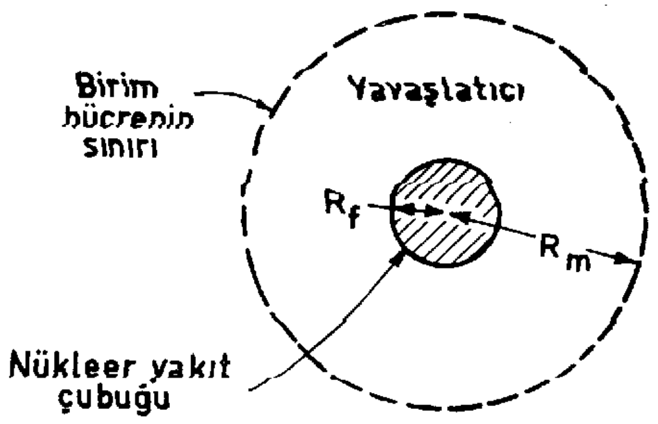
Seitz metodu önce bir kristalin peryodik şebekesindeki dalga foksiyonlarını hesaplamak için tasarlanmış ve sonradan da düzgün peryodik şebekeli nötron çoğaltıcı heterogen ortamların da kristallerle aynı bir strüktürü haiz oldukları göz önünde tutularak bunlara tatbik edilmiştir. Bu metot, (1) *peryodik şebekenin simetrik olması hasebiyle problemi tek bir hücre için çözmenin kifâyet êdeceği,* ve (2) *hücre yüksek mertebeden bir simetriyi haizse bunun yerine aynı hacıma sâhip küresel veyâ silindirik bir hücre ikâme etmenin kâfi derecede sıhhatli netice verebileceği* esaslarına dayanmaktadır. Bu sonuncu esasa göre meselâ kare düzenindeki peryodik bir şebeke silindirik yakıt birimlerinden teşekkül ediyorsa ve şebekenin adımı da a ya eşitse, üzerinde bütün nötronik hesaplarının yapılacağı birim hücre, nükleer yakıt birimiyle eşmerkez olan $a/\sqrt{\pi}$ yarıçaplı bir daire olacak demektir.



Şekil : I. 3a. Kare düzenli şebeke ve buna tekabül eden birim hücre.

k_∞ büyüklüğünü hesaplarken sonsuz yaygınlıkta bir şebeke göz önüne alacağımızdan, dışarı doğru nötron kaçağı diye bir şey bahis konusu olmayacak ve bir hücrenin içinde olup bitenler, yukarıda zikredilen esasa binâen, diğerleri için de tamamen aynı şekilde vuku bulacaklar ve dolayısıyla da nükleer yakıt birimleri arasında nötron akısı sâbit olacaktır. Bunun neticesi olarak, göz önüne almış olduğumuz birim hücrenin sınırından ne kadar nötron dışarı çıkarsa o kadar nötron da içeri girmiş olacak, yâni başka bir deyimle birim hücrenin sınırında net nötron akısı sıfır olacaktır. (Bk. Şekil : I. 3b)

Feinberg - Galanin metodunda ise hesaplar, sistemin tipik bir elemanına nisbet edilecek yerde, sistem bir bütün olarak ele alınmakta ve nükleer yakıt çubuklarına da doğrusal münferid *nötron kaynakları* ve *nötron kapanları* nazarıyla bakılmaktadır. Bu metot matematik bakımından diğerinden daha zarif ve çok daha kudretli olmasına mukabil ihtivâ ettiği hesapların oldukça girift olması ve düzgün düzenlenmiş kalabalık şebekeler için Wigner - Seitz metodundan pek farklı sonuçlar vermemesi hesabiyle ancak, az sayıda nükleer yakıt birimi ihtivâ eden şebekelerle değişik şebeke düzenlerine ve bir de birçok peryodu haiz veyâ düzensiz boy ve aralıklı nükleer yakıt birimleri ihtivâ eden heterogen ortamlara ve kontrol çubuklarının tesiri problemine muvaffakiyetle tatbik olunmaktadır. Bu metodun ana hatlarını III. derste inceleyeceğiz.



Şekil : I. 3b. Birim hücre.

3. WIGNER—SEITZ (Birim Hücre) Metodu. — Bu metodu tatbik ederken :

1) *Nükleer yakıt birimlerinin sonsuz uzunlukta dilimlere veyâ silindirik çubuklara, veyâhut da kürelere ircâ olunabildikleri,* ve

2) *Elemanter difüzyon teorisinin tatbik edilebilir olduğu* faraziyeleri kabul edilir ve buna göre k_∞ u veren formüldeki her bir çarpan ayrı ayrı tâyin edilir. Bunların teker teker tâyinine girişmeden önce heterogen ortamlarda η nın hesabının homogen ortamlardakine nisbetle herhangi bir başkalık arzetmediğine işâret etmemiz gerekmektedir. Filhakika η nın

$$\eta = \nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_f + \Sigma_c} = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_c} = \frac{\nu}{1 + \alpha} \tag{I.3.1}$$

ile verilen târifinden bunun yalnız nükleer yakıtın vasıflarına bağlı bir büyüklük olup sistemin geometrisiyle alâkası bulunmadığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla ortamın homogen veyâ heterogen olmasının η nın değeri üzerinde hiçbir tesiri yoktur.

3 a. f Ilık Kazanç Katsayısının Tâyini. — f ılık kazaç katsayısının hesabını yürütebilmek için elemanter difüzyon teorisinin tatbik edilebilir olduğunu kabul edeceğiz. Yalnız şurasını iyice belirtelim ki elemanter difüzyon teorisi ancak : (a) göz önüne alınan birim hücrenin boyutları nötronların buradaki ortalama elâstik saçılma serbest yollarına nisbetle kâfi derecede büyükseler, (b) nötronlar çok kesif bir tarzda yutulmuyorlarsa ve, (c) yabancı nötron kaynakları mevcûd değillerse sahih sonuçlar verebilir. Fakat birim hücre için bu şartlardan hiçbiri tam manasıyla tahakkuk edemiyeceğinden elemanter difüzyon teorisiyle elde edilen sonuçlar bir mikdar (% 2 kadar) hatâ ihtivâ ederler. Bununla beraber, hesaplarının nisbî kolaylığı bakımında bu metot gene de tercih edilir.

1. cildin IV. dersinde f ılık kazanç katsayısı, bir saniyede nükleer yakıt tarafından yutulan nötronların sayısının gerek nükleer yakıt, gerek yavaşlatıcı ve gerekse ortamdaki diğer bütün maddeler tarafından yutulan nötronların sayısına oranı olarak târif edilmiş ve

$$f = \frac{\Sigma_{a,f}\,\phi}{\Sigma_{a,f}\,\phi + \Sigma_{a,m}\,\phi + \Sigma_{a,d}\,\phi} \tag{I.3a.1}$$

bulunmuştu. Heterogen reaktörlerde muhtelif cins çekirdekleri ihtiva eden bölgeler birbirlerinden kesin olarak ayrılmış olduklarından f için

$$f = \frac{\int\limits_{V_f} \Sigma_{a,f}(\vec{r})\,\phi(\vec{r})\,d\vec{r}}{\int\limits_{V_f} \Sigma_{a,f}(\vec{r})\,\phi(\vec{r})\,d\vec{r} + \int\limits_{V_m} \Sigma_{a,m}(\vec{r})\,\phi(\vec{r})\,d\vec{r} + \int\limits_{V_d} \Sigma_{a,d}(\vec{r})\,\phi(\vec{r})\,d\vec{r}} \tag{I.3a.2}$$

yazmak icâbeder. Burada V_f nükleer yakıtın, V_m yavaşlatıcının ve V_d de bu ikisininden gayrı maddelerin hacımlarını göstermektedir.

Diğer taraftan da, kolayca anlaşıldığı veçhile, $\Sigma_{a,f}$ ile nükleer yakıtın, $\Sigma_{a,m}$ ile yavaşlatıcının ve $\Sigma_{a,d}$ ile de meselâ nükleer yakıtı kaplayan paslanmaz çelik, zirkonyum veyâ buna benzer maddelere ve istihsâl olunan ısıyı dışarı taşımak üzere nükleer yakıt ile yavaşlatıcı arasında akan sıvı veyâ gaza tekabül eden makroskopik yutma tesir kesitleri gösterilmiş bulunmaktadır.

Eğer gerek nükleer yakıt çubuklarının, gerek yavaşlatıcının ve gerekse nükleer yakıtın gömleği v.s. gibi kısımların hepsi homogen bir yapıyı haizseler bu takdirde makroskopik tesir kesitleri $\vec{r}$ yervektörüne tâbî olmazlar ve

$$f = \frac{\Sigma_{a,f} \int\limits_{V_f} \phi(\vec{r})\, d\vec{r}}{\Sigma_{a,f} \int\limits_{V_f} \phi(\vec{r})\, d\vec{r} + \Sigma_{a,m} \int\limits_{V_m} \phi(\vec{r})\, d\vec{r} + \Sigma_{a,d} \int\limits_{V_d} \phi(\vec{r})\, d\vec{r}} \qquad \text{(I.3a.3)}$$

yazılır. Şimdi

$$\overline{\phi}_f = \frac{1}{V_f} \int\limits_{V_f} \phi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$\overline{\phi}_m = \frac{1}{V_m} \int\limits_{V_m} \phi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$\overline{\phi}_d = \frac{1}{V_d} \int\limits_{V_d} \phi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

ile sırasıyla nükleer yakıt çubuklarındaki, yavaşlatıcıdaki ve diğer maddelerdeki ortalama nötron akılarını gösterecek olursak

$$f = \frac{1}{1 + \frac{\Sigma_{a,m}}{\Sigma_{a,f}} \frac{V_m}{V_f} \frac{\overline{\phi}_m}{\overline{\phi}_f} + \frac{\Sigma_{a,d}}{\Sigma_{a,f}} \frac{V_d}{V_f} \frac{\overline{\phi}_d}{\overline{\phi}_f}} \qquad \text{(I.3a.4)}$$

bulunur. Bundan sonra hesabı uzatmamak için, hesabı da esas itibâriyle hiç bir güçlük doğurmadığından ötürü, (I. 3 *a*.4) ifâdesindeki paydanın son terimini nazar-ı itibâre almayacağız.

(I.3 a 4) deki $\frac{\overline{\phi}_m}{\phi_f} = \zeta$ ya *«zarar katsayısı»* adı verilir. Bunun sebebi nükleer yakıt çubuğundaki ortalama ılık nötron akısının yavaşlatıcıdaki ortalama ılık nötron akısından daha düşük mertebede olduğu yâni $\zeta > 1$ olduğu zaman, ortamdaki akının nükleer yakıt biriminde zarara uğramış gibi telâkki edilebilmesidir. Şu hâlde

$$\boxed{f = \frac{1}{1 + \zeta \dfrac{\Sigma_{a,m} V_m}{\Sigma_{a,f} V_f}}} \qquad \text{(I.3a.5)}$$

yazılabilir. Buradan ζ için f nin fonksiyonu olarak

$$\zeta = \frac{\Sigma_{a,f} V_f}{\Sigma_{a,m} V_m} \left(\frac{1}{f} - 1 \right) \qquad \text{(I.3a.6)}$$

yazılabilir.

$\zeta > 1$ olduğundan aynı nükleer konsantrasyonu haiz homogen bir reaktöre nisbetle heterogen bir reaktörde f nin daha küçük olacağı anlaşılmaktadır :

$$\boxed{f_{het} \leq f_{hom}} \qquad \text{(I.3a.7)}$$

Eğer ζ zarar katsayısı tâyin edilebilirse (I. 3*a*. 5) vâsıtasıyla f ılık kazanç katsayısı da tâyin edilmiş olacaktır.

ζ yı tâyin etmek için birim hücreye elemanter difüzyon teorisini tatbik edeceğiz. Fakat bir taraftan birim hücrede kuvvetli nötron yutucu yakıtın teksif edilmiş olmasından ve diğer taraftan da hücrenin boyutlarının, nötronların bu ortamda haiz oldukları ortalama elâstik çarpışma serbest yoluna nazaran küçük olması hesabiyle, bu dersin 2. bölümünde sıraladığımız mülâhazaların ışığı altında, elemanter difüzyon teorisinin ζ nın sıhhatli bir şekilde tâyini için pek elverişli vâsıta olmadığı âşikârdır.

Birim hücre hesaplarında en sahih neticeler nötronların transport teorisini kullanarak elde edilir. Transport teorisi, ilerde göreceğimiz üzere, nötronların sâdece uzay koordinatlarına değil fakat aynı zamanda hareket yönlerine bağlılıklarını da göz önüne alan bir temel denklem tesis eder. Bu denklem, genel hâllerde çözümü kolaylıkla inşâ edilemeyen bir integro-diferansiyel denklemdir. Bu «*transport denklemi*» ni çözebilmek için en uygun usûllerden biri de «*küresel harmonikler metodu*» adıyla bilinen ve transport denklemini sağlayan eşitenerjili nötronların $\phi(\vec{r},\mu)$ akısının

$$\phi(\vec{r},\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2m+1}{2}\right) \phi_m(\vec{r})\, P_m(\mu) \qquad (I.3a.8)$$

şeklinde $P_m(\mu)$ LEGENDRE polinomları cinsinden sonsuz bir seriye açılmasını esas ittihaz eden çözüm tarzıdır. Burada μ ile, nötronun hız vektörünün muayyen bir referans ekseniyle yaptığı açının kosinüsü, $P_m(\mu)$ ile m-inci mertebeden LEGENDRE polinomu ve $\phi_m(\vec{r})$ ile de açılımın

$$\phi_m(\vec{r}) = \int_{-1}^{+1} \phi(\vec{r},\mu)\, P_m(\mu)\, d\mu$$

ile târif edilen m-inci momenti gösterilmektedir.

Eğer (I. 3a. 8) serisini keyfî bir k-ıncı terimde kesip de bundan sonraki terimleri ihmâl edilebilir farzedersek bu suretle nötronların transport denkleminin P_k takribiyetini elde etmiş oluruz. Bizim inceleyegeldiğimiz elemanter difüzyon teorisi transport denkleminin sıfırıncı takribiyetini teşkil eden P_0 takribiyetidir.

Heterogen reaktörlerin birim hücre hesaplarında P_3 takribiyetinin nötron akısının gerek nükleer yakıt birimi ve gerekse yavaşlatıcı içindeki davranışlarını büyük bir sıhhatle tâyin edebildiği tesbit edilmiştir. Fakat bunun mahzuru P_3 takribiyetinin çok sayıda bilinmeyen ihtivâ eden geniş cebrik denklem sistemlerinin çözülmesini gerektirmesinden dolayı bu işin yüksek kapasiteli elektronik hesap makinelerine ihtiyaç göstermesidir.

Biz, P_0 takribiyeti vâsıtasıyla tâyinini tenkìd etmekle beraber dersin çerçevesini aşmamış olmak için, ζ yı gene de elemanter difüzyon teorisi yardımıyla hesaplayacağız.

Göz önüne aldığımız heterogen düzeni sonsuz yaygınlıkta kabul ettiğimizden her hücrenin içinde yavaşlatıcının bulunduğu bölgede yavaşlama yoğunluğu büyük bir takribiyetle sâbit kabul edilebilir. Öte yandan nükleer yakıtın atom ağırlığı yüksek değerleri haiz olduğundan nötronların bunlarla çarpışmalarının neticesi, yakıt tarafından yutulmadıkları takdirde, ancak enerji kaybetmeden saçılmaları (yön değiştirmeleri) olacaktır. Şu hâlde *nükleer yakıt çubukları içinde yavaşlama yoğunluğu rahatça sıfır addedilebilecektir.*

K ile yavaşlatıcıdaki sâbit yavaşlama yoğunluğunu gösterecek olursak nükleer yakıttaki (: f indisli büyüklükler) ve yavaşlatıcıdaki (: m indisli büyüklükler) nötron akılarının dağılımları, nükleer yakıtın yarı çapı R_f ve birim hücreninki de R_m olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{lll} 0 \leq \rho \leq R_f & \text{için:} & D_f \nabla^2 \phi_f(\rho) - \Sigma_{a,f}\, \phi_f(\rho) = 0 \\ R_f \leq \rho \leq R_m & \text{için:} & D_m \nabla^2 \phi_m(\rho) - \Sigma_{a,m}\, \phi_m(\rho) + K = 0 \end{array}\right\} \quad (1.3.9)$$

denklemleriyle verileceklerdir.

Silindirik koordinat sistemlerinde ve göz önüne aldığımız problem'n arzettiği hususî şartlar dolayısıyla (: sonsuz uzun silindirik birim hücre, homogen silindirik bölgeler) lâplâsyen operatörünün

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}$$

şeklini aldığına işâret edelim. Problemimizin sınır şartları da şu türlü ifâde olunacaklardır :

(1) Nötron akısı nükleer yakıt çubuğunun yüzeyinde, yâni $\rho = R_f$ de sürekli olarak değişir :

$$\phi_f(R_f) = \phi_m(R_f)$$

(2) Nötron akım yoğunluğu da nükleer yakıt çubuğunun yüzeyinde, yâni $\rho = R_f$ de sürekli olarak değişir; buna binâen

$$D_f\left(\frac{d\phi_f(\rho)}{d\rho}\right)_{\varrho=R_f} = D_m\left(\frac{d\phi_m(\rho)}{d\rho}\right)_{\varrho=R_f}$$

ifâdesi câridir.

(3) Birim hücrenin sınırında net nötron akımı sıfırdır zirâ hücreye ne kadar nötron giriyorsa o kadar nötron da hücreyi terketmektedir; buna göre de

$$\left(\frac{d\phi_m(\rho)}{d\rho}\right)_{\varrho=R_m} = 0$$

olur.

Bu denklemlerin genel çözümleri,

$$\varkappa_f^2 = \frac{\Sigma_{a,f}}{D_f} \qquad \text{ve} \qquad \varkappa^2_m = \frac{\Sigma_{a,m}}{D_m}$$

olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \phi_f(\rho) &= AI_0(\varkappa_f\rho) + A'K_0(\varkappa_f\rho) \\ \phi_m(\rho) &= CI_0(\varkappa_m\rho) + C'K_0(\varkappa_m\rho) + \frac{K}{\Sigma_{a,m}} \end{aligned}\right\} \tag{I.3a.10}$$

dir. Burada I_o ve K_o sırasıyla sıfırıncı mertebeden birinci ve ikinci cins tâdil edilmiş BESSEL fonksiyonlarıdır. (Bk. Nötronların Difüzyon Teorisi, 1. cild, III. Ek). Fakat $\rho = 0$ için K_0 sonsuz olduğundan bu sengülâriteden kurtulmak ancak

$$A' \equiv 0 \tag{I.3a.11}$$

olmasıyla mümkündür.

(3) şartı tatbik olunduğu takdirde

$$C' = \frac{I_1(\varkappa_m R_m)}{K_1(\varkappa_m R_m)} \cdot C \tag{I,3a.12}$$

olur ve artık

$$G = \frac{C}{K_1(\varkappa_m R_m)} \tag{I.3a.13}$$

vaz'ederek

$$\phi_m(\rho) = G\left[K_1(\varkappa_m R_m) I_0(\varkappa_m\rho) + I_1(\varkappa_m R_m) K_0(\varkappa_m\rho)\right] + \frac{K}{\Sigma_{a,m}} \tag{I.3a.14}$$

elde edilir. (1) ve (2) şartlarının tatbiki de nihayet A ve G sâbitlerinin değerlerini verir :

$$\frac{1}{A} = \frac{\Sigma_{a,m}}{K}\left\{ I_0(\varkappa_f R_f) - \frac{D_f\varkappa_f}{D_m\varkappa_m}\,\frac{I_1(\varkappa_f R_f)\left[K_1(\varkappa_m R_m) I_0(\varkappa_m R_f) + I_1(\varkappa_m R_m) K_0(\varkappa_m R_f)\right]}{K_1(\varkappa_m R_m) I_1(\varkappa_m R_f) - I_1(\varkappa_m R_m) K_1(\varkappa_m R_f)} \right\}$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{A}\,\frac{D_m\varkappa_m}{D_f\varkappa_f}\,\frac{K_1(\varkappa_m R_m) I_1(\varkappa_m R_f) - I_1(\varkappa_m R_m) K_1(\varkappa_m R_f)}{I_1(\varkappa_f R_f)} \tag{I.3a.15}$$

Buna göre (I. 3a.10) çözümlerinin (I.3a. 11-12-13) ve (I. 3a. 15) şartları da göz önünde tutulmak suretiyle nihaî analitik ifâdeleri bulunur ve ζ katsayısı hesaplanarak (I. 3*a*. 5) vâsıtasıyla f ılık kazanç katsayısı tâyin olunur. Fakat bu oldukça uzun ve sıkıntılı hesaplara ihtiyaç gösteren bir yoldur. Biz f yi daha kolay bir şekilde tâyin edebilmek için başka bir usûle başvuracağız. Mâlûm olduğu üzere f ılık kazanç katsayısı, nükleer yakıtın yuttuğu nötronların bütün yutulmuş nötronlara oranı olarak târif olunmaktadır. Fakat göz önüne almış olduğumuz heterogen hâl için birim hücreden dışarı hiçbir net nötron akımı vuku bulmadığını kabul etmiş olduğumuzdan birim hücrede doğan bütün nötronlar gene onun içinde yutuluyorlar demektir. Buna göre f nin bu hâl için eşdeğer bir târifi olarak

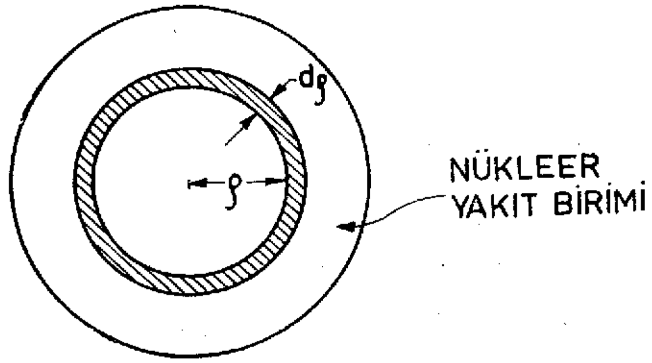
$$f = \frac{\text{Nükleer yakıtta yutulan nötronların sayısı}}{\text{Birim hücredeki bütün ılık kaynak nötronlarının sayısı}}$$

yazabiliriz.

Birim hücredeki bütün ılık nötronların sayısı, K ile bunların yoğunluğunu göstermiş olduğumuzdan ve bunların da ancak yavaşlatıcıda husûle geldiklerini kabul etmiş bulunduğumuzdan dolayı

$$K\,\pi(R_m^2 - R_f^2)\,H \qquad (I.3a.16)$$

dir.



Şekil : I. 4. Nükleer yakıt çubuğunda yutulan ılık nötronların sayısının tesbiti hakkında.

Öte yandan nükleer yakıtta yutulan nötronların sayısını tâyin etmek için Şekil : I. 4 deki gibi nükleer yakıt çubuğunun içinde ρ yarıçapını ve $d\rho$ kalınlığını haiz silindirik bir manşon tasarlayalım. Bu silindirik manşonun hacmı

$$dV = 2\pi\,\rho\,H\,d\rho$$

ve bu hacım içinde saniye başında yutulan nötronların sayısı da

$$\Sigma_{a,f}\, \phi_f(\rho)\, dV = \Sigma_{a,f}\, A\, I_0(\varkappa_f \rho)\, 2\pi H \rho\, d\rho$$

dur. Buna göre bütün yakıt çubuğunda saniye başına yutulan nötronların sayısı da

$$\int_0^{R_f} \Sigma_{a,f}\, \phi_f(\rho)\, dV = 2\pi H \Sigma_{a,f} A \int_0^{R_f} \rho\, I_0(\varkappa_f \rho)\, d\rho =$$

$$= \frac{2\pi R_f H \Sigma_{a,f} A}{\varkappa_f} I_1(\varkappa_f R_f) \tag{I.3a.17}$$

olacaktır.

Buradan, (I. 3a. 16), (I. 3a. 17) ve (I. 3a. 15) ifâdeleri göz önünde bulundurulmak suretiyle

$$\frac{1}{f} = \frac{\varkappa_f \pi (R^2_m - R_f^2) H \cdot K}{2\pi R_f H \Sigma_{a,f} \cdot I_1(\varkappa_f R_f)} \cdot \frac{1}{A} = \frac{K \varkappa_f (R_m^2 - R_f^2)}{2\Sigma_{a,f} R_f \cdot I_1(\varkappa_f R_f)} \cdot \frac{1}{A} =$$

$$= \frac{V_m \Sigma_{a,m}}{V_f \Sigma_{a,f}} \left[\frac{\varkappa_f R_f}{2} \frac{I_0(\varkappa_f R_f)}{I_1(\varkappa_f R_f)} \right] + \varkappa_m \frac{(R_m^2 - R_f^2)}{2R_f} \left[\frac{I_0(\varkappa_m R_f) K_1(\varkappa_m R_m) + K_0(\varkappa_m R_f) I_1(\varkappa_m R_m)}{I_1(\varkappa_m R_m) K_1(\varkappa_m R_f) - K_1(\varkappa_m R_m) I_1(\varkappa_m R_f)} \right] \tag{I.3a.18}$$

elde edilir.

Kolayca farkedildiği veçhile $\frac{1}{f}$ nin ifâdesi, biri sâdece nükleer yakıtın $\varkappa_f$ sine, diğeri ise sâdece yavaşlatıcının $\varkappa_m$ sine bağlı iki terimden müteşekkildir. Buna benzer ifâdeler tek boyutlu ve küresel eşdeğer birim hücreler için de elde edilebilir ve her seferinde de $\frac{1}{f}$ yi

$$\boxed{\frac{1}{f} = 1 + \frac{V_m \Sigma_{a,m}}{V_f \Sigma_{a,f}} F(\varkappa_f) + [E(\varkappa_m) - 1]} \tag{I.3a.19}$$

şeklinde ifâde etmek kâbildir.

Cetvel : I. 1

Birim hücrenin şekli	$F(\varkappa_f)$	$E(\varkappa_m)$
Sonsuz silindir	$\frac{\varkappa_f R_f}{2} \frac{I_0(\varkappa_f R_f)}{I_1(\varkappa_f R_f)}$	$\frac{\varkappa_m (R_m^2 - R_f^2)}{2R_f} \left[\frac{I_0(\varkappa_m R_f) K_1(\varkappa_m R_m) + K_0(\varkappa_m R_f) I_1(\varkappa_m R_m)}{I_1(\varkappa_m R_m) K_1(\varkappa_m R_f) - I_1(\varkappa_m R_f) K_0(\varkappa_m R_m)} \right]$
Sonsuz dilim	$\varkappa_f R_f \coth \varkappa_f R_f$	$\varkappa_m (R_m - R_f) \coth \varkappa_m (R_m - R_f)$
Küre	$\frac{\varkappa_f^2 R_f^2}{3} \frac{\operatorname{th} \varkappa_f R_f}{\varkappa_f R_f - \operatorname{th} \varkappa_f R_f}$	$\frac{\varkappa_m^2 (R_m^3 - R_f^3)}{3R_f} \left[\frac{1 - \varkappa_m R_m \coth \varkappa_m (R_m - R_f)}{1 - \varkappa_m^2 R_m R_f - \varkappa_m (R_m - R_f) \coth \varkappa_m (R_m - R_f)} \right]$

Cetvel : I. 1 de muhtelif eşdeğer birim hücre geometrileri için $F(\varkappa_f)$ ve $E(\varkappa_m)$ fonksiyonları sıralanmış bulunmaktadır.

Eğer nükleer yakıt çubuğu, nötron akısı üzerindeki tesiri ihmâl edilebilen ince bir gömlek içinde bulunuyorsa, bu gömleğin hacmını V_g ve buna tekabül eden makroskopik yutma tesir kesidini de $\Sigma_{a,g}$ ile gösterirsek bu takdirde $\frac{1}{f}$ nin ifâdesinin

$$\boxed{\frac{1}{f} = 1 + \left(\frac{V_m\Sigma_{a,m} + V_g\Sigma_{a,g}}{V_f\Sigma_{a,f}}\right) \cdot F(\varkappa_f) + [E(\varkappa_m) - 1]} \qquad (I.3a.20)$$

şekline girdiği tesbit edilir.

Sınır bir hâli temsil etmek üzere, yavaşlatıcının difüzyon katsayısının sonsuz addedilebileceği zaman $F(\varkappa_f)$ fonksiyonun ζ zarar katsayısına eşit olduğunu göstermek kâbildir. Filhakika $D_m \to \infty$ için $\varkappa_m \to 0$ olur ve buna binâen de $E(\varkappa_m) = 1$ değerini alır. Binâenaleyh bu hâle tekabül eden f ılık kazanç katsayısı

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{V_m\Sigma_{a,m}}{V_f\Sigma_{a,f}} F(\varkappa_f) \qquad (I.3a.21)$$

veyâhut da

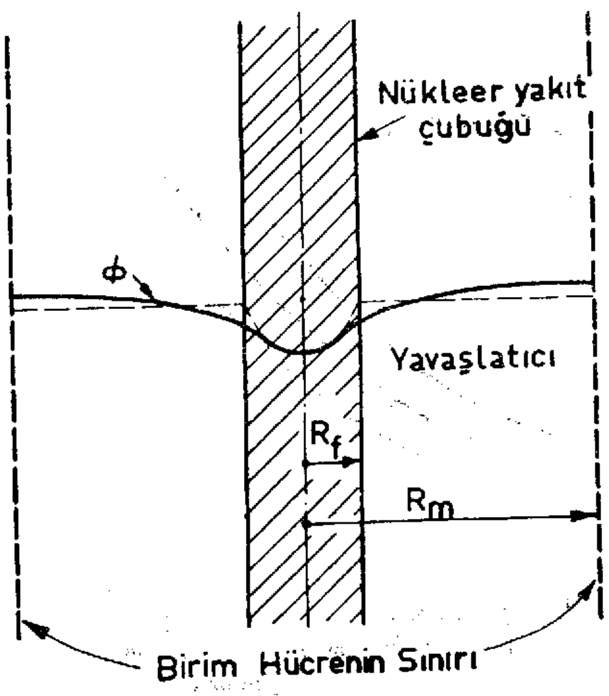
$$f = \frac{1}{1 + \frac{V_m\Sigma_{a,m}}{V_f\Sigma_{a,f}} F(\varkappa_f)} \qquad (I.3a.22)$$

şeklıne girer. Bu sonuncu ifâde (I. 3a. 5) ile karşılaştırılırsa, göz önüne almış olduğumuz özel hâl için, derhâl

$$F(\varkappa_f) = \zeta$$

olduğu görülür.

D_m nin sonsuz olduğu bir yavaşlatıcıda nötronlar Şekil : I. 5 deki kesik çizgili eğrinin gösterdiği gibi birim hücre içinde nükleer yakıt birimine gelinceye kadar doğrular boyunca hareket ederler. Fakat gerçekte D_m sonlu bir değeri haiz olduğu için yavaşlatıcıdaki nötron akısının ortalama değeri, bunun nükleer yakıtın yüzeyindeki değerinden daha büyüktür. Bu itibarla D_m nin sonsuz olması hâline nisbetle nötronlar için gerçek hâlde nükleer yakıt tarafından fazladan bir yutulma vuku buluyor demektir. İşte bu fazladan yutulma ölçüsünü de gerçek hâlde $[E(x_m) - 1]$ terimi tâyin etmektedir.



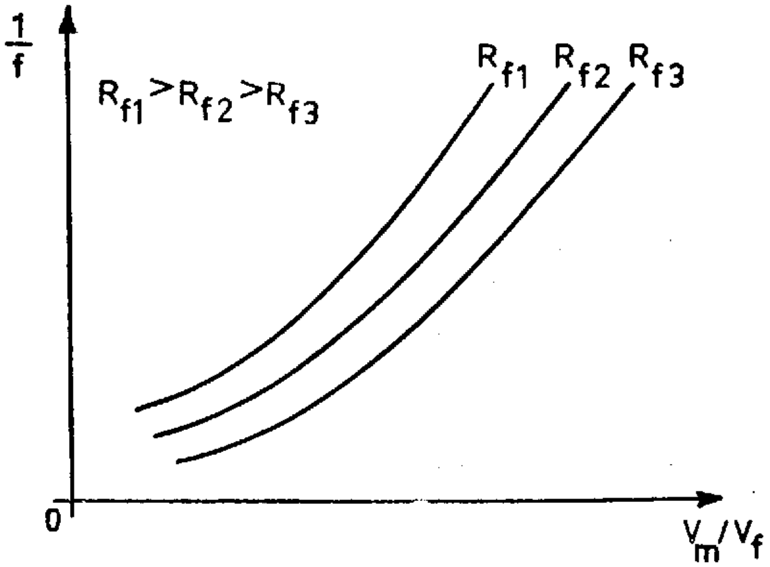
Şekil : I. 5

f nin muhtelif nükleer yakıt çubuğu yarıçapları için V_m/V_f ye bağlılığı Şekil : I. 6 da gösterilmiş bulunmaktadır. Burada V_m/V_f oranı apsise ve $1/f$ de ordinata taşınmıştır. Buna göre sâbit bir V_m/V_f oranı için f ılık kazanç katsayısının, yakıt çubuklarının R_f yarıçapları arttıkça ve sâbit bir R_f değeri için de V_m/V_f oranı arttıkça azalmakta olduğu müşahede edilmektedir.

3b. Rezonansa Tutulmama İhtimâlinin Tâyini : Yakıt Çubuklarının Kendi Kendilerini Perdelemeleri Olayının p ye Tesiri. — Bu kitabın birinci cildinde ılık homogen reaktörlerin teorisi çerçevesi içinde (U^{238} veyâ Th^{232} gibi) rezonanslı bir nötron yutucu madde ihtivâ eden homogen bir atom reaktöründe bir nötronun hiçbir rezonansa tutulmadan muayyen bir E_0 enerjisinden $E_{ıl}$ ılık enerjiye kadar vâsıl olabilmesi ihtimâlinin

$$p_{ıl} = \exp\left\{-\int_{E_{ıl}}^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi(E')\,[\Sigma_s(E') + \Sigma_a(E')]}\,\frac{dE'}{E'}\right\} \qquad (I.3b.1)$$

ifâdesiyle verildiğini görmüştük ; burada $\Sigma_a(E')$ makroskopik yutulma tesir kesiti, $\Sigma_s(E')$ makroskopik saçılma tesir kesiti ve $\bar{\xi}(E')$ de ortamda vuku bulan çarpışmalarda çarpışma başına nötronun kaybettiği ortalama logaritmik enerjidir.



Şekil : I. 6. f Ilık kazanç katsayısının yakıt çubuklarının yarıçaplarının ve Vm/Vf oranının fonksiyonu olarak değişimleri.

(I. 3b. 1) ifâdesinin, yavaşlatıcının hidrojenli bir ortam olması ve nötron yutucu çekirdeklerin kütlelerinin de pratik olarak sonsuz farzedilebilmesi hâlinde tamamen doğru olmasına karşılık bu ifâdenin başka cins yavaşlatıcıların mevcûd olduğu hâllere tatbiki ancak nötron yutucu çekirdeklerin rezonansları geniş aralıklıysalar veyâhut da rezonans tepeleri çok alçaksalar mümkün olabilmektedir.

Eğer homogen bir reaktörün 1 cm³ ünde rezonanslı nötron yutucu atomlardan N tâne varsa ve nötronların E enerjileri için bunların mikroskopik yutulma tesir kesidi σ_a ise

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} = \frac{N\sigma_a}{\Sigma_s} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a} \qquad \text{(I.3b.2)}$$

yazılabilir. Öte yandan rezonans bölgesi dâhilinde gerek nötron yutucunun ve gerekse nötron yavaşlatıcının elâstik saçılma tesir kesitlerinin, ve keza $\bar{\xi}$ nin enerjiye bağlı olmadıkları kabul edilebilir. Buna göre (I. 3b. 2) nin yardımıyla (I. 3b. 1) ifâdesi için

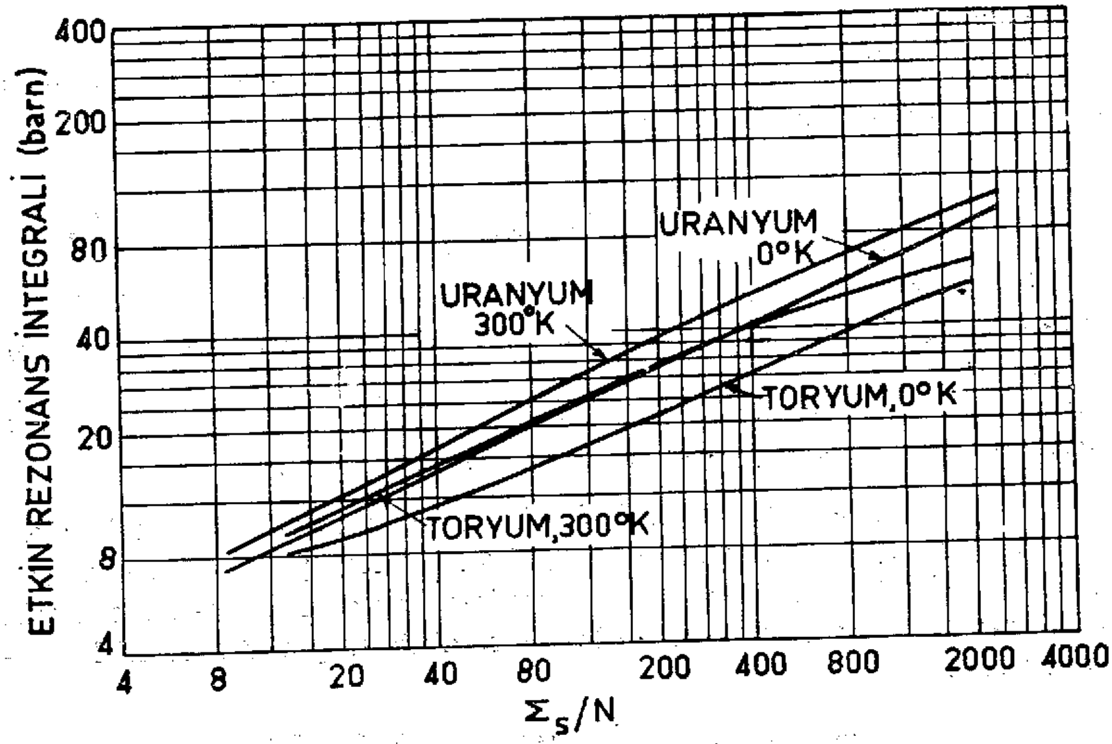
$$p_{i1} = \exp\left\{-\frac{N}{\xi\Sigma_s}\int_{E_{i1}}^{E_0}\left(\sigma_a\frac{\Sigma_s}{\Sigma_s+\Sigma_a}\right)\frac{dE'}{E'}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{N}{\xi\Sigma_s}\int_{E_{i1}}^{E_0}(\sigma_a)_{et}\frac{dE'}{E'}\right\} \qquad (I.3b.1')$$

elde edilir. Burada

$$(\sigma_a)_{et} = \sigma_a\frac{\Sigma_s}{\Sigma_s+\Sigma_a} = \frac{\sigma_a}{1+\dfrac{N\sigma_a}{\Sigma_s}} \qquad (I\ 3b.3)$$

ile belirlenen büyüklüğe «*etkin yutulma tesir kesidi*» ve bunun $1/E'$ üzerinden integraline de «*etkin rezonans integrali*» adı verilir. Etkin rezonans integralini denel olarak sıhhatlice bir şekilde tâyin etmek mümkün olduğundan p_{i1} ın (I. 3b. 1') ile verilmiş olan ifâdesinin önemi âşikârdır. Şekil : I. 7 de Th^{232} ve U^{238} in 0°K ve 300°K ya tekabül eden etkin rezonans integralleri Σ_s/N nin fonksiyonu olarak çizilmiş bulunmaktadır.



Şekil : I.7. Etkin rezonans integralinin değişimleri.

Şimdi homogen reaktörler yerine, uranyum çubuklarının bir yavaşlatıcı içine muayyen bir şebeke uyarınca yerleştirilmiş olduğu heterogen bir reaktör düşünelim. Yavaşlatıcı içinde, enerjileri uranyumun rezonanslar bölgesine erişen nötronlardan sâdece nükleer yakıt çubuklarına müteveccih olanları göz önüne alalım. Ancak rezonans tepelerinin değerleri yüksek olduğundan bunlara tekabül eden Σ_a ların çok büyük ve dolayısıyla da $\lambda_a = 1/\Sigma_a$ ların çok küçük (milimetre mertebesinde) olmaları hasebiyle, nükleer yakıt çubukları içine giren ve enerjileri rezonans enerjisi civarında olan nötronlar daha ilk birkaç mm içinde yutulurlar ve yakıtın bu kısmından merkezine doğru nüfûz edebilen hemen hemen hiç nötron bulunmaz. Buna *nükleer yakıt çubuğunun kendi kendini perdelemesi* olayı adı verilir.

Bu olayın neticesi olarak rezonans nötronlarının akısı nükleer yakıt çubuğunun cidarlarında yüksek fakat içeri doğru gitgide düşük olur. Bu olay da $(\sigma_a)_{et}$ etkin mikroskopik yutulma tesir kesidinin çubuğun içinde aldığı değerin, uranyumla yavaşlatıcının homogen bir tarzda biribirlerine karışmış oldukları hâlde elde edilecek değerden daha küçük olmasını intâceder. Dolayısıyla (I. 3b. 1′) ye göre de p **rezonansa tutulmama ihtimâlinin değeri heterogen reaktörlerde homogen reaktörlerdekine nisbetle daha yüksek olur.**

Şu hâlde çoğaltkan bir ortamı heterogen kılmak p rezonansa tutulmama ihtimâlinin değerinin artmasına sebep olmaktadır :

$$\boxed{p_{het} > p_{hom}} \qquad (1.3b.4)$$

İşte bu sebepten dolayı, yavaşlatıcı olarak âdî su veyâ grafit kullanıldığında hiç bir şekilde kritik kılınamayan homogen çoğaltkan ortamlara mukabil, nükleer yakıt yavaşlatıcı ortam içine muayyen bir şebeke uyarınca yerleştirildiği zaman elde edilen heterogen ortamlarda kararlı zincirleme fisyon reaksiyonları teessüs edebilmektedir.

p rezonansa tutulmama ihtimâlinin heterogen sistemlerde incelenmesi $(\sigma_a)_{et}$ in (1) rezonanslı yutulmayı haiz nükleer yakıttaki hacmî yutulma ve, (2) nükleer yakıtın dış yüzeyinin, yakıtın kütlesine oranıyla orantılı sathî yutulma şeklinde iki kısma ayrılabileceğini farzetmekle epeyi basitleşir.

Hacmî yutulmaya tekabül eden tesir kesidini $a(E)$ ve sathî yutulmaya tekabül eden tesir kesidini de, S ile cm^2 cinsinden yakıt çubuğunun dış yüzeyine ve M ile de yakıtın gram cinsinden kütlesine işâret ederek, $b(E)\frac{S}{M}$ ile gösterirsek

$$(\sigma_a)_{et} = a(E) + b(E)\frac{S}{M} \qquad \text{(I 3b.5)}$$

yazılabildiğini kabul edeceğiz. Bundan başka

$$\overline{\phi}_f(E) = \frac{1}{V_f}\int_{V_f} \phi(\vec{r},E)\,d\vec{r}$$

$$\overline{\phi}_s(E) = \frac{1}{S}\int_{S} \phi(\vec{r},E)\,d\vec{r}$$

ile E enerjisini haiz nötronların, sırasıyla, nükleer yakıt çubuğu içindeki ve bunun dış yüzeyindeki ortalama akılarını gösterirsek (I. 3b. 5) e binâen bir dE enerji aralığı içinde, bir nükleer yakıt çubuğunda yutulan nötronların toplam $A(E)\,dE$ sayısı

$$A(E)\,dE = \left[\overline{\phi}_f(E)\,V_f\,N\,a(E) + \overline{\phi}_S(E)\,V_f\,N\,b(E)\frac{S}{M}\right]dE \qquad \text{(I.3b.6)}$$

ile verilmiş olacaktır.

Nötron yavaşlatıcı içinde E enerjisinden geçerek yavaşlayan nötronların birim hücre başına sayısını Q(E) ve yavaşlatıcıdaki ortalama nötron akısını da

$$\overline{\phi}_m(E) = \frac{1}{V_m}\int_{V_m} \phi(\vec{r},E)\,d\vec{r}$$

ile gösterirsek

$$Q(E) = \overline{\phi}_m(E)\,V_m\,\overline{\xi}_m\,\Sigma_{s,m}\,E \qquad \text{(I. 3b. 7)}$$

dir. Eğer yavaşlatıcı birden fazla cins element ihtivâ ediyorsa bu takdirde $\overline{\xi}_m$ yerine 1. cildin (XI.3. 7) formülüyle verilmiş olan $<\overline{\xi}>$ ortalama değeri alınır.

Eğer yavaşlatıcının nötron yutucu olmadığını kabul edersek, birim hücre içinde, bir dE enerji aralığının çevrelediği bir E enerjisini yavaşlama yoluyla aşan nötronların Q(E) sayısında vukua gelen $dQ(E)$ değişimi sâdece, enerjileri dE aralığında bulunan nötronlardan nükleer yakıt çubuğu içinde yutulanlar tarafından tevlîdedilmiş olacaktır. Yukarıda nükleer yakıt çubuğunda, bir dE enerji aralığında yutulan nötronları $A(E)\,dE$ ile göstermiştik ; buna binâen ve yukarıda zikredilen faraziyeler muvacehesinde

$$\frac{dQ(E)}{dE} = A(E) \tag{I.3b.8}$$

olacaktır. Son üç bağıntıdan

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dE} = \frac{1}{E}\left[\frac{NV_f\,\overline{\phi}_f(E)\,a(E)}{V_m\xi_m\Sigma_{s,m}\overline{\phi}_m(E)} + \frac{NV_f\,\overline{\phi}_s(E)\,b(E)}{V_m\xi_m\Sigma_{s,m}\overline{\phi}_m(E)}\cdot\frac{S}{M}\right]$$

ve buradan da $E_{,1}$ ile E_0 limitleri arasında integrâl almak sûretiyle

$$Q(E_{,1}) = Q(E_0)\cdot\exp\left\{-\frac{NV_f}{V_m\xi_m\Sigma_{s,m}}\left[\int_{E_{,1}}^{E_0}\frac{\overline{\phi}_f(E')}{\overline{\phi}_m(E')}\,a(E')\frac{dE'}{E'} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{S}{M}\int_{E_{,1}}^{E_0}\frac{\overline{\phi}_s(E')}{\overline{\phi}_m(E')}\,b(E')\frac{dE'}{E'}\right]\right\}$$

bulunur.

Diğer taraftan $p(E_0, E_{,1})$ ın esas târifine dönülecek olursa bu, $E_{,1}$ enerjisine erişebilmiş nötronların sayısının E_0 enerjisini haiz nötronların sayısına oranı, yâni E_0 enerjili bir nötronun yutulmadan $E_{,1}$ enerjisine erişebilmesi ihtimâli demek olduğundan $Q(E_{,1})/Q(E_0)$ dan başka bir şey değildir. Buna binâen $p(E_0, E_{,1})$ için

$$\boxed{\begin{aligned} p(E_0, E_{,1}) &= \frac{Q(E_{,1})}{Q(E_0)} = \\ &= \exp\left\{-\frac{NV_f}{V_m\xi_m\Sigma_{s,m}}\left[\int_{E_{,1}}^{E_0}\frac{\overline{\phi}_f(E')}{\overline{\phi}_m(E')}\,a(E')\frac{dE'}{E'} + \frac{S}{M}\int_{E_{,1}}^{E_0}\frac{\overline{\phi}_s(E')}{\overline{\phi}_m(E')}\,b(E')\frac{dE'}{E'}\right]\right\} \end{aligned}} \tag{I.3b.9}$$

elde edilmiş olur.

Nükleer yakıtla nötron yavaşlatıcının homogen bir tarzda biribirlerine karışmış oldukları hâlde bütün E enerjilerinde $\overline{\phi_f}/\overline{\phi_m}$ ve $\overline{\phi_S}/\overline{\phi_m}$ daima 1 e eşit olacaklarından, ve kezâ V_f ve V_m hacımları da biribirlerinden farklı olmayacaklarından, bu takdirde bekleneceği gibi, p nin (I. 3b. 9) ile verilmiş olan ifâdesi de (I. 3b. 3) e ircâ olur. (I. 3b. 9) ifâdesindeki $\overline{\phi_m}/\overline{\phi_f}$ büyüklüğüne *«rezonans nötronlarının zarar katsayısı»* denilmektedir.

Meseleyi daha da basitleştirmek için $\overline{\phi_f}/\overline{\phi_m} = \overline{\phi_S}/\overline{\phi_m}$ vazolunabilir ; rezonans sahasında $\overline{\phi_f}/\overline{\phi_m}$ nin enerjiye bağlı olmadığı da kabul edilecek olursa, bu takdirde (I. 3b. 9)

$$\boxed{p\,(E_0, E_{t1}) = \exp\left[-\frac{N V_f \overline{\phi_f}}{V_m \xi_m \Sigma_{s,m} \overline{\phi_m}} \int_{E_{t1}}^{E_0} (\sigma_a)_{et} \frac{dE'}{E'}\right]} \qquad (I.3b.10)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $(\sigma_a)_{et}$ in (I. 3b. 5) ile verilmiş olan ifâdesini de göz önünde tutmak sûretiyle

$$\int_{E_{t1}}^{E_0} (\sigma_a)_{et} \frac{dE'}{E'} = \alpha + \beta \frac{S}{M} \qquad (I.3b.11)$$

vazedilebilecek demektir. α ve β denel olarak tâyin edilebilen büyüklüklerdir. Cetvel : I. 2 de bazı nükleer yakıtlar için α ve β değerleri verilmiş bulunmaktadır.

Burada şunu da ifâde edelim ki yapılan faraziyelerin kabalığına rağmen, rezonans integrali (I. 3b. 11) ile verilmiş olmak üzere, (I. 3b. 10) formülü zannedilebileceği kadar kötü bir takribiyet değildir. Filhakika p yi % 1 lik bir hatâ ile tâyin edebilmek için $\overline{\phi_f}/\overline{\phi_m}$ yi % 10 luk bir hatâ ile bilmek kifâyet etmektedir.

Rezonans nötronlarının zarar katsayısı tıpkı, f ılık kazanç katsayısının hesabında ortaya çıkan zarar katsayısı gibi ve gene aynı (I. 3a. 8) denklemlerini kullanmak suretiyle bulunur. Yalnız bunun için

$$f^* = \frac{\text{Nükleer yakıtın rezonanslarında yutulan nötronların sayısı}}{\text{Rezonanslarda üreyen nötronların sayısı}}$$

Cetvel : I. 2

Yakıtın cinsi	α (barn)	β (barn gram/cm²)
U	9,25	24,9
$U0_8$	12,8	24,9
$U0_2$	11,0	24,5
UF_8	14,6	16,3
Th	8,4	24,9
$Th0_2$	10,4	27,9

diye bir *«rezonansa ait kazanç katsayısı»* târif edilir. Buna binâen (I. 3a. 6) ya benzer şekilde

$$\frac{\overline{\phi}_m^*}{\overline{\phi}_f^*} = \zeta^* = \frac{V_f \Sigma_{a,f}}{V_m \Sigma_{a,m}} \left(\frac{1}{f^*} - 1 \right) \qquad \text{(I.3b.12)}$$

ve (I. 3a. 15) e benzer şekilde de

$$\frac{1}{f^*} = 1 + \frac{V_f \Sigma^*_{a,f}}{V_m \Sigma^*_{a,m}} F + (E - 1) \qquad \text{(I. 3b. 13)}$$

formülleri yazılabilir. Bu ifâdelerde (*) işâretini haiz büyüklükler rezonans bölgesindeki değerlere delâlet etmektedirler. Rezonans bölgesini R ile göstererek (I. 3b. 10) ifâdesi, (I. 3b. 12) vâsıtasıyla

$$p = \exp \left[- \frac{N \Sigma^*_{a,m}}{\xi_m \Sigma_{s,m} \Sigma^*_{a,f}} \frac{f^*}{1 - f^*} \int_R (\sigma_a)_{et} \frac{dE'}{E'} \right] \qquad \text{(I. 3b. 14)}$$

şeklinde ifâde olunur. Kezâ (I. 3b. 12) ve (I. 3b. 13) vâsıtasıyla

$$\frac{\overline{\phi}_f}{\overline{\phi}_m} = \frac{1}{F + \frac{V_f \Sigma_{a,f}}{V_m \Sigma_{a,m}} (E - 1)}$$

yazılabileceğinden (I. 3b. 10) ifâdesi

$$p = \exp\left[- \frac{1}{\dfrac{V_m \xi_m \Sigma_{s,m} \cdot F}{NV_f \int_R (\sigma_a)_{et} \dfrac{dE'}{E'}} + \dfrac{\xi_m \Sigma_{s,m} \Sigma^*_{a,f} \cdot (E-1)}{N\Sigma^*_{a,m} \int_R (\sigma_a)_{et} \dfrac{dE'}{E'}}} \right] \qquad (I.3b.15)$$

şekline de ircâ edilebilir.

Bu formüllerdeki $\Sigma^*_{a,m}$ esâsında hayalî bir yutulmaya işâret etmektedir. $\Sigma_{a,m}$ bir nötronun rezonansların işgâl ettikleri enerji aralığını, yavaşlaması esnasında yakalanmadan atlaması ihtimâline bağlı bir *«yavaşlama tesir kesidi»* dir. 1, cildin (XII. 9. 3) formülü vâsıtasıyla $\Sigma_{a,m}$ nin

$$\Sigma^*_{a,m} = \Sigma_{yav} = \frac{\Sigma_{s,m}}{\dfrac{1}{\xi_m} \operatorname{Log} \dfrac{E_1}{E_2}} \qquad (I.3b.16)$$

ifâdesiyle verildiği görülmektedir. Burada E_1 ve E_2 rezonans bölgesinin sırasıyla, üst ve alt sınırlarıdır. Öte yandan nükleer yakıtın rezonans bölgesindeki ortalama makroskopik yutulma tesir kesidi

$$\Sigma^*_{a,f} = \frac{N \int_R (\sigma_a)_{et} \dfrac{dE'}{E'}}{\int_R \dfrac{dE'}{E'}} = \frac{N}{\operatorname{Log} \dfrac{E_1}{E_2}} \int_R (\sigma_a)_{et} \frac{dE'}{E'} \qquad (I.3b.17)$$

ile târif edilir. (I. 3b. 16) yı göz önünde tutmak sûretiyle (I. 3b. 17) den

$$\frac{\Sigma^*_{a,f}}{\Sigma^*_{a,m}} = \frac{N}{\xi_m \Sigma_{s,m}} \int_R (\sigma_a)_{et} \frac{dE'}{E'}$$

yazılabilir ve (I. 3b. 15) ifâdesi de

$$p = \exp\left[- \frac{1}{\dfrac{V_m \xi_m \Sigma_{s,m}}{NV_f \int_R (\sigma_a)_{et} \dfrac{dE'}{E'}} F + (E-1)} \right] \qquad (I.3b.18)$$

şekline girer. p nin ifâdesini çok daha basitleştirmek kabildir. Filhakika (I. 3b. 16) ve (I. 3b. 17) den faydalanarak

$$\frac{\Sigma^*_{s,m} N}{\overline{\xi}_m \Sigma_{s,m} \Sigma^*_{a,f}} \int_R (\sigma_a)_{et} \frac{dE'}{E'} = 1$$

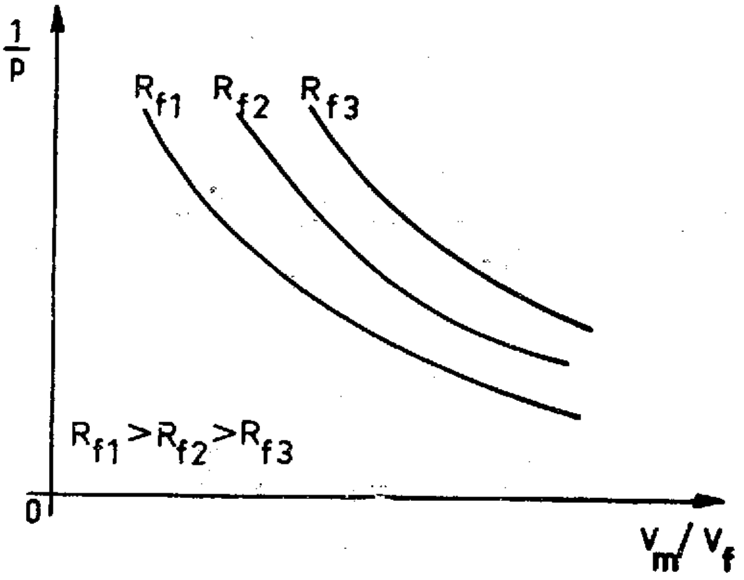
yazmak mümkündür. Buna göre (I. 3b. 18) ifâdesi

$$p = \exp\left[-\frac{1}{\frac{V_f \Sigma^*_{a,f}}{V_m \Sigma^*_{s,m}} F + (E-1)}\right] \qquad (I.3b.19)$$

şekline girer. (I. 3b. 13) ile verilmiş olan f razonansa ait kazanç katsayısının ifâdesini göz önüne alacak olursak p, artık

$$\boxed{p = \exp\left(-\frac{f^*}{1-f^*}\right)} \qquad (I.3b.20)$$

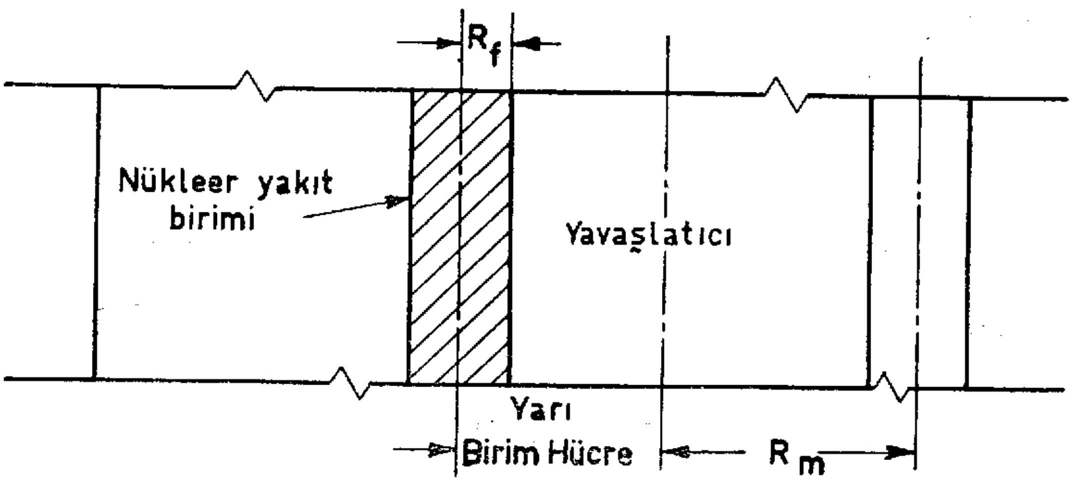
bağıntısıyla ifâde olunabilecektir.



Şekil: I.8. p Rezonansa tutulmama ihtimâlinin yakıt çubuklarının yarıçaplarının ve V_m/V_f oranının fonksiyonu olarak değişimleri

(I. 3b. 13) den faydalanmak sûretiyle (I. 3b. 20) ifâdesi vasıtasıyla, nükleer sâbitleri evvelden tâyin edilmiş olmak şartıyla, herhangi bir şekildeki birim hücre için p yi tâyin etmek kâbildir. p nin muhtelif yarıçaplı silindirik yakıt çubukları için V_m/V_f oranına bağlılığı Şekil: I. 8 de gösterilmiş bulunmaktadır. Burada V_m/V_f oranı apsise ve $1/p$ de ordinata taşınmıştır. Buna göre sâbit bir V_m/V_f değeri için p nin R_f ile birlikte arttığı ve sâbit bir R_f değeri için de V_m/V_f ile birlikte arttığı müşahede edilmektedir. Şu hâlde p nin V_m/V_f nin fonksiyonu olarak değişmesinde p nin artmasını sağlayan şartlar, 3a bölümünde gördüğümüz veçhile, f nin azalmasına sebep olanların aynılarıdır. Binâenaleyh mesele pf çarpımını maksimum kılacak en uygun düzeni seçmektir. Bu aşağı yukarı, p ile f nin birbirlerine eşit oldukları V_m/V_f ve R_f değerlerini bulmaya tekabül etmektedir.

3b′. Heterogenliğin Doğurduğu Geometrik Durumun p ye Tesiri. — p_{het} in p_{hom} e nisbetle daha yüksek olmasını sağlayan ikinci olay da yansıtıcıyla yakıtın birbirlerinden kesin geometrik sınırlarla ayrılmış olmalarıdır. Bu geometrik olayın rezonansa tutulmama ihtimâli üzerindeki tesirini, hesapları çok girifit kılmamak gâyesiyle, tek boyutlu bir geometri için yâni nükleer yakıt birimlerinin biribirilerine paralel dilimler şeklinde düzenlenmiş olduğu heterogen bir ortam için inceleyeceğiz (Şekil : I. 9). Bundan başka, elemanter difüzyon teorisini kullanabilmek için de nükleer yakıt birimlerinin λ_a ya nisbetle kalınca olduklarını kabul edeceğiz.



Şekil : I. 9

Eğer bu geometride birim hücre içindeki hızlı nötronların yavaşlamağa sâdece yavaşlatıcı içinde başladıklarını farzedecek olursak, yavaşlatıcıdaki ılık olmayan nötronların difüzyonu için

$$\left.\begin{aligned} D_m \frac{\partial^2 \phi_m(x,u)}{\partial x^2} - \Sigma_{a,m}\, \phi_m(x,u) &= \frac{\partial q_m(x,u)}{\partial u} \\ q_m(x,u) &= \bar{\xi}_m \Sigma_{t,m}\, \phi_m(x,u) \end{aligned}\right\} \qquad (I.3b'.1)$$

yazabiliriz. Burada $\Sigma_{t,m}$ toplam makroskopik tesir kesidini göstermektedir.

Bu denklemin çözülebilmesi için sınır şartları olarak:

(1) Net nötron akımının birim hücrenin $x=R_m$ sınırında sıfır olduğunu yâni

$$\left[\frac{\partial \phi_m(x,u)}{\partial x}\right]_{x=R_m} = 0 \qquad (I.3b'.2)$$

(2) β ile nükleer yakıt biriminin yavaşlatıcıya göre albedosunu ve $J^m_-(R_f,u)$ ile $J^m_+(R_f,u)$ ile de sırasıyla nükleer yakıta ve yavaşlatıcının içine doğru yönlenmiş olan yavaşlatıcıdaki kısmî nötron akım yoğunluklarının yakıtla yavaşlatıcının sınırındaki değerlerini göstererek

$$J^m_+(R_f,u) = \beta J^m_-(R_f,u) \qquad (I.3b'.3)$$

vazedeceğiz.

Şimdi eğer

$$q_m(x,u) = X(x)\; q_m(u) \qquad (I.\,3b.'\,4)$$

vazeder de bunu (I. 3b.' 1) denklemlerine yerleştirirsek λ^2 ile (I. 3b.' 4) vazında işâretlediğimiz değişkenlere ayrışım dolayısıyla ortaya çıkan sâbiti göstermek sûretiyle ve

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0$$

olmak üzere, birinci sınır şartından faydalanarak

$$X(x) \sim \cos \lambda\, (R_m - x) \qquad (I.\,3b.'\,5)$$

$$q_m(u) = q_0 \exp\left[-\frac{D_m\lambda^2 + \Sigma_{a,m}}{\bar{\xi}_m \Sigma_{t,m}}\, u\right] \qquad (I.3b'.6)$$

ifâdeleri elde edilir. Burada, kolaylıkla anlaşılacağı üzere

$$q_m(x,0) = X(x)\,q(0) = X(x)\cdot q$$

vazedilmiş bulunmaktadır.

Kısmî nötron akım yoğunluklarının 1. cildin VII. dersinde verilmiş olan ifâdelerini göz önünde tutarak (I. 3b.′ 5) vâsıtasıyla ikinci sınır şartından

$$1 = 2\frac{1+\beta}{1-\beta} D_m\lambda \cdot \operatorname{tg}\lambda\,(R_m - R_f) \tag{I.3b′.7}$$

elde edilir.

Nükleer yakıtın yansıtıcıya göre albedosunu hesaplamadan önce nükleer yakıt içinde nötronların yavaşlamadıklarını farzetmiş olduğumuza bir kere daha dikkat etmemiz lâzımdır; bu özellik dolayısıyla yakıt için ılık nötronların difüzyon denklemi sâdece

$$D_f \frac{\partial^2 \phi_f(x,u)}{\partial x^2} - \Sigma_{a,f}\, \phi_f(x,u) = 0 \tag{I.3b′.8}$$

şeklinde olacaktır. Buna binâen, ve $\varkappa_f^2 = \Sigma_{a,f}/D_f$ vazederek β nın

$$\beta = \frac{1 - 2D_f\varkappa_f \operatorname{th}\varkappa_f R_f}{1 + 2D_f\varkappa_f \operatorname{th}\varkappa_f R_f} \tag{I.3b′.9}$$

ile verileceği kolaylıkla hesaplanır.

Rezonansa tutulmama ihtimâli, bütün birim hücrede ılık enerjiye erişen nötronların sayısının yavaşlamaya başlayan nötronların sayısına oranı demek olduğundan

$$p_{het}(u_{il}) = \frac{\displaystyle\int_{R_f}^{R_m} q_m(x, u_{il})\,dx}{\displaystyle\int_{R_f}^{R_m} q_m(x,0)\,dx} = \exp\left[-\frac{D_m\lambda^2 + \Sigma_{a,m}}{\bar{\xi}_m \Sigma_{t,m}} u_{il}\right] \tag{I.3b′.10}$$

bulunur.

Gâyemiz p_{het} in değeriyle eşdeğer homogen ortama tekabül eden p_{hom} in değerini mukayese etmektir. Bunun için homogen ortama, heterogen ortamdaki (1) nükleer yakıt çekirdeklerinin yavaşlatıcı çekirdeklerine oranını yâni bunların kapladıkları hacımların oranını ve binâenaleyh R_f/R_m yi sâbit tutmak, ve (2) birim hücrelerin kalınlığını sıfıra götürmek sûretiyle geçebileceğine işâret edelim. Bunlara binâen bu geçişte hem $R_f \to 0$ ve hem de $(R_m - R_f) \to 0$ olacağından (I. 3b'. 7) ve (I. 3b'. 9) ifâdelerindeki *tg* ve *th* li ifâdeler yerine rahatlıkla bunların TAYLOR serilerindeki ilk terimleri kullanılabilir. Bu takdirde

$$\lim_{R_f \to 0} \beta = \beta_{hom} = \frac{1 - 2D_f\varkappa_f^2R_f}{1 + 2D_f\varkappa_f^2R_f} \qquad (I.3b'.11)$$

olur. Aynı şartlar altında (I. 3b'. 7) den de

$$\lambda^2_{hom} = \frac{1 - \beta_{hom}}{1 + \beta_{hom}} \frac{1}{2D_m(R_m - R_f)} \qquad (I.3b'.12)$$

bulunduğundan β nın (I. 3b'. 11) ile verilen değeri λ^2_{hom} in ifâdesine yerleştirildiği zaman

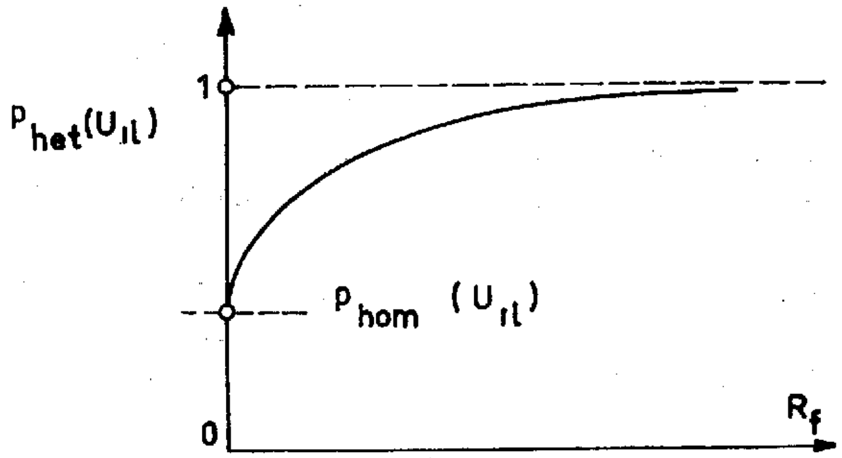
$$\lambda^2_{hom} = \frac{\Sigma_{a,f}}{D_m} \frac{1}{\frac{R_m}{R_f} - 1} \qquad (I.3b'.13)$$

bulunur. Bu ifâdeyi p_{het} in ifâdesine ikâme edecek olursak bunun bir sınır hâli olarak p_{hom} için de

$$p_{hom}(u_{i1}) = \exp\left\{ - \left[\frac{\frac{R_f}{R_m}\Sigma_{a,f} + \left(1 - \frac{R_f}{R_m}\right)\Sigma_{a,m}}{\left(1 - \frac{R_f}{R_m}\right)\xi_m\Sigma_{t,m}} \right] u_{i1} \right\} \qquad (I.3b'.14)$$

elde ederiz. Bu ifâde (I. 3b'. 10) ile karşılaştırıldığı takdirde $p_{het}(u_{i1})$ rezonansa tutulmama ihtimâlinin (1) hücrenin boyutları büyüdükçe eşdeğer homogen hâle tekabül eden başlangıç değerinden itibâren düzgün bir şekilde arttığı, ve (2) geniş hücreler için 1 e asimtotik olarak yaklaştığı müşahade edilir. (Bk. Şekil : I. 10).

Böylelikle heterogen ortamlardaki nükleer yakıtla yavaşlatıcının ke-



Şekil. I. 10. R_m/R_f sâbit tutulduğunda p rezonansa tutulmama ihtimâlinin yakıt çubuğunun yarıçapının fonksiyonu olarak değişimi.

sin sınırlarla birbirlerinden ayrılmış olmalarının doğurduğu bu geometrik durumun, $p_{het}(u_{il})$ ın $p_{hom}(u_{il})$ a nisbetle daha yüksek bir değeri haiz olmasına sebep olduğu görülmüş olmaktadır. Yalnız burada, kullanmış olduğumuz elemanter modelin sırf, bu geometrik durumun p_{het} üzerindeki etkisinin varlığını kalitatif bir tarzda ortaya koyabilmek için seçilmiş olduğunu ve bu tesirin mertebesini tam mânâsıyla hesaplayabilmek için tatbik olunmaya mâtuf bir metot teşkil etmediğini de ilâve edelim.

3c. Hızlı Fisyon Katsayısının Hesabı. — Tabiî uranyumda vuku bulan fisyon reaksiyonlarının mühim bir kısmının ılık nötronların U^{235} çekirdeklerini fisyona mârûz bırakmalarından ileri geldiği mâlûmdur. Bununla beraber U^{238} de hızlı fisyon nötronları vâsıtasıyla fisyona mârûz kalarak göz önüne alınan çoğaltkan ortamdaki nötron bilânçosuna tesir edebilir. Fakat U^{238} in fisyon eşik enerjisi 1, 2 MeV civarında olduğundan U^{238} ancak, enerjileri bu değerden daha yüksek olan hızlı nötronlar tarafından fisyona uğratılabilir.

U^{238} in bu «*hızlı fisyon*» unun önemi ve bunun ortamdaki nötron bilânçosu ve dolayısıyla k_∞ çoğalma katsayısı üzerindeki tesiri âşikârdır. Bu tesirin tam mertebesini hesaplamak için muhtelif metotlar teklif edilmiştir. Biz derslerimizde, nükleer yakıt olarak sâdece tabiî veyâ hafifçe zenginleştirilmiş uranyum ihtivâ eden sistemlerdeki hızlı fisyon olayının k_∞ a ne dereceye kadar tesir ettiğini göreceğiz.

1. cildin IV. dersinden bilindiği üzere hızlı fisyon, homogen reaktörler teorisinde bir ε hızlı fisyon katsayısı ile ölçülmekte ve bu k_∞ un ter-

kibine giren dört çarpandan birini teşkil etmekteydi. Homogen reaktörler için ε, üreyen bütün nötronların sayısının yalnız ılık fisyonlardan üreyen nötronların sayısına oranı olarak târif edilmişti.

Heterogen reaktörlerde Wigner - Seitz birim hücre metodu çerçevesi içinde hızlı fisyon katsayısını hesaplarken şu hususları nazar-ı itibara alacağız :

(1) Önce, nükleer yakıt çubuğunu terketmiş olan bir nötronun hızlı nötronların çoğalımı bakımından artık kaybolmuş olduğunu farzedeceğiz. Bu faraziye ancak, nükleer yakıt çubukları birbirlerinden kâfi derecede uzak bulunuyorlarsa ve yakıt çubuklarının boyutları, nötronların yavaşlatıcı içindeki ortalama serbest transport yollarından çok küçükse gerçek bir anlam kazanabilir. Başka bir deyişle bu faraziyenin ancak nükleer yakıtın yavaşlatıcıya olan oranının küçük olduğu (meselâ grafitli) reaktörlerde doğrulanabileceği söylenebilir. Eğer göz önüne alınan heterogen çoğaltkan ortamda yavaşlatıcı olarak su kullanılmaktaysa, su kudretli bir yavaşlatıcı olduğundan ve bir nötronu yavaşlatmak için az bir mikdarı kifâyet edeceğinden, bu tip reaktörlerde yukarıda söylediğimiz nükleer yakıtın yavaşlatıcıya olan oranının küçük olması keyfiyeti artık doğrulanamaz, zirâ ister istemez böyle bir reaktörde nükleer yakıt çubuklarını birbirlerine yakın olarak seçmek zarureti vardır, öyle ki bu reaktörler uygun bir şekilde homogen olarak farzedilip ε un hesabı da buna göre icrâ edilir.

Yakıtın boyutlarıyla karşılaştırıldığında eğer nötronun yavaşlatıcıdaki ortalama serbest transport yolu oldukça büyükse nötron, yakıt çubuğunu terkettikten sonra başka bir yakıt çubuğuna dâhil oluncaya kadar birkaç çarpışmaya mârûz kalarak yavaşlayacak ve artık U^{238} (veyâ Th^{232}) nin hızlı fisyonuna sebep olabilecek bir enerjiye sâhip olamıyacaktır.

(2) ε un hesabında kolaylık sağlamak üzere kabul edeceğimiz başka bir faraziye de bütün fisyon nötronlarının göz önünde bulunan nükleer yakıtın hızlı fisyon eşik enerjisinden daha yüksek bir enerjiyi haiz olarak doğmalarıdır. Bu, $f(E)$ fisyon spektrumunun takrîben 1 MeV den aşağı enerjiler için özdeş olarak sıfır olduğunu veyâ matematik olarak

$$\int_0^\infty f(E)\,dE = 1 \quad \text{olacak yerde} \quad \int_{1\,\mathrm{MeV}}^\infty f(E)\,dE = 1$$

olduğunu kabul etmeğe gelir.

(3) Son bir faraziye olarak da hızlı bir nötronun enerjisinin, nükleer yakıtın eşik enerjisi altına düşmesine elâstik olmayan bir tek çarpışmanın kifâyet edeceğini kabul edeceğiz.

Bu şartlar altında heterogen reaktörler için ε hızlı fisyon katsayısı genel olarak :

$$\varepsilon = \frac{\text{Hızlı fisyon eşik enerjisini aşan nötronların sayısı}}{\text{Ilık fisyonlardan üreyen nötronların sayısı}} \qquad (I.3c.1)$$

olarak târif edilir.

Şimdi P_1 ile bir fisyon nötronunun, doğumundan sonra nükleer yakıt içinde herhangi bir reaksiyona mârûz kalması ihtimâlini gösterelim. Bu reaksiyonlar yeni bir fisyona sebep olma, ışınlı yakalama (*gamma capture*), elâstik saçılma veyâ elâstik olmayan saçılma olabilir. Bu reaksiyonları meydana getiren nötronun hızlı bir nötron olmasından ötürü, hepsi de hızlı nötronlara atfedilmiş makroskopik tesir kesitleri olmak üzere bu reaksiyon çeşitlerine sırasıyla Σ_f, Σ_c, Σ_s, Σ_{in} mikroskopik tesir kesitleri tekabül eder. Toplam makroskopik tesir kesidi de gene

$$\Sigma_t = \Sigma_f + \Sigma_c + \Sigma_s + \Sigma_{in}$$

ile târif edilmektedir.

P_1 ile nükleer yakıt içinde doğan hızlı bir nötronun herhangi bir reaksiyona uğraması ihtimâlini gösterdiğimizden, bu nötronun nükleer yakıt içinde hiç bir reaksiyona uğramaması veyâ başka bir deyişle bu nötronun nükleer yakıttan kurtulup yavaşlatıcıya geçebilmesi ihtimâli, şu hâlde, $1-P_1$ olacaktır.

Buna göre ılık nötronların sebep olduğu fisyonlardan üremiş N tâne primer fisyon nötronu göz önüne alacak olursak bunların mârûz kalacakları ilk reaksiyonlar sonunda şu ortalama değerleri haiz bir dağılım elde edilecektir :

Nükleer yakıtta herhangi bir reaksiyona mârûz kalanlar	NP_1
Hızlı fisyona sebep olan nötronlar	$NP_1 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t}$
Hızlı fisyondan üreyen yeni nötronlar	$NP_1 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t} \nu$
Işınlı yakalanmaya mârûz kalan nötronlar	$NP_1 \frac{\Sigma_c}{\Sigma_t}$

Elâstik saçılmaya mârûz kalan nötronlar $NP_1 \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}$

Elâstik olmayan saçılmaya mârûz kalan nötronlar $NP_1 \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}$

Hiç bir reaksiyona mârûz kalmadan nükleer yakıt çubuğunu terkeden nötronlar $N(1-P_1)$

Bütün bu reaksiyonlardan sonra nükleer yakıt birimi içinde serbest olarak bulunan ve ikinci bir reaksiyon imkânına mâlik olan hızlı nötronların sayısı âşikâr olarak yutulmayan, yavaşlamayan ve nükleer yakıt çubuğundan dışarı sızmayanların toplamına eşit olacaktır :

$$N\left(\frac{\nu\Sigma_f + \Sigma_s}{\Sigma_t}\right) P_1 = N\gamma P_1 \qquad (I.3c.2)$$

Göz önüne alınan nükleer yakıt birimindeki çekirdeklerin atom ağırlıkları genel olarak 230 dan büyük olduğu için hızlı nötronların bir elâstik saçılmada kaybedecekleri enerjinin bunları nükleer yakıtın hızlı fisyon eşiğinden aşağı iletecek kadar olmadığı kabul edilmiştir.

Yukarıdaki şemaya göre nükleer yakıtın hızlı fisyon eşiğini aşarak yavaşlayan nötronların sayısı

$$N\left[(1-P_1) + P_1 \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}\right] \qquad (I.3c.3)$$

dir. Bu ifâdenin köşeli parantez içindeki birinci terimi yavaşlatıcıya geçen ve dolayısıyla zarurî olarak birkaç çarpışma sonunda yavaşlayarak hızlı fisyon eşik enerjisinin altında bir enerjiye intikâl eden nötronları, ikinci terimi de, (3) numaralı faraziyeye göre, elâstik olmayan bir tek çarpışma sonunda yavaşlayarak artık hızlı fisyona sebebiyet verme imkânı kalmayan nötronları göstermektedir.

(I. 3c. 2) ile gösterilen nötronlar ikinci defa reaksiyona maruz kalırlarsa ve bu esnâda nükleer yakıtta herhangi bir reaksiyona mârûz kalmaları ihtimâli de artık P_2 ise yukarıdaki şema gene tekrarlanır ve bu ikinci reaksiyonların neticesinde de hızlı fisyon eşiğini aşarak yavaşlayan nötronların sayısı olarak

$$N\gamma P_1\left[(1-P_2)+P_2\frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}\right] \tag{I.3c.4}$$

bulunur. Aynı muhakeme tarzını $n-1$ kere daha tekrarlayarak n-inci kademede hızlı fisyon eşiğini aşabilen nötronların sayısının da

$$N\gamma^{n-1}P_1P_2\dots P_{n-1}\left[(1-P_n)+P_n\frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}\right] \tag{I.3c.5}$$

ifâdesiyle verileceği görülür.

ε un târifi olan (I. 3c. 1) ifâdesine dönersek, (I. 3c. 3-5) ifâdelerini de göz önünde tutmak suretiyle

$$\varepsilon=\frac{N\left[(1-P_1)+P_1\frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}\right]+N\gamma P_1\left[(1-P_2)+P_2\frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}\right]+\dots+}{N}$$

$$\frac{+N\gamma^{n-1}P_1P_2\dots P_{n-1}\left[(1-P_n)+P_n\frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}\right]}{N} \tag{I.3c.6}$$

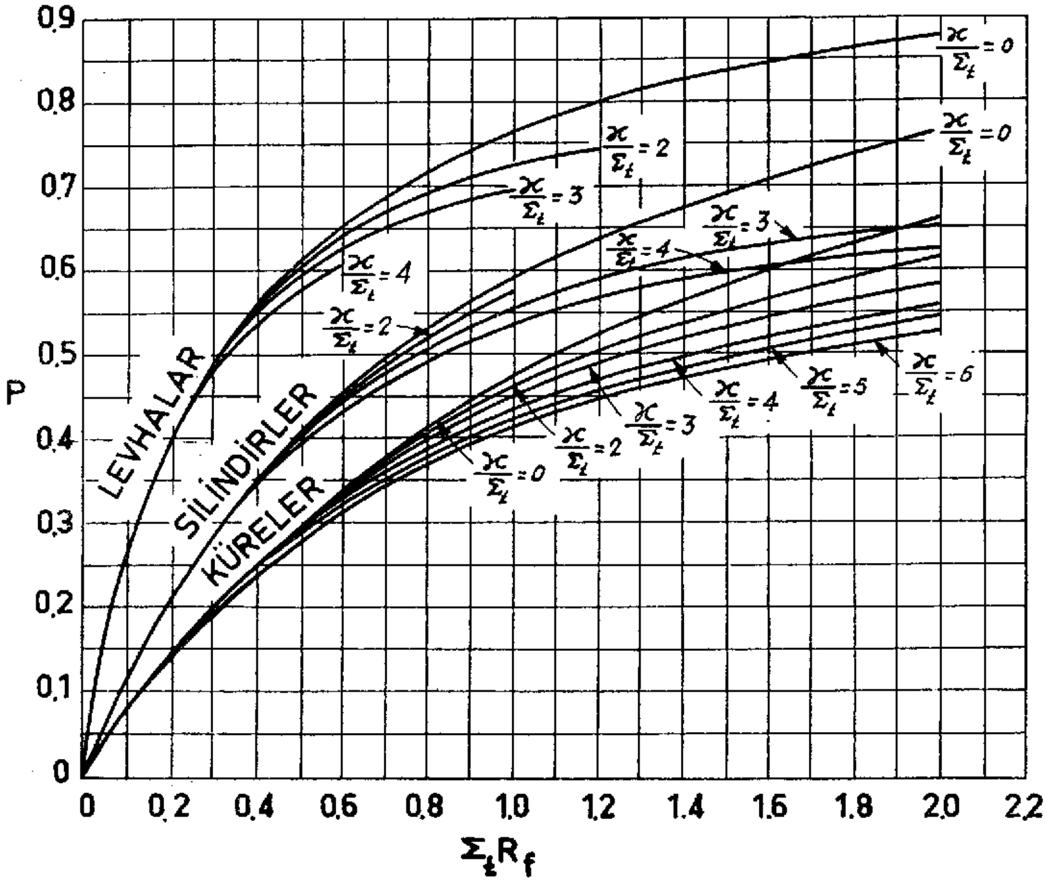
bulunur.

Eğer $P_1=P_1$ ve $P_2=P_3=\dots\dots=P_n$ vazedecek olursak, yâni ik'nci kademedeki hızlı nötronların nükleer yakıt çubuğunu terketmeden herhangi bir reaksiyona mârûz kalmaları ihtimâlinin müteâkip kademelerdeki mütekabil ihtimâllere eşit olduğunu kabul edecek olursak (I. 3c. 6) nın

$$\boxed{\varepsilon=1+\frac{\left[(\nu-1)-\frac{\Sigma_c}{\Sigma_f}\right]\frac{\Sigma_f}{\Sigma_t}P_1}{1-\left(\frac{\nu\Sigma_f+\Sigma_s}{\Sigma_t}\right)P_2}} \tag{I.3c.7}$$

şekline girdiği kolayca tahkik edilebilir.

ε un açık olarak hesaplanabilmesi için gerek P_1 ve gerekse P_2 ihtimallerinin de hesaplanmış olması lâzımdır. P_1 in nükleer yakıt çubuğundaki ılık fisyondan doğmuş hızlı nötronların çubuğu terketmeden önce herhangi bir reaksiyona mârûz kalmaları ihtimâli olmasından ötürü, bu büyüklüğü hesaplarken fisyon nötronları kaynaklarının yakıt içinde ılık nötron dağılımı boyunca dağıldıklarını kabul edeceğiz. Buna mukabil P_2 nin hesabında da kaynakların yakıt içinde sâbit bir şekilde dağıldıkları kabul edilecektir.



Şekil: I. 11. Muhtelif geometriler ve farklı $\varkappa/\Sigma_t$ değerleri için P_1 ve P_2 ihtimâlleri. P_2 ihtimâli $\varkappa/\Sigma_t = 0$ eğrileriyle verilmektedir.

Ilık fisyon nötronlarının kaynağını veren fonksiyonu $N(\vec{r}_1)$ ile gösterelim. $\vec{r}_1$ de doğan bir nötronun $\vec{r}_2$ civarındaki bir $d\vec{r}_2$ hacmında herhangi bir reaksiyona mârûz kalması ihtimâli

$$\frac{\Sigma_t \exp[-\Sigma_t |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|]}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} d\vec{r}_2$$

olduğuna göre P_1 ihtimâlinin ifâdesinin

$$P_1 = \frac{\Sigma_t}{4\pi} \frac{\int\limits_{\vec{r}_1}\int\limits_{\vec{r}_2} \frac{N(\vec{r}_1)\exp[-\Sigma_t|\vec{r}_1-\vec{r}_2|]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2}{\int\limits_{\vec{r}_1} N(\vec{r}_1)\, d\vec{r}_1} \qquad \text{(I.3c.8)}$$

şeklinde olacağı âşikârdır. P_2 yi hesaplarken yukarıda da söylemiş olduğumuz vechile $N(\vec{r}_1)$ = sâbit vazedilir.

Cetvel : I. 3 de verdiğimiz hızlı nötronlara tekabül eden tesir kesitleri ve fisyon başına açığa çıkan nötron sayısı değerleri vâsıtasıyla yapılan hesaplarla bulunan ε değerleri deneylerle tesbit edilenlerle çok uygun düşmüştür.

Cetvel : I. 3

σ_t	σ_c	σ_{in}	σ_f	σ_s	ν
4,3	0,04	2,47	0,29	1,5	2,5

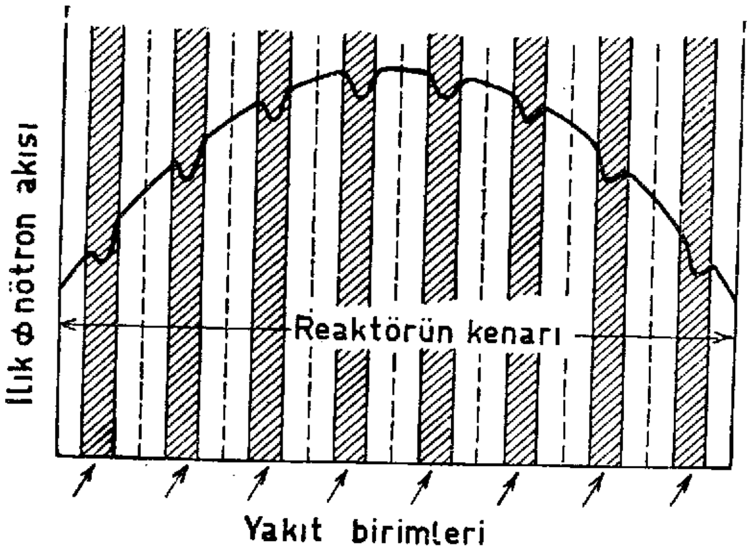
Not : Bütün tesir kesitleri barn cinsinden verilmiştir.

4. Heterogen Reaktörlerde Makroskopik Büyüklükler. — Bu dersin bundan evvelki bölümlerinde mikroskopik özelliklere bağlı f, p, ε gibi büyüklüklerin ve birim hücre içindeki nötron akısı dağılımının nasıl hesaplandıklarını gördük. Şimdi sonlu yaygınlığı haiz heterogen reaktörün bütününü ilgilendiren büyüklüklerin incelenmesine geçiyoruz.

Heterogen bir reaktörde nükleer yakıt, nötron yavaşlatıcı ortam ve, nükleer yakıtla soğutucunun veyâ yavaşlatıcının temâsını önleyen mâdenî gömlek v.s. gibi diğer yapı maddeleri birbirlerinden kesin sınırlarla ayrılmış olduklarından ve herbiri bizâtihî homogen farzedilebileceğinden tesir kesitleri, difüzyon katsayısı, FERMİ çağı v.s. gibi büyüklükler izâfe edilmiş oldukları kısma göre mevziî olarak değişik değerler alırlar. Bununla beraber göz önüne aldığımız heterogen bir reaktörü bir bütün olarak mütâleâ edecek olursak aynı büyüklüklerin bir kere de reaktörün bütünü için târif edilebilmeleri gerektiği kolayca anlaşılır. Aynı keyfiyetin nötron akısı için de doğru olacağı âşikârdır. Biz geçen bölümlerde nötron akısının heterogen reaktörün tipik bir birim hücresi içinde nasıl dağıldığını inceledik. Nötron akısının, birim hücredeki bu ince dağılımına karşılık reaktörün bütününde makroskopik bir dağılma sâhip olacağı âşikârdır. Kendisine Σ_a, D, L^2 ve τ gibi glôbâl büyüklükler tekabül ettirilebilen heterogen bir reaktördeki nötron akısının makroskopik ϕ dağılımının şeklini tâyin etmek için bu reaktöre, yukarıda sıralanmış olan büyüklükleri ve heterogen hâlde tipik bir birim hücre için hesaplanmış bulunan k_∞ çoğalma katsayısını haiz homogen bir reaktör gözü ile bakılır, ve makroskopik $\phi(\vec{r})$ nötron akısı da, bu takdirde,

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) + \frac{k_\infty - 1}{M^2}\phi(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(I.4.1)}$$

diferansiyel denklemini, problemin sınır şartları göz önünde bulundurularak çözmek suretiyle elde edilir.



Şekil; I. 12 Tek boyutlu heterogen bir reaktördeki nötron akısının glôbâl ve mevziî değişimleri.

Önce bu denklemi çözmek için değerlerini bilmemiz gereken Σ_a ve D nin nasıl elde edildiklerine işâret edelim. Heterogen bir ortamda gerek Σ_a ve gerekse D nin glôbâl değerlerini elde etmek için akla gelen en tabiî fikir mevziî Σ_a ve D değerlerini mevziî ϕ ortalama nötron akılarına göre ortalamaktır. Buna göre

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{V_m \Sigma_{a,m} + V_f \Sigma_{a,f} \left(\frac{\overline{\phi}_f}{\overline{\phi}_m} \right)}{V_m + V_f \left(\frac{\overline{\phi}_f}{\overline{\phi}_m} \right)} = \frac{\Sigma_{a,m}}{1-f} \frac{1}{1 + \frac{V_f \overline{\phi}_f}{V_m \overline{\phi}_m}} \tag{I.4.2}$$

$$\overline{D}_{t1} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3} \frac{1 + \frac{V_f \overline{\phi}}{V_m \overline{\phi}_m}}{\Sigma_{tr,m} + \frac{V_f \overline{\phi}_f}{V_m \overline{\phi}_m} \Sigma_{tr,f}} \tag{I.4.3}$$

olacaktır. Bir taraftan $\phi_f / \phi_m < 1$ ve diğer taraftan da $V_f/V_m \ll 1$ olduğundan $V_f.\ \phi_f/V_m\ \phi_m$ ifâdesi büyük boyutlu reaktörler için (dolayısıyla pratikte yavaşlatıcı olarak grafit ihtivâ eden reaktörler için) 1 in yanında ihmâl edilebilir. Buna göre

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{\Sigma_{a,m}}{1-f} \tag{I.4.4}$$

$$\overline{D}_{t1} = \frac{1}{3\Sigma_{tr,m}} = D_{t1,m} \tag{I.4.5}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, heterogen ortamın haiz olduğu anizotropluk göz önünde tutulmadığı takdirde,

$$\overline{L}^2 = \frac{\overline{D}_{t1}}{\overline{\Sigma}_a} = L_m^2 \cdot (1-f) \tag{I.4.6}$$

olur.

5. Heterogen Ortamın Anizotropluğu ; M^2 ve τ nun Tâyini. — Bilhassa, nükleer yakıt birimlerinin uzun silindirik çubuklar şeklinde olması hâlinde heterogen ortamın nötronların difüzyonu bakımından izotrop addedilemiyeceği âşikârdır. Filhakika nötronların nükleer yakıt çubuklarına paralel veyâ dik olarak hareketleri arasında bâriz bir fark vardır. Bu fark bilhassa difüzyon alanı ile nötron çağının her iki doğrultu için ayrı ayrı değerler almaları şeklinde ortaya çıkmaktadır.

1. cildin VIII. dersinde L^2 difüzyon alanının, bir kaynak nötronun bir çekirdek tarafından yutuluncaya kadar katettiği yolun karesinin

$\overline{r^2}$ ortalama değerinin 1/6 sına eşit olduğunu tesbit etmiştik. $\overline{r^2}$ yi dik kartezyen koordinatlarda ifâde edersek

$$L^2 = \frac{\overline{r^2}}{6} = \frac{\overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2}}{6} \tag{I 5.1}$$

yazılabilir. Eğer ortam izotropsa her üç $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$, $\overline{z^2}$ bileşeni de aralarında eşit olacaklarından bunların ortak değerleri de $2L^2$ olacaktır. Hâlbuki heterogen bir ortamda artık izotropluk yoktur ve nötronların difüzyonu da nükleer yakıtlar doğrultusunda (Oz doğrultusu) ve bu doğrultuya dik doğrultuda (Ox, Oy düzlemindeki herhangi bir doğrultuda) farklı iki manzara arzeder. Bu takdirde

$$\overline{z^2} = 2L_{/\!/}^2 \tag{I.5.2}$$

ve

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = 2L_{\perp}^2 \tag{I.5.3}$$

ve dolayısıyla

$$L^2 = \frac{2L_{\perp}^2 + L_{/\!/}^2}{3} \tag{I.5.4}$$

yazmamız lâzımdır. Diğer taraftan 1. cildin XIII. dersinin 5. bölümüne dayanarak ve L^2 için yürüttüğümüz muhakemenin aynını yürüterek τ çağı için de Oz doğrultusunda bir $\tau_{/\!/}$ ve buna dik doğrultular için de $2\tau_{\perp}$ büyüklüğü târif etmek kabildir. Buna göre

$$\tau = \frac{2\tau_{\perp} + \tau_{/\!/}}{3} \tag{I.5.5}$$

yazılabilecektir. Böylece

$$M^2 = L^2 + \tau$$

târifinden

$$M^2 = \frac{2M_{\perp}^2 + M_{/\!/}^2}{3} \tag{I.5.6}$$

yazılabileceği anlaşılmaktadır. Bu ifâdelere göre

$$\left.\begin{aligned} M_{\perp}^2 &= L_{\perp}^2 + \tau_{\perp} \\ M_{/\!/}^2 &= L_{/\!/}^2 + \tau_{/\!/} \end{aligned}\right\} \tag{I 5.7}$$

olduğu âşikârdır.

Heterogen ortamdaki nötron akısının makroskopik dağılımını tâyin edebilmek için bu ortam yerine homogen bir ortam ikâme ettiğimizde heterogen ortamın arzettiği anizotropluğu da hesaba katabilmek üzere (I. 4. 1) difüzyon denkleminin kartezyen koordinatlarda

$$\frac{M^2}{k_\infty - 1}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) + \frac{M^2}{k_\infty - 1}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) + \frac{M^2}{k_\infty - 1}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) + 1 = 0 \qquad (I.5.8)$$

yazılabileceğine ve bahis konusu olan anizotropluk hâli için de bunun en tabiî bir teşmilinin

$$\frac{M_\perp^2}{k_\infty - 1}\left[\frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{M_{/\!/}^2}{k_\infty - 1}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) + 1 = 0 \qquad (I.5.9)$$

olduğuna, veyâ

$$\left.\begin{aligned} B_\perp^2 &= \frac{k_\infty - 1}{M_\perp^2} \\ B_{/\!/}^2 &= \frac{k_\infty - 1}{M_{/\!/}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (I.5.10)$$

ile sırasıyla radyâl ve eksenel maddesel akıbükümler târif ederek (I. 5. 9) ifâdesinin

$$\boxed{\frac{1}{B_\perp^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{B_{/\!/}^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \phi = 0} \qquad (I.5.11)$$

şekline gireceğine dikkati çekelim. Bu denklemin çözümü izotrop hâlin çözümünden daha zor değildir. Meselâ ekseni Oz doğrultusunda olan R yarıçapını ve H yüksekliğini haiz çıplak dik bir silindirik çoğaltkan ortam için nötron akısı gene

$$\phi(\rho, z) \backsim J_0\left(\frac{2{,}405\rho}{R}\right)\cos\frac{\pi z}{H}$$

şeklinde olacaktır ; ancak bu ortamın kritikliğini temin edecek olan R ve H boyutları izotrop hâldeki

$$B_g^2 = \left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = B^2_m \text{ veyâ } \frac{(2{,}405)^2}{R^2B^2_m} + \frac{\pi^2}{H^2B^2_m} = 1 \quad (I.5.12)$$

kritiklik denklemini sağlayacak yerde

$$\boxed{\frac{(2{,}405)^2}{R^2B_\perp^2} + \frac{\pi^2}{H^2B_{/\!/}^2} = 1} \quad (I.5.13)$$

şeklinde bir kritiklik denklemini tahkik edeceklerdir.

R ve H aynı değerleri muhafaza etmek üzere

$$\frac{(2{,}405)^2}{R^2\bar{B}_m^2} + \frac{\pi^2}{H^2\bar{B}_m^2} = 1 \quad (I.5.14)$$

şeklinde bir bağıntıyı gerçekleyecek olan bir $\bar{B}_m^2$ büyüklüğüne anizotrop ortamın ortalama maddesel akıbükümü adı verilir. $\bar{B}_m^2$ nin değeri çoğaltkan ortamın şekline sıkısıkıya bağlıdır. Filhakika, elimizdeki misâlde, $\bar{B}_m^2$ nin değeri çok uzun bir silindirik ortam için $B_\perp^2$ nin değerine, çok yassı bir silindirik ortam için de $B_{/\!/}^2$ ninkine yaklaşır.

Heterogen bir çoğaltkan ortamın M^2 göç alanını hesaplarken ortamdaki nükleer yakıt şebekesinin τ FERMİ çağı üzerinde doğurduğu anizotropluktan başka nötronların nükleer yakıt atomlarıyla elâstik olmayan çarpışmalarının da tesir ettiğini hesaba katmak lâzımdır. Filhakika mâruz kaldıkları elâstik olmayan çarpışma dolayısıyla şebeke içindeki nötronların çağlarının yavaşlatıcı içinde ancak elâstik çarpışmalarla yavaşlayan nötronların çağlarına nisbetle kısalacağı âşikârdır.

Grafitli heterogen reaktörlerde τ nun ifâdesi nisbeten kolaylıkla tâyin edilir. H_2O, D_2O gibi veyâ bunlarla beraber başka maddeler ihtivâ eden yavaşlatıcılar için τ çok daha grafit ifâdelerle verilmektedir (Bu sonuncular için Bk. : ANL - 5800 ; ve DEUTSCH : Nucleonics, 15, 1. sayı, 1957). Şimdi fisyon nötronlarının çağını τ_0 ile ve elâstik olmayan bir çarpışmaya mâruz kalan nötronların çağını da τ_1 ile gösterelim. P_1 geçen bölümde olduğu gibi, bir fisyon nötronunun herhangi bir nükleer yakıt birimindeki bir nükleer yakıt atomuyla çarpışması ihtimâlini göstermektedir. Bu takdirde $\frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t} P_1$ de bir fisyon nötronunun ilk çarpışmada elâstik olmayan bir çarpışmaya mâruz kalması ihtimâlini verir. Buna göre bir nükleer yakıt biriminden grafite sızan nötronların ortalama çağı olarak

$$\bar{\tau} = \tau_0 \left(1 - \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t} P_1\right) + \tau_1 \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t} P_1$$

$$= \tau_0 - (\tau_0 - \tau_1) \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t} P_1 \tag{I.5.15}$$

ifâdesi cârî olur.

6. Heterogen Ortamların Glôbâl Çoğalma Katsayıları. — Heterogen ortamların etkin çoğalma katsayıları bundan evvelki bölümde söylenenler göz önünde tutulmak suretiyle, homogen ortamların etkin çoğalma katsayısını veren klâsik formülün tabiî bir teşmili olan

$$\boxed{k_{et} = \frac{k_\infty}{1 + M_{/\!/}^2 B_{/\!/}^2 + M_\perp^2 B_\perp^2}} \tag{I.6.1}$$

ifâdesiyle tâyin edilirler. Yalnız bu ifâde ancak, nükleer yakıt birimlerinin hep aynı mikdarda nükleer yakıt ihtivâ etmeleri hâlinde câridir. Eğer aynı bir şebekeye dâhil olan nükleer yakıt birimleri farklı mikdarlarda nükleer yakıt ihtivâ ediyorlarsa, bu takdirde göz önüne alınan heterogen ortam için ortalama bir $\bar{k}_\infty$ sonsuz çoğalma katsayısı târif olunur. Böyle bir ortalamayı elde etmek için «Pertürbasyonlar Teorisi» dersinde göreceğimiz gibi istatistik ağırlık adı verilen nötron akısının karesi, ağırlık fonksiyonu olarak kullanılır. $\bar{k}_\infty$ ortalama sonsuz çoğalma katsayısını hesaplayacağımız ortam eğer iki boyutlu ve sâbit adımlı bir şebekeyi haizse bu şebekede her birim hücreye tekabül eden k_{ij} sonsuz çoğalma katsayısı ve ortamdaki ϕ glôbâl nötron akısının bu hücreye tekabül eden ϕ_{ij} ortalama değerinin karesi ayrı ayrı hesaplandıktan sonra heterogen ortama tekabül eden glôbâl ortalama sonsuz çoğalma katsayısının ifâdesi olarak

$$\frac{\sum_i \sum_j k_{ij} \phi^2_{ij}}{\sum_i \sum_j \phi^2_{ij}} = \bar{k}_\infty \tag{I.6 2}$$

teşkil edilir.

Ortamın şeklinin evvelden tesbit edilmiş olması ve boyutlarının da, ihtivâ ettiği birim hücre sayısının fonksiyonu olarak üstkritiklik elde edilecek tarzda evvelden tahmin edilmesiyle ortamdaki glôbâl ϕ nötron akısının şekli de sâbit bir çarpan yaklaşıklığıyla bilinir. Ortamın kritik boyutlarının ilk bir tahmini neticesinde (I. 6. 2) vâsıtasıyla tesbit edilen $\bar{k}_\infty$ un bu değerinin (I. 6. 1) ifâdesi vâsıtasıyla 1 den büyük bir k_{et} verip vermediği araştırılır. Eğer $k_{et} < 1$ ise ortamın boyutları birkaç birim hücre ilâvesiyle büyütülür veyâhut da ortamın şebekesi tamamen değiştirilerek bu yeni ortama tekabül eden k_{ij} ler ve ϕ_{ij} ler hesaplanır ve bu çeşit işlemlere k_{et}, 1 den arzu edildiği kadar büyük bir değere erişinceye kadar devam edilir. Eğer k_{et} in değerinin 1 den biraz büyük olduğu bulunursa çoğaltkan ortamın kritik boyutları olarak bunu sağlayan boyutlar seçilir ve $k_{et} - 1 = \delta k_{et}$ reaktiflik fazlası da, lûzumunda kullanılmak üzere, kontrol çubukları vâsıtasıyla depo edilir.

ALIŞTIRMALAR :

1. UO_2SO_4 ün H_2O içindeki homogen çözeltisinin aslâ kritik olamayacağını gösteriniz.

2. UO_2SO_4 ün D_2O içinde meydana getirdiği homogen çözeltide M_A môl ağırsu başına M_U môl uranyum bulunduğunu farzederek böyle bir çoğaltkan ortama tekabül eden k_∞ sonsuz çoğalma katsayısını M_A/M_U oranının fonksiyonu olarak inceleyiniz. (Ağırsu içinde çözelti hâlinde bulunan UO_2SO_4 ün saf ağırsuyun hacmında herhangi bir değişiklik doğurmadığı farzedilecektir.)

3. Nötron yutucu maddenin yavaşlatıcı içinde son derece seyretilmiş bir hâlde bulunduğu ortamlar için etkin rezonans integralinin âdi rezonans integraline eşit olacağını gösteriniz.

4. σ_a yutulma tesir kesidini haiz bir nötron yutucu maddeyle beraber bulunan σ_s elâstik saçılma tesir kesidini haiz bir yavaşlatıcı hâli için $\phi(E)$ nötron akısını $F(E)$ çarpışma yoğunluğunun fonksiyonu olarak tâyin edip bunun σ_a nın maksimum değeri için bir minimum arzedeceğini gösteriniz.

Nötron yutucu maddenin bir rezonansı için Σ_s/N_f ne kadar küçükse nötron akısının da bu rezonans bölgesinde o kadar alçak olacağını ve bu keyfiyetin ζ zarar katsayısının küçük değerler almasını intâceden şartla çakışmakta olduğunu gösteriniz. Buradan etkin rezonans integralinin maksimum değerinin neye tekabül ettiğini tesbit ediniz.

5. Grafit içinde bulunan levha şeklindeki tabiî uranyumdan yakıt birimleri için p rezonansa tutulmama ihtimâlini hesaplayınız.

6. Tek bir nükleer yakıt çubuğu göz önüne alındığında ılık fisyon başına çubuğu terkeden hızlı nötronların oranının

$$\pi = 1 - P_1 + (1 - P_2)\,\gamma P_1 + \ldots = 1 + \frac{(\gamma - 1)\,P_1}{1 - \gamma P_2}$$

olduğunu gösteriniz.

ε_0 ile yalnız başına bir yakıt çubuğuna tekabül eden hızlı fisyon katsayısını π' ile de yakıt çubuğunu terkedip de yakındaki bir başka yakıt çubuğunda hızlı fisyona sebep olan nötronların oranı gösterildiğinde ortamda sonsuz yakıt bulunması hâlinde buna tekabül eden ε_∞ hızlı fisyon katsayısının

$$\varepsilon\infty = \frac{\varepsilon_e - \pi\pi'}{1 - \pi\pi'}$$

ile verildiğini ispatlayıp π' nün de nasıl hesaplanacağına işâret ediniz.

7. 0,635 cm kalınlığında dilim şeklindeki tabiî uranyum için ε hızlı fisyon katsayısını hesaplayınız.

8. l_y^* ile nötronların yavaşlatıcı içindeki ortalama ömürlerini göstererek sonlu bir heterogen ortam için l^*_{het} in

$$l^*_{het} = \frac{l^*_y\,(1 - f)}{1 + L^2 B_g^2 (1 - f)}$$

şeklinde olduğunu gösteriniz.

9. M^2 üzerindeki % 2 lik bir hatânın kritik kütle üzerindeki tesirini tahmin ediniz.

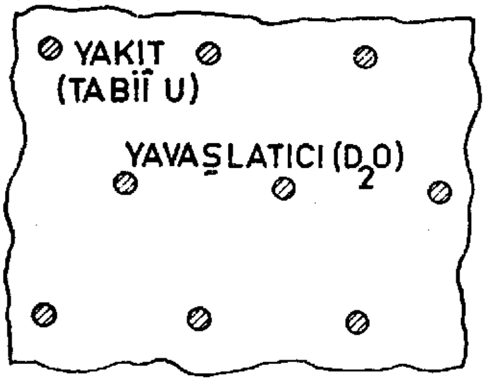
II. DERS

Heterogen Ortamlarda Birim Hücre Hesaplarına Örnek

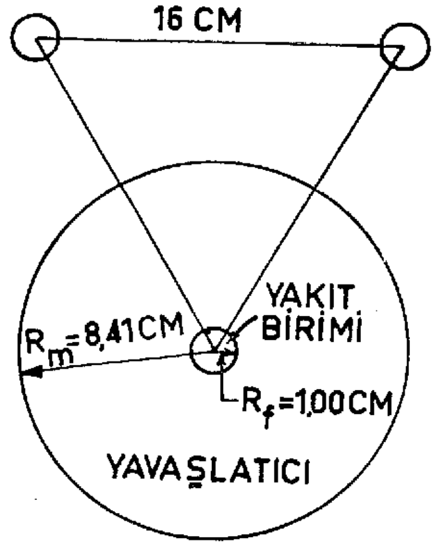
Nükleer yakıt olarak 2 cm çapındaki silindirik tabiî uranyum çubuklarının ağırsudan (D_2O) ibaret bir yavaşlatıcı içinde üçgensel bir şebeke uyarınca düzenlenmiş olduğu, her tarafından 40 cm lik bir âdî su tabakasıyla yansıtılmış reaktörün kritiklik hesapları.

Bu derste geçen ders görmüş olduğumuz Wigner - Seitz birim hücre metodunu müşahhas bir örneğe tatbik edeceğiz. Bunun için 0.05 cm kalınlığında bir alüminyum tabakasıyla gömleklenmiş 2 cm çapındaki silindirik tabiî uranyum çubuklarının D_2O (ağırsu) içinde meydana getirdikleri üçgen şebekeli bir çoğaltkan ortam hesaplarımızın temelini teşkil edecektir. Bundan başka hesabını yapacağımız reaktörün kalbini meydana getiren bu çoğaltkan ortamın her tarafından 40 cm kalınlığında H_2O (âdî su) tabakasıyla yansıtılmış bir küp şeklini haiz olduğunu ve şebekedeki her yakıt birimiyle bunun cıvarındaki en yakın diğer yakıt birimleri arasında 16 cm lik uzaklıklar bulunduğunu farzedeceğiz (Bk. Şekil : II. 1 — 3). Ayrıca reaktör kalbinin normal oda sıcaklığında yâni takrîben 20°C cıvarında bulunduğu kabul edilecektir.

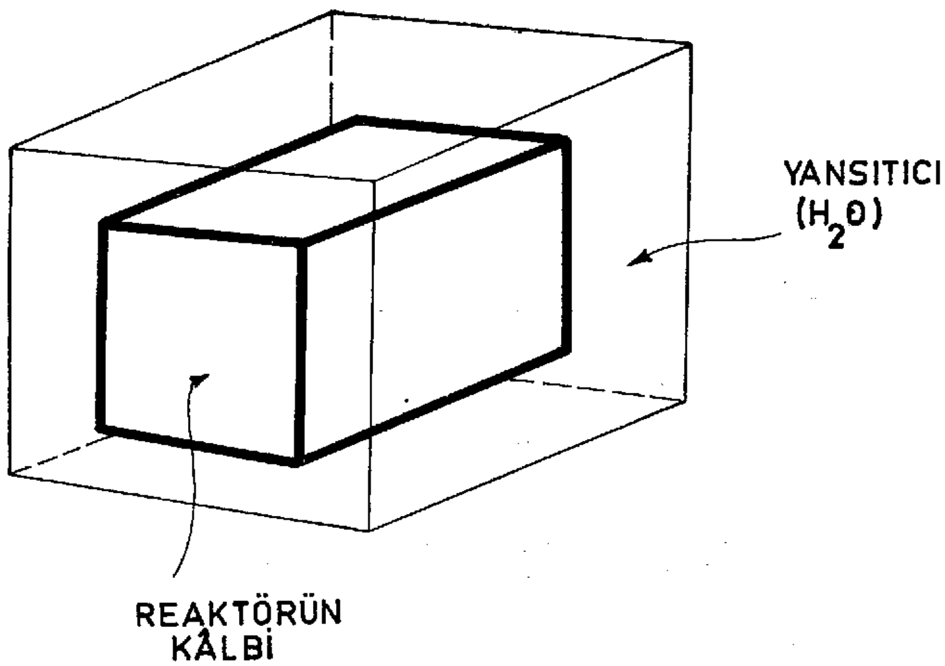
Geçen dersten bildiğimiz gibi bu cins şebeke hesaplarında bulunması gereken ilk şey, hemen hemen bütün müteâkip hesapların dayanak noktası olan birim hücrenin boyutlarını tesbit etmektir. Bu üçgen şebeke için bunu Şekil : II. 2 den de faydalanarak, şu şekilde hesaplayabiliriz. Herhangi iki komşu yakıt birimi arasındaki uzaklık, yâni şebekenin adımı, sâbit olduğundan biribirlerine aynı bir hizâda bulunmaksızın komşu olan üç yakıt birimi, tepe noktaları bunların merkezleri olan eşkenar bir üçgen teşkil etmektedirler. Kolayca görüldüğü üzere, merkezleri bu eşkenar üçgenin tepeleriyle çakışan nükleer yakıt birimlerinin herbirinin dik kesitlerinin 1/6 sı bu üçgen içinde kalmaktadır. Şu hâlde bu üçgenin alanı içinde toplam olarak bir yakıt biriminin ancak $3 \times 1/6 = 1/2$ si bulunmaktadır.



Şekil ; II. 1. Üçgensel şebeke düzeni



Şekil ; II. 2. Birim hücrenin boyutlarının tesbiti hakkında



Şekil ; II. 3. Reaktörün genel görünüşü

Bu üçgenin yüksekliği

$$h = \sqrt{16^2 - 8^2} = 13,85 \text{ cm}$$

olduğundan alanı da

$$S' = \frac{(13.85)(16)}{2} = 110.8 \text{ cm}^2$$

dir. Buna göre tam bir nükleer yakıt birimine tekabül eden S alanı

$$S = 2S' = (2)\ (110.8) = 221.6 \text{ cm}^2$$

olacağından birim hücrenin R_m yarıçapı da

$$R_m = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{221.6}{3.14}} = 8.41 \text{ cm}$$

olur

Birim hücre içindeki D_2O ve Al hacımlarının U nun hacmına oranları, önce yakıt biriminin Al dan gömleğinin hacmının

$$\text{Al hac.} = (0.05)\ (2\pi R_f H) =$$

$$= (0.05)\ (2)\ (3.14)\ (1)H = 0.314\,H \quad \text{cm}^3$$

olduğuna işâret ederek,

$$\frac{D_20\,\text{hac.}}{\text{U hac.}} = \frac{V_m}{V_f} = \frac{\pi R_m^2 H - \pi R_f^2 H - 0.314\,H}{\pi R_f^2\,H} =$$

$$= \frac{221.6 - 3.14 - 0.31}{3.14} = 69.4$$

ve

$$\frac{\text{Al hac.}}{\text{U hac.}} = \frac{V_g}{V_f} = \frac{0.314\,H}{3.14\,H} = 0.10$$

değerlerini haizdir.

Diğer taraftan d_i yoğunluğunu ve M_i atom (veyâ molekül) ağırlığını haiz bir maddenin cm^3 ünde bulunan N_i atom (veyâ molekül) sayısının

$$N_i = \frac{d_i \mathbf{N}}{M_i}$$

ile verildiğini hatırlatalım. Burada

$$\mathbf{N} = 0.603 \times 10^{24}$$

olup AVOGADRO sayısını göstermektedir. Buna binâen ve

$$d_U = 18.5 \text{ g/cm}^3$$

$$d_{D_2O} = 1.10 \text{ g/cm}^3$$

$$d_{Al} = 2.7 \text{ g/cm}^3$$

olmak üzere

$$N_U = \frac{(18.5)(0.603 \times 10^{24})}{238} = 0.0469 \times 10^{24} \text{ U atomu/cm}^3$$

$$N_{D_2O} = \frac{(1.10)(0.603 \times 10^{24})}{20} = 0{,}0332 \times 10^{24} \text{ D}_2\text{0 molekülü/cm}^3$$

$$N_{Al} = \frac{(2.7)(0.603 \times 10^{24})}{27} = 0.0603 \times 10^{24} \text{ Al atomu/cm}^3$$

bulunur.

η nın Hesabı :

U^{235} e tekabül eden büyüklükleri kısaca 25 ve U^{238} e tekabül eden büyüklükleri de 28 indisleriyle işâretleyerek, nükleer yakıt birimine tek bül eden makroskopik yutulma tesir kesidinin

$$\Sigma_a = \Sigma_a(25) + \Sigma_a(28)$$

bağıntısıyla ifâde olunacağı âşikârdır. Buna göre 1. ciltteki (IV. 2. 4) formülüne binâen

$$\eta = \nu(25) \frac{\Sigma_f(25)}{\Sigma_a(25) + \Sigma_a(28)}$$

$$= \nu(25) \frac{N_{25}\,\sigma_f(25)}{N_{25}\,\sigma_a(25) + N_{28}\,\sigma_a(28)} = \nu(25) \frac{\sigma_f(25)}{\sigma_a(25) + \frac{N_{28}}{N_{25}}\sigma_a(28)}$$

olacaktır.

Bu hesaplar boyunca kullanacağımız tesir kesitleri **Brookhaven National Laboratory** tarafından neşredilmiş olan BNL - 325 sayılı raporda verilmiş olan tesir kesitleridir. Ancak ılık bölgeye tekabül eden tes'r kesitlerini tâyin etmek için bunların, nötronların Maxwell - Boltzmann dağılımı üzerinden ortalamalarını almak lâzım geldiğini ve bunun da, göz önüne alınan tesir kesitlerini $1/v$ kanununa uydukları takdirde, cetvellerin belirli bir enerji (dolayısıyla temperatur) için vermiş oldukları tesir kesitlerini

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{1.128}$$

ile çarpmağa denk olduğunu 1. cildin III. dersinden bilmekteyiz. Meselâ $1/v$ kanununa uyan bir ortam eğer bir T temperaturunda ise ve bu ortamdaki nötronlar da ortamdaki atom çekirdekleriyle termik denge hâlindeyseler bu takdirde ortama tekabül eden ortalama mikroskopik yutulma tesir kesidi, kT enerjisine tekabül eden mikroskopik yutulma tesir kesidinin $\sqrt{\pi/2}$ misli olur :

$$\langle\sigma_a\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sigma_a(kT).$$

Fakat eğer ortamdaki nötron yutucu çekirdeklere tekabül eden σ_a tesir kesidi $1/v$ kanunundan inhiraf ediyorsa bu takdirde gene Maxwell - Boltzmann dağılımının mevcut olduğunu kabul ederek ortalama alabilmek için göz önüne alınmış olan tesir kesidini önce uygun bir tashih katsayısıyla çarpmak lâzım gelir. İşte U^{235} in yutulma tesir kesidi σ_a (25) ile fisyon tesir kesidi σ_f (25) de böyle $1/v$ kanunundan inhirâf eden bir tutumu haiz olduklarından reaktörün işleme sıcaklığı olan takribî 20°C lik normâl oda sıcaklığına tekabül eden σ_f (25) ve σ_a (25) tesir kesitlerinin ortalama değerleri, 20° C ye tekabül eden tesir kesitleri önce 0.981 e eşit olan bir tashih katsayısı ile çarpıldıktan sonra bir de $\sqrt{\pi/2}$ ile çarpılarak tâyin edilirler. Buna göre η nın yukarıda vermiş olduğumuz ifâdesinden

$$\eta = \frac{(2.46)(580 \times 10^{-24})(0.981)\left(\frac{1}{1.128}\right)}{(687 \times 10^{-24})(0.981)\left(\frac{1}{1.128}\right) + \left(\frac{0.99280}{0.00715}\right)(2.75 \times 10^{-24})\left(\frac{1}{1.128}\right)} =$$

$$= \frac{(2.46)(580)(0.981)}{(687)(0.981) + \left(\frac{0.99280}{0.00715}\right)} = 1.326$$

bulunur.

f **Ilık Kazanç Katsayısının Hesabı :**

$$\Sigma_{a,f} = \Sigma_{a,U} = N_U\left[(0.00715)\,\sigma_a(25) + (0.9928)\,\sigma_a(28)\right] =$$

$$= 0.0469 \times 10^{24}\left[(0.00715)(687 \times 10^{-24})(0.981)\left(\frac{1}{1.128}\right) + \right.$$

$$\left. + (0.9928)(2.75 \times 10^{-24})\left(\frac{1}{1.128}\right)\right] =$$

$$= 0.314 \ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\Sigma_{a,m} = \Sigma_{a,D_2O} = N_{D_2O}\,\sigma_{a,D_2O} =$$

$$= (0.0332 \times 10^{24})(0.0026 \times 10^{-24})\left(\frac{1}{1.128}\right) =$$

$$= 7.65 \times 10^{-5} \ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\Sigma_{a,g} = \Sigma_{a,Al} = N_{Al}\,\sigma_{a,Al} = (0.0603 \times 10^{24})(0.230 \times 10^{-24})\left(\frac{1}{1.128}\right) =$$

$$= 0.0123 \ \mathrm{cm}^{-1}$$

$\varkappa_f^2 = \frac{1}{L_f^2}$ ve $\varkappa^2_m = \frac{1}{L_m^2}$ büyüklükleri denel olarak ölçülmüş ve cetvellenmişlerdir. Böylece ılık nötronlar için

$$\varkappa_f = \frac{1}{L_f} = \frac{1}{1.582} = 0.632 \ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\varkappa_m = \frac{1}{L_m} = \frac{1}{116} = 0.00862 \ \mathrm{cm}^{-1}$$

bulunmuştur. Bu neticelere binâen

$$\varkappa_f R_f = (0.632)\ (1) = 0.632$$

$$\varkappa_m R_m = (0.00862)\ (8.41) = 0.0725$$

$$\varkappa_m R_f = (0.00862)\ (1) = 0.00862$$

$$\frac{\varkappa_m (R_m^2 - R_f^2)}{R_f} = \frac{(0.00862)\,[(8.41)^2 - (1)^2]}{(1)} = 0.601$$

$$E(\varkappa_m) = \frac{\varkappa_m (R_m^2 - R_f^2)}{2R_t} \cdot \frac{I_0(\varkappa_m R_f)\, K_1(\varkappa_m R_m) + K_0(\varkappa_m R_f)\, I_1(\varkappa_m R_m)}{I_1(\varkappa_m R_m)\, K_1(\varkappa_m R_f) - K_1(\varkappa_m R_m)\, I_1(\varkappa_m R_f)} =$$

$$= \left(\frac{0.601}{2}\right) \cdot \frac{I_0(0.00862)\, K_1(0.0725) + K_0(0.00862)\, I_1(0.0725)}{I_1(0.0725)\, K_1(0.00862) - K_1(0.0725)\, I_1(0.00862)} =$$

$$= (0.301) \cdot \frac{(1.000)\,(13.70) + (4.87)\,(0.0363)}{(0.0363)\,(116) - (13.70)\,(0.00431)} = 1.0067$$

$$F(\varkappa_f) = \frac{\varkappa_f R_f}{2} \cdot \frac{I_0(\varkappa_f R_f)}{I_1(\varkappa_f R_f)} = \frac{0.632}{2} \cdot \frac{I_0(0.632)}{I_1(0.632)} =$$

$$= (0.316)\,\frac{(1.1024)}{(0.332)} = 1.049$$

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{V_m \Sigma_{a,m} + V_g \Sigma_{a,g}}{V_f \Sigma_{a,f}}\, F(\varkappa_f) + [E(\varkappa_m) - 1] =$$

$$= 1 + \left[\frac{(69.4)\,(7.65 \times 10^{-5}) + (0.10)\,(0.0123)}{(1)\,(0.314)}\right](1.049) + (1.0067 - 1) =$$

$$= 1.0285$$

$$f = 0.9723$$

***p* Rezonansa Tutulmama İhtimâlinin Hesabı :**

p rezonansa tutulmama ihtimâlini hesaplamak için herşeyden önce $\varkappa_f$ ve $\varkappa_m$ nin rezonans bölgesinde aldıkları değerleri tesbit etmemiz lâzımdır. Cetvel : II. 1 ve 2 gerek metâl ve oksit hâlindeki uranyumun ve gerekse bellibaşlı yavaşlatıcı maddelerin rezonans bölgesinde bilinmesi lâzım gelen sâbitlerini vermektedir.

Cetvel : II. 1

Rezonans bölgesi için $\varkappa_f$ nin değeri

U için : $\varkappa_f = 0.0222\ d_M$

U_3O_8 için : $\varkappa_f = 0.025\ d_{Ok}$

Not : d_M metâl uranyumun ve d_{Ok} da oksit uranyumun yoğunluklarıdır.

Cetvel : II. 2

Yavaşlatıcı	Atom veya molekül başına $\bar{\xi}\,\sigma_s$ (barn)	$\varkappa_m/d$
H_20	38.5	0.583
D_20	5.28	0.141
Be	1.26	0.128
Be0	1.76	0.069
Grafit	0.76	0.0672

Not : $\varkappa_m/d$ değerleri metâl U içindir ; oksit için bunları 0.88 ile çarpmak lâzımdır.

Buna göre

$$\varkappa_f = (0.0222)\ (18.5) = 0.411\ \text{cm}^{-1}$$

$$\varkappa_m = (0.141)\ (1.10) = 0.155\ \text{cm}^{-1}$$

olur. Diğer taraftan

$$\varkappa_f R_f = (0.411)\ (1) = 0.411$$

$$\varkappa_m R_m = (0.155)\ (8.41) = 1.304$$

$$\varkappa_m R_f = (0.155)\ (1) = 0.155$$

$$E(\varkappa_m) = \frac{0.155}{2}\ \frac{(70.7 - 1)}{1}\ \frac{I_0(0.155)\,K_1(1.304) + K_0(0.155)\,I_1(1.304)}{I_1(1.304)\,K_1(0.155) - K_1(1.304)\ I_1(0.155)} =$$

$$= (5.40) \frac{(1.006)(0.370) + (2.00)(0.801)}{(0.801)(6.26) - (0.3703)(0.0777)} = 2.13$$

$$F(\varkappa_f) = \frac{0.411}{2} \frac{I_0(0.411)}{I_1(0.411)} = \frac{0.411}{2} \cdot \frac{1.043}{0.210} = 1.020$$

$$\frac{S}{M} = \frac{\text{Uranyumun dış yüzeyi}}{\text{Uranyumun kütlesi}} = \frac{2\pi R_f H}{\pi R_f^2 H d} = \frac{2}{R_f d} = \frac{2}{(1)(18.5)} =$$

$$= 0.108 \ \text{cm}^2/g.$$

Cetvel : I. 2 den de faydalanarak artık etkin rezonans integralini hesaplayabiliriz :

$$\int (\sigma_a)_{et} \frac{dE'}{E'} = \alpha + \beta \frac{S}{M} = [9.25 + (24.9)(0.108)](10^{-24}) =$$

$$= 11.94 \times 10^{-24} \ \text{cm}^2/U^{238} \ \text{atomu.}$$

$$N_{28} = N_f(0.9928) = (0.0469 \times 10^{24}) \ (0.9928) = 0.0466 \times 10^{24} \ \text{atom/cm}^3$$

Cetvel : II. 2 den D_2O için :

$$\overline{\xi} \sigma_s = 5.28 \ 10^{-24} \ \text{cm}^2/D_2O \ \text{molekülü}$$

$$\overline{\xi} \Sigma_s = \overline{\xi} \sigma_s N_m = (5.28 \times 10^{-24}) \ (0.0368 \times 10^{24}) = 0.194 \ \text{cm}^{-1}$$

bulunur. Bunlara göre rezonansa tutulmama ihtimâlinin değeri de

$$p = \exp \left[- \frac{1}{\dfrac{V_m}{V_f} \dfrac{\overline{\xi}\Sigma_s}{N_{28} \int (\sigma_a)_{et} \dfrac{dE'}{E'}} F(\varkappa_f) + E(\varkappa_m) - 1} \right] =$$

$$= \exp \left[- \frac{1}{(69.4) \dfrac{(0.194)}{(0.0466 \times 10^{24})(11.94 \times 10^{-24})} (1.020) + (2.13 - 1)} \right]$$

$$= \exp(-0.0387) = 0.962$$

olur.

ε Hızlı Fisyon Katsayısının Hesabı :

Hızlı fisyon katsayısını tâyin etmek için (I. 3c. 7) formülünden ve Şekil : I. 11 den faydalanacağız. Bunun için önce lûzumlu makroskopik tesir kesitlerini hesaplayalım. Bunların hesabında hızlı nötronlara tekabül eden mikroskopik tesir kesitlerinin kullanılacağı mâlûmdur.

$$\Sigma_t = N_{28}\,\sigma_t(28) = (0.0466\times10^{24})\ (4.3\times10^{-24}) = 0.2304\ \text{cm}^{-1}$$

$$\Sigma_f = N_{28}\,\sigma_f(28) = (0.0466\times10^{24})\ (0.29\times10^{-24}) = 0.0135\ \text{cm}^{-1}$$

$$\Sigma_s = N_{28}\,\sigma_s(28) = (0.0466\times10^{24})\ (1.5\times10^{-24}) = 0.0699\ \text{cm}^{-1}$$

$$\Sigma_c = N_{28}\,\sigma_c(28) = (0.0466\times10^{24})\ (0) = 0$$

$\nu = 2.55$ nötron/fisyon.

(I. 3c. 7) formülünü kullanırken P_1 ve P_2 ihtimâllerinin değerlerini Şekil : I. 11 vâsıtasıyla tesbit edeceğiz. Bu şekilde P_1 ihtimâli muhtelif geometriler için ve $\varkappa_f/\Sigma_t$ ile $\Sigma_t R_f$ parametrelerinin fonksiyonu olarak verilmiştir. P_2 ihtimâli de $\varkappa_f/\Sigma_t$ parametresinin sıfır değerine tekabül eden eğriler tarafından temsil edilmektedir. Yalnız buradaki $\varkappa_f$ nin ılık nötronlara nisbet edilmiş olduğunu göz önünden ayırmamak lâzımdır. Buna göre, bizi ilgilendiren hâl için

$$\frac{\varkappa_f}{\Sigma_t} = \frac{0.6320}{0.2304} = 2.743$$

ve diğer taraftan da

$$\Sigma_t R_f = (0.2304)\ (1) = 0.2304$$

olduğundan Şekil : I. 11 den gerek P_1 ve gerekse P_2 ihtimâlleri için

$$P_1 = P_2 = 0.24$$

bulunur. Binâenaleyh ε un değerinin de

$$\varepsilon = 1 + \frac{\left[\nu - 1 - \dfrac{\Sigma_c}{\Sigma_f}\right]\dfrac{\Sigma_f}{\Sigma_t}P_1}{1 - \left[\dfrac{\nu\Sigma_f + \Sigma_s}{\Sigma_t}\right]P_2} =$$

$$= 1 + \frac{(2.55 - 1)\left(\frac{0.0135}{0.2304}\right)(0.24)}{1 - \left[\frac{(2.55)(0.0135) + 0.0699}{0.2304}\right](0.24)} = 1.022$$

olduğu tesbit edilmiş olur.

k_∞ Sonsuz Çoğalma Katsayısı :

Şimdiye kadar elde ettiğimiz sonuçlara dayanarak reaktörün kalbine tekabül eden sonsuz çoğalma katsayısının

$$k_\infty = \eta p f \varepsilon = (1.326)\ (0.962)\ (0.9723)\ (1.022) = 1.268$$

değerini haiz olduğu bulunur.

Hızlı ve Ilık Nötronlar İçin D_h ve D_{il} Difüzyon Katsayılarının Hesabı :

Alüminyumdan gömleğiyle birlikte nükleer yakıt çubuğunun hacmının birim hücrenin hacmının % 2 sinden daha küçük olduğunu görmek kâbildir. Buna göre bu kısımların birim hücrenin difüzyon katsayısının tâyinine iştirâkleri ihmâl edilebilir ve böylece yavaşlatıcının gerek ılık ve gerekse hızlı nötronlara tekabül eden difüzyon katsayıları aynı zamanda birim hücrenin de difüzyon katsayıları olur. Buna göre reaktörün kalbi için

$$D_{il} = \frac{2.65}{3} = 0.883 \text{ cm}$$

olur.

Eğer kritiklik hesaplarında hızlı nötronlara tekabül eden D_h difüzyon katsayısını da hesaplamak gerekirse, her şeyden önce, tipik bir birim hücre içindeki hızlı nötron akısının büyük değişimler arzetmediği heterogen reaktörlerin, *hızlı nötron akılarına nisbetle* tamamen homogen farzedilebileceklerini göz önünde tutmak lâzımdır. Bu takdirde artık homogen farzedeceğimiz reaktör kalbi içindeki her maddeye tekabül eden hızlı makroskopik transport tesir kesitlerinin toplamından meydana gelen bir $\Sigma_{tr}(E)$ toplam hızlı makroskopik transport tesir kesidi târif edilir ve enerjiye bağlı $D(E)$ difüzyon katsayısı da

$$D(E) = \frac{1}{3\,\Sigma_{tr}(E)}$$

olur.

Eğer göz önüne alınan hızlı nötronlar gurubu (E_1, E_2) enerji aralığını işgâl ediyorsa, ϕ (E) ile ortamdaki nötron akısını göstermek üzere, D_h hızlı difüzyon katsayısı bu aralıkta D(E) nin nötron akısı üzerinden ortalaması alınmak suretiyle bulunur :

$$D_h = \frac{\int_{E_1}^{E_2} D(E)\,\phi(E)\,dE}{\int_{E_1}^{E_2} \phi(E)\,dE}$$

Eğer nötron akısının enerji dağılımı 1/E şeklinde bir dağılımsa (Bk. 1. cild, XII. Ders), bu takdirde

$$D_h = \frac{\int_{E_1}^{E_2} D(E)\,\frac{dE}{E}}{\mathrm{Log}\,\frac{E_2}{E_1}}$$

olur.

Göz önüne aldığımız reaktör için D_h yı bu son formül vâsıtasıyla hesaplayabilirsek de gerek döteryumun ve gerekse oksijenin elâstik saçılma tesir kesidi eğrilerinin arzettikleri şekil dolayısıyla 2 MeV ilâ ılık enerji arasında bu tesir kesitlerinin aşağı yukarı sâbit

$$\overline{\sigma_s}(D) = 3.4 \times 10^{-24} \quad \text{barn}$$

$$\overline{\sigma_s}(O) = 3.6 \times 10^{-24} \quad \text{barn}$$

değerlerini haiz oldukları kolayca görülür. Öte yandan 1. cildin (XI. 2. 4) formülüyle belirtilen $\overline{\mu_0}$ ın

Döteryum için $\bar{\mu}_0(D) = \frac{2}{3A} = \frac{2}{(3)(2)} = 0.333$

Oksijen için $\bar{\mu}_0(0) = \frac{2}{3A} = \frac{2}{(3)(16)} = 0.042$

olduğunu göz önünde tutarsak

$$D_h = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\Sigma_s(D)(1-\bar{\mu}_0(D)) + \Sigma_s(0)(1-\bar{\mu}_0(0))}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2)(0.0332 \times 10^{24})\ (3.4 \times 10^{-24})\ (1-0.333) + \frac{(0.332 \times 10^{24})}{(3.6 \times 10^{-24})\ (1-0.042)}}\right]$$

$$= 1.26 \text{ cm}$$

bulunur.

L^2 Difüzyon Alanı ve τ Nötron Çağı :

Difüzyon alanı geçen derste tesis edilmiş olan formüle göre hesaplanır ve

$$L^2 = L_m^2(1-f) = (116)^2\ (1-0.9723) = 372.7 \text{ cm}^2$$

bulunur. Reaktör içindeki madenî kısımların yavaşlatıcıya olan oranının düşüklüğü göz önünde bulundurulursa reaktördeki nötronların ılık enerjiye kadar τ çağı olarak D_2O nunkinin rahatlıkla kullanılabileceği anlaşılır ve buna göre

$$\tau = \tau_{D_2O} = 125 \text{ cm}^2$$

olur

Çıplak ve Yansıtılmış Reaktörün Kritikliği :

Ortama tekabül eden göç alanı

$$M^2 = L^2 + \tau = 372.7 + 125 = 497.7 \text{ cm}^2$$

olduğuna göre maddesel akıbüküm

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} = \frac{1.268 - 1}{497.7} = \frac{0.268}{497.7} =$$

$$= 5.385 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$$

dir. Buna binâen eğer küp şeklindeki çıplak ortama tekabül eden kritik A kenarını hesaplamak istersek

$$B_m^2 = B_g^2 ,$$

yâni

$$5.385 \times 10^{-4} = 3\left(\frac{\pi}{A}\right)^2$$

kritiklik bağıntısından

$$A = \sqrt{\frac{3\pi^2}{5.385 \times 10^{-4}}} = 234.6 \text{ cm}$$

bulunur.

Şimdi ortamın her tarafından 40 santimlik bir H_2O (âdî su) tabakasıyla yansıtıldığını farzedelim. Bu yansıtılmış reaktör kritik olduğu zaman bunun kalbine tekabül eden geometrik akıbükümü $\overline{B}_g^2$ ile gösterirsek 1. cildin X. dersinin 9. bölümünde açıklanan teori gereğince reaktörün kritikliği

$$k'_{et} = 1 = \frac{k_\infty}{1 + (1 - \beta) M^2 \overline{B}_g^2}$$

bağıntısıyla ifâde edilecektir. Burada β ile, $a = 40$ cm kalınlığındaki âdî su tabakalarının ortama göre olan yansıtma katsayıları (albedo'ları) gösterilmiştir.

Bu kritiklik denkleminden

$$\overline{B}_g^2 = \frac{3\pi^2}{A^2} = \frac{k_\infty - 1}{(1 - \beta) M^2}$$

yazılabilir ve nihayet, reaktör bütünüyle kritik olduğu zaman reaktör kalbinin haiz olacağı $\bar{A}$ kenar uzunluğunun ifâdesi olarak da buradan

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{3\pi^2}{k_\infty - 1}(1-\beta)\,M^2}$$

yazılabilir.

$\bar{A}$ yi hesaplamak için önce β yı tâyin etmek lâzımdır. β, sonlu dilim geometrisi için

$$\beta = \frac{1 - 2D\varkappa \coth \varkappa a}{1 + 2D\varkappa \coth \varkappa a}$$

bağıntısıyla verilmektedir. Diğer taraftan âdî su için

$$\Sigma_a = 0.022 \text{ cm}^{-1}$$

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} = \frac{1}{3\Sigma_s(1-\bar{\mu}_0)} = \frac{1}{(3)(1.64)(1-0.666)} =$$

$$= 0.61 \text{ cm}$$

dir. Buna göre

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}} = \sqrt{\frac{0.022}{0.61}} = 0.19 \text{ cm}^{-1}$$

$$\beta = \frac{1-(2)(0.61)(0.19)\coth[(0.19)(40)]}{1+(2)(0.61)(0.19)\coth[(0.19)(40)]} =$$

$$= \frac{1-(0.232)(1)}{1+(0.232)(1)} = \frac{0.768}{1.232} = 0.623$$

ve dolayısıyla

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{(3)(9.8697)}{0.268}(1-0.623)(497.7)} = 147 \text{ cm}$$

bulunur.

Böylelikle reaktör kalbinin her bir yüzündeki yansıtıcıların

$$\delta = \frac{A}{2} - \frac{\bar{A}}{2} = 43{,}8 \text{ cm}$$

lik bir yansıtma tasarrufu sağladıkları anlaşılmaktadır.

ALIŞTIRMALAR :

1. Yavaşlatıcısı grafit ve yakıtı da tabiî uranyum olan çıplak bir silindirik reaktör 2046 adet nükleer yakıt çubuğu ihtivâ etmektedir. Buna tekabül eden $k_\infty = 1.110$ ve $f = 0.9617$ olduğu bilindiği takdirde reaktörün $P = 35$ Mw lık bir güçte $\Phi = 8 \times 10^{13}$ nötron/cm²/san lik ortalama bir kritik nötron akısı verebilmesi için nükleer yakıt birimlerinin R_f yarıçapları ne olmalıdır ?

Buna göre reaktördeki U^{235} in, U^{238} in ve grafitin ağırlıklarını, birim hücrenin R_m yarıçapını ve reaktörün özgül gücünü hesaplayınız.

Bu hesaplar için temperaturun muhtelif parametreler üzerindeki tesiri nazar-ı itibâra alınmıyacaktır. Bundan başka grafit için

$$L = 54.4 \text{ cm} , \qquad \tau = 364 \text{ cm}^2 , \qquad d = 1.6 \text{ g/cm}^3 ,$$

U^{235} için

$$\sigma_f(25) = 582 \quad \text{barn}$$

ve tabiî uranyumun özgül ağırlığı olarak da

$$d = 18.5 \text{ g/cm}^3$$

verilmektedir.

2. $R_f = 1.3$ cm yarıçapındaki silindirik tabiî uranyum çubuklarının ağırsudan müteşekkil bir yavaşlatıcı içinde meydana getirdikleri altıgen bir şebeke yanlarından 90 cm kalınlığında bir grafit tabakasıyla yansıtılmış silindirik bir atom reaktörünün kalbini teşkil etmektedir. Bu reaktörün minimum hacma sâhip olarak kritik olması şartlarını inceleyiniz.

III. DERS

Heterogen Ortamlarda Nötron Difüzyonu

«FEINBERG - GALANIN METODU»

Feinberg - Galanin metodunun temel faraziyeleri - Ilıklık sâbiti - Nötron akısının tâyini - Sonsuz heterogen ortamların kritikliği - Sonlu heterogen ortamların kritikliği - Sonlu yarıçapı haiz yakıt çubukları hâli - Çeşitli alt-şebekelerin terkibi hâlinde nötron akılarının ifâdesi.

1. Heterogen Ortamlar İçin FEINBERG - GALANIN Metodunun Temel Faraziyeleri. — Geçen derslerde incelemiş olduğumuz Wigner-Seitz metodu esâsında «birim hücre» nin bellibaşlı özelliklerini bütün heterogen ortama teşmil etmeğe mâtuf bir nevi homogenleştirici bir metottur ; ve bu itibarla da ortamdaki nötron kaynaklarının münferit şekil ve dağılımlarını göz önünde tutabilecek kadar teferruatlı bir tavsir arzedebilmekten uzaktır.

Wigner - Seitz metodunun bu aksak tarafları, FEINBERG ve GALANIN tarafından vazedilmiş bulunan ve prensip olarak yavaşlatıcı bir ortama daldırılmış lâlettâyin bir nükleer yakıt şebekesinin her bir birimini, şekline göre, noktasal veyâ doğrusal bir hızlı nötron kaynağı farzederek bunlardan intişâr eden hızlı nötronların yavaşlatıcıda ılıklaştıktan sonra FERMİ'nin çağ teorisine uygun olarak bir uzay dağılımına mâlik olacakları esâsına dayanan metotta görülmez. Bu metot her bir nükleer yakıt birimini hızlı nötronlar bakımından bir nötron kaynağı ve ılık nötronlar bakımından da bir nötron kapanı olarak tasarladığı gibi ortamdaki herhangi bir $\vec{r}$ noktasındaki nötron akısını hesaplarken bütün nötron kaynaklarının o noktadaki nötron akısına iştiraklerini de göz önünde bulundurmaktadır.

Bu metot, ortamdaki nükleer yakıt birimlerinin sayısı çok yüksekse «birim hücre» metodundan farklı netice vermemekle beraber bu metodun iflâs ettiği hâllerde, meselâ çok az sayıda nükleer yakıt birimini haiz ortamlar veyâ muhtelif farklı alt - şebekelerin terkibinden meydana gelmiş bir şebekeyi haiz ortamlara muvaffakiyetle tatbik olunacak yegâne vâsıtayı teşkil etmektedir. Bundan başka aynı metot kontrol çubuklarının etkinliğini tâyin etmek ve çoğaltkan ortamlardaki boşlukların kritikliğe tesirlerini incelemek için de elverişlidir.

Biz bu derste FEINBERG - GALANIN metodunu kaba hatlarıyla takdim etmekle yetineceğiz ve bu arada, formalizmi ağırlaştırmamak gâyesiyle, nötronların nükleer yakıt birimlerindeki rezonans yutulmalarını nazar-ı itibâra almayacağız.

Buna göre, burada takdim ettiğimiz şekliyle sonlu yaygınlığı haiz ortamların kritikliğine tatbik edeceğimiz FEINBERG - GALANIN metodu şu üç esas faraziyeye dayanmaktadır :

1) Nükleer yakıt birimlerinin yarıçapları (veyâ kalınlıkları), bunların satıhlarındaki nötron akımının sâdece göz önüne alınan yakıt birimi tarafından tâyin edilebilmesini mümkün kılacak kadar küçüktür. Dolayısıyla yakıt birimleri noktasal veyâ doğrusal addolunabilir ve bunlar cıvarındaki nötron akısı da küresel veyâ silindirik simetriyi haizdir.

2) Şebeke, içinde bulunduğu yavaşlatıcının aynı olan sonsuz bir yansıtıcıyla çevrelenmiştir.

3) Şebekenin daldırılmış bulunduğu yavaşlatıcı içinde nötronların uzay dağılımı için âdî difüzyon teorisi tatbik edilebilir.

Şimdi göz önüne alınan ortamın yavaşlatıcısı içinde bir $\vec{r}$ noktasını çevreleyen bir dV elemanter hacmı ve zaman birimi için ılık nötronların kararlı dağılımları bakımından şu nötron bilânçosunu kurabileceğimize dikkati çekelim :

— *difüzyon yoluyla* dV *den dışarı sızan nötronların sayısı* — dV *içinde yutulan nötronların sayısı* + *sistemdeki bütün kaynaklardan intişâr eden nötronlardan, ılıklaşmış olarak* dV *içinde bulunan nötronların sayısı* — *göz önüne alınan* $\vec{r}$ *noktası eğer bir nükleer yakıt biriminin üzerindeyse nükleer yakıt tarafından yutulacak olan nötronların sayısı* $=0$.

m indisi ile yavaşlatıcıya ait ve ılık enerjiye izâfe edilmiş büyüklükleri işâretlemek sûretiyle, bu bilânçonun ilk teriminin

$$D_m \nabla^2 \phi_m(\vec{r})\, dV \qquad \text{(III. 1.1)}$$

ye, ikinci teriminin de

$$-\Sigma_{a,m}\, \phi_m(\vec{r})\, dV \qquad \text{(III. 1.2)}$$

olacağı mâlûmdur.

Sistemdeki bütün kaynaklardan intişâr eden hızlı nötronlardan, ılıklaşmış olarak dV içinde bulunan nötronların sayısını hesaplamadan önce $J(\vec{r}_k)$ ile, yervektörü $\vec{r}_k$ olan nükleer yakıt çubuğunun sathındaki ılık nötronların cm^2 başına akımını gösterelim. Bu akım nükleer yakıt biriminin içinden dışarı doğru olduğu takdirde $(+)$, dışarıdan içeri doğru olduğu takdirde de $(-)$ işâretiyle belirlenecektir. η ile de, her zamanki gibi, nükleer yakıt tarafından yutulan bir tek ılık nötrona mukabil açığa çıkan fisyon nötronlarının sayısını gösterirsek, göz önüne aldığımız $\vec{r}_k$ noktasındaki nükleer yakıt çubuğu tarafından birim zaman aralığı zarfında ve birim uzunluk boyunca üretilen fisyon nötronlarının sayısı :

$$K_f(\vec{r}_k) = -\eta\, 2\pi R_f\, J(\vec{r}_k) \qquad \text{(III. 1.3)}$$

olur. Burada R_f ile, geçen derslerdeki gibi gene nükleer yakıt çubuğunun yarıçapı gösterilmektedir.

$\vec{r}_k$ yervektörüyle gösterilen nükleer yakıt çubuğunun yüzeyindeki ılık nötron akısı $\phi_m(\vec{r}_k)$ dır. Eğer nükleer yakıt çubuğunun içine doğru olan ılık nötronların toplam net akımı ile çubuğun sathındaki ılık nötron akısı arasında sâbit bir orantı olduğunu, yâni

$$-\frac{2\pi R_f J(\vec{r}_k)}{\phi_m(\vec{r}_k)} = \gamma \qquad \text{(III.1.4)}$$

olduğunu kabul edecek olursak bu son bağıntıya binâen (II. 1. 3) ifâdesi

$$K_f(\vec{r}_k) = \eta\gamma\, \phi_m(\vec{r}_k) \qquad \text{(III. 1.5)}$$

şeklinde yazılır. γ ya *«ılıklık sâbiti»* adı verilir. $\vec{r}_k$ daki bir nükleer yakıt çubuğundan intişâr etmiş nötronlardan ılıklaşmış olarak bir $\vec{r}$ noktasını çevreleyen dV hacmı içinde bulunanların sayısı, artık (III. 1. 5) ile tâyin edilmiş olan $K_f(\vec{r}_k)$ fisyon nötronları kaynağını, nötronun $\vec{r}_k$ da doğup da $\vec{r}$ yi çevreleyen elemanter dV hacmı içinde ılıklaşması ihtimâlini veren

$$q(\vec{r}, \vec{r}_k)\, dV$$

ile çarpmakla elde edilecektir.

Sonsuz çizgisel bir nötron kaynağının mevcûdiyeti hâlinde FERMİ'-nin çağ teorisine göre bu $q(\vec{r}, \vec{r}_k)$ ihtimâli 1. cildin (XIII. 5. 6b) formülüne binâen

$$q(\vec{r}, \vec{r}_k) = \frac{\exp(-|\vec{r} - \vec{r}_k|^2/4\tau)}{4\pi\tau} \qquad \text{(III.1.6)}$$

ile verilecektir. (Ortam yavaşlatıcı bir ortam olmak hasebiyle nötronlar için rezonans yutulması bahis konusu olamayacağından $p=1$ vazedilmiş bulunmaktadır).

Ancak, bir $\vec{r}$ noktasını çevreleyen elemanter dV hacmı içindeki ılık nötronların toplam sayısı, şebeke içindeki bütün nükleer yakıtlardan intişâr eden nötronlardan elemanter dV hacmına ılıklaşmış olarak erişenlerin toplam iştirâki olduğundan dV deki toplam ılık nötron kaynağının bu takdirde

$$K(\vec{r})dV = \sum_k q(\vec{r}, \vec{r}_k)\, K_f(\vec{r}_k)dV =$$

$$= \eta\gamma \sum_k q(\vec{r}, \vec{r}_k)\, \phi_m(\vec{r}_k)dV \qquad \text{(III.1.7)}$$

ifâdesine bürüneceği anlaşılır.

Şimdi de dikkatimizi biraz yukarıda yapmış olduğumuz nötron bilânçosunun son terimine yöneltelim. Bu terim ancak $\vec{r}=\vec{r}_k$ için sıfırdan farklı bir değeri haiz olacaktır. Zirâ bahis konusu olan bu terim nükleer yakıt çubuğunun yuttuğu nötronları göstermektedir, ve âşikâr olarak bu yutulma da sâdece nükleer yakıt çubuğunun bulunduğu yerlere münhasırdır.

Âşikâr olarak, $\vec{r}_k$ daki bir nükleer yakıt çubuğu tarafından yutulan nötronların sayısı uzunluk birimi başına

$$-2\pi R_f J(\vec{r}_k) = \gamma \phi_m(\vec{r}_k) \tag{III. 2.8}$$

olacaktır. Bu yutulma olayının ancak $\vec{r} = \vec{r}_k$ ise bir önemi haiz olduğunu, aksi hâlde yâni $\vec{r}$ sâdece yavaşlatıcıya ait bir noktaysa bu yutulmanın nötronların o noktadaki dağılımlarına hiç bir iştirâki olmayacağını belirtmek için (III. 1. 8) ifâdesini $\delta(\vec{r}-\vec{r}_k)$ DIRAC fonksiyonu ile çarpmak ve, bütün nükleer yakıt çubuklarının nötron yutma hassalarını göz önünde tutabilmek için de, bu son ifâdenin k üzerinden toplamını almak lâzımdır. Böylece nükleer yakıt çubuklarına tekabül eden nötron yutumunu göz önünde tutan, nötron bilânçosunun dördüncü terimi

$$-\sum_k 2\pi R_f J(\vec{r}_k)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_k)\,dV =$$

$$= \gamma \sum_k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k)\,\phi_m(\vec{r}_k)\,dV \tag{III.1.9}$$

ifâdesine bürünür.

Yukarıda tesis etmiş olduğumuz nötron bilânçosunun da (III. 1. 1), (III. 1. 2), (III. 1. 7) ve (III. 1. 9) ifâdeleri yardımıyla göz önüne alınan heterogen ortamdaki nötron yavaşlatıcının bir $\vec{r}$ noktası için artık

$$\boxed{\begin{aligned} D_m \nabla^2 \phi_m(\vec{r}) - \Sigma_{a,m} \phi_m(\vec{r}) + \eta\gamma \sum_k q(\vec{r}, \vec{r}_k)\,\phi_m(\vec{r}_k) - \\ - \gamma \sum_k \delta(\vec{r}-\vec{r}_k)\,\phi_m(\vec{r}_k) = 0 \end{aligned}} \tag{III.1.10}$$

şekline girdiği görülür.

2. Nötron Akısının Tâyini. — Şimdi, silindirik nükleer yakıt birimlerinin düzlemsel bir şebeke uyarınca düzenlenmiş olduğu bir ortamda (III. 1. 10) denklemini çözebilmek için nötron akısının

$$\overline{\phi}_m(\vec{s}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(\vec{r}) \exp(i\, \vec{s}\cdot\vec{r}) d\vec{r} \qquad \text{(III.2.1)}$$

ile târif olunan iki boyutlu FOURİER dönüşmüşünü göz önüne alalım. Göz önüne aldığımız şebeke düzlemsel olacak yerde üç boyutlu olsaydı $\vec{r}_k$ vektörü üç bileşeni haiz olacağından ϕ nötron akısının üç boyutlu FOURİER dönüşmüşünü göz önüne almak zorunda kalacaktık. (Bk. 1. cild, EK : IV). Buna binâen $\varkappa_m^2 = \Sigma_{a,m}/D_m$ vazederek (III. 1. 10) difüzyon denkleminden nötron akısının FOURİER dönüşmüşünün açık ifâdesi olarak

$$\overline{\phi}_m(\vec{s}) = \frac{\gamma}{2\pi D_m}\sum_k \frac{\phi_m(\vec{r}_k)\exp(i\vec{s}\cdot\vec{r}_k)}{s^2+\varkappa_m^2}[\eta \exp(-s^2\tau) - 1] \qquad \text{(III.2.3)}$$

bulunur.

Buradan ters dönüşüm yapmak suretiyle $\phi_m(\vec{r})$ elde edilebilir :

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{\gamma}{2\pi D_m}\sum_k \phi_m(\vec{r}_k)\left\{\frac{\eta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-s^2\tau + i\vec{s}\cdot(\vec{r}_k-\vec{r})]}{s^2+\varkappa_m^2}d\vec{s} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[i\vec{s}\cdot(\vec{r}_k-\vec{r})]}{s^2+\varkappa_m^2}d\vec{s}\right\}. \qquad \text{(III.2.3)}$$

Parantezler içindeki integrallerden birincisini hesaplayabilmek için

$$|\vec{r}_k - \vec{r}| = z \quad \text{ve} \quad \vec{s}\cdot(\vec{r}_k - \vec{r}) = sz\cos\theta$$

vazedelim. Buna binâen

$$\frac{\eta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-s^2\tau+i\vec{s}\cdot(\vec{r}_k-\vec{r})]}{s^2+\varkappa_m^2}d\vec{s} = \frac{\eta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-s^2\tau+isz\cos\theta]}{s^2+\varkappa_m^2}s\,ds\,d\theta =$$

$$= \frac{\eta}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{s \exp(-s^2\tau)}{s^2 + \varkappa_m^2} ds \int_0^{2\pi} \exp(isz \cos\theta)\, d\theta \qquad \text{(III.2.4)}$$

bulunur. Diğer taraftan matematik analizde

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\rho \cos\theta) d\theta = J_0(\rho) \qquad \text{(III.2.5)}$$

olduğu ispat edilir. Şu hâlde (III. 2. 4) ifâdesi

$$\frac{\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-s^2\tau + \vec{is} \cdot (\vec{r_k} - \vec{r})]}{s^2 + \varkappa_m^2} d\vec{s} = \eta \int_0^{\infty} \frac{s J_0(s \mid \vec{r_k} - \vec{r} \mid) \exp(-s^2\tau)}{s^2 + \varkappa_m^2} ds \qquad \text{(III.2.6)}$$

olur.

Öte yandan benzer şekilde hareket ederek (III. 2. 3) deki iki integralin de

$$\frac{\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[\vec{is} \cdot (\vec{r_k} - \vec{r})]}{s^2 + \varkappa_m^2} d\vec{s} = \eta \int_0^{\infty} \frac{s\, J_0(sz)}{s^2 + \varkappa_m^2} ds = \eta\, K_0(\varkappa_m \mid \vec{r_k} - \vec{r} \mid) \qquad \text{(III.2.7)}$$

ye eşit olduğu görülmektedir.

Bu sonuçlar göz önünde tutularak artık $\phi_m(\vec{r})$ için

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{\gamma}{2\pi D_m} \sum_k \phi_m(\vec{r_k}) \left[\eta \int_0^{\infty} \frac{s\, J_0(s \mid \vec{r_k} - \vec{r} \mid) \exp(-s^2\tau)}{s^2 + \varkappa_m^2} ds - \right.$$

$$\left. - K_0(\varkappa_m \mid \vec{r_k} - \vec{r} \mid) \right] \qquad \text{(III.2.8)}$$

ifâdesi bulunur. Bu ifâdeyi ilerideki incelemeler için daha kullanışlıca bir şekle sokmak kâbildir. Bunun için

$$P(\tau) = \int_0^\infty \frac{s\, J_0(sz) \exp(-s^2\tau)}{s^2 + \varkappa_m^2}\, ds \qquad (III.2\ 9)$$

diye bir fonksiyon târif edelim. Bu ifâdeden, integrâl altında türev almak suretiyle

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \varkappa_m^2 P = -\frac{1}{2\tau} \exp(-z^2/4\tau)$$

bulunur ki, bu diferansiyel denklemin çözümü olarak da :

$$P(\tau) = \exp(\tau\varkappa_m^2) \int_{\tau\varkappa_m^2}^\infty \exp\left[-\left(s + \frac{\varkappa_m^2 z^2}{4s}\right)\right] \frac{ds}{2s} \qquad (III.2.10)$$

elde edilir. Burada

$$K_0(\varkappa_m z) = P(0) = \int_0^\infty \exp\left[-\left(s + \frac{\varkappa_m^2 z^2}{4s}\right)\right] \frac{ds}{2s} \qquad (III.2.11)$$

olduğu keyfiyeti göz önünde tutulmuştur.

(III. 2. 9), (III. 2. 10) ve (III. 2. 11) vâsıtasıyla (III. 2. 8) ifâdesi

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{\gamma}{2\pi D_m} \sum_k \phi_m(\vec{r_k}) \left\{ \eta \exp(\tau\varkappa_m^2) \int_{\tau\varkappa_m^2}^\infty \exp\left[-\left(s + \frac{\varkappa_m^2 z^2}{4s}\right)\right] \frac{ds}{2s} - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \exp\left[-\left(s + \frac{\varkappa_m^2 z^2}{4s}\right)\right] \frac{ds}{2s} \right\} \qquad (III.2.12)$$

şekline girer.

Eğer şimdi bir taraftan

$$H(|\vec{r_k} - \vec{r}|) = \left\{ \eta \exp(\tau\varkappa_m^2) \int_{\tau\varkappa_m^2}^\infty \exp\left[-\left(s + \frac{\varkappa_m^2 z^2}{4s}\right)\right] \frac{ds}{2s} - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \exp\left[-\left(s + \frac{\varkappa_m^2 z^2}{4s}\right)\right] \frac{ds}{2s} \right\} \qquad (III.2.13)$$

vazedecek ve diğer taraftan da w_0 ile

$$w_0 = \frac{\Sigma_{a,m}}{\gamma}$$

yı gösterecek olursak (III. 2. 12) ifâdesi kısaca

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{w_0} \sum_k H(|\vec{r} - \vec{r}_k|)\, \phi_m(\vec{r}_k) \qquad \text{(III.2.14)}$$

şeklinde yazılabilir.

3. **Ilıklık Sâbitinin Tâyini.** — Elemanter difüzyon teorisi çerçevesi içinde kalarak γ ılıklık sâbitini tâyin etmek kolaydır. Târifine göre

$$\gamma = -\frac{2\pi R_f J(R_f)}{\phi_m(R_f)}$$

dir. Fakat nükleer yakıt sathında nötron akısının sürekli olarak değişmesinden ötürü bu,

$$\gamma = -\frac{2\pi R_f J(R_f)}{\phi_f(R_f)}$$

şeklinde de yazılabilir. Diğer taraftan, nükleer yakıt çubuğu içinde

$$\phi_f(\rho) = A\, I_0(\varkappa_f \rho)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} J(R_f) &= -D_f \phi_f'(R_f) = -A D_f \varkappa_f I_0'(\varkappa_f R_f) \\ &= -A D_f \varkappa_f I_1(\varkappa_f R_f) \end{aligned}$$

bulunur, ve dolayısıyla da

$$\gamma = \frac{2\pi R_f \Sigma_{a,f} I_1(\varkappa_f R_f)}{\varkappa_f I_0(\varkappa_f R_f)}$$

olur. Fakat Cetvel : I. 1 i göz önünde tutup da silindirik nükleer yakıt çubukları için $F(\varkappa_f)$ fonksiyonunu nazar-ı itibâra alırsak γ ılıklık sâbitinin

$$\gamma = \frac{\pi R_f^2 \Sigma_{a,f}}{F(\varkappa_f)} \tag{III.3.1}$$

ifâdesine büründüğü derhâl görülür.

4. FEINBERG-GALANIN Metoduna Göre Sonsuz ve Sonlu Şebekelerin Kritiklik Şartları. — Şimdi önce sonsuz bir yaygınlığa sâhip olduğunu farzettiğimiz bir şebeke göz önüne alalım. Böyle bir ortamda nötron akısının büyük değişimlere mâruz kalamayacağını ve fakat nükleer yakıt birimleri arasında heterogen şebekenin haiz olduğu peryotla birlikte tekrarlanan mahallî değişimler arzedeceği âşikârdır. Buna binâen, tamamen simetrik ve tek bir peryodu haiz bir şebeke göz önüne aldığımızda $\phi_m(\vec{r})$ nötron akısı bütün nükleer yakıt birimlerinin yüzeylerinde sâbit bir değer iktisâbedecektir. Şu hâlde herhangi bir $\vec{r}_i$ yervektörüne tekabül eden bir yakıt birimi için :

$$\phi_m(\vec{r}_i) = \phi_m(\vec{r}_k) = \text{sâbit}$$

olacağından (III. 2. 14) ifâdesi

$$\boxed{1 = \frac{1}{w_0} \sum_k H(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)} \tag{III.4.1}$$

olur. $\vec{r}_i$ yervektörüne tekabül eden nükleer yakıt çubuğu bu takdirde diğer yakıt birimlerine göre referans çubuğu rolünü oynamakta ve dolayısıyla $|\vec{r}_i - \vec{r}_k|$ da k - ıncı yakıt çubuğunun bu referans yakıt birimine olan uzaklığını göstermektedir. Kolayca tahkik edilebileceği üzere (III. 4. 1) ifâdesi : (1) şebekenin haiz olduğu konfigürasyona, (2) nükleer yakıt birimlerinin boyutlarına, (3) η ya ve (4) yavaşlatıcının nükleer vasıflarına bağlıdır. Bu dört büyüklükten herhangi üçünün keyfî olarak verilmiş olması dördüncüsünün de (III. 4. 1) bağıntısı vâsıtasıyla derhâl tâyinini intâcettiğinden bu bağıntı, sonsuz yaygınlıktaki bir şebeke için kritiklik denklemini teşkil etmektedir.

(III. 2. 14) ifâdesini kullanmak suretiyle, yavaşlatıcının aynı olan sonsuz bir yanasıtıcıyla çevrili fakat sonlu yaygınlığı haiz bir şebekeyi haiz heterogen bir ortamın kritiklik şartını da elde etmek mümkündür. Şebekeyi çevreleyen yansıtıcının sonsuz yaygınlığı haiz olması şartını vazetmek zarurîdir ; zirâ aksi hâlde (III. 1. 6) bağıntısı ile verilmiş olan yavaşlama yoğunluğunun ifâdesi mûteber olamaz. Fakat şurasına da hemen işâret edelim ki kalınlığı $\sqrt{\tau}$ nun en az altı misli olan bir yansıtıcı da pratik olarak sonsuz bir yansıtıcının yaptığı işi görür.

Şimdi lâlettâyin iki nükleer yakıt biriminin yervektörlerine $\vec{\lambda}$ ve $\vec{\mu}$ diyelim ve bunları keyfî bir orijine göre ölçelim. Buna binâeân (III. 2. 14) den

$$\phi_m(\vec{\lambda}) = \frac{1}{w_0}\sum_{\vec{\mu}} H(|\vec{\lambda} - \vec{\mu}|)\,\phi_m(\vec{\mu}) \qquad \text{(III.4.2)}$$

veyâ $\delta_{\lambda\mu}$ ile KROENECKER deltasını göstererek

$$\sum_{\mu}(H_{\lambda\mu} - w_0\,\delta_{\lambda\mu})\,\phi_\mu = 0 \qquad \text{(III.4.3)}$$

bulunur. Böylece (III. 4. 3) ifâdeleri, göz önüne alınan heterogen ortamın şebekesindeki nükleer yakıt birimlerinin satıhlarındaki nötron akılarının değerleri cinsinden homogen bir cebirsel denklem sistemi meydana getirirler. Bu sistemin âşikâr $\phi_\mu \equiv 0$ ($\mu = 1, 2, \ldots$) çözümündn başka bir çözümü haiz olabilmesi için esas determinantının özdeş olarak sıfır olması lâzımdır :

$$\boxed{\;|\,H_{\lambda\mu} - w_0\,\delta_{\lambda\mu}\,| \equiv 0\;}\,. \qquad \text{(III.4.4)}$$

İşte bu determinantın sıfıra eşit olması keyfiyeti göz önüne alınmış olan şebekenin kritiklik denklemini teşkil eder.

Pratik önemi haiz pekçok hâllerde heterogen ortamın şebekesi yüksek mertebeli simetriler arzeder. Bunun bir neticesi olarak da kritiklik denklemini teşkil eden (III. 4. 4) determinantında birçok terimler defaatle tekerrür ederler ve bundan ötürü, esâsında pek giriftmiş gibi görünen bu denklem çok kere fevkalâde basit bir şekle ircâ olunabilir.

Buraya kadar, ortamdaki nükleer yakıt çubuklarını sonsuz ince doğrusal hızlı nötron kaynakları olarak kabul ettik. Bunların, esâsında haiz oldukları sonlu R_f yarıçaplarının problemin çözümüne tesirini nazar-ı itibâra alabilmek için w_0 sâbiti yerine

$$\overline{w}_0 = \frac{R_m^2 - \pi R_f^2}{R_m^2} w_0 \qquad \text{(III.4.5)}$$

vazetmenin uygun olduğu ve bu formalizmin bilhassa ortamın homogen olduğu hâle geçişe imkân verdiği müşahede edilmiştir. Buradaki R_m^2 gene eskisi gibi birim hücrenin yarıçapını göstermektedir.

Bu bahsi kapatmadan önce, heterogen ortamın nükleer yakıt şebekesinin meselâ iki farklı alt - şebekenin terkibinden meydana gelmesi hâlinde, ortamın bir $\vec{r}$ noktasındaki $\phi_m(\vec{r})$ nötron akısının nasıl tâyin edildiğine de işâret etmek istiyoruz.

Eğer birinci şebekedeki yakıt çubuklarının yervektörlerini $\vec{r}_i$ ve ikinci alt - şebekedeki yakıt çubuklarının yervektörlerini de $\vec{r}_j$ ile gösterirsek w_1 ile $H^{(1)}$ birinci ve w_2 ile $H^{(2)}$ de ikinci alt - şebekeye nisbetle târif edilmiş büyüklükler olmak üzere $\phi_m(\vec{r})$ için (III. 2. 14) ten daha genel olan

$$\phi_m(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{w_1} H^{(1)}(|\vec{r} - \vec{r}_i|)\phi_m(\vec{r}_i) + \sum_j \frac{1}{w_2} H^{(2)}(|\vec{r} - \vec{r}_j|)\phi_m(\vec{r}_j)$$

ifâdesi câri olacaktır. İkiden fazla alt - şebekenin terkibinden meydana gelen şebekeler için de benzer şekilde daha genel ifâdeler yazmak kâbildir.

BİBLİYOGRAFYA

1) A. D. GALANİN, *Thermal Reactor Theory,* Chapter X, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1960.

2) MEGHREBLİAN and HOLMES, *Reactor Analysis,* p. 704-720, Mc Graw Hill Book Inc., New York, Toronto, London, 1960.

3) S. M. FEINBERG, Heterogeneous Methods for Calculating Reactors; Survey of Results and Comparison with Experiments, *Proc. Inter. Conf. on the Peac. Us. Atom. Ener. at Geneva,* vol. 5, p. 484, United Nations, 1956.

4) K. MEETZ, Exact Treatment of Heterogeneous Core Structures, *Proc. 2d Inter. Conf. on the Peac. Us. Atom. Ener. at Geneva*, vol. 16, p. 611 - 626, United Nations, 1958.

5) S. E. BARDEN *et al.*, Some Methods of Calculating Nuclear Parameters for Heterogeneous Systems, *Proc. 2d Inter. Conf. on the Peac. Us. Atom. Ener. at Geneva*, vol. 16, p, 627 - 638, United Nations, 1958,

6) H. STIPPEL, Generalization of Source - Sink Methods for Heterogeneous Reactor Calculations, *Proc. 2d Inter. Conf. an the Peac. Us. Atom. Ener. at Geneva*, vol. 16, p. 639-643, United Nations, 1958.

7) L. SIMMONS, A New Method for Calculating the Fine Structure in Heterogeneous Reactors, *Proc. 2d Inter. Conf. on the Peac. Us. Atom. Ener. at Geneva*, vol. 16, p. 644-649, United Nations, 1958.

8) B. STURM, Diffusionstheorie endlicher heterogener Reaktoranordnungen, *Nukleonik*, vol. 1, p. 131 - 139, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.

9) F. STUMMEL, Numerische Berechnung heterogener Reaktoren, *Nukleonik*, vol. 2, p. 178 - 192, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.

10) A. D. GALANİN, The Theory of a Heterogeneous Reactor with Cylindrical Fuel Elements of Finite Radius, *Reactor Science and Technology*, vol. 16, p. 547 - 554, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1962.

IV. DERS

Çoğaltkan Ortamların Fisyon Ürünleriyle Zehirlenmesi

Fisyon ürünlerinin nötron bilânçosuna tesiri - Çoğaltkan ortamların Xe^{135} ve Sm^{149} ile zehirlenmeleri - Zehirlenmelerin sebep olduğu reaktiflik kaybı - Nükleer zehirlerin tesiri altındaki bir reaktörün gücünün sâbit kalabilmesinin şartları - Geçici zehirlerle reaktör kontrolu.

1. Fisyon Ürünlerinin Nötron Bilânçosuna Tesiri. — Bu derse kadar, sâdece nötron doğurucu olmak bakımından fisyon olayı ile ilgilendik ve gecikmiş nötronları doğuran fisyon ürünleri hariç, fisyonun diğer ürünlerine hiç temas etmedik. Hâlbuki fisyon ürünleri arasında öyleleri bulunmaktadır ki bunlar, nötronlara karşı haiz oldukları çok yüksek mikroskopik yutma tesir kesitleri dolayısıyla ortamdaki nötron bilânçosuna kat'î surette tesir edebilirler. Biz de bu derste bu çeşit fisyon ürünlerinin tesirlerini ve çoğaltkan ortamdaki nötron bilânçosunu nasıl tâdil ettiklerini incelemeğe bir giriş yapmak istiyoruz.

Bu çeşit fisyon ürünleri haiz oldukları yüksek nötron yutma tesir kesitleri dolayısıyla ortamdaki nötronların ömürlerini azalttıklarından ortamdaki nötron toplumu için bir nev'î zehir mesâbesindedirler. Filhakika bunlara bu yüzden *«zehir»* dendiği gibi çoğaltkan bir ortamda zamanla bunların birikmesine de *«çoğaltkan ortamın zehirlenmesi»* adı verilir.

Gâyet tabiî bu zehirlenme, bu cins çekirdeklerin istihsâli ne kadar yüksekse o kadar bâriz olacaktır. Ortamı zehirleyen muayyen bir cins çekirdeğin istihsâlinin önemi bu çekirdeği doğuran fisyonların bütün fisyonlara olan oranıyla belirlenebilir. Genel olarak w ile göstereceğimiz ve *randıman* adını vereceğimiz bu büyüklük, kolayca anlaşılacağı vechile, aynı zamanda göz önüne alınan çekirdeğin bir fisyon sonunda fisyon ürünü olarak zuhurunun ihtimâlini de verir.

Fisyonda açığa çıkan, yüksek bir nötron yutma tesir kesidini ve yüksek bir randımanı, dolayısıyla da büyük bir çoğaltkan ortam zehirleme kabiliyetini haiz çekirdekler arasında en önemlileri Xe_{54}^{135} ve Sm_{62}^{149} dur. Bunlardan Xe^{135} şimdiye kadar bilinen en yüksek nötron yutma tesir kesidini haiz olan çekirdektir :

$$\sigma_a = 3.5 \times 10^6 \text{ barn.}$$

Primer fisyon ürünü olarak Xe^{135} in randımanı $w = 0.003$ dür. Fakat bundan başka Xe^{135} bir de primer bir fisyon ürünü olan Te_{52}^{135} in radyoaktif parçalanmasının bir neticesi olarak da teşekkül edebildiğinden Xe^{135} in bu *vâsıtalı* istihsâline tekâbül eden randımanı da $w' = 0.056$ dır.

Aşağıdaki radyoaktif parçalanma zinciri Xe^{135} in nasıl teşekkül edip nasıl parçalandığını göstermektedir :

$$Te_{52}^{135} \xrightarrow{2 \text{ dak}} I_{53}^{135} + \beta^- \xrightarrow{6.7 \text{ saat}} Xe_{54}^{135} + \beta^- \xrightarrow{9.2 \text{ saat}} Cs_{55}^{135} + \beta^- \rightarrow$$

$$\xrightarrow{2 \times 10^4 \text{ sene}} Ba_{56}^{135} \text{ (kararlı çekirdek)} + \beta^-. \qquad \text{(IV.1.1)}$$

Sm_{62}^{149} a gelince, bu element primer fisyon ürünü olarak ortaya çıkmamakta ($w = 0$), fakat primer bir fisyon ürünü olan Nd_{60}^{149} un radyoaktif parçalanması neticesinde $w' = 0.014$ lük bir randımanla teşekkül etmektedir.

$$Nd_{60}^{149} \xrightarrow{1.7 \text{ saat}} Pm_{61}^{149} + \beta^- \xrightarrow{47 \text{ saat}} Sm_{62}^{149} \text{ (kararlı çekirdek)} + \beta^- \qquad \text{(IV.1.2)}$$

Sm_{62}^{149} ye tekabül eden nötron yutma tesir kesidi de

$$\sigma_a = 5.3 \times 10^4 \text{ barn}$$

dır.

Xe^{135} ile Sm^{149} un nötron yutma tesir kesitleri ve randımanları mukayese edilirse Xe^{135} in Sm^{149} a nisbetle çok daha zararlı bir zehir olduğu anlaşılmaktadır. Bununla beraber Xe^{135} in 9.2 saatlik bir peryodu haiz radyoaktif bir çekirdek olmasına mukabil Sm^{149} un kararlı bir çekirdek olması keyfiyetini de gözden kaçırmamak lâzımdır. Bundan başka şuna da işâret edelim ki Xe^{135} bir gaz olduğundan bilhassa sıvı yavaşlatıcılar ihtivâ eden çoğaltkan ortamlarda biriken Xe^{135} i ortamdan dışarı çıkartmak mümkün olur ve bu takdirde de ortamda yegâne müessir zehir olarak Sm^{149} kalır.

2. Çoğaltkan Ortamların Xe^{135} İle Zehirlenmeleri. — (IV. 1. 1) ile verilmiş olan radyoaktif parçalanma zincirinde Te_{52}^{135} in peryodu I_{53}^{135} inkine nisbetle kâbil-i ihmâl olduğundan, hesabı basitleştirmek için Te^{135} in mevcûdiyetini tamamen ihmâl edebilir ve I^{135} i sanki primer bir fisyon ürünüymüş gibi kabul edebiliriz.

Bu takdirde ortamdaki I^{135} yoğunluğu için cm^3 ve sâniye başına olmak üzere şu bilânço yapılabilir :

İyot çekirdeklerinin sayılarının değişimi = fisyon ürünü olarak ortaya çıkan iyot çekirdeği sayısı —radyoaktivite yoluyla parçalanan iyot çekirdeği sayısı— nötron yutarak transmütasyona uğrayan iyot çekirdeği sayısı. (IV. 2.1)

Xe^{135} yoğunluğu için de (IV. 1. 1) radyoaktif parçalanma zincirinden faydalanarak cm^3 ve sâniye başına olmak üzere şu bilânço yapılabilir :

Xe^{135} çekirdeklerinin sayılarının değişimi = Xe^{135} e dönüşen I^{135} sayısı + fisyon ürünü olarak ortaya çıkan Xe^{135} sayısı — radyoaktivite yoluyla parçalanan Xe^{135} sayısı — nötron yutarak transmütasyona uğrayan Xe^{135} sayısı. (IV. 2.2)

Bu bilânçolarda göz önünde tutulan Xe^{135} ve I^{135} in haiz oldukları yoğunluklar, ortam homogen bir ortamsa ortamın cm^3 ü başına ve eğer ortam heterogense yalnız nükleer yakıtın cm^3 ü başına hesaplanacaklardır.

I^{135} e tekabül eden yoğunluk, randıman, radyoaktif parçalanma sâbiti ve nötron yutma tesir kesidini sırasıyla $I(t)$, w_i, λ_i ve σ_i ile ve Xe^{135} inkileri de mütekabilen $X(t)$, w_x, λ_x ve σ_x ile gösterecek olursak (IV. 2. 1) ve (IV. 2. 2) bilânçolarını derhâl :

$$\frac{dI(t)}{dt} = w_i \Sigma_f \phi(t) - \lambda_i I(t) - [\sigma_i I(t)] \phi(t) \qquad \text{(IV.2.3)}$$

ve

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_i I(t) + w_x \Sigma_f \phi(t) - \lambda_x X(t) - [\sigma_x X(t)] \phi(t) \qquad \text{(IV.2.4)}$$

şeklinde ifâde edebiliriz. Bunlardan birincisini integre etmeden önce

$$\lambda_i = 2.9 \times 10^{-5} \text{ san}^{-1}$$

$$\sigma_i = 7 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$$

olduğundan ve ϕ nötron akısı da pratikte hiç bir zaman 10^{15} nötron/cm^2/san yi geçmediğinden her zaman

$$\lambda_i \gg \sigma_i \ \phi$$

olacak ve bu sebepten ötürü de $\sigma_i \ \phi$ li terim λ_i li terim yanında ihmâl edilebilecektir. Bu itibarla (IV. 2. 3) denklemini kısaca

$$\frac{dI(t)}{dt} = w_i \Sigma_f \phi(t) - \lambda_i I(t) \qquad \text{(IV.2.5)}$$

yazmak kâbildir. Bu âdî diferansiyel denklem integre edildiğinde netice olarak

$$I(t) = \exp(-\lambda_i t) \left[w_i \Sigma_f \int_0^t \phi(t') \exp(\lambda_i t') dt' + I(0) \right] \qquad \text{(IV.2.6)}$$

bulunur.

(IV. 2. 6) ifâdesi yardımıyla (IV. 2. 4) denklemi de kolaylıkla integre edilebilir. Yalnız Xe^{135} için

$$\lambda_x = 2.1 \times 10^{-5} \text{ san}^{-1}$$

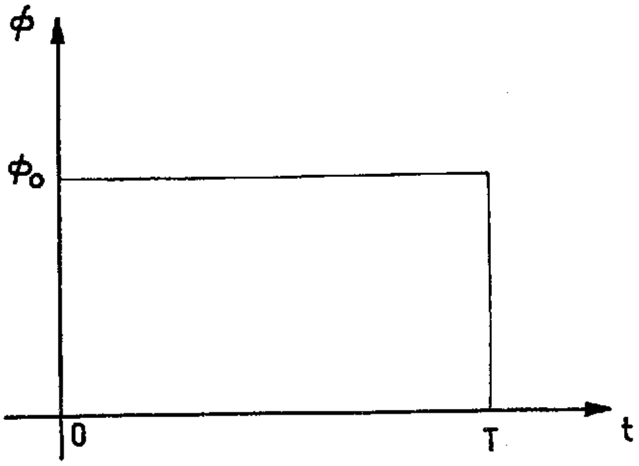
$$\sigma_x = 3.5 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$$

olduğundan artık $\sigma_x \ \phi$ şeklinde bir çarpımı λ_x e göre ihmâl etmek câiz değildir. Buna göre (IV. 2. 4) denklemini âdî usûllerle integre edecek olursak

$$X(t) = \left\{ \int_0^t \lambda_i I(t') + w_x \Sigma_f \phi(t') \cdot \exp\left[\int_0^t \left\{ \lambda_x + \sigma_x \phi(\tau) \right\} d\tau \right] dt' + X(0) \right\} \cdot \exp\left[- \int_0^t \left\{ \lambda_x + \sigma_x \phi(t') \right\} dt' \right] \tag{IV.2.7}$$

tadır.
elde edilir ; bu formülde $I(t)$ tabiî (IV. 2. 6) ile ifâde edilmiş bulunmak-

I^{135} ve Xe^{135} konsantrasyonlarının zamana göre değişimlerini veren son iki formülden kâfi derecede mâlûmat elde edebilmek için önce, çoğaltkan ortamdaki $\phi(t)$ nötron akısının Şekil : IV. 1 deki gibi $t=0$ ânında birdenbire sâbit bir ϕ_0 değerine erişip bu değeri T kadar bir zaman zarfında muhafaza ettikten sonra $t=T$ ânında gene ânî olarak sıfıra müncer olması hâlinde ortamdaki Xe^{135} konsantrasyonunun nasıl bir değişim tâkibedeceğini araştıralım.



Şekil : IV. 1.

Çoğaltkan ortamda bir ϕ nötron akısı tesisinin başlangıcı olarak $t=0$ ânını seçtiğimizden $I(0)=0$ olacağı âşikârdır. Aynı ânda $\phi=\phi_0=$ *sâbit* olduğuna göre, bu şartlar altında, $I(t)$ nin ifâdesi olarak (IV. 2. 6) dan

$$I(t) = w_i \Sigma_f \phi_0 \exp(-\lambda_i t) \int_0^t \exp(\lambda_i t')dt' =$$

$$= \frac{w_i \Sigma_f \phi_0}{\lambda_i} [1 - \exp(-\lambda_i t)] \qquad (IV.2.8)$$

bulunur. Eğer t kâfî derecede büyükse bu ifâdenin sâdece

$$\boxed{I_0 = \frac{w_i \Sigma_f \phi_0}{\lambda_i}} \qquad (IV.2.9)$$

şekline büründüğü görülür. (IV. 2. 5) formülünde $\frac{dI}{dt} = 0$ vazetmek sûretiyle (IV. 2. 9) bağıntısının aynısını I^{135} konsantrasyonunun denge durumuna erişmesi hâlinde de cârî olduğunu görmek mümkündür.

Ortamdaki nötron akısının gene Şekil : IV. 1 de gösterildiği gibi bir değişim programı tâkibettiğini farzederek Xe^{135} in denge durumuna tekabül eden konsantrasyonu için de (IV. 2. 4) ve (IV. 2. 9) vâsıtasıyla

$$X_0 = \frac{\lambda_i I_0 + w_x \Sigma_f \phi_0}{\lambda_x + \sigma_x \phi_0} =$$
$$= \frac{(w_i + w_x) \Sigma_f \phi_0}{\lambda_x + \sigma_x \phi_0} \qquad (IV.2.10)$$

ifâdesini buluruz.

Bu takdirde $0 \leqslant t \leqslant T$ için ortamdaki Xe^{135} konsantrasyonunun, ϕ nötron akısına tâkibettirilen program gereğince (Bk. Şekil : IV. 1), (IV. 2. 7) ve (IV. 2. 10) vâsıtasıyla

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) = \frac{(w_i + w_x) \Sigma_f \phi_0}{\lambda_x + \sigma_x \phi_0} \Bigg\{ 1 + \frac{1}{w_i + w_x} \left(\frac{w_i \lambda_i}{\lambda_x - \lambda_i + \sigma_x \phi_0} - w_x \right) \times \\ \times \exp[-(\lambda_x + \sigma_x \phi_0)t] - \frac{w_i}{w_i + w_x} \left(\frac{\lambda_x + \sigma_x \phi_0}{\lambda_x - \lambda_i + \sigma_x \phi_0} \right) \exp(-\lambda_i t) \Bigg\} \end{aligned}} \qquad (IV.2.11)$$

şeklinde olacağı kolayca tesbit edilir.

Bu sonuncu ifâdeden $t \to \infty$ için $X(t)$ nin

$$\lim_{t \to \infty} X(t) = X_0 = \frac{(w_i + w_x)\Sigma_f \phi_0}{\lambda_x + \sigma_x \phi_0} \qquad \text{(IV.2.12)}$$

asimtotik değerine gittiği görülmektedir. Burada hatırda tutulması gereken nokta bu asimtotik değerin nötron akısının değerine bağlı olduğu keyfiyetidir.

Şimdi de Xe^{135} konsantrasyonunun, Şekil : IV. 1 de şematik olarak gösterilen program gereğince $t=T$ ânında ortamdaki nötron akısı sıfıra müncer olduktan sonra nasıl değişeceğini inceleyelim.

$t=T$ için ortamdaki ϕ_0 nötron akısı sıfıra müncer olduğundan $t>T$ için ortamdaki I^{135} konsantrasyonunun (IV. 2. 3) e binâen artık

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\lambda_i I(t) \qquad \text{(IV.2.13)}$$

ile verileceği âşikârdır. $\phi_0=0$ olduğu $t=T$ ânındaki I^{135} konsantrasyonu $I(T)$ ile gösterilirse (IV. 2. 13) ün çözümü

$$I(t) = I(T) \exp[-\lambda_i(t-T)] \qquad \text{(IV. 2. 14)}$$

olur.

$t=T$ için Xe^{135} konsantrasyonun $X(T)$ ile göstermek sûretiyle $t>T$ olduğu zamanlarda $X(t)$ de

$$X(t) = \left\{ \int_T^t \lambda_i I(T) \exp[-\lambda_i(t'-T)] \exp\left[\int_T^{t'} \lambda_x d\tau\right] dt' + \right.$$

$$\left. + X(T) \right\} \exp\left[-\int_T^t \lambda_x dt'\right] \qquad \text{(IV.2.15)}$$

ifâdesiyle belirlenecektir. Buradaki integrasyonlar yapıldıktan sonra $X(t)$ için

$$X(t) = \frac{I(T)\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_x}\left[\left(1 + \frac{\lambda_i - \lambda_x}{\lambda_i}\frac{X(T)}{I(T)}\right)\exp\left[-\lambda_x(t-T)\right] - \exp\left[-\lambda_i(t-T)\right]\right] \tag{IV.2.16}$$

ifâdesi bulunur. Eğer ortamdaki Xe ve I konsantrasyonları $t<T$ için denge durumlarına erişmişlerse de bu takdirde $X(T)$ ve $I(T)$ nin yerine X_0 ve I_0 vazedileceği âşikârdır. Bu (IV. 2. 16) ifâdesinin de t n'n değeri için

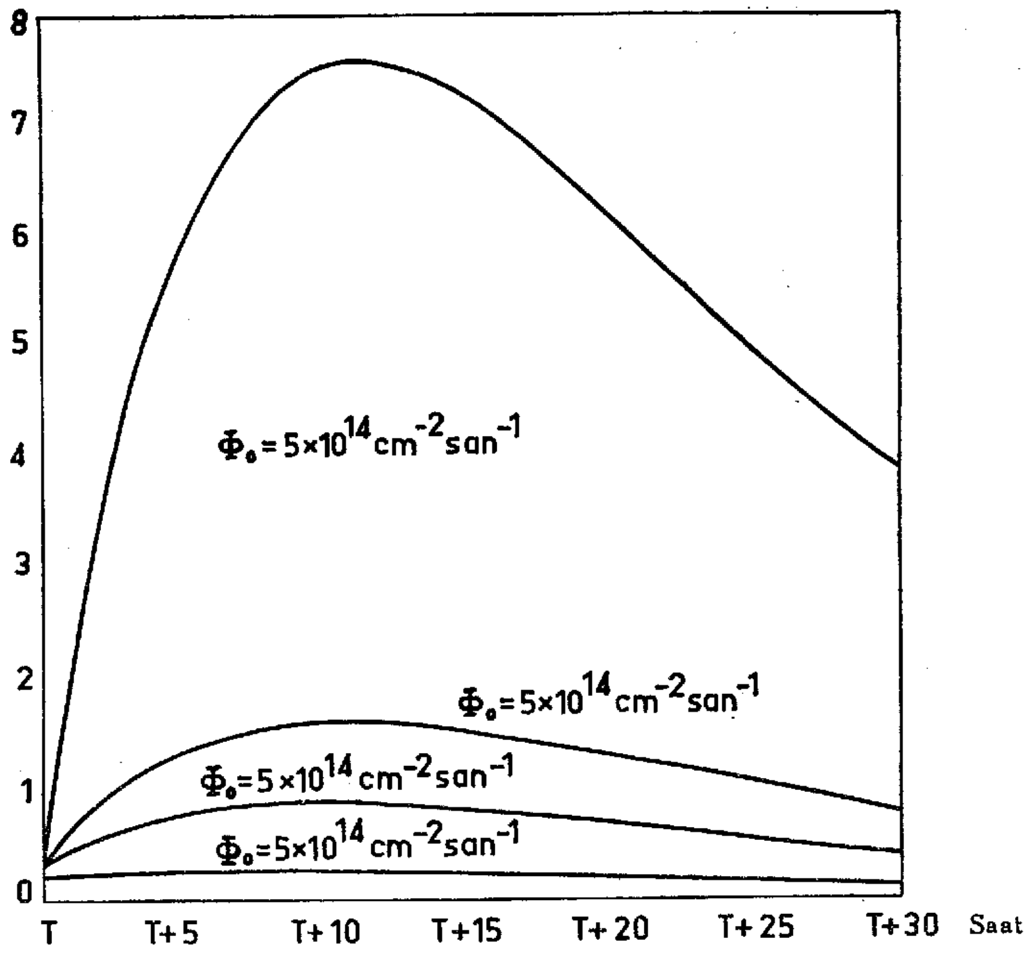
$$t_{max} = T + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_x}\operatorname{Log}\frac{\frac{\lambda_i}{\lambda_x}}{1 + \frac{\lambda_i - \lambda_x}{\lambda_i}\frac{I(T)}{X(T)}} \tag{IV.2.17}$$

bir maksimuma eriştiği ve sonra $t \to \infty$ için sıfıra gittiği müşahede edilir. (Bk. Şekil : IV. 2). $t=T$ ânına, yâni ortamdaki nötron akısının sıfır kılındığı âna kadar geçen zaman zarfında ϕ nötron akısı ne kadar büyük bir değeri haizse Xe^{135} konsantrasyonundaki bu maksimum da o kadar büyük bir değeri haiz olmaktadır.

Xe^{135} konsantrasyonunun arzettiği bu maksimumun sebebini anlamak kolaydır. Filhakika, nötron akısı sıfır olduktan sonra Xe^{135} çekirdeklerinin nötron yutma yoluyla imhâ olmaları bertaraf edilmiş olmakta ve yeni Xe^{135} çekirdeklerinin teşekkülü de nötron akısı sıfır oluncaya kadar çoğaltkan ortamda birikegelmiş olan I^{135} çekirdekleri sâyesinde devam ededurmaktadır.

Böyle bâriz bir Xe^{135} konsantrasyonu maksimumunun mevcûdiyeti ortamın Σ_a makroskopik nötron yutma tesir kesidini tâdil ettiğinden âşikâr olarak ortamın k_{et} çoğalma katsayısı da daha düşük bir değer alacaktır. Yalnız, Xe^{135} konsantrasyonu zamanla değiştiği için gerek Σ_a ve gerekse k_{et} de, buna paralel bir şekilde, zamanın fonksiyonu olarak değişecektir. $X(t)$ nin maksimumuna Σ_a nın maksimumunun ve k_{et} in ise minimumunun tekabül edeceği âşikârdır. Bu itibarla eğer çoğaltkan ortamın haiz olduğu reaktiflik fazlalığı reaktör durduktan sonra Xe^{135} konsantrasyonunun sebep olduğu reaktiflik kaybından fazla değilse bu takdirde reaktörü tekrar işletebilmek için Xe^{135} konsantrasyonunun iyice azalmasını beklemek zarurîdir. Xe^{135} konsantrasyonunun maksimumunun sebep olduğu reaktiflik kaybı çoğalma katsayısını birden küçük kılıyorsa bu takdirde de çoğaltkan ortamda gene kritik bir nötron dağılımı tesis edebilmek için ya reaktörü durdurduktan hemen sonra veyâhut da $\theta \gg t_{max}$ kadar bir zaman geçtikten sonra işletmek lâzımdır.

Eğer çoğaltkan ortamın, meselâ atom denizaltılarında olduğu gibi, durduktan hemen biraz sonra tekrar faaliyete geçmesi icâbediyorsa bu takdirde ortamı inşâ etmeden önce ortamın etkin çoğalma katsayısının, Xe^{135} konsantrasyonunun doğuracağı maksimum reaktiflik kaybını izâle edecek tarzda tesbit edilmiş olması lâzımdır.



Şekil : IV. 2. Reaktör durduktan sonra Xe konsantrasyonunun zamana bağlı değişimi. Ordinattaki birimler keyfîdir.

3. Çoğaltkan Ortamların Sm^{149} İle Zehirlenmeleri. — (IV. 2. 1) radyoaktif parçalanma zincirinde görüldüğü gibi Xe^{135} in kararsız bir çekirdek olmasına mukabil (IV. 2. 2) radyaoktif parçalanma zincirinden anlaşıldığı gibi Sm^{149} un da tamamiyle kararlı bir çekirdek olması hasebiyle bu iki farklı çekirdeğin çoğaltkan ortamlarda doğurdukları zehirleme olaylarının da biribirlerinden epey farklı genel davranışlara sâhip olacaklarını düşünmek mantıkî gözükmektedir.

Böyle bir farkın hakikaten mevcut olduğunu tesbit etmek için $S(t)$ ile göstereceğimiz Sm^{149} un konsantrasyonunun nasıl değiştiğini incelememiz lâzımdır. Gene burada da $S(t)$ nin, eğer ortam homogen bir ortamsa ortamın cm^3 ü ve eğer ortam heterogen bir ortamsa bu sefer de sâdece nükleer yakıtın cm^3 ü başına Sm^{149} konsantrasyonunu göstereceğini hatırlamamız lâzımdır. (IV. 2. 2) zincirinden Nd^{149} un peryodunun Pm^{149} unkine nazaran ihmâl edilebileceği görülmektedir. Buna göre Pm^{149} u primer fisyon ürünüymüş gibi addetmek mümkün olur. Bu dersin 1. bölümünde Sm^{149} un primer fisyon ürünü olarak ortaya çıkmadığını ifâde etmiş olduğumuzu da göz önünde tutarak $P(t)$ ve $S(t)$ konsantrasyonlarının

$$\frac{dP(t)}{dt} = w_p \Sigma_f \phi(t) - \lambda_p P(t) - [\sigma_p P(t)]\phi(t) \qquad \text{(IV.3.1)}$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \lambda_p P(t) - [\sigma_s S(t)]\phi(t) \qquad \text{(IV.3.2)}$$

bağıntılarını gerçekleyecekleri anlaşılır. Burada w_p ile Pm^{149} un randımanı, λ_p ile radyoaktif parçalanma sâbiti ve σ_p ile de aynı elementin nötron yutma tesir kesidi gösterilmiştir ; σ_s de Sm^{149} un nötron yutma tesir kesidini göstermektedir. (IV. 3. 1) de $\sigma_p\, \phi\, (t) \ll \lambda_p$ dir. Bu bakımdan bu terimi ihmâl edebiliriz ve böylece $P(t)$ yi veren denklem de

$$\frac{dP(t)}{dt} = w_p \Sigma_f \phi(t) - \lambda_p P(t) \qquad \text{(IV.3.3)}$$

ye müncer olur. (IV. 3. 3) ve (IV. 3. 2) ifâdelerinden $P(t)$ ve $S(t)$ konsantrasyonlarının denge değerlerinin

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{w_p \Sigma_f}{\lambda_p} \\ S_0 &= \frac{\lambda_p P_0}{\sigma_s} = \frac{w_p \Sigma_f}{\sigma_s} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.3.4)}$$

olduğu görülmektedir.

Nötron akısının gene Şekil : IV. 1 deki gibi bir program tâkibettiğini farzedersek ve 2. bölümdekine benzer bir muhakemeyle, ve $P(0) = S(0) = 0$ olmak üzere, $t < T$ için

$$S(t) = \frac{w_p \Sigma_f}{\sigma_s}\left[1 + \frac{\lambda_p}{\sigma_s \phi_0 - \lambda_p} \exp(-\sigma_s \phi_0 t) - \frac{\sigma_s \phi_0}{\sigma_s \phi_0 - \lambda_p} \exp(-\lambda_p t)\right] \tag{IV.3.5}$$

ve $t > T$ için de, Sm^{149} konsantrasyonunun $t = T$ oluncaya kadar denge değerine erişmiş olmasını yâni $S(T) = S_0 = w_p \Sigma_f / \sigma_s$ farzederek

$$S(t) = \frac{w_p \Sigma_f \phi_0}{\lambda_p}\left\{1 - \exp[-\lambda_p(t - T)]\right\} + \frac{w_p \Sigma_f}{\sigma_s} \tag{IV.3.6}$$

ifâdeleri bulunur.

(IV. 3. 5) ifâdesinden yâni $t < T$ hâli için

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = S_0 = \frac{w_p \Sigma_f}{\sigma_s} \tag{IV.3.7}$$

bulunur. Yâni çoğaltkan ortamdaki nötron akısının değeri ne olursa olsun Sm^{149} konsantrasyonu, Xe^{135} için vârid olan hâlin aksine, kâfi derecede uzun bir zaman sonra, akıya bağlı olmaksızın asimtotik olarak denge değerine gider.

Diğer taraftan, $t > T$ olmak üzere yâni çoğaltkan ortamdaki ϕ_0 nötron akısının sıfıra ircâ edildiği T ânından sonra da, (IV. 3. 6) ifâdesinden

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = S_0\left(1 + \frac{\sigma_s}{\lambda_p} \phi_0\right) \tag{IV.3.8}$$

bulunur. Bu ise Sm^{149} konsantrasyonunun, çoğaltkan ortamdaki ϕ_0 sâbit nötron akısı sıfıra müncer olduktan sonra kâfî derecede uzun bir zaman geçmesini müteakip ϕ_0 a bağlı asimtotik bir değere gittiğini göstermektedir. Hâlbuki $t > T$ olması hâlinde $X(t)$ de bunun aksi vârid olmakta ve ϕ_0 ne olursa olsun $t \to \infty$ için $X(t)$ konsantrasyon fonksiyonu aynı bir sâbit asimtotik değere gitmekteydi. Böylece $X(t)$ ve $S(t)$ fonksiyonlarının $t < T$ ve $t > T$ hâllerindeki asimtotik davranışlarının mukayesesini yapmış olmaktayız.

4. Zehirlenmenin Sebep Olduğu Reaktiflik Kaybı. — Çoğaltkan ortamların zehirlenmelerinin bir ölçüsü olarak

$$Z = \frac{\Sigma_{a,z}}{\Sigma_{a,f}} \tag{IV.4.1}$$

oranı göz önüne alınır. Burada $\Sigma_{a,z}$ zehir rolünü oynayan fisyon ürününün ve $\Sigma_{a,f}$ de nükleer yakıtın makroskopik nötron yutma tesir kesitlerini göstermektedir. Z yi

$$Z = \frac{\Sigma_{a,z}\phi(t)}{\Sigma_{a,f}\phi(t)}$$

şeklinde de yazmak mümkün olduğundan bunun, cm³ ve saniye başına, zehir rolünü oynayan fisyon ürünü tarafından yutulan nötron sayısının nükleer yakıt tarafından yutulan nötronların sayısına oranı demek olduğu anlaşılmaktadır.

Bu târife göre Xe^{135} ve Sm^{149} un zehirlenme oranları, sırasıyla

$$Z_x = \frac{\sigma_x X(t)}{\Sigma_{a,f}}$$

ve

$$Z_s = \frac{\sigma_s S(t)}{\Sigma_{a,f}}$$

ile verilecektir. Sâbit bir ϕ_0 nötron akısı için Xe^{135} ve Sm^{149} un denge değerlerine tekabül eden zehirlenme oranlarının da

$$Z_{0,x} = \frac{\sigma_x(w_i + w_x)\Sigma_f\phi_0}{(\lambda_i + \sigma_x\phi_0)\Sigma_{a,f}}$$

ve

$$Z_{0,s} = w_p\frac{\Sigma_f}{\Sigma_{a,f}} = \frac{w_p}{\nu}\eta$$

olduğu bulunur.

Görüldüğü gibi Xe^{135} in doğurduğu zehirlenme, ortamdaki sâbit nötron akısının şiddetine tâbî bulunmakta, fakat buna mukabil Sm^{149} unki nükleer yakıt tarafından yutulan bir nötronun bir fisyona sebep olması ihtimâliyle ve dolayısıyla η ile orantılı sâbit bir değeri haiz olup nötron akısına tâbî bulunmamaktadır.

Xe^{135} için $w + w' = 0.059$, $\sigma_x = 3.5 \times 10^6$ barn $= 3.5 \times 10^{-18}$ cm^2, $\lambda_x = 2.1 \times 10^{-5}$ san^{-1} olduğundan ve meselâ seçilmiş olan nükleer yakıt da U^{235} ise bu takdirde de $\Sigma_f/\Sigma_{a,f} = 0.84$ olacağından

$$Z_{0,x} = \frac{1.7 \times 10^{-19}\phi_0}{2.1 \times 10^{-5} + 3.5 \times 10^{-18}\phi_0}$$

olur. Buradan $\phi_0 \leqslant 10^{11}$ nötron/cm^2/san için $Z_{0,x}$ in kâbil-i ihmâl olduğu, $\phi_0 = 10^{12}$ nötron/cm^2/san lik bir nötron akısı için ise ancak 0.007 değerini aldığı hesaplanır. 10^{15} nötron/cm^2/san den daha yüksek seviyedeki nötron akıları için $Z_{0,x}$ in 0.05 e eşit bir limit değere gittiği görülmektedir.

Çok yüksek nötron yutma tesir kesidini haiz olan bu zehirlerin teşekkülünün ortamın reaktifliğinin zararına olduğu âşikârdır. Şimdi işte bu zararın mertebesini veyâ, başka bir deyişle, bu zehirlerin ortamın reaktifliğini neye ircâ ettiklerini tesbit edeceğiz.

Her şeyden önce ortamdaki zehirlenmenin ortamın k_{et} etkin çoğalma katsayısını, f ılık kazanç katsayısı ve $P = 1/1 + L^2B_g^2$ ile verilmiş olan bir nötronun ortamdan dışarı kaçmaması ihtimâlinin ifâdesindeki L^2 vâsıtasıyla tâdil edeceğine işâret edelim.

f' ve P' ile zehirlerin mevcûdiyeti altında f ve P nin aldıkları yeni değerleri gösterelim. Nötron akısının birbiçim olduğunu farzederek

$$f = \frac{\Sigma_{a,f}}{\Sigma_{a,f} + \Sigma_{a,m}} = \frac{1}{1+y}\,; \quad f' = \frac{\Sigma_{a,f}}{\Sigma_{a,f} + \Sigma_{a,m} + \Sigma_{a,z}} = \frac{1}{1 + y + Z}$$

$$P = \frac{1}{1 + L^2B_g^2}\,; \quad P' = \frac{1}{1 + L'^2B_g^2}$$

yazılır. Burada $\Sigma_{a,f}$ gene nükleer yakıtın, $\Sigma_{a,m}$ yavaşlatıcının ve $\Sigma_{a,z}$ de zehirin makroskopik nötron yutma tesir kesitleri olup difüzyon uzunluğunun karesi de

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_{a,f} + \Sigma_{a,m}} = \frac{D}{\Sigma_{a,f}} \frac{1}{1+y} = L_f^2 \cdot f$$

$$L'^2 = \frac{D}{\Sigma_{a,f} + \Sigma_{a,m} + \Sigma_{a,z}} = \frac{D}{\Sigma_{a,f}} \frac{1}{1+y+Z} = L_f^2 \cdot f'$$

ifâdesiyle târif olunmuştur.

Bu târiflere binâen, k'_{et} ile zehirlenmiş ortamın çoğalma katsayısını gösterir ve $L^2B_g^2$ nin karesinin ihmâl edilebilir olduğunu farzedecek olursak şu ifâdeyi hesaplayabiliriz :

$$\frac{k'_{et} - k_{et}}{k'_{et}} = \frac{f'P' - fP}{f'P'} = 1 - \frac{f}{f'} \frac{P}{P'} =$$

$$= 1 - \frac{\dfrac{\Sigma_{a,f}}{\Sigma_{a,f} + \Sigma_{a,m}}}{\dfrac{\Sigma_{a,f}}{\Sigma_{a,f} + \Sigma_{a,m} + \Sigma_{a,z}}} \frac{\dfrac{1}{1 + L^2B_g^2}}{\dfrac{1}{1 + L'^2B_g^2}} =$$

$$= 1 - \frac{1+y+Z}{1+y} (1 + L'^2B_g^2)(1 - L^2B_g^2) =$$

$$= 1 - (1 + Zf)[1 - (L^2 - L'^2)B_g^2] =$$

$$= 1 - (1 + Zf)[1 - (f - f')L_f^2B_g^2] . \tag{IV.4.2}$$

Eğer göz önüne alınan ortam kritikse bu takdirde $k_{et} = 1$ olacağından

$$\frac{k'_{et} - 1}{k'_{et}} = \rho = 1 - (1 + Zf)[1 - (f - f')L_f^2B_g^2]$$

olur. $(f - f')$ ile $L_f^2B_g^2$ aynı mertebeden büyüklükler olduğu takdirde, bunların her biri 1 e göre çok küçük olduklarından, çarpımları ihmâl edilebilir ve böylece

$$\boxed{\rho = -Zf} \tag{IV.4.3}$$

bulunur. Zenginleştirilmiş uranyum ihtivâ eden çoğaltkan ortamlar için $f \sim 1$ dir. Buna göre

$$\rho = -Z \tag{IV. 4. 4}$$

yazılabilir. Şu hâlde zehirlenmiş ortamın reaktiflik kaybının da yaklaşık olarak (IV. 4. 1) de târif etmiş olduğumuz Z zehirlenme oranı ile verileceği söylenebilir. Böylelikle Xe^{135} zehirlenmesi dolayısıyla çoğaltkan bir ortamın kaybedeceği maksimum reaktifliğin 0.05 olduğu anlaşılmaktadır.

5. Nükleer Zehirlerin Tesiri Altındaki Bir Reaktörün Gücünün Sâbit Kalması. — Reaktörlerle yapılan bazı deneyler reaktördeki nötron akısının daimâ sâbit bir değeri haiz olmasını zorunlu kılarlar (meselâ ışınlama deneylerinde olduğu gibi). Buna mukabil diğer bazı deneyler de, nötron akısının sâbitliği yerine, reaktörün P gücünün sâbit olmasını zorunlu kılarlar. Bu sonuncu hâl, bilhassa, nükleer enerjiyi elektrik enerjisine dönüştüren merkezlerdeki reaktörler için hayatî önemi olan bir husustur. Filhakika bu tipteki güç reaktörlerinde enerji üretiminin çok uzun bir zaman süresi boyunca aynı bir sâbit seviyeyi muhafaza etmesi lâzımdır. Şu hâlde, zamana bağlı nötron gücünün $P(t)$ ve bunun $t=0$ için değerini de P_0 ile ve 1 wattlık bir enerjinin açığa çıkması için lâzım olan fisyon sayısını da π ile gösterecek olursak gücü daimâ sâbit kalan bir reaktör için

$$P(t) = P_0$$

veyâ

$$\pi \Sigma_f(t)\phi(t) = \pi\sigma_f N_f(0)\phi(0) \tag{IV.5.1}$$

olmalıdır. Burada σ_f nükleer yakıtın mikroskopik fisyon tesir kesidini, $N_f(0)$ nükleer yakıtın $t=0$ da haiz olduğu konsantrasyonu ve $\phi(0)$ da gene aynı andaki nötron akısının değerini göstermektedir.

Bu bağıntıdan

$$\phi(t) = \frac{\sigma_f N_f(0)\phi(0)}{\Sigma_f(t)} = \frac{N_f(0)\phi(0)}{N_f(t)} \tag{IV.5.2}$$

yazılabilir ve buradan da sâbit gücü haiz olan bir reaktörün her zaman sâbit bir nötron akısını haiz olamayacağı açıkça müşahede edilir.

Bu bağıntıya göre sâbit gücü haiz bir reaktörde zamana bağlı nötron akısı nükleer yakıtın konsantrasyonuyla ters orantılı olarak değişmektedir. $\phi(t)$ nötron akısının daha açık bir ifâdesini elde edebilmek için $N_f(t)$ nükleer yakıt konsantrasyonunun değişim kanununu vermek lâzımdır ; bunun ise

$$\frac{dN_f(t)}{dt} = -\Sigma_f(t)\phi(t) = -\sigma_{a,f}N_f(t)\phi(t) \qquad \text{(IV.5.3)}$$

şeklinde olduğu âşikârdır. $\phi(t)$ nin (IV. 5. 2) ile verilmiş olan ifâdesini (IV. 5. 3) e yerleştirip bu ifâdeyi integre ettikten sonra

$$N_f(t) = N_f(0)\,[1 - \sigma_{a,f}\phi(0)\cdot t] \qquad \text{(IV.5.4)}$$

bulunur. Bunu (IV. 5. 1) e taşırsak nükleer yakıtın zamanla gitgide tükenmesi hâlinde reaktörün gücünün sâbit kalabilmesi için $\phi(t)$ nin de

$$\phi(t) = \frac{\phi(0)}{1 - \sigma_{a,f}\phi(0)\cdot t} \qquad \text{(IV.5.5)}$$

şeklinde bir değişim tâkibetmesi gerektiği bulunur. Eğer kontrol çubukları vâsıtasıyla reaktördeki nötron akısına $t=0$ ilâ $t=1/\sigma_{a,f}\,\phi(0)$ arasında (IV. 5. 5) ile verilen program tatbik edilecek olursa, reaktörün gücü sâbit kalır ve (IV. 5. 5) ifâdesinin $X(t)$ ve $S(t)$ ifâdelerine ikâmesiyle de reaktörde üreyen ve biriken zehirlerin göz önüne alınan şartlar altında ne türlü bir davranışa sâhip olacaklarını tesbit etmek de mümkün olur.

6. Geçici Zehirler Ve Reaktörlerin Kontrolunda Haiz Oldukları Önem. — Geçici zehirler diye bir reaktördeki fazla reaktifliği reaktörün standart kontrol sisteminin sınırları içinde ircâ etmek için reaktöre ithâl edilen, büyük nötron yutma tesir kesidini haiz maddelere denir. Reaktöre yeni bir miktar yakıt ilâve edildikten sonra sistemin haiz olduğu reaktiflik, standart kontrol sisteminin ifnâ edebildiği reaktiflikten daha yüksek bir seviyeye çıkabilir. Bu takdirde reaktöre ithâl edilen geçici zehirler fazla nötronları yutmak sûretiyle sistemdeki nötron seviyesinin, reaktörün standart kontrol sistemi vasıtasıyla zabt-u rapt altına alınabilir bir seviyeye ircâını sağlarlar. Nükleer yakıt harcandıkça reaktördeki reaktiflik de hâliyle azalır ; fakat buna paralel olarak geçici zehirlerin konsantrasyonu da azalacağından bu sonuncu olay sistemde bir miktar reaktifliğin açığa çıkmasını intâceder. Zıt işâretli bu iki reaktiflik değişimlerinin birbirlerini dengelemeleri çabası arasında reaktörün standart kontrol sistemi de duruma hâkim olacak vaziyete girer.

Şimdi bir reaktöre muayyen bir geçici zehir ithâl edilmiş olduğunu farzedelim ve reaktörün sâbit bir gücü muhafaza etmesi hâlinde, bunun $N_z(t)$ konsantrasyonunun ve sistemde doğurduğu zamana bağlı $\rho(t)$ reaktifliğinin değişimlerinin ne şekilde olacaklarını hesaplayalım.

Muayyen bir geçici zehirin konsantrasyonunun

$$\frac{dN_z(t)}{dt} = -\sigma_{a,z} N_z(t)\,\phi(t) \qquad \text{(IV.6.1)}$$

denklemini gerçekleyeceği âşikârdır ; burada $\sigma_{a,z}$ geçici zehire tekabül eden mikroskopik nötron yutma tesir kesidini göstermektedir. Göz önüne almış olduğumuz hâlde reaktörün sâbit güçte çalıştığını farzedeceğimizden, nötron akısı (IV. 5. 5) ifâdesiyle verilmiş olacaktır. Bunu göz önünde tutarak (IV. 6. 1) ifâdesi

$$\frac{dN_z(t)}{dt} = -\frac{\sigma_{a,z} N_z(t)\,\phi(0)}{1-\sigma_{a,f}\,\phi(0)\cdot t}$$

şeklini alır. Bu denklem derhâl integre edilebilir ve

$$S = \frac{\sigma_{a,z}}{\sigma_{a,f}} \qquad \text{(IV.6.2)}$$

vazederek

$$\boxed{N_z(t) = N_z(0)\,[1-\sigma_{a,f}\,\phi(0)\cdot t]^S} \qquad \text{(IV.6.3)}$$

bulunur.

Şimdi böyle bir geçici zehirin çoğaltkan ortama ithâlinin ne gibi bir reaktiflik değişikliği doğurabileceğini hesaplayabiliriz. Bunun için sistemin k_{et} etkin çoğalma katsayısı göz önüne alalım :

$$k_{et} = \frac{k_\infty \exp(-B_g^2\tau)}{1+L^2B_g^2} = \eta f p \varepsilon \cdot g(\tau)\cdot P(B_g^2)\,.$$

Hesabı fuzulî yere ağırlaştırmamak için $p\varepsilon = 1$ kabul edecek ve η ile

$g(\tau)$ nun da zamana bağlı olmadıklarını farzedeceğiz. Buna göre

$$k_{et}(t) = \eta\, g(\tau)\; f(t)\; P(B_g^2, t) \tag{IV. 6. 4}$$

olacaktır. Şimdi

$$\alpha(t) = \frac{\Sigma_{a,d}(t)}{\Sigma_{a,f}(t)} \tag{IV.6.5}$$

vazedelim. $\Sigma_{a,d}(t)$ ile nükleer yakıttan gayrı maddelere tekabül eden makroskopik nötron yutma tesir kesidini göstermekteyiz. Bu takdirde

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{1+\alpha(t)} \\ L^2(t) &= \frac{D}{\Sigma_{a,f}(t)}\,\frac{1}{1+\alpha(t)} = \frac{D}{\sigma_{a,f}N_f(t)}\,\frac{1}{1+\alpha(t)} = \\ &= \frac{D}{\Sigma_{a,f}(0)\,[1-\sigma_{a\,f}\,\phi(0)\cdot t]}\,\frac{1}{1+\alpha(t)} \\ P(B_g^2, t) &= \frac{1}{1+B_g^2L^2(t)} \end{aligned}\right\} \tag{IV.6.6}$$

olur.

α nın ifâdesindeki $\Sigma_{a,d}(t)$ yi zamana bağlı olmayan bir Σ_a' tesir kesidiyle, geçici zehirden ileri gelen zamana bağlı $\Sigma_{a,z}(t)$ tesir kesidinin toplamı şeklinde yazabiliriz ve fisyon ürünlerinin husûlünü de ihmâl edebiliriz :

$$\Sigma_{a,d}(t) = \Sigma_a' + \Sigma_{a,z}(t) = \sigma_a'N' + \sigma_{a,z}N_z(t). \tag{IV.6.7}$$

Bu ifâdeyi (IV. 6. 5) deki yerine koyup $N_f(t)$ ve $N_z(t)$ için de sırasıyla (IV. 5. 4) ve (IV. 6. 3) bağıntılarından faydalanarak $\alpha(t)$ için

$$\alpha(t) = \frac{\Sigma_{a,d}(t)}{\Sigma_{a,f}(t)} = \frac{\sigma_a'N' + \sigma_{a,z}N_z(t)}{N_f(t)} =$$

$$= \frac{\sigma_a'n'}{1-\sigma_{a,f}\,\phi(0)\cdot t} + \sigma_{a,z}n_z[1-\sigma_{a,f}\,\phi(0)\cdot t]^{S-1} \tag{IV.6.8}$$

bulunur ; burada kısaca

$$n' = \frac{N'(0)}{N_f(0)} \quad \text{ve} \quad n_z = \frac{N_z(0)}{N_f(0)}$$

vazetmiş bulunuyoruz.

$\alpha(t)$ nin ifâdesi (IV. 6. 8) ile verilmiş olmak şartıyla $\rho(t)$ için de

$$\rho(t) = \frac{k_{et}(t)-1}{k_{et}(t)} = 1 - \frac{1}{k_{et}(t)} = 1 - \frac{1}{\eta f(t)\, g(\tau)\, P(B_g^2, t)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\eta g(\tau)} \left\{ 1 + \alpha(t) + \frac{B_g^2 D}{\Sigma_{a,f}(0)\left[1 - \sigma_{a,f}\,\phi\,(0)\cdot t\right]} \right\} \qquad \text{(IV.6.9)}$$

bulunur.

Reaktöre geçici bir zehir ithâl edilmediği takdirde $\rho(t)$ nin $t=0$ için

$$\rho(0) = 1 - \frac{1 + \sigma' n' + \dfrac{DB_g^2}{\Sigma_{a,f}(0)}}{\eta g(\tau)} \qquad \text{(IV.6.10)}$$

değerini aldığı ve bir de :

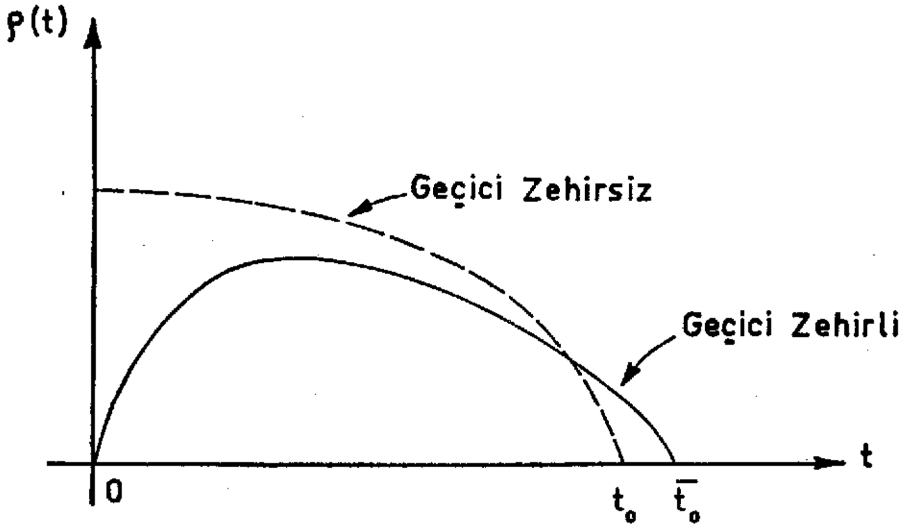
$$t = t_0 = \frac{1}{\sigma_{a,t}\,\phi\,(0)} - \frac{\sigma' n' + \dfrac{DB_g^2}{\Sigma_{a,f}(0)}}{\sigma_{a,t}\,\phi\,(0)\,[\eta g(\tau) - 1]} \qquad \text{(IV.6.11)}$$

değeri için sıfır olduğu yâni

$$\rho(t_0) = 0 \qquad \text{(IV. 6. 12)}$$

olduğu kolaylıkla tesbit edilir. (Bk. Şekil : IV. 3).

Fakat başlangıçtaki (IV. 6. 10) reaktifliği reaktördeki kontrol mekanizması vâsıtasıyla ifnâ edilebilecek olandan çok daha yüksek olabilir. Bu takdirde reaktöre $\rho(0) = 0$ olacak şekilde kâfî mikdarda geçici zehir ithâl etmek sûretiyle $\rho(t)$ nin daimâ reaktörün standart kontrol meka-



Şekil : IV. 3.

nizmasının kat'î tesiri altında bulundurulması sağlanabilir. Bunun için eğer

$$\boxed{\sigma_{a,f} n_x = \eta g(\tau) - \left[1 + \sigma' n' + \frac{DB_g^2}{\Sigma_{a,f}(0)}\right]} \qquad \text{(IV.6.13)}$$

olacak şekilde reaktöre geçici bir zehir ithâl edilecek olursa

$$\rho(0) \equiv 0$$

olduğu görülür.

Geçici bir zehirin mevcûd olması hâlinde $t=0$ dan sonra $\rho(t)$ nin ilk defa $t=\bar{t}_0$ da sıfıra eşit olması için $\bar{t}_0$ nin

$$1 = [\eta g(\tau) - 1]\frac{\phi(0)}{sn_x}\bar{t}_0 + [1 - \sigma_{a,f}\phi(0)\cdot\bar{t}_0]^S \qquad \text{(IV.6.14)}$$

bağıntısını gerçeklemesi lâzım geldiği de tesbit olunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Muayyen bir çekirdeğin fisyonunda ortaya çıkan bütün primer fisyon ürünlerinin randımanlarının toplamı ne eder ?

2. Xe^{135} konsantrasyonunun maksimuma eriştiği ânı veren formülü saniye, dakika ve saat cinsinden ayrı ayrı ifâde ediniz.

3. I^{135} ve Xe^{135} konsantrasyonları denge durumuna eriştikten sonra durdurulan bir reaktör için Xe^{135} konsantrasyonunun maksimum olduğu ânı, sâbit olduğu farzolunan ϕ nötron akısı cinsinden hesaplayınız. ϕ nin çok yüksek değerleri için bu ifâde neye müncer olur ?

4. Çoğaltkan bir ortamda bir nötronun bir nükleer zehir tarafından yutulması ihtimâlini Z zehirleme oranı cinsinden yazınız.

5. Bir reaktördeki nötron akısının sâbit kalması şartı altında belirli bir geçici zehirin konsantrasyonunun zamana bağlı olarak değişimini hesaplayınız.

6. t_0 ile nükleer yakıtın tükenmesi için lâzım gelen zaman gösterilmek üzere

$$\zeta = \frac{t}{t_0}$$

şeklinde yeni bir bağımsız değişken ithâl ederek IV. dersin 5. ve 6. bölümlerini yeni baştan inceleyiniz ve Şekil : IV. 3 ü yeniden çiziniz.

V. DERS

Temperatur Değişimlerinin Çoğaltkan Ortamlardaki Etkilerinin İncelenmesine Giriş

Nötron temperaturunun ortamın temperaturuna bağlılığı — Temperatur gradyentinin nötron akısına tesiri — Temperaturun yoğunluk değişimleri vâsıtasıyla ortamı karakterize eden mikroskopik ve makroskopik büyüklüklere tesiri — Temperaturun tesir kesitlerine vâsıtasız tesiri — Çoğalma çarpanının temperatur katsayısı — η nın, f nin ve p nin temperatur katsayıları.

1. Çoğaltkan Ortamların Özelliklerinin Temperatur Değişimlerine Bağlılığı. — Daha 1. cildin III. dersinde tesir kesitlerinin temperatura ne türlü bağlı olduklarına temas etmiştik. Bu derste de çoğaltkan bir ortamdaki temperatur değişimlerinin ortamın (1) makroskopik ve (2) mikroskopik özelliklerine nasıl tesir ettiklerini kısaca gözden geçirmek istiyoruz.

Çoğaltkan bir ortamdaki zincirleme fisyon reaksiyonları dolayısıyla açığa çıkan ısı bir takım değişimler arzedebilir. Bu değişimlerin en önemli etkileri, ortamın reaktifliğinin ve ortamdaki nötron akısının da bunlara sıkı sıkıya bağlı olarak değişimlerinde müşahede edilir.

Temperatur değişimleri dolayısıyla nötron akısının ve reaktifliğin de değişimlere mâruz kalmaları şu esaslara dayanır :

1) Temperatur değişimleri dolayısıyla çoğaltkan ortam ısısal genişlemeye mâruz kalır ; dolayısıyla ortamın yoğunluğu değişir; bu da makroskopik tesir kesitlerinin değişimlerini doğurur.

2) Mikroskopik tesir kesitleri nötronların ortalama enerjilerinin ve dolayısıyla nötron temperaturunun fonksiyonudurlar. Bu itibarla ortamdaki atom çekirdekleriyle termik denge hâlinde bulunan nötronlara teka-

bül eden tesir kesitleri ortamın temperaturunun mâruz kaldığı değişimlerden müteessir olurlar.

Bu sebeplerden ötürü meselâ bir atom reaktörünün projesini yaparken bunun, sâdece oda sıcaklığında işlediği zamanlar haiz olacağı özelliklerinin tesbiti kâfi değildir. Reaktörün daha yüksek temperaturlarda (güçte) kritik olabilmesini de temin edebilmek için böyle bir temperatur değişiminin doğuracağı reaktiflik farkının da tesbiti lâzımdır ki bunun telâfisine tekabül eden nükleer yakıt mikdarı önceden hesaplanabilsin.

Hemen hemen bütün ılık reaktörler için temperatur ne kadar artarsa reaktifliğin de o kadar azaldığı yâni **ılık reaktörlerin, genel olarak, negatif bir temperatur katsayısını haiz oldukları tesbit edilmiştir.** Buna göre negatif bir temperatur katsayısını haiz bir reaktördeki nötron akısı âniden artarsa, bunun neticesinde açığa çıkacak olan güç dolayısıyla ısınan reaktörün reaktifliği azalacak ve nötron akısı da buna paralel olarak sönecektir. Şu hâlde bir reaktörün negatif bir temperatur katsayısına mâlik olmasının reaktörün, dışarıdan ithâl olunan pozitif reaktifliğe karşı kendi kendinin kontrolunu temin eden mühim bir emniyet unsuru olduğu anlaşılmaktadır.

2. Temperatur Değişimlerinin Makroskopik Özelliklere Etkisi. — Bu bölümde bir ortamdaki nötronların temperaturunun ortamın temperaturuna bağlılığını ve temperatur değişiminden dolayı nötron akımının nasıl müteessir olduğunu inceleyeceğiz. Çoğaltkan ortamların ürettikleri enerjiyle ortamların temperaturları arasındaki bağlılık meselesi ise çok geniş ve kitabımızın gâyesi dışında kalan bir mevzu olduğundan burada bundan hiç bahsetmeyeceğiz.

a. Nötronların Temperaturuyla Ortamın Temperaturu Arasındaki Bağıntı. — 1. Cildin III. dersinde bir ortamdaki nötron topluluğunun T temperaturunun, nötronların haiz oldukları $N(v)$ hız dağılımının maksimumuyla belirlendiğini ifâde etmiştik. Ortamın haiz olduğu θ temperaturu da ortamdaki yavaşlatıcı çekirdeklerin haiz oldukları Maxwell-Boltzmann dağılımının maksimumuna tekabül eden temperatur olarak belirlenir. T ile θ ancak, yavaşlatıcı çekirdekler ortamdaki nötronları yutmuyorlarsa ve göz önüne alınan ortam sonsuzsa biribirlerine eşit olurlar. Aksi takdirde T ile θ biribirlerinden, genel olarak, farklıdırlar.

Nötronların T temperaturuyla yavaşlatıcının θ temperaturu arasındaki bağıntıyı tesis edebilmek için yavaşlatıcı atomların öz hareketleriyle kimyasal bağlarını da göz önünde tutmak lâzımdır. Nötronların yavaşlamaları teorisinden hareket ederek ve yavaşlatıcı atomların kimyasal bağlardan hâlî eşitenerjili atomlar oldukları faraziyesi altında muhtelif müellifler T nötron temperaturu ile θ yavaşlatıcı temperaturunun biribirlerine yaklaşık olarak

$$T = \theta\left[1 + C\frac{\Sigma_a(T)}{\bar{\xi}\Sigma_s}\right] \qquad (V.2a.1)$$

ifâdesiyle bağlı olacağını bulmuşlardır. Burada C yavaşlatıcının atom ağırlığına bağlı bir sâbit olup değeri, eğer

$$0 < \frac{\Sigma_a}{\bar{\xi}\Sigma_s} < 0.2$$

bağıntısı gerçeklenmekteyse, 1.2 dir.

(V. 2a. 1) bağıntısı ancak $\Sigma_a = 0$ ise $T = \theta$ olacağını ve aksi hâlde ise dâima $T > \theta$ olduğunu göstermektedir. Bu netice hemen hemen âşikârdır ; zirâ göz önüne alınan ortamda nötron yutulması varsa nötronların bir kısmı ılık enerjilere erişmeden yutulacaklar ve bunun neticesinde ortamdaki hızlı nötronların sayısı ılık nötronların sayısına nisbetle daha fazla olacaktır ; yâni nötronların hız dağılımının maksimumu, yavaşlatıcı çekirdeklerle muhtemel bir termik dengede haiz olmaları iktizâ eden maksimumun daha sağına (yâni daha yüksek hızlara) kaymış olacaktır.

b. Ortamda Mevcûd Olan Temperatur Gradyentinin Nötron Akımı Üzerine Tesiri. — Eğer göz önüne aldığımız ortamda bir temperatur gradyenti mevcûd ise ve bu, nötronların temperaturunun ortamın temperaturundan farklı sayılmamasını temin edebilecek kadar küçükse bu gradyentin nötron akımı ve dolayısıyla nötron dağılımı üzerinde ne gibi bir etkisi olacağını tesbit etmek istiyoruz.

1. cildin (VI. 1. 8) formülüyle vermiş olduğumuz Fick kanununu göz önüne alacak olursak, v_0 ile ortamın temperaturuna eşit olarak kabul edilen nötron temperaturuna tekabül eden hızı göstererek

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\left\{v_0 N[v_0(\vec{r})]\right\} \qquad (V.2b.1)$$

yazılır. Ortamda bir temperatur gradyenti mevcûd olduğundan T temperaturu ve dolayısıyla buna tekabül eden v_0 hızı $\vec{r}$ ye tâbî olacaktır. Buna göre

$$\vec{J}(\vec{r}) = -Dv_0 \,\overrightarrow{\text{grad}}\, N - DN\frac{dv_0}{dT}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, T \qquad (V.2b.2)$$

olur. Bir taraftan

$$D_0 = D\,v_0$$

vazederek ve diğer taraftan da nötron temperaturunun 1. cildin (III. 1. 2) formülüyle verilmiş olan

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{2kT}$$

ifâdesini göz önünde bulundurursak (V. 2b. 2) ifâdesi

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D_0\,\overrightarrow{\text{grad}}\, N - \frac{D_0 N}{2T}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

$$= -\vec{J}_0(\vec{r}) - \frac{D_0 N}{2T}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, T \qquad (V.2b.3)$$

şekline girer. Böylelikle temperatur gradyenti, göz önüne alınmış olan ortamda,

$$\frac{|\delta\vec{J}|}{|\vec{J}|} = \frac{1}{2}\,\frac{N}{T}\,\frac{|\overrightarrow{\text{grad}}\, T|}{|\overrightarrow{\text{grad}}\, N|} \qquad (V.2b.4)$$

kadar fazladan bir ılık nötron akısının doğmasına sebep olmaktadır. Eğer temperatur gradyenti pozitifse (meselâ ortamı çevreleyen yansıtıcı bu ortamdan daha sıcaksa) çoğaltkan ortamdan dışarıya nötron sızıntısı azalır ve dolayısıyla ortamın reaktifliği artma temâyülü gösterir.

c. **Temperaturun Ortamın Ortalama Yoğunluğuna Tesiri.** — Bir ortamda vukû bulan temperatur değişimlerinin ortamın ortalama yoğunluğu üzerinde müessir olacakları âşikârdır. Ortamın yoğunluğunun değişmesi makroskopik bir olaydır. İlerideki 3. bölümde de temperatur değişimlerinin ortamda doğurdukları mikroskopik olayları inceleyeceğiz.

Şimdi geometrik akıbükümün, ortamın θ temperaturuna ne türlü bağlı olduğunu araştıralım. Meseleyi daha müşahhas kılmak üzere elimizde küresel bir çoğaltkan ortam olduğunu tasarlayalım : $B_g=\pi/R$. a ile ortamın lineer uzama katsayısını gösterecek olursak bir θ_0 temperaturundan başka bir θ temperaturuna geçildiği zaman ortamın θ_0 a tekabül eden R_0 yarıçapı da, ısısal genişlemeden ötürü,

$$R=R_0\,[1+a\,(\theta-\theta_0)\,]$$

değerine erişecektir. Buna göre

$$\frac{dR}{d\theta}=aR_0$$

olur. Diğer taraftan da

$$\frac{dB_g}{d\theta}=-\frac{\pi}{R_0^2}\cdot\frac{dR}{d\theta}=-\frac{a\pi}{R_0} \qquad \text{(V.2c1)}$$

bulunur. a nın çok küçük bir sâbit ve R nin de a ya göre çok büyük bir büyüklük olmasından dolayı, yavaşlatıcıları su veyâ organik sıvı olan çoğaltkan ortamlar hâriç $dB_g/d\theta$ rahatça ihmâl edilebilir.

Şimdi sonlu bir çoğaltkan ortamın haiz olduğu ρ reaktifliğinin temperaturla nasıl değiştiğini inceleyebilmek için ortamın etkin çoğalma katsayısının

$$k_{et}=\frac{k_\infty}{1+M^2B_g^2}$$

ifâdesiyle verildiğini ve reaktifliğin de

$$\rho=\frac{k_{et}-1}{k_{et}}=\frac{k_\infty-1-M^2B_g^2}{k_\infty} \qquad \text{(V.2c.2)}$$

olduğunu bir kere daha hatırlatalım.

Σ_a ve Σ_{tr} sâbit tutulmak şartıyla bu son ifâdeden B_g ye göre kısmî türev alırsak ve kritiklik şartının, yâni

$$1=\frac{k_\infty}{1+M^2B_g^2}$$

bağıntısının câri olduğunu kabul edersek

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial B_g}\right)_{\Sigma_a,\Sigma_{tr}} = -\frac{2B_gM^2}{k_\infty} = -\frac{2(k_\infty - 1)}{k_\infty B_g}$$

yazılır. Parantezin sağ alt kenarındaki Σ_a ve Σ_{tr}, ρ nun B_g ye göre türevinin, bu büyüklüklerin sâbit olduklarını farzetmek sûretiyle alındığına delâlet etmektedirler. Şimdi ρ nun θ ya olan bağlılığını tesis edebilmek için

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)_{\Sigma_a,\Sigma_{tr}} = \frac{\partial\rho}{\partial B_g}\cdot\frac{\partial B_g}{\partial\theta} \qquad \text{(V.2c.3)}$$

yazabiliriz. Hâlbuki (V. 2c. 3) ün sağ yanındaki çarpanların ifâdeleri (V. 2c. 1) ve (V. 2c. 2) tarafından verilmişti. Buna göre Σ_a ve Σ_{tr} un sâbit kalması şartıyla küresel bir çoğaltkan ortamda vuku bulan temperatur değişimlerinde ortamın reaktifliğinin

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)_{\Sigma_a,\Sigma_{tr}} = \frac{\partial\rho}{\partial B_g}\cdot\frac{\partial B_g}{\partial\theta} = +\frac{2(k_\infty - 1)}{k_\infty B_g}\frac{a\pi}{R} = \frac{2(k_\infty - 1)}{k_\infty}a \qquad \text{(V.2c.4)}$$

şeklinde değiştiği tesbit edilmiş olur.

3. Temperatur Değişimlerinin Mikroskopik Özelliklere Tesiri. — Çoğaltkan bir ortamın mikroskopik özellikleri ile ortamı karakterize eden tesir kesitlerine bağlı büyüklükleri kastetmekteyiz. Biz bu bölümde temperatur değişimlerinin ortamın mikroskopik özellikleri üzerinde doğrudan doğruya haiz oldukları tesirleri incelemeye gayret edeceğiz.

a. Tesir Kesitlerinin Temperatur ve Yoğunluğa Bağlılıkları. — Önce nötron yutma tesir kesidinin ılık bölgede ortamın temperaturuna nasıl tâbî olduğunu araştıralım. σ_a eğer $1/v$ kanununa uygun bir tarzda değişiyorsa v nin ortamdaki nötron gazına tekabül eden temperaturun kare köküyle orantılı olması dolayısıyla, ortamın θ temperaturunun nötron temperaturuyla çakışması hâlinde, bir θ_0 temperaturuna tekabül eden $\sigma_a(\theta_0)$ dan θ ya tekabül eden $\sigma_a(\theta)$ ya geçişin

$$\sigma_a(\theta_0) \backsim \frac{1}{\sqrt{\theta_0}}, \quad \sigma_a(\theta) \backsim \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

olması hasebiyle

$$\boxed{\sigma_a(\theta_0) = \sigma_a(\theta_0)\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}} = \sigma_a(\theta_0)\Lambda^{-\frac{1}{2}}} \qquad (V.3a.1)$$

şeklinde olacağı âşikârdır.

Makroskopik nötron yutma tesir kesidine gelince bunun hem temperatur değişimine ve hem de temperatur değişiminin doğurduğu yoğunluk değişimine nasıl tâbî olduğunu tesbit etmek için bir taraftan Σ_a nın târifinden, diğer taraftan da (V. 3. 1) den faydalanılır ve

$$\Sigma_a(\theta) = \sigma_a(\theta)\cdot N = \sigma_a(\theta_0)\Lambda^{-\frac{1}{2}}\frac{N}{N_0}N_0 =$$

$$= \Sigma_a(\theta_0)\Lambda^{-\frac{1}{2}}\frac{N}{N_0} \qquad (V.3a.2)$$

bulunur. Öte yandan eğer **N** ile AVOGADRO sayısını M ile ortamdaki çekirdeklerin atom ağırlıklarını ve d ile de ortamın yoğunluğunu gösterirsek

$$N_0 = \frac{\mathbf{N}}{M}d_0 \qquad \text{ve} \qquad N = \frac{\mathbf{N}}{M}d$$

olduğundan (V. 3a. 2) ifâdesi,

$$\frac{d}{d_0} = \Gamma$$

vazederek,

$$\boxed{\Sigma_a(\theta) = [\Gamma\Lambda^{-\frac{1}{2}}]\,\Sigma_a(\theta_0)} \qquad (V.3a.3)$$

şeklini alır.

Birinci cildin III. dersinde σ_s elâstik saçılma tesir kesidinin ve dolayısıyla da $\sigma_{tr} = \sigma_s/1-\mu_0$ transport tesir kesidinin

$$\sigma_s \backsim \frac{1}{E^n} \quad \text{ve} \quad \sigma_{tr} \backsim \frac{1}{E^n} \tag{V.3a.4}$$

şeklinde olduklarından bahsetmiştik. Diğer taraftan $E^n \sim v^{2n} \sim T^n$ olmasından ötürü

$$\sigma_s \backsim \frac{1}{T^n} \quad \text{ve} \quad \sigma_{tr} \backsim \frac{1}{T^n} \tag{V.3a.5}$$

yazılabilir. Eğer ortamın muayyen bir θ_0 temperaturuna tekabül eden $\sigma_s(\theta_0)$ veyâ $\sigma_{tr}(\theta_0)$ ı biliyorsak bir $\theta \neq \theta_0$ temperaturuna tekabül eden tesir kesitlerini de bulabiliriz. Filhakika (V. 3a. 5) ifâdelerine dayanarak kolaylıkla

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_s(\theta) &= \Lambda^{-n}\sigma_s(\theta_0) \\ \sigma_{tr}(\theta) &= \Lambda^{-n}\sigma_{tr}(\theta_0) \end{aligned}} \tag{V.3a.6}$$

ifâdeleri elde edilir. $\Sigma_a(\theta)$ için yapmış olduğumuza benzer bir muhakemeyle makroskopik elâstik saçılma ve transport tesir kesitleri için de

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma_s(\theta) &= \Gamma\Lambda^{-n}\Sigma_s(\theta_0) \\ \Sigma_{tr}(\theta) &= \Gamma\Lambda^{-n}\Sigma_{tr}(\theta_0) \end{aligned}} \tag{V.3a.7}$$

olduğu görülür.

b. Difüzyon Katsayısının Temperatur ve Yoğunluğa Bağlılığı. — Artık şimdi D difüzyon katsayısıyla L difüzyon uzunluğunun temperatur ve yoğunluk değişimlerinin tesiri altında nasıl değiştiklerini tesbit edebiliriz.

D difüzyon katsayısını birinci cildimizin VI. dersinde

$$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}$$

olarak târif etmiştik. Bu târif ile (V. 3a. 3) ile (V. 3a. 7) ye binâen

$$D(\theta) = \frac{\Sigma_s(\theta)}{3\Sigma_t^2(\theta)} = \frac{\Sigma_s(\theta)}{3[\Sigma_a(\theta) + \Sigma_s(\theta)]^2} =$$

$$= \frac{\Gamma\Lambda^{-n}\Sigma_s(\theta_0)}{3[\Gamma\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Sigma_a(\theta_0) + \Gamma\Lambda^{-n}\Sigma_s(\theta_0)]^2} \qquad \text{(V.3b.1)}$$

bulunur. $\Sigma_s \gg \Sigma_a$ olması hâlinde de (V. 3b. 1) ifâdesi yerine

$$\boxed{D(\theta) = \frac{\Lambda^{-n}}{\Gamma} D(\theta_0)} \qquad \text{(V.3b.2)}$$

bağıntısı elde edilir.

c. Difüzyon Uzunluğunun Temperatur ve Yoğunluğa Bağlılığı. — Difüzyon uzunluğunun karesi târif olarak

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$$

bağıntısıyla verilmektedir. Buna, 3a ve 3b bölümlerinde elde ettiğimiz sonuçları tatbik edecek olursak

$$L^2(\theta) = \frac{\Lambda^{-n+\frac{1}{2}}}{3} \frac{\frac{\Sigma_s(\theta_0)}{\Sigma_a(\theta_0)}}{[\Gamma\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Sigma_a(\theta_0) + \Gamma\Lambda^{-n}\Sigma_s(\theta_0)]^2} \qquad \text{(V.3c.1)}$$

bulunur, ve gene $\Sigma_s \gg \Sigma_a$ olduğu düşünülecek olursa D yi (V. 3b. 2) ile verilen şekliyle almamız icâbeder ; ve (3. 3a. 3) ü de göz önünde tutarak

$$\boxed{L^2(\theta) = \frac{\Lambda^{-n+\frac{1}{2}}}{\Gamma^2} L^2(\theta_0)} \qquad \text{(V.3c.2)}$$

ifâdesi elde edilir.

d. Fermi Çağının Temperatur ve Yoğunluğa Bağlılığı. — Gene ortamdaki atomlarla nötronların termik dengede bulunduklarını yâni her ikisine de tekabül eden temperaturların biribirlerine eşit olduklarını farzedelim. Bu temperatur θ_0 olsun. Buna tekabül eden $\tau(\theta_0)$ Fermi çağının, temperatur θ ya tahvil olunca ne gibi bir değer alacağını araştırmak istiyoruz. Bunun için de θ temperaturuna tekabül eden $\tau(\theta)$ nötron çağının şu şekilde yazılabileceğine dikkati çekelim :

$$\tau(\theta) = \tau(u) = \int_0^u \frac{D(u')}{\xi\Sigma_t(u')}\, du' = \int_0^u \frac{du'}{3\xi\Sigma_s(u')\Sigma_t(u')} =$$

$$= \int_0^{u_0} \frac{du'}{3\xi\Sigma_s(u')\Sigma_t(u')} - \int_n^{u_0} \frac{du'}{3\xi\Sigma_s(u')\Sigma_t(u')}\,. \qquad \text{(V.3d.1)}$$

Diğer taraftan, θ_0 temperaturuna tekabül eden enerjiyi E_0 ve letarjiyi de u_0 ile göstererek

$$\Lambda = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{E}{E_0} = \exp[-(u-u_0)] \qquad \text{(V.3d.2)}$$

olur.

$\Sigma_s^0(u)$ ve $\Sigma_t^0(u)$ ile θ_0 temperaturunda bulunan ortamın u letarjisini haiz nötronlar için makroskopik tesir kesitlerini gösterirsek, 3a bölümüne ve (V. 3d. 2) ifâdesine binâen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_s(u) &= \Gamma\Sigma_s^\circ(u) = \Gamma\Sigma_s^\circ(u_0)\exp[-n(u-u_0)] \\ \Sigma_t(u) &= \Gamma\Sigma_t^\circ(u) = \Gamma\Sigma_t^\circ(u_0)\exp\left[-\frac{1}{2}(u-u_0)\right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.3d.3)}$$

yazılabilir. Buna göre (V. 3d. 1) ifâdesi artık

$$\tau(\theta) = \frac{\tau(\theta_0)}{\Gamma^2} - \frac{\exp\left[-u_0\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{3\xi\Sigma_s^\circ(u_0)\Sigma_t^\circ(u_0)} \int_u^{u_0} \exp\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u'\right] du'$$

yâni

$$\boxed{\tau(\theta) = \frac{\tau(\theta_0)}{\Gamma^2} - \frac{\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{3\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\Sigma_s^\circ(u_0)\,\Sigma_t^\circ(u_0)}} \tag{V.3d.4}$$

şekline girer.

e. Çoğalma Katsayısının Temperatura Bağlılığı. — Ortamdaki temperatur değişimlerinden müteessir olacak olan en karakteristik büyüklük de ortamın

$$k_{et} = \frac{k_\infty}{1 + M^2B_g^2}$$

ile verilen etkin çoğalma katsayısı olacaktır. Ortamın muayyen bir θ_0 temperaturu için etkin çoğalma katsayısının haiz olduğu değeri $k_{et}(\theta_0)$ ile gösterecek olursak, temperatur değişimlerinin k_{et} üzerinde ancak birinci mertebeden bir değişim icrâ edeceklerini kabul etmek sûretiyle, ortamın bir θ temperaturuna tekabül eden $k_{et}(\theta)$ için

$$k_{et}(\theta) = k_{et}(\theta_0)\,[1 + \chi\,(\theta - \theta_0)] \tag{V. 3e. 1}$$

yazılır. Buradaki χ büyüklüğüne etkin *çoğalma çarpanının temperatur katsayısı* adı verilir. Bu ifâdeye göre χ yi, genel olarak

$$\chi = \left[\frac{1}{k_{et}(\theta)}\,\frac{dk_{et}(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=\theta_0} \tag{V.3e.2}$$

bağıntısıyla târif etmek mümkündür.

Şimdi reaktifliğin

$$\rho = \frac{k_{et} - 1}{k_{et}} = 1 - \frac{1}{k_{et}}$$

ile belirtilmiş târifini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = \frac{1}{k_{et}^2}\,\frac{\partial k_{et}}{\partial\theta} = \frac{1}{k_{et}}\,\chi \tag{V.3e.3}$$

olduğu görülür. $\partial\rho/\partial\theta$ ya *reaktifliğin temperatur katsayısı* adı verilir.

Şimdi k_{et} in ifâdesini göz önünde tutarak χ nin değerini hesaplarsak

$$\chi = \frac{1}{k_\infty}\frac{dk_\infty}{d\theta} - \frac{1}{1+M^2B_g^2}\frac{d(M^2B_g^2)}{d\theta} = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{d\theta} + \frac{1}{f}\frac{df}{d\theta} +$$

$$+\frac{1}{p}\frac{dp}{d\theta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\theta} - \frac{(k_\infty - k_{et})}{k_\infty}\left[\frac{1}{M^2}\frac{dM^2}{d\theta} + \frac{1}{B_g^2}\frac{dB_g^2}{d\theta}\right] \qquad \text{(V.3e.4)}$$

bulunur.

B_g^2 geometrik akıbükümünün θ ya göre değişimi ancak, su veyâ organik bir sıvıyı yavaşlatıcı olarak ihtivâ eden çoğaltkan ortamlar için ihmâl edilemeyecek bir değeri haizdir. Bu itibarla diğer tiplerdeki çoğaltkan ortamlar için $dB_g^2/d\theta$ sıfır kabul edilebilir.

$M^2 = L^2 + \tau$ nun θ ya göre değişimi ise (V. 3c. 2) ve (V. 3d. 4) vâsıtasıyla tâyin edilebilir. Bundan başka ε un θ ya göre değişiminin de kâbil-i ihmâl olduğu hesaplanmıştır.

χ nin birinci teriminin açık hesabı için nükleer yakıtın U^{235} ve U^{238} den müteşekkil olduğunu kabul edelim. Buna göre ve T ile nötronların haiz oldukları temperaturu göstererek

$$\eta = \frac{\nu_{25}}{1 + \dfrac{\sigma_{c,25}(T)}{\sigma_{f,25}(T)} + \dfrac{N_{28}}{N_{25}}\dfrac{\sigma_{a,28}(T)}{\sigma_{f,25}(T)}} \qquad \text{(V3e.5)}$$

yazılabilir ; kolayca anlaşılacağı vechile burada da 25 indisi U^{235} e ve 28 indisi de U^{238} e tekabül etmektedir. Buna göre (V. 3e. 5) den

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{d\theta} = -\frac{\eta}{\nu_{25}}\left[\frac{d}{dT}\left(\frac{\sigma_{c,25}}{\sigma_{f,25}}\right) + \frac{N_{28}}{N_{25}}\frac{d}{dT}\left(\frac{\sigma_{a,28}}{\sigma_{f,25}}\right)\right]\frac{dT}{d\theta} \qquad \text{(V.3e.6)}$$

bulunur. Burada ν_{25} in T ile değişmediği farzedilmiştir. Diğer taraftan $\sigma_{c,25}/\sigma_{f,25} = \alpha_{25}$ oranı da büyük bir enerji aralığı boyunca sâbit kalmaktadır. Bu takdirde $d\alpha_{25}/dT$ terimi ihmâl edilebilir. Buna mukabil nükleer yakıt U^{235} bakımından yüksek zenginleştirilmiş bir yakıtsa α_{25} in T ye göre değişimini artık hesaba katmak lâzımdır.

f ılık faydalanma katsayısının θ ya göre değişimini incelemek için f nin târifini göz önünde tutarsak böylece

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{d}{dT}\left[\frac{\Sigma_{a,f}}{\Sigma_{a,f}+\Sigma_{a,d}}\right]\frac{dT}{d\theta}$$

$$= f(1-f)\left[\frac{1}{\Sigma_{a,f}}\frac{d\Sigma_{a,f}}{dT} - \frac{1}{\Sigma_{a,d}}\frac{d\Sigma_{a,d}}{dT}\right]\frac{dT}{d\theta} \qquad (V.3e.7)$$

bulunur. Eğer nötronlar ortamla termik denge cıvârındaysalar $T \cong \theta$ olur. Bu takdirde

$$\frac{d\Sigma}{dT} = \frac{d\Sigma}{d\theta} = \frac{d(\sigma N)}{d\theta} = N\frac{d\sigma}{d\theta} + \sigma\frac{dN}{d\theta} \qquad (V.3e.8)$$

yazılabilir. Tesir kesitlerinin $1/v$ kanununa uymakta oldukları kabul edilecek olursa

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -\frac{\sigma}{2\theta} \qquad (V.3e.9)$$

olduğunu 1. cildin III. dersinden bilmekteyiz. Öte taraftan **n** ile reaktördeki muayyen bir cins maddenin çekirdeklerinin toplam sayısını ve L ile de, reaktörün hacmı L^3 şeklinde ifâde edilebilecek tarzda seçilmiş karakteristik bir büyüklüğü gösterecek olursak bu cins çekirdeklerin yoğunluğunu gösteren N için

$$N = \frac{n}{L^3}$$

yazabiliriz. Şu hâlde :

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\theta} = -\frac{3}{L}\frac{dL}{d\theta} \qquad (V.3e.10)$$

yazılabilecektir. Hâlbuki $\frac{1}{L}\frac{dL}{d\theta}$ ifâdesi göz önüne alınan maddeye tekabül eden a ısısal genişleme katsayısının târifinden başka bir şey değildir. Bu keyfiyeti de nazar-ı itibara alıp (V. 3e. 9) ve (V. 3e. 10) dan faydalanarak (V. 3e. 8) için

$$\frac{d\Sigma}{d\theta} = -\left(3a + \frac{1}{2\theta}\right) \qquad (V.3e.11)$$

bulunur. Buna binâen de (V. 3e. 7) ifâdesi

$$\boxed{\frac{1}{f}\frac{df}{d\theta} = 3(1 - f)(a_d - a_f)} \tag{V.3e.12}$$

şekline girer. Burada a_f ile nükleer yakıta ve a_d ile de nükleer yakıttan gayrı maddelere tekabül eden lineer ısısal uzama katsayısını göstermekteyiz.

Eğer çoğaltkan ortam sâdece katı maddelerden müteşekkilse bunlara tekabül eden lineer ısısal uzama katsayıları $10^{-6}/°C$ mertebesinde olduğundan $df/d\theta$ kâbil-i ihmâl addolunabilir. Fakat bunun, hatırı sayılır mikdarda su veyâ organik sıvı ihtivâ eden çoğaltkan ortamlar için câri olmadığı âşikârdır.

Şimdi de son olarak p rezonansa tutulmama ihtimâline tekabül eden temperatur katsayısının hesabına geliyoruz. Maalesef p nin T ye bağlılığı k_∞ un diğer kısımlarının T ye bağlılıkları kadar basit değildir. Bizim gâyemiz p nin T ye bağlılığına tesir eden âmiller hakkında ancak bir fikir verebilmektir. Bu âmilleri üç kısma ayırabiliriz :

1) Temperaturun doğurduğu yoğunluk değişimlerinin p üzerindeki etkileri,

2) Tesir kesitlerinin $1/v$ kanununa uyan kısımlarının temperatura bağlılıkları,

3) Tesir kesitlerinin rezonansları üzerindeki temperatur tesirleri.

Tesir kesitlerinin rezonansları üzerinde temperaturun icrâ ettiği tesire 1. cildin III. dersinin 5. bölümünde temas etmiştik. Burada bunun üzerinde daha fazla duracak değiliz. Zâten bunun tam bir şekilde incelenmesi kitabımızın gâyesi dışında kaldığı gibi bu olayın çoğaltkan ortamların temperatur katsayısı üzerindeki tesiri de ancak tâlî bir tesirdir.

Şimdi rezonanslara tutulmama ihtimâlinin 1. cildin (XII. 8. 7b) ile verilmiş olan ifâdesini $E = E_{th}$ için yazalım :

$$p(E_0, E_{th}) = \exp\left[-\int_{E_{th}}^{E_0} \frac{\Sigma_a(E)}{\xi[\Sigma_a(E) + \Sigma_s(E)]}\frac{dE}{E}\right] \tag{V.3e.13}$$

Bu ifâdedeki integrale I diyelim ; fisyonluk elementten gayrı maddelere tekabül eden büyüklükleri de (′) işâretiyle göstererek I yi daha açık bir şekilde şu türlü yazabiliriz :

$$I = \int_{E_{t1}}^{E_0} \frac{N\sigma_a(E) + N'\sigma_a'(E)}{\xi[N\sigma_a(E) + N'\sigma_a'(E) + N\sigma_s(E) + N'\sigma_s'(E)]} \frac{dE}{E} \qquad \text{(V.3e.14)}$$

Şimdi nükleer yakıtın elâstik saçılma tesir kesidinin, biri enerjiye bağlı olmayan *potansiyel saçılma* ve diğeri de *rezonans saçılması* diye

$$\sigma_s(E) = \sigma_{ps} + \sigma_{rs}(E) \qquad \text{(V. 3e. 15)}$$

şeklinde iki kısma ayrılabileceğine işâret edelim ; bir taraftan nükleer yakıttan gayrı maddeler için câri olan elâstik saçılmanın sâdece potansiyel saçılma olduğunu, diğer taraftan da $\sigma_a'(E)$ nin ihmâl edilebilecek kadar küçük olduğunu kabul ederek (V. 3e. 14) ü

$$I = \int_{E_{t1}}^{E_0} \frac{\sigma_a(E)}{\xi[\sigma_a(E) + \sigma_{ps} + \sigma_{rs}(E) + \frac{N'}{N}\sigma_s']} \frac{dE}{E} \qquad \text{(V.3e.16)}$$

veyâhut da

$$\bar{\sigma}_{ps} = \sigma_{ps} + \frac{N'}{N}\sigma_s' \qquad \text{(V.3e.17)}$$

vazederek

$$I = \frac{1}{\xi\,\bar{\sigma}_{ps}} \int_{E_{t1}}^{E_0} \frac{\sigma_a(E)}{1 + \frac{1}{\bar{\sigma}_{ps}}[\sigma_a(E) + \sigma_{rs}(E)]} \frac{dE}{E} \qquad \text{(V.3e.18)}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu ifâdeyi hesaplayabilmek için (E_{t1}, E_0) enerji aralığını E_{t1} dan rezonansların başladığı yere ve nötron yutma tesir kesidinin $1/v$ kanununa tâbî olduğu kısım ve bir de rezonansların başladığı yerden E_0 a kadar olan kısım diye ikiye ayırabiliriz. E_1 ile ilk rezonansın başladığı yere tekabül eden enerjiyi gösterir ve bir de (E_{i1}, E_1) aralığında $\sigma_a(E) = c/v$ ve $\sigma_{rs}(E) = 0$ olduğunu göz önünde tutarsak

$$I = \frac{1}{\xi \bar{\sigma}_{ps}} (I_1 + I_2) =$$

$$= \frac{1}{\xi \bar{\sigma}_{ps}} \int_{E_{i1}}^{E_1} \frac{\frac{c}{v}}{1 + \frac{c}{v\bar{\sigma}_{ps}}} \frac{dE}{E} + \int_{E_1}^{E_0} \frac{\sigma_a(E)}{1 + \frac{1}{\bar{\sigma}_{ps}}[\sigma_a(E) + \sigma_{rs}(E)]} \frac{dE}{E} \qquad \text{(V.3e.19)}$$

yazılabilir. Buna binâen p ye tekabül eden temperatur katsayısı

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{d\theta} = \frac{1}{p}\frac{dp}{dT}\frac{dT}{d\theta} = -\frac{d}{dT}\left[\frac{1}{\xi \bar{\sigma}_{ps}}(I_1 + I_2)\right]\frac{dT}{d\theta} =$$

$$= \left[\frac{1}{\bar{\sigma}_{ps}}\frac{d\bar{\sigma}_{ps}}{dT} - \frac{1}{\xi \bar{\sigma}_{ps}}\frac{d(I_1 + I_2)}{dT}\right]\frac{dT}{d\theta} \qquad \text{(V.3e.20)}$$

olur. Burada dI_2/dT, temperatur katsayısının rezonans bölgesiyle ilgili kısmıdır. I_2 nin temperatur değişimlerine karşı pek az hassas olduğu gösterilmiştir. Buna binâen biz de burada $dI_2/dT = 0$ kabul edeceğiz.

Bir taraftan $\bar{\sigma}_{ps}$ nin (V. 3e. 17) ile verilen târifiyle nükleer yoğunluğun (V. 3e. 10) deki ifâdesinden faydalanarak, diğer taraftan da

$$I = \text{Log}\, p$$

olduğunu göz önünde tutarak

$$\frac{1}{\bar{\sigma}_{ps}}\frac{d\bar{\sigma}_{ps}}{d\theta} = \frac{3\Sigma_s'}{\bar{\sigma}_{ps} N}(a_d - a_f)\,\text{Log}\, p \qquad \text{(V.3e.21)}$$

olduğu hesaplanır.

(V. 3e. 19) un birinci teriminkedki integrasyon parametresini E den v ye dönüştürelim ; böylece

$$I_1 = \int_{E_{i1}}^{E_1} \frac{\frac{c}{v}}{1+\frac{c}{v\overline{\sigma}_{ps}}} \frac{dE}{E} = \int_{v_{i1}}^{v_1} \frac{dv}{v\left(v+\frac{c}{\overline{\sigma}_{ps}}\right)} =$$

$$= 2\overline{\sigma}_{ps}\left[\text{Log}\left(1+\frac{c}{\overline{\sigma}_{ps}v_{i1}}\right) - \text{Log}\left(1+\frac{c}{\overline{\sigma}_{ps}v_1}\right)\right] \qquad \text{(V.3e.22)}$$

olur. v_1, genel olarak $c/\overline{\sigma}_{ps}v_1$ in 1 yanında ihmâl edilebilmesini sağlayacak kadar büyüktür. Bunu göz önünde tutar ve bir de (V. 3e. 22) ifâdesini seriye açarsak bilhassa nükleer yakıt kontsantrasyonunun çok düşük olduğu hâller için yâni $\overline{\sigma}_{ps}$ nin $\sigma_a(v_{i1})/\overline{\sigma}_{ps}$ yi çok küçük kıldığı değerleri için bu açılımdaki birinci dereceden büyük terimleri ihmâl edebiliriz.

Bu takdirde de

$$I_1 \cong 2\,\sigma_a(v_{i1}) \qquad \text{(V. 3e. 23)}$$

olur.

Diğer taraftan ılık nötronların en muhtemel hızı olan v_0 a tekabül eden yutulma tesir kesidi

$$\sigma_a(v_0) = \frac{c}{v_0}$$

olduğundan, bunu T cinsinden yazarsak

$$\sigma_a(v_0) = \sigma_a(kT) = \frac{K}{\sqrt{T}}$$

olur. Öte taraftan muayyen bir T* referans temperaturu için de

$$\sigma_a(kT^*) = \frac{K}{\sqrt{T^*}}$$

dır. Buna göre K sâbitinin değeri için de

$$K = \sigma_a(kT^*)\sqrt{T^*}$$

yazabiliriz. Şu hâlde

$$\sigma_a(v_0) = \sigma_a(kT) = \sigma_a(kT^*)\sqrt{\frac{T^*}{T}} \qquad \text{(V.3e.24)}$$

olur. Diğer taraftan ortamdaki ılık nötronlara tekabül eden $\sigma_a(v_{ıl})$ ılık nötronları yutma tesir kesidi 1. cildin (III. 3. 6) formülüyle verilmiş olan $<\sigma_a>$ ortalama nötron yutma tesir kesidine eşittir. Buna göre :

$$\sigma_a(v_{ıl}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sigma_a(v_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sigma_a(kT) = \sigma_a(kT^*)\sqrt{\frac{\pi T^*}{4T}} \qquad (V.3e.25)$$

olur. Şu hâlde

$$\frac{dI_1}{dT} = -\frac{\sigma_a(kT^*)}{T}\sqrt{\frac{\pi T^*}{4T}} \qquad (V.3e.26)$$

olur. Böylece (V. 3e. 21) ve (V. 3e. 26) ifâdeleri vâsıtasıyla rezonansa tutulmama ihtimâline tekabül eden temperatur katsayısının (V. 3e. 20) ye binâen

$$\boxed{\frac{1}{p}\frac{dp}{d\theta} = \frac{3\Sigma_a'}{\bar{\sigma}_{ps}N}(a_d - a_f)\,\mathrm{Log}\,p + \frac{\sigma_a(kT^*)}{\xi\,\bar{\sigma}_{ps}T}\sqrt{\frac{\pi T^*}{4T}}} \qquad (V.3e.27)$$

ifâdesiyle belirleneceği anlaşılmış olur. Bu formülden de anlaşılacağı vechile düşük nükleer yakıt konsantrasyonunu haiz homogen bir çoğaltkan ortamın rezonansa tutulmama ihtimâline tekabül eden temperatur katsayısı, yalnız nükleer yakıtın tesir kesitlerine bağlılığı göz önünde tutulacak olursa, daima pozitif kalmaktadır.

ALIŞTIRMALAR :

1. Çoğaltkan bir ortamın θ temperaturu değiştiği zaman yoğunluğunun da temperatura bağlı olarak değiştiğini fakat bu değişimlerin ortamın boyutlarına tesir etmediğini farzederek ortamın ρ reaktifliğinin θ ya göre değişimini, d nin θ ya göre değişiminin fonksiyonu olarak veren formülü tesis ediniz.

2. Yukarıdaki problemin şartları câri olmak üzere bir ortamın ρ reaktifliğinin θ ya göre değişimini ortamdaki maddelere tekabül eden α lineer katsayısıyla orantılı olduğunu gösteriniz ve bulduğunuz sonucu açıklayınız.

3. İçinde bulundukları ortamla termik dengede oldukları farzedilen *ılık nötronlar* için ortamın temperaturu θ_0 dan θ ya dönüştüğünde $\tau(\theta)$ nötron çağının $\tau(\theta_0)$ a, pek büyük bir yaklaşıklıkla nasıl bağlı olacağını gösteriniz.

VI. DERS

Reaktör Kinetiğine Giriş

Reaktör kinetiğinin gâyesi - Reaktörlerin ateşlenmesi - Nötron akısı için karşılıklık (resiprosite) teoremi - Gecikmiş nötronların bir kaynak terimi olarak difüzyon denklemindeki ifâdeleri - Nordheim denklemi - Reaktörün kararlı ve geçici peryotları - Gecikmiş nötron doğuran ana - çekirdeklerin tâbî oldukları denklemler - Reaktiflik birimleri - Tek bir gecikmiş nötron grubu hâli - Negatif reaktiflikler hâli - Küçük reaktiflikler hâli - Büyük reaktiflikler hâli - Reaktifliğin zamana göre lineer değişmesi hâli - Transfer fonksiyonları - Reaktör dengesizliklerinin transfer fonksiyonları vâsıtasıyla belirlenmesi - Reaktör kinetiğinin ters problemi.

1. Reaktör Kinetiğinin Gâyesi. — Reaktör kinetiği, en geniş anlamıyla, çoğaltkan ortamlardaki nötron akılarının muhtelif şartlar altında zamana bağlı dağılımlarını matematik olarak inceleyen bahistir. Biz şimdiye kadar kitabımızın birinci cildinde

(a) sonsuz bir çoğaltkan ortamdaki *ânî nötronların* (Bk. 1. cild, IV. ders), ve

(b) sonlu bir çoğaltkan ortamdaki *ânî nötronların* (Bk. 1. cild, IX. ders)

zamana bağlı dağılımlarını inceledik. Bu derste ise çoğaltkan ortamların ateşlenmesi neticesinde teessüs eden nötron akılarının zamana bağlılığını ve gecikmiş nötronların ortamdaki nötron bilânçosuna tesirlerini inceleyeceğiz. Bu son bahis, reaktörlerdeki reaktifliğin belirli bir program uyarınca değiştirilmesi tahtında, nötron akılarının zamana bağlı olarak nasıl tekâmül ettiklerini bazı müşahhas misâllerle müşahede edebilmemizi temin edecektir.

Reaktör kinetiği genel olarak iki problem ihtivâ eder. Bunlardan birincisi :

(a) reaktöre muayyen bir reaktiflik ithâl edildiğinde nötron yoğunluğunun (akısının, veyâ reaktörün gücünün) zamana bağlı olarak nasıl bir gelişme tâkibedeceği, ikincisi de :

(b) nötron yoğunluğunun (akısının, veyâ reaktörün gücünün) zamana bağlı muayyen bir değişimini sağlamak için gerekli olan reaktiflik değişimi programının tesbiti problemidir.

Birincisine nisbetle çözümü daha basit olan ve «Reaktör Kinetiğinin Ters Problemi» denen bu ikinci meseleye dersimizin son bölümünde temas edeceğiz.

Birinci cildin IV. dersinde sonsuz bir ortamdaki ânî nötronların zamana bağlı dağılımlarını incelerken nötron akısının

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, 0) \cdot \exp\left(\frac{\delta k}{l^*} t\right) \qquad \text{(VI.1.1)}$$

ifâdesiyle belirlendiğini görmüş ve ânî nötronların l^* ortalama ömürlerinin, göz önüne alınan çoğaltkan ortamın nükleer vasıflarına göre, 10^{-9} ilâ 10^{-3} saniye mertebelerinde olmasından ötürü, ortamdaki nötron akısının (δk nın pozitif veyâ negatif olmasına göre) $e=2.71828$ misli artmasını veyâ eksilmesini intâceden, ortamın

$$T = \frac{l^*}{\delta k} \qquad \text{(VI.1.2)}$$

peryodunun fevkalâde küçük bir değer aldığını müşahede etmiştik. Bu sebepten ötürü eğer ortamdaki bütün nötronlar ânî nötronlar olsaydılar sisteme ânî olarak bir reaktiflik fazlası ithâli hâlinde, daha kontrol mekanizmasını harekete geçirmeye vakit bulamadan, nötron akısı ve dolayısıyla açığa çıkan güç sistemin infilâkini ve binnetice fevkalâde yüksek dozdaki radyoaktif maddelerin tehlikeli bir şekilde cıvara dağılmasını intâcedecekti. Fakat fisyon ürünlerinin parçalanmaları esnâsında fisyon olayına nisbetle muayyen bir gecikmeyle açığa çıkan bir kısım nötronların bulunması, ortamdaki serbest bütün nötronların ortalama ömürlerinin 0.1 saniye mertebesine yükselmesini ve dolayısıyla da T peryodunun, nötron akısının artışını standart kontrol sistemi vâsıtasıyla zabt-ü rapt altına alınmasını mümkün kılacak kadar büyük bir değere sâhip olmasını temin etmektedir (Bk. 1. cild, IV. ders, 4. kısım).

Reaktör kinetiği bakımından, kendi kendine fisyonlardan doğan nötronların ve bir de reaktörlerdeki döteryum ve berilyum gibi bazı çekirdeklerin, girgin γ ışınlarının tesirleri altında mârûz kaldıkları transmütasyonlar dolayısıyla açığa çıkan *fotonötronların* mevcûdiyetleri de zikredilebilirse de birinci olayın kâbil-i ihmâl olması ve ikincisinin de probleme lineer olmayan terimlerin ithâlini intâcetmesi dolayısıyla derslerimizde bunlardan daha fazla söz etmeyeceğiz.

2. Reaktörün Ateşlenmesi. — Bâkir yâni içinde hâl-i hazırda hiçbir fisyon reaksiyonu vuku bulmayan bir çoğaltkan ortam göz önüne alalım. Bu bâkir ortamın muayyen bir veyâ birkaç noktasına belirli bir ânda, meselâ $t=0$ ânında muhtelif şiddetlerde nötron hüzmeleri ithâl ederek ortamda zincirleme fisyon reaksiyonlarının zuhuruna sebep olmaya «*reaktörün ateşlenmesi*» adı verilir.

Göz önüne alınan reaktör kritik olarak inşâ edilmişse, ateşleme neticesinde teessüs eden nötron akısının kararlı bir dağılımı, alt - kritikse sönen bir dağılımı ve üst - kritikse gitgide ıraksaklaşan bir dağılımı haiz olacağı bedihîdir.

Biz bu ateşleme problemini incelerken en genel hâli göz önünde tutabilmek için eşitenerjili nötronların sürekli yavaşlamaları modeline dayanan zamana bağlı difüzyon denkleminden hareket edeceğiz :

$$D\nabla^2\phi(\vec{r},t) - \Sigma_a\phi(\vec{r},t) + k_\infty \exp(-B_g^2\tau)\Sigma_a\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{(VI.2.1)}$$

Eğer ortam kritikse $B_m^2=B_g^2$, ve

$$1 = \frac{k_\infty \cdot \exp(-B^2_m\tau)}{1+L^2B^2_m} \qquad \text{(VI.2.2)}$$

bağıntıları câri olur ve buradaki B_g^2 geometrik akıbükümü de mâlûm olduğu üzere

$$\nabla^2\phi(\vec{r},t) + B^2\phi(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{(VI. 2. 3)}$$

denkleminin en küçük özdeğeri ile târif olunmaktadır.

(VI. 2. 1) denklemini çözebilmek için başlangıç şartlarıyla sınır şartlarını tâyin etmek lâzımdır.

$t=0$ ânında ortama nötronlar ithâl ettiğimizden $\phi(\vec{r},0)$ ortamın ateşlenmesi ânında ithâl edildikleri noktalardaki nötron akısını gösterecektir. Eğer aynı $t=0$ ânında ortamın $\vec{r}_m$ $(m=1,\ldots,M)$ yervektörlerini haiz M muhtelif noktasına η_m şiddetinde eşitenerjili nötron hüzmeleri ithâl edecek olursak DİRAC'ın delta fonksiyonları vâsıtasıyla $\phi(\vec{r}, 0)$ ın

$$\phi(\vec{r}, 0) = v \sum_{m=1}^{M} \eta_m \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_m) \tag{VI. 2. 4}$$

şeklinde ifâde olunabileceği âşikârdır.

Öte yandan $\phi(\vec{r}, t)$ nötron akısının da $\vec{r}_u$ uzatılmış sınırında sıfır olması lâzımdır :

$$\phi(\vec{r}_u, t) = 0\,. \tag{VI. 2. 5}$$

Şimdi $\chi_k(\vec{r})$ ile (VI. 2. 3) denkleminin her B_k^2 özdeğerine tekabül eden özfonksiyonunu gösterelim. Mâlûm olduğu üzere bütün bu özfonksiyonlar reaktörün işgâl ettiği bölgede târif edilmiş sonsuz bir fonksiyon dizisi meydana getirirler ve aynı bölgede

$$\int \chi_k(\vec{r}) \chi_l(\vec{r}) \, d\vec{r} = \gamma \, \delta_{kl} \tag{VI. 2. 6}$$

şeklinde diklik şartlarını gerçeklerler. Buradaki γ büyüklüğü normalizasyon çarpanının karesini göstermektedir.

Sınır şartlarıyla diklik bağıntılarından ötürü $\phi(\vec{r}, t)$ nin reaktörün tecessüm ettirdiği bölgede

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \frac{\chi_n(\vec{r})}{\sqrt{\gamma}} \tag{VI.2.7}$$

şeklinde dik bir fonksiyon serisine açılabileceği anlaşılmaktadır. (VI. 2. 7) ile belirlenmiş akı tabiî $\vec{r} = \vec{r}_u$ uzatılmış sınırında sıfır olacaktır :

$$\phi(\vec{r}_u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \frac{\chi_n(\vec{r}_u)}{\sqrt{\gamma}} \equiv 0 \tag{VI.2.8}$$

Şimdi $\phi(\vec{r}, t)$ nin t ye göre LAPLACE dönüşmüşünü alalım :

$$\overline{\phi}(\vec{r}, s) = \int_0^\infty \phi(\vec{r}, t) \cdot \exp(-st)\, dt \tag{VI.2.9}$$

Bu son ifâdeyle (VI. 2. 8) ifâdesine binâen

$$\overline{\phi}\ (\vec{r}_u, s) = 0 \tag{VI. 2. 10}$$

olduğu da anlaşılmaktadır. (VI. 2. 7) ifâdesinin LAPLACE dönüşmüşü de bize $\phi\ (\vec{r}, s)$ nin reaktör bölgesinde

$$\overline{\phi}(\vec{r}, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n(s) \frac{\chi_n(\vec{r})}{\sqrt{\gamma}} \tag{VI.2.11}$$

şeklinde bir dik fonksiyonlar serisine açılabileceğini göstermektedir.

Diğer taraftan $\delta(\vec{r}-\vec{r}_m)$ fonksiyonlarını da gene aynı bölgede

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_m) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \frac{\chi_n(\vec{r})}{\sqrt{\gamma}} \tag{VI.2.12}$$

şeklinde bir dik fonksiyonlar serisine açmak mümkündür. Filhakika A_{mn} katsayılarını mâlûm usûlle hesaplayınca (Bk. 1. cild, VIII. ders)

$$A_{mn} = \int \frac{\chi_n(\vec{r})}{\sqrt{\gamma}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_m)\, d\vec{r} = \frac{\chi_n(\vec{r}_m)}{\sqrt{\gamma}} \tag{VI.2.13}$$

bulunur. Böylece

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma}\, \chi_n(\vec{r}_m)\chi_n(\vec{r}) \tag{VI.2.14}$$

olur.

Şimdi (VI. 2. 3), (VI. 2. 11) ve (VI. 2. 14) ü de göz önünde tutup, (VI. 2. 1) denkleminin her iki tarafının LAPLACE dönüşmüşünü alarak neticede

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[-DB_n^2+\Sigma_a[k_\infty \exp(-B_g^2\tau)-1]-\frac{s}{v}\right]\bar{\alpha}_n(s)+\sum_{m=1}^{M}\eta_m\frac{\chi_n(\vec{r}_m)}{\sqrt{\gamma}}\right\}\frac{\chi_n(\vec{r})}{\sqrt{\gamma}}=0 \tag{VI.2.15}$$

bulunur.

$\chi_n(\vec{r})$ lerin reaktörün târif bölgesinde aldıkları değerler ne olurlarsa olsunlar (VI. 2. 15) bağıntısının daima gerçeklenebilmesi için kıvrık parantezler içindeki ifâdeler özdeş olarak sıfır olmalıdırlar. Buna binâen $\bar{\alpha}_n(s)$ nin değeri olarak :

$$\bar{\alpha}_n(s)=\frac{\dfrac{v}{\sqrt{\gamma}}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\eta_m\chi_n(\vec{r}_m)}{s+\dfrac{1+L^2B_n^2}{l^*}\left[1-\dfrac{k_\infty\exp(-B_g^2\tau)}{1+L^2B_n^2}\right]} \tag{VI.2.16}$$

bulunur. Şimdi n-inci özdeğere tekabül eden

$$l_n^*=\frac{l^*}{1+L^2B_n^2} \tag{VI.2.17}$$

şeklinde bir ortalama nötron ömrü ve bir de

$$k_n=\frac{k_\infty\exp(-B_g^2\tau)}{1+L^2B_n^2} \tag{VI.2.18}$$

şeklinde bir etkin çoğalma katsayısı târif edecek olursak $\bar{\alpha}_n(s)$ nin (VI 2. 16) ile verilmiş ifâdesi daha kısa olarak

$$\bar{\alpha}_n(s)=\frac{\dfrac{v}{\sqrt{\gamma}}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\eta_m\chi_n(\vec{r}_m)}{s+\dfrac{1-k_n}{l_n^*}}=\frac{\dfrac{v}{\sqrt{\gamma}}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\eta_m\chi_n(\vec{r}_m)}{s-\dfrac{\delta k_n}{l_n^*}} \tag{VI.2.19}$$

şeklinde yazılabilir ; burada $\delta k_n=k_n-1$ vazedilmiş bulunmaktadır. (VI. 2. 19) ifâdesinin ters LAPLACE dönüşmüşünü alarak :

$$a_n(t) = \frac{v}{\sqrt{\gamma}} \sum_{m=1}^{M} \eta_m \chi_n(\vec{r}_m) \cdot \exp\left(\frac{\delta k_n}{l_n^*} t\right) \tag{VI.2.20}$$

ve bu son ifâdeyi (VI. 2. 8) e ikâme ederek $\phi(\vec{r}, t)$ nötron akısı için de

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{v}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} \eta_m \chi_n(\vec{r}_m) \chi_n(\vec{r}) \cdot \exp\left(\frac{\delta k_n}{l_n^*} t\right) \tag{VI.2.21}$$

ifâdesi bulunur.

Eğer ortam kritikse (VI. 2. 18) e göre

$$k_0 = k_{et} = 1 = \frac{k_\infty \exp(-B_g^2 \tau)}{1 + L^2 B_g^2}$$

yâni

$$\delta k_0 = 0 \ ,$$

ve dolayısıyla da diğer bütün $n \neq 0$ için

$$k_n < 1$$

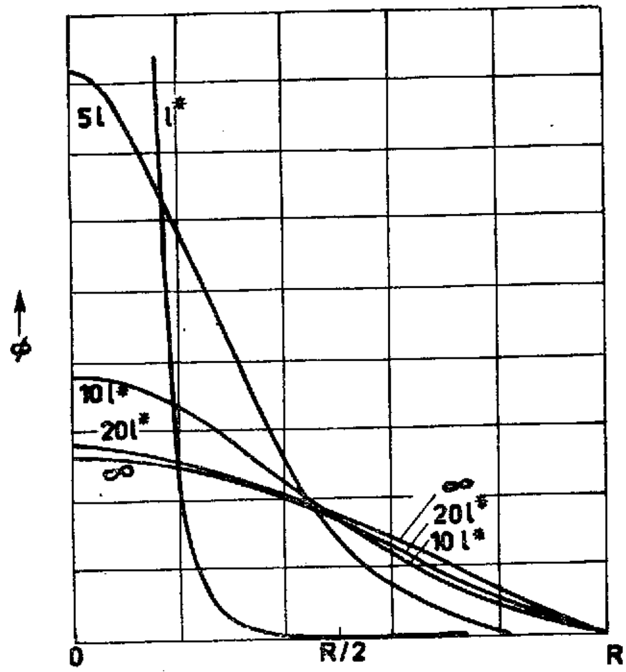
yâni

$$\delta k_n < 0$$

olacağından nötron akısı $t \to \infty$ için

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} \phi(\vec{r}, t) = \phi_{as}(\vec{r}) = \left[\frac{v}{\gamma} \sum_{m=1}^{M} \eta_m \chi_0(\vec{r}_m)\right] \chi_0(\vec{r})} \tag{VI.2.22}$$

şeklinde kararlı bir ifâdeye müncer olur ki bunun böyle olması gerektiğini zâten daha önceden tahmin etmiş bulunuyoruz. Yalnız burada şuna işâret edelim ki bu limit işleminde hakikaten $t \to \infty$ yapmağa esâsında lûzum yoktur. Filhakika ateşleme ânından itibâren $20\, l^*$ ($< 20\, l_n^*$) yâni, reaktörüne göre, 20×10^{-9} ilâ 20×10^{-3} saniye kadar bir zaman sonra pratik olarak argümentleri sıfırdan farklı olan bütün üstlü fonksiyonlar iyice sönerler ve nötron akısı da (VI. 2. 22) ile verilen asimtotik ifâdesine müncer olur (Bk. Şekil : VI. 1).



Şekil : VI. 1. Çıplak ve kritik bir küresel reaktörün merkez noktasında ateşlenmesini müteakip nötron akısının ateşlenme ânından itibâren 1, 5, 10, 20 ve ∞ kere ortalama nötron ömrü sonra iktisâbettiği dağılımlar.

Eğer $t=0$ ânında kritik bir ortamın bir $\vec{\xi}$ noktasına nötron ithâl edilmiş olsaydı bu takdirde

$$\phi_{as}(\vec{r}) = \frac{v\eta}{\gamma}\chi_0(\vec{\xi})\chi_0(\vec{r}) \qquad \text{(VI.2.23)}$$

olacaktı. Bu ifâdeye göre, η nötronun ithâl edildiği $\vec{\xi}$ noktasıyla bunların doğurdukları $\phi_{as}(\vec{r})$ nötron akısının ölçüldüğü $\vec{r}$ noktası eşdeğer iki noktadır ; filhakika $\phi_{as}(\vec{r})$ nin ifâdesinin arzettiği simetri dolayısıyla $\vec{\xi}$ ile $\vec{r}$ biribirleriyle mübâdele edildikleri takdirde nötron akısının değeri değişmemektedir. Asimtotik nötron akısının haiz olduğu bu keyfiyet $\phi_{as}(\vec{r})$ nin «**karşılıklık teoremi**» ni tahkik ettiğini söylemekle ifâde olunur.

Muhtelif geometriler için $\phi_{as}(\vec{r})$ nin ifâdeleri aşağıda verilmiş bulunmaktadır :

(a) Paralelyüzlü reaktör için

$$\phi_{as}(x, y, z) = \left(\sum_{m=1}^{M} \frac{v\eta_m}{8\widetilde{X}\widetilde{Y}\widetilde{Z}} \cos\frac{\pi x_m}{2\widetilde{X}} \cos\frac{\pi y_m}{2\widetilde{Y}} \cos\frac{\pi z_m}{2\widetilde{Z}}\right) \cos\frac{\pi x}{2\widetilde{X}} \times$$

$$\cos\frac{\pi y}{2\widetilde{Y}} \cos\frac{\pi z}{2\widetilde{Z}} \qquad \text{(VI.2.24)}$$

$2\widetilde{X}$, $2\widetilde{Y}$, $2\widetilde{Z}$: paralelyüzlünün uzatılmış (ekstrapole) kenar uzunlukları

(b) Küresel reaktör için

$$\phi_{as}(r) = \left(\sum_{m=1}^{M} \frac{v\eta_m}{2\pi\widetilde{R}} \frac{\sin\frac{\pi r_m}{\widetilde{R}}}{r_m}\right) \frac{\sin\frac{\pi r}{\widetilde{R}}}{r} \qquad \text{(VI.2.25)}$$

$\widetilde{R}$: kürenin uzatılmış (ekstrapole) yarıçapı.

(c) Silindirik reaktör için

$$\phi_{as}(\rho, z) = \left(\sum_{m=1}^{M} \frac{v\eta_m J_0\left(\frac{2 \cdot 405\, \rho_m}{\widetilde{R}}\right) \cos\frac{\pi z_m}{2\widetilde{H}}}{2\pi\widetilde{R}^2\widetilde{H} \cdot J_0'^2(2 \cdot 405)}\right) J_0\left(\frac{2 \cdot 405\, \rho}{\widetilde{R}}\right) \cos\frac{\pi z}{2\widetilde{H}} \qquad \text{(VI.2.26)}$$

$\widetilde{R}$: silindirin uzatılmış yarıçapı ; $2\widetilde{H}$: silindirin uzatılmış yüksekliği.

Eğer göz önüne almış olduğumuz reaktör üst - kritik olacak bir tarzda inşâ edilmiş bulunuyorsa

$$\delta k_0 > 0$$

olacağından nötron akısı zamanla ıraksak olacaktır.

Şâyet reaktör alt - kritikse bütün n ler için

$$\delta k_n < 0$$

olacağından $\phi(\vec{r}, t)$ nötron akısı da zamanla sönecektir.

3. Nötron Kaynağı Olarak Kararlı Nötron Akısı. — Şimdi kritik bir reaktörde kararlı bir nötron akısının teessüs etmiş olduğunu tasarlayalım. Bu ortamın her noktasında nötron akısı vâsıtasıyla târif edilmiş olan nötronların ortam için bir kaynak rolü oynadıkları düşünülebilir. Bu nokta-i nazardan hareket ederek gene kararlı $\phi_{as}(\vec{r})$ nötron akısını bulabilmemiz icâbettiği âşikârdır. Meselâ bu şartlar altında bir $d\vec{r}'$ hacım elemanındaki **nötronların sayısı** (VI. 2. 23) e göre

$$\frac{\eta}{\gamma}\chi_0(\vec{\xi})\chi_0(\vec{r}')\,d\vec{r}' ,$$

ve bu kaynaktan ötürü hasıl olacak olan $d\phi_{as}(\vec{r})$ nötron akısı da

$$d\phi_{as}(\vec{r}) = \frac{\eta}{\gamma}\chi_0(\vec{\xi})\chi_0(\vec{r}')\cdot\frac{v}{\gamma}\chi_0(\vec{r}')\chi_0(\vec{r})\,dr'$$

olacaktır. Bu ifâdenin bütün reaktör hacmı üzerinden integralini alırsak, (VI. 2. 6) diklik şartını da göz önünde tutmak sûretiyle

$$\phi_{as}(\vec{r}) = \frac{v\eta}{\gamma^2}\chi_0(\vec{\xi})\chi_0(\vec{r})\int\chi_0(\vec{r}')\chi_0(\vec{r}')\,d\vec{r}' = \frac{v\eta}{\gamma}\chi_0(\vec{\xi})\chi_0(\vec{r}) \qquad \text{(VI.3.1)}$$

bulunur ki bu da $\phi_{as}(\vec{r})$ nin (VI. 2. 23) ile verilmiş olan ifâdesinin tıpatıp aynısıdır.

4. Gecikmiş Nötronların Nötron Akısına İştirâkleri : a. NORDHEIM Formülü. — Gecikmiş nötronları da hesaba katmak sûretiyle bir ortamdaki nötron akısının şeklini tâyin etmek ve ortamın haiz olduğu peryot veyâ peryotları tesbit edebilmek için hareket noktamız her zamanki gibi gene difüzyon denklemi olacaktır. Yalnız bu denklemi ânî nötronlara nisbetle yazıp gecikmiş nötronları da hesaba katabilmek için buna, doğan gecikmiş nötronlardan cm^3 ve saniye başına ılıklaşmış olanların sayılarını gösteren uygun bir $G(\vec{r}, t)$ kaynak terimi ilâve edeceğiz.

Nötronların sürekli yavaşlama modeline göre ve yukarıda yapmış olduğumuz ihtarların ışığı altında difüzyon denklemini

$$D\nabla^2\phi(\vec{r},t) - \Sigma_a\phi(\vec{r},t) + \exp(-B_g^2\tau)(1-\beta)k_\infty\Sigma_a\phi(\vec{r},t) + G(\vec{r},t) = \frac{1}{v}\frac{\partial\phi(r,t)}{\partial t}$$

(VI.4a.1)

şeklinde yazmak kâbildir. Buradaki üçüncü terim cm^3 ve saniye başına yutulan $\Sigma_a \phi(\vec{r}, t)$ nötronun $(1-\beta)k_\infty \Sigma_a \phi(\vec{r}, t)$ ânî nötronun doğumuna sebep olduğunu ve bunlardan da ancak $\exp(B_g^2 \tau) \cdot (1-\beta)k_\infty \Sigma_a \phi(\vec{r}, t)$ tânesinin yakalanmadan ve ortamın dışına sızmadan ılık bölgeye erişebildiklerini bildirmektedir.

Şimdi ılık enerji seviyesine erişmiş olan gecikmiş nötronların $G(\vec{r}, t)$ yoğunluğunun ifâdesini açık olarak yazabilmek için, önce, muayyen bir t' ânını çevreleyen bir dt' zaman aralığı içinde ve muayyen bir $\vec{r}$ noktası cıvarında cm^3 başına yutulan nötronların sayısının

$$\Sigma_a \phi(\vec{r}, t')\, dt'$$

olduğuna dikkati çeeklim. Bunlar

$$\frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \phi(\vec{r}, t')\, dt'$$

adet ânî fisyon nötronunun doğmasına sebep olurlar. Binâenaleyh gecikmiş nötron doğuran radyoaktif fisyon ürünlerinden i-inci gruba ait olanlarının aynı zaman aralığı içindeki sayıları

$$\beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \phi(\vec{r}, t')\, dt'$$

dür. Gecikmiş nötron doğuran bu ana - çekirdeklerden, radyoaktif parçalanma dolayısıyla t ânında kalabilenlerin

$$N_i = \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \phi(\vec{r}, t') \exp[-\lambda_i(t-t')]\, dt'$$

kadar olduğu cârî olan genel radyoaktiflik kanunlarının

$$N_i(t) = N_i(t') \exp[-\lambda_i(t-t')] \qquad (VI.4a.2)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = -\lambda_i N_i \qquad (VI.4a.3)$$

ifâdelerine binâen kolaylıkla görülür.

Bunlardan (VI. 4a. 3) bağıntısı bir saniye zarfında ana - çekirdeklerin sayısındaki azalmayı göstermektedir. Bu azalma sağ taraftaki eksi işâreti vâsıtasıyla mânâlandırılmıştır. Hâlbuki her ana - çekirdeğin radyoaktif parçalanması gecikmiş bir nötronun açığa çıkmasını temin etmektedir. Yâni ne kadar ana - çekirdek parçalanırsa o kadar da gecikmiş nötron meydana gelmektedir. Şu hâlde nötron akısının t' ânında $\vec{r}$ noktasında haiz olduğu değer dolayısıyla aynı $\vec{r}$ noktasında t ânında doğan i-inci grup gecikmiş nötronların yoğunluğu

$$\frac{dN_i}{dt} = \lambda_i N_i = \lambda_i \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \phi(\vec{r}, t') \cdot \exp\left[-\lambda_i (t - t')\right] \qquad \text{(VI.4a.4)}$$

olacaktır.

Bu gecikmiş nötronların bir kesri fisyonluk maddenin rezonansları tarafından yutulacaklar, diğer bir kesri de yavaşlamaları esnâsında ılıklaşmaya vakit bulamadan ortamdan dışarı sızacaklardır. Bütün bu gecikmiş nötronlardan ılıklaşabilenler (VI. 4a. 4) ifâdesini p rezonansa tutulmama ihtimâliyle ve yavaşlama esnâsında ortamdan dışarı sızmama ihtimâli olan $\exp(-B_g^2\,\tau)$ ile çarpmak sûretiyle elde edilirler :

$$\exp(-B_g^2\tau)\lambda_i\beta_i k_\infty \Sigma_a \phi(\vec{r}, t') \cdot \exp\left[-\lambda_i (t - t')\right] dt' \qquad \text{(VI.4a.5)}$$

Göz önüne alınan reaktör ilk defa ateşlendiği andaki gecikmiş nötronların sayısının sıfır olması gerektiği âşikârdır. Hâlbuki $\phi(\vec{r}, t')$ sonlu kaldıkça (VI. 4a. 5) in ancak $t' = -\infty$ ise sıfır olabileceğini müşahede etmekteyiz. Şu hâlde bu formalizme göre $t' = -\infty$ ânı reaktörün ateşlendiği ân olarak kabul edilmelidir. Buna binâen i-inci gruba ait gecikmiş nötronların t ânındaki sayıları, (VI. 4a. 5) ifâdesinin $t' = -\infty$ dan $t' = t$ ye kadar integralini almak sûretiyle elde edilecektir. Hacım ve zaman birimi başına ortamdaki bütün cins gecikmiş nötronların sayısının da bütün gecikmiş nötron cinslerinin t ânında haiz oldukları yoğunlukları toplamak sûretiyle bulunacağı âşikârdır. Bu mülâhazalara binâen ve gecikmiş nötronlar genel olarak 6 grup hâlinde mütâlea edildiklerinden

$$G(\vec{r}, t) = k_\infty \exp(-B_g^2\tau)\Sigma_a \sum_{i=1}^{6} \lambda_i\beta_i \int_{-\infty}^{t} \phi(\vec{r}, t') \cdot \exp\left[-\lambda_i (t - t')\right] dt' \qquad \text{(VI.4a.6)}$$

olduğu anlaşılmaktadır.

Böylece (VI. 4a. 1) denklemi de

$$\boxed{\begin{aligned} & L^2\nabla^2\phi(\vec{r},t) + [(1-\beta)k_\infty \exp(-B_g{}^2\tau) - 1]\phi(\vec{r},t) + \\ & + k_\infty \exp(-B_g{}^2\tau)\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\beta_i\int_{-\infty}^{t}\phi(\vec{r},t')\cdot\exp[-\lambda_i(t-t')]\,dt' = l^*\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

(VI.4a.7)

şekline girer.

Şimdi bu denklemin bir çözümünü elde edebilmek için reaktörün, nötron akısının uzay kısmının, sınırda sıfır olan ve

$$\nabla^2 R(\vec{r}) + B_g{}^2 R(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(VI. 4a. 8)}$$

denklemini tahkik eden esas mod ile gösterilebilmesini mümkün kılacak kadar kritikliğe yakın olduğunu kabul edelim, ve nötron akısının

$$\phi(\vec{r},t) = R(\vec{r})\sum_{j=1}^{n} a_j \exp(\omega_j t) \qquad \text{(VI.4a.9)}$$

şeklinde ifâde edilip edilemeyeceğini araştıralım. Burada n, a_j ve ω_j bilmediğimiz ve tâyin etmeyi gâye edindiğimiz büyüklüklerdir.

Eğer (VI. 4a. 9) ifâdesini (VI. 4a. 7) ye vazedersek, (VI. 4a. 8) ifâdesini de göz önünde tutmak sûretiyle

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n}\Big\{-L^2B_g{}^2 + (1-\beta)k_\infty \exp(-B_g{}^2\tau) - 1 + k_\infty \exp(-B_g{}^2\tau) \times \\ & \times \sum_{i=1}^{6}\lambda_i\beta_i\int_{-\infty}^{t}\frac{\exp(\omega_j t')\exp[-\lambda_i(t-t')]}{\exp(\omega_j t)}\,dt' - l^*\omega_j\Big\}\, a_j R(\vec{r})\exp(\omega_j t) = 0 \end{aligned}$$

(VI.4a.10)

elde ederiz. t ve $\vec{r}$ müstakil değişkenler olduklarından $R(\vec{r}) \cdot \exp(\omega_j t)$ çarpımı herhangi bir değer alabilir. Buna rağmen bu toplamın sıfır olabilmesi için kıvrık parantezlerin içindeki ifâdelerin özdeş olarak sıfır olmaları zarurîdir. (VI. 4a. 10) ifâdesindeki integrali tâyinden ve bir iki küçük düzenlemeden sonra

$$\frac{l^* \omega_j}{1 + L^2 B_g^2} = (1 - \beta) \frac{k_\infty \cdot \exp(-B_g^2 \tau)}{1 + L^2 B_g^2} - 1 + \frac{k_\infty \cdot \exp(-B_g^2 \tau)}{1 + L^2 B_g^2} \sum_{i=1}^{6} \frac{\lambda_i \beta_i}{\omega_j + \lambda_i} \tag{VI.4a.11}$$

bulunur. Fakat

$$k_{et} = \frac{k_\infty \exp(-B_g^2 \tau)}{1 + L^2 B_g^2} \tag{VI.4a.12}$$

ve

$$k_{et} - 1 = \delta k_{et} \tag{VI. 4a. 13}$$

olduğunu hatırlayıp

$$l_{et} = \frac{l^*}{1 + L^2 B_g^2} \tag{VI.4a.14}$$

ve

$$\beta = \sum_{i=1}^{6} \beta_i \tag{VI.4a.15}$$

vazederek (VI. 4a. 11) i

$$l_{et}\, \omega_j = \delta k_{et} + k_{et} \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{\lambda_i \beta_i}{\omega_j + \lambda_i} - \beta_i \right) = \delta k_{et} - k_{et} \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega_j \beta_i}{\omega_j + \lambda_i} \tag{VI.4a.16}$$

$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

şeklinde yazmak kâbil olur. Hâlbuki reaktiflik

$$\rho = \frac{k_{et} - 1}{k_{et}} = \frac{\delta k_{et}}{k_{et}} \tag{VI.4a.17}$$

ile târif edilmiş olduğundan (VI. 4a. 16) bağıntısı

$$\frac{\delta k_{et}}{k_{et}} = \rho = \frac{l_{et}\omega_j}{k_{et}} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega_j \beta_i}{\omega_j + \lambda_i} \tag{VI.4a.18}$$

$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

ifâdesine müncer olur. Bunlar ω_j cinsinden 7. dereceden cebrik denklemler olup j ne değeri alırsa alsın hep aynı şekli muhafaza etmektedirler ; dolayısıyla bütün bu denklemler 7 kökü haiz aynı bir

$$\boxed{\rho = \frac{l_{et}\omega}{k_{et}} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i}} \tag{VI.4a.19}$$

denkleminden başka bir şey değildir.

Diğer taraftan

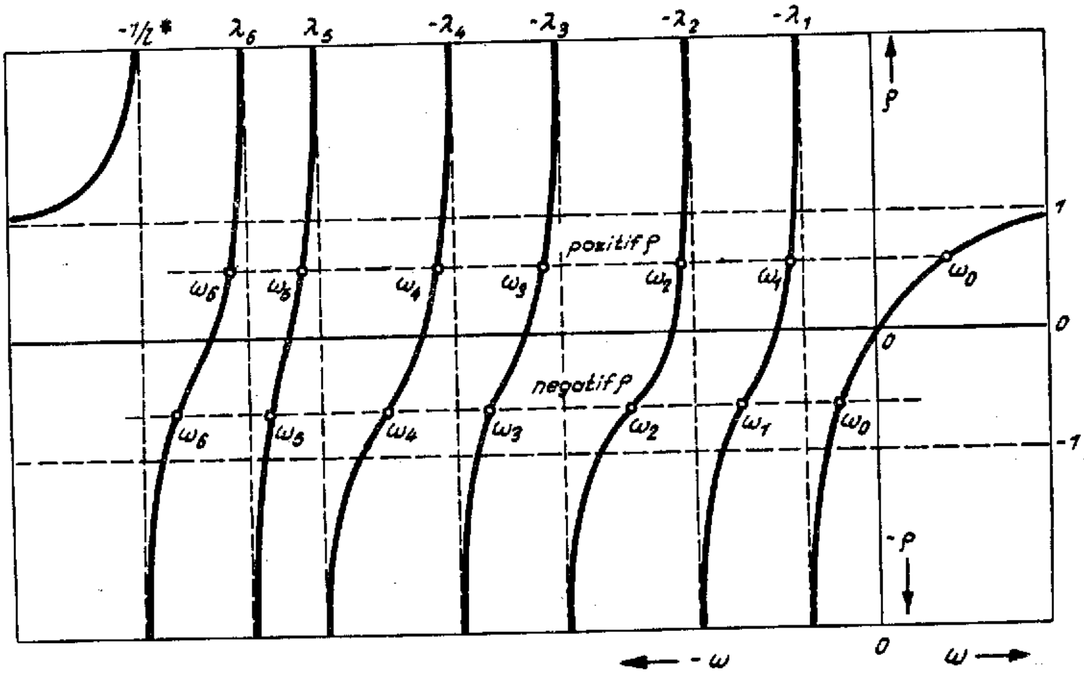
$$k_{et} = \frac{1}{1 - \rho}$$

olduğu da düşünülecek olursa (VI. 4a. 19) denklemini

$$\rho = \frac{l_{et}\omega}{1 + l_{et}\omega} + \frac{1}{1 + l_{et}\omega} \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \tag{VI.4a.19'}$$

şeklinde yazmak da kâbil olur.

Nötron akısının (VI. 4a. 9) ifâdesindeki üstel terimlerin argümentlerini, göz önüne alınan reaktörün haiz olduğu reaktifliğin fonksiyonu olarak veren bu denkleme NORDHEIM denklemi adı verilir. Şekil : VI. 2 bu denklemin kalitatif bir çizimini göstermektedir. Kolayca görüldüğü üzere eğer ortam pozitif bir reaktifliği haizse ($\rho > 0$), NORDHEIM denkleminin köklerinden bir tek tânesi pozitif, diğerleri ise negatif olmaktadır. Reaktifliğin negatif olması hâlinde ise ($\rho < 0$), bütün kökler negatiftir. Eğer $\rho = 0$ ise, yâni ortam kritikse köklerden biri sıfır, geri kalanların hepsi negatiftir.



Şekil : VI. 2. Reaktifliğin pozitif veyâ negatif olmasına göre NORDHEİM denkleminin kökleri.

Bu neticeleri ve (VI. 4a. 9) ifâdesiyle verilen nötron akısını göz önünde bulundurmak sûretiyle

(1) $\rho>0$ olduğu zaman $\lim_{t\to\infty} \phi(\vec{r}, t) \to \infty$

(2) $\rho<0$ olduğu zaman $\lim_{t\to\infty} \phi(\vec{r}, t) \to 0$

(3) $\rho=0$ olduğu zaman $\lim_{t\to\infty} \phi(\vec{r}, t) = a_1 R(\vec{r})$

olduğu görülür. Bu neticeler de evvelce bildiklerimizle tamamen mutabakat hâlindedirler.

$\rho>0$ olduğu zaman NORDHEIM denkleminin pozitif kökünün tersi olan

$$T = \frac{1}{\omega_0} \qquad \text{(VI.4a.20)}$$

büyüklüğüne **«reaktörün kararlı peryodu»** diğer negatif köklere de **«reaktörün geçici peryotları»** adı verilir.

Kâfi derecede uzun bir zaman geçtikten sonra reaktifliği pozitif olan bir reaktördeki geçici peryotların nötron akısına tesirleri ihmâl edilebilecek bir seviyeye düşer ; bu takdirde ρ nun yeniden değişik bir değer almasına kadar reaktörde sâdece kararlı peryot bâki kalır ve nötron akısı da buna binâen

$$\phi(\vec{r}, t) = a_1 R(\vec{r}) \exp\left(\frac{t}{T}\right) \qquad \text{(VI.4a.21)}$$

olur.

Reaktiflik pozitif ve küçük olduğu takdirde, NORDHEIM denkleminden, oldukça büyük bir yaklaşıklıkla pozitif kökü tâyin etmek mümkün olur. Bunun için ρ nun (VI. 4a. 19) ile verilmiş olan ifâdesini $\omega = 0$ cıvarında TAYLOR serisine açmak kâfidir. Eğer

$$\rho = P(\omega) = \frac{l_{et}\omega}{1 + l_{et}\omega} + \frac{1}{1 + l_{et}\omega} \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega\beta_i}{\omega + \lambda_i} \qquad \text{(VI.4a.22)}$$

vazedersek

$$\rho = \frac{\delta k_{et}}{k_{et}} \cong \delta k_{et} \cong P(0) + P'(0) \cdot \omega_0 + \ldots \qquad \text{(VI.4a.23)}$$

olur ; buradan da, kolaylıkla

$$\omega_0 \cong \frac{\delta k_{et}}{l_{et} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i}} \qquad \text{(VI.4a.24)}$$

ve dolayısıyla, kararlı T peryodunun da

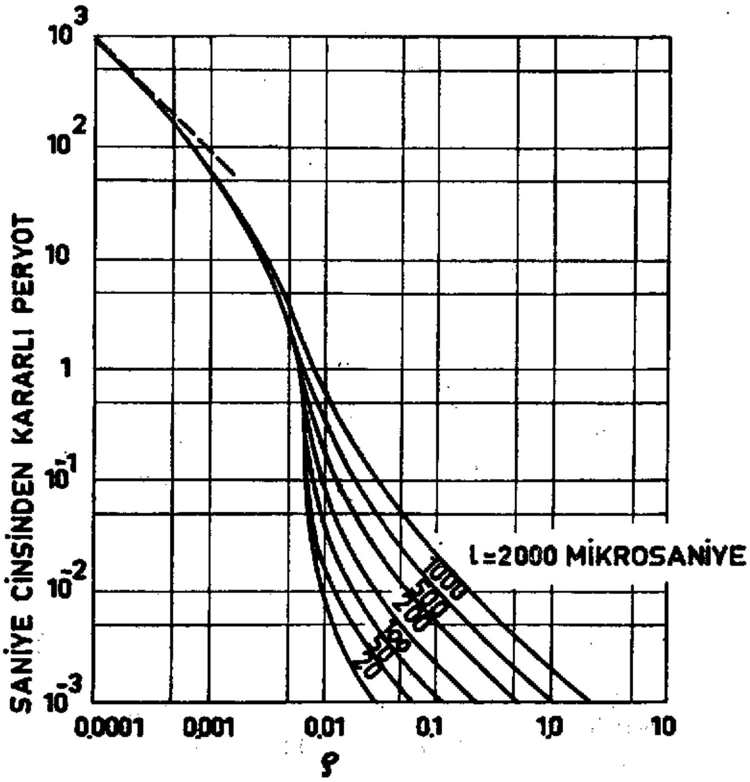
$$T \cong \frac{1}{\delta k_{et}} \left(l_{et} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) \qquad \text{(VI.4a.25)}$$

olduğu hesaplanır.

(VI. 4a. 25) ifâdesini sırf âni nötronlara tekabül eden (VI. 1. 2) ifâdesiyle karşılaştırırsak gecikmiş nötronların mevcûdiyetinin nötronların etkin ortalama ömürlerinin artmasını intâcettiğini görürüz.

Reaktörün kararlı peryodunun pozitif reaktifliğe olan bağlılığını Şekil : VI. 3 den tâkibedelim. l_{et} in muhtelif değerleri için çizilmiş olan

$T = T(\rho, l_{et})$ eğrileri $\rho < 5 \times 10^{-3}$ için nötronların ortalama etkin ömürlerinden müstakilmiş gibi davranmaktadırlar. Buna mukabil reaktifliğin



Şekil : VI. 3. Reaktörün kararlı peryodunun reaktifliğe ve ortalama nötron ömrüne bağlılığı. $\rho = \beta$ cıvarında kararlı peryotta vuku bulan ânî düşüklüğe dikkat ediniz.

daha yüksek değerleri için T nin l_{et} e olan bağlılığı âşikâr bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Şekilden kolayca görüldüğü üzere muayyen bir $\rho > 5 \times 10^{-3}$ için reaktörün kararlı peryodu l_{et} ne kadar küçük bir değeri haizse o kadar azalmaktadır. Buna binâen ortalama etkin nötron ömrünün küçük olduğu (hızlı) reaktörlerin zabt-ü rapt altına alınması da o kadar nâzik ve güç bir mesele olacaktır.

Dikkate değer diğer bir nokta da reaktörün kararlı peryodunun değişim eğrisinin $\rho = \beta$ cıvarında absise dik bir teğet ve bir büküm noktası kabul etmesi ve dolayısıyla, ε çok küçük bir değer olmak üzere, $\rho = \beta - \varepsilon$ dan $\rho = \beta + \varepsilon$ a geçildiğinde T de, bilhassa l_{et} in küçük olduğu reaktörler için değerinin hiç olmazsa 1/100 üne müncer olmaktadır. Binâenaleyh, bir reaktörün $\rho = \beta$ cıvarında bir reaktifliğe sâhip olması, kontrolunu fevkalâde kritik kılan bir keyfiyettir. Bu takdirde reaktör sâdece âni nötronlarla kritik olabiliyor demektir. Bundan ötürü buna *"âni kritiklik,,"* denir. $\rho = 0$ hâlinde de çok kere *"gecikmiş kritiklik,,"* denildiği vâkidir.

b. Ana - çekirdeklerin Konsantrasyonlarını Veren Denklemler. — Çoğaltkan bir ortamda t' ânındaki nötron akısının haiz olduğu değerden ötürü t ânında

$$\beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \phi(\vec{r}, t') \exp[-\lambda_i(t-t')]\,dt'$$

adet i-inci grup gecikmiş nötron veren ana - çekirdek bulunduğunu yukarıda görmüştük. Buna göre t ânından evvelki bütün ânlardaki nötron akısının haiz olduğu değerler dolayısıyla t ânındaki i-inci grup gecikmiş nötronları doğuran ana - çekirdeklerin konsantrasyonu

$$C_i(\vec{r}, t) = \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \int_{-\infty}^{t} \phi(\vec{r}, t') \cdot \exp[-\lambda_i(t-t')]\,dt' \qquad \text{(VI.4b.1)}$$

$$(i=1, 2, \ldots\ldots, 6)$$

ile verilecektir. Bu ifâdeden, t ye göre türev almak sûretiyle (*)

$$\frac{\partial C_i(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) \qquad \text{(VI.4b.2)}$$

$$(i=1,2, \ldots\ldots, 6)$$

elde edilir.

Bu son ifâdelerin yardımıyla (VI. 4a. 7) denklemi de

$$L^2\nabla^2\phi(\vec{r}, t) + [(1-\beta)\,k_\infty \cdot \exp(-B_g^2\tau) - 1]\,\phi(\vec{r}, t) +$$

$$+ p \cdot \exp(-B_g^2\tau) \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(\vec{r}, t) = l^* \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \qquad \text{(VI.4b.3)}$$

---

*) İntegrâl işâreti altında türev alma işlemini hatırlatalım;

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x, y)}{dx}\,dy + f[x, \psi(x)]\frac{d\psi(x)}{dx} - f[x, \varphi(x)]\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

şekline girer.

Bir taraftan

$$\phi(\vec{r}, t) = v\,N(t)\,R(\vec{r})$$

$$C_i(\vec{r}, t) = C_i(t)\,R(\vec{r})$$

vazeder, diğer taraftan da

$$\nabla^2 R(\vec{r}) + B_g^2 R(\vec{r}) = 0$$

olduğunu hatırlatırsak (VI. 4b. 3) denklemini

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{(1-\beta)\,k_{et} - 1}{l_{et}} N(t) + p\Sigma_a \exp(-B_g^2\tau) \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t) \qquad \text{(VI.4b.4)}$$

şekline sokabiliriz ; $C_i(\vec{r}, t)$ yi veren denklem de

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i k_\infty}{p} \frac{\exp(-B_g^2\tau)(1+L^2B_g^2)}{\exp(-B_g^2\tau)(1+L^2B_g^2)} v\Sigma_a N(t) - \lambda_i C_i(t) \qquad \text{(VI.4b.5)}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi

$$\overline{l}_{et} = \frac{l_{et}}{k_{et}}, \quad \alpha = p\Sigma_a \exp(-B_g^2\tau) \qquad \text{(VI.4b.6)}$$

vazederek (VI. 4b. 5) ve (VI. 4b. 6) ifâdelerini

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{(\rho-\beta)}{\overline{l}_{et}} N(t) + \alpha \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t) \\ \frac{dC_i(t)}{dt} &= \frac{\beta_i}{\alpha \overline{l}_{et}} N(t) - \lambda_i C_i(t) \\ &(i = 1, 2, \ldots\ldots, 6) \end{aligned}} \qquad \text{(VI.4b.7)}$$

şekline ircâ edebiliriz.

Bu denklemleri çözebilmek için

$$\left.\begin{aligned} N(t) &= N_0 \sum_{j=1}^{7} A_j \exp(\omega_j t) \\ \phi(t) &= \phi_0 \sum_{j=1}^{7} A_j \exp(\omega_j t) \\ C_i(t) &= N_0 \sum_{j=1}^{7} \gamma_{ij} \exp(\omega_j t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.4b.8)}$$

vazedelim.

$t = 0$ için (VI. 4b. 8) denklemlerinin ikincisinden

$$\boxed{\sum_{j=1}^{7} A_j = 1} \qquad \text{(VI.4b.9)}$$

bulunur. Diğer taraftan ortamda sıfırdan farklı bir reaktiflik yoksa gecikmiş nötron doğuran ana - çekirdeklerin $C_i(t)$ konsantrasyonları sâbittir ; ortama reaktiflik ithâlinin $t = 0$ da vuku bulduğunu düşünecek olursak

$$\left(\frac{dC_i(t)}{dt}\right)_{t=0} = 0 \qquad \text{(VI.4b.10)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 6)$$

olacak demektir. Bu son şarta dayanarak (VI. 4b. 8) denklemlerinin sonuncusundan

$$\sum_{j=1}^{7} \gamma_{ij} \omega_j = 0 \qquad \text{(VI.4b.11)}$$

bulunur. Diğer taraftan (VI. 4b. 7) denklemlerinin ikincisine (VI. 4b. 8) in birinci ve ikincisini ikâme eder, sonra da $t=0$ vazedersek neticede

$$\gamma_{ij} = \frac{\beta_i A_j}{(\omega_j+\lambda_i)\alpha l_{et}} \tag{VI.4b.12}$$

bulunur. Bu sonuncu ifâdeyi de (VI. 4b. 11) e ikâme etmek sûretiyle

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{j=1}^{7} \frac{A_j\omega_j}{\omega_j+\lambda_i} = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, 6)\end{gathered}} \tag{VI.4b.13}$$

elde edilir.

(VI. 4b. 9) ile (VI. 4b. 13) ifâdeleri A_j katsayılarını tek bir şekilde tâyin ederler. Böylece $\phi(\vec{r}, t)$ nötron akısının analitik ifâdesini elde etmek mümkün olur.

5. **Reaktiflik Birimleri.** — NORDHEİM denkleminde ortalama nötron ömrü ve peryot, saniye cinsinden ifâde edilmekte olup ρ da boyutsuz bir büyüklük olarak ortaya çıkmaktadır. Bununla beraber kolaylık olmak üzere ρ için muhtelif birimler târif edilmiştir. Bunlardan biri, daha ziyâde fransızların kullanmakta oldukları, p.c.m. (*pour cent mille*) dir. Bu çok küçük bir birim olup reaktiflikleri 1 in yüzbinde biri cinsinden ifâde eder. Meselâ çoğalma katsayısı 1.08 olan bir ortamın haiz olduğu reaktiflik :

$$\rho = \frac{k-1}{k} = \frac{0.08}{1.08} = 0.074 \times 10^5 \text{ p. c. m.} = 7400 \text{ p. c. m.}$$

olarak ifâde edilecektir.

Anglosakson ülkelerde ρ için kullanılan birimler **dolar** ($) ve bunun yüzde biri olan **sent** ile saat^{-1} dir. **Bir dolarlık bir reaktiflik** $\rho=\beta$ **hâline tekâbül eden reaktifliktir.** Bu birim bilhassa ρ/β ve $\rho-\beta$ ifâdelerini ihtivâ eden formüller için kullanıldığında, denklemleri biraz daha şumûllü kılmak mümkün olmaktadır.

Diğer bir birim de ρ yu saatin tersi (saat^{-1}) cinsinden vermektedir. Bunun için $\omega=1/T$ vazederek, reaktiflik

$$\rho(s.t.) = \frac{\dfrac{l_{et}}{Tk_{et}} + \sum\limits_{i=1}^{6} \dfrac{\beta_i}{1+\lambda_i T}}{\dfrac{l_{et}}{3600\,k_{et}} + \sum\limits_{i=1}^{6} \dfrac{\beta_i}{1+3600\,\lambda_i}} \qquad \text{(VI.5.1)}$$

şeklinde ifâde olunur. Reaktörün çok büyük kararlı peryodu haiz olduğu hâllerde ve ancak bu hâllerde 1 i $\lambda_i T$ yanında ihmâl etmek kabil olur ve bu takdirde

$$\rho(s.t.) \approx \frac{3600}{T} \quad \text{saat}^{-1} \qquad \text{(VI.5.2)}$$

ifâdesine müncer olur. Bu son ifâdeden

$$T \approx \frac{3600}{\rho(s.t.)} \qquad \text{(VI.5.3)}$$

yazmak da mümkün olduğundan buradan 1 saat^{-1} lik bir reaktifliğin, reaktörün kararlı peryodunu yani reaktördeki nötron topluluğunun hemen hemen $e = 2.71828\ldots$ misli artması için lâzım gelen zamanı 3600 saniye = 1 saat kılan reaktiflik olduğu anlaşılmış olur. Fakat maalesef bu basit târif, yukarıda da söylemiş olduğumuz gibi ancak saat ve daha yüksek mertebeden kararlı peryotlar için câri olup daha küçük peryotlar için ρ yu saatin tersi cinsinden ifâde edebilmek için (VI. 5. 1) formülünden hareket etmek lâzımdır. T büyük oldukça saatin tersi cinsinden ifâde edilmiş olan ρ nun reaktöre ve nükleer yakıta bağlı olmadığı (VI. 5. 2) ifâdesinden anlaşılmaktadır. Fakat küçük peryotlar için ρ yu saatin tersi cinsinden hesaplayabilmek üzere (VI. 5. 1) târif ifâdesine rücû etmek mecburiyetinde kalınması, aynı bir T yi haiz muhtelif nükleer evsaftaki reaktörler için ayrı ayrı ρ lar tesbit edileceğini göstermektedir.

Muhtelif fisyonluk izotoplara tekabül eden ve (VI. 5. 1) ile târif edilmiş olan ρ yu hesaplamak için elzem olan gecikmiş nötron gruplarının yarı ömürlerini, gecikmiş nötronların yüzdelerini, mutlak randımanlarını, enerjilerini v.s. yi veren Keepin, Wimett ve Ziegler'in hazırlamış oldukları cetvelleri «H. Etherington : *Nuclear Engineering Handbook*, Kısım : 8, s. 3-5, Mc Graw Hill Book Co. Inc., 1958» de bulabilirsiniz.

6. Tek Bir Gecikmiş Nötron Grubu Hâli. — Mevcûd olan bellibaşlı 6 gecikmiş nötron grubunu birden temsil etmek üzere tek bir gecikmiş nötron grubu tasarlayalım. Bunun için $\beta_i = \beta$ alınır ve ana - çekirdeklerin radyoaktif parçalanma sâbitleri üzerinden

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{6} \beta_i}{\sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i}} \quad \text{veyâ} \quad \lambda = \frac{\beta}{\sum_{i=1}^{6} \beta_i l_i}$$

gibi uygun bir ortalamayla bir λ târif edilir. Burada l_i gecikmiş nötron doğuran anaçekirdeklerin $1/\lambda_i$ ye eşit olan ortalama ömürlerini göstermektedir. Buna binâen ve $k_{et} \approx 1$ farzetmek sûretiyle yâni ρ nun küçük olması hâlinde NORDHEİM denklemi de

$$\rho \approx l_{et}\omega + \frac{\omega\beta}{\omega + \lambda} \qquad \text{(VI.6.1)}$$

ifâdesine müncer olur. Bu, ω ların eksilen üslerine göre düzenlendiği takdirde

$$l_{et}\omega^2 + (\overset{\beta-\rho}{\cancel{\rho-\beta}} + l_{et}\lambda)\omega - \lambda\rho = 0 \qquad \text{(VI.6.2)}$$

şeklinde ikinci dereceden cebrik bir denklem olup köklerinin de

$$\omega = \frac{1}{2l_{et}}\left[-(\beta-\rho+l_{et}\lambda) \pm \sqrt{(\beta-\rho+l_{et}\lambda)^2 + 4l_{et}\lambda\rho}\right] =$$

$$= -\frac{(\beta-\rho+l_{et}\lambda)}{2l_{et}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4l_{et}\lambda\rho}{(\beta-\rho+l_{et}\lambda)^2}}\right] \qquad \text{(VI.6.3)}$$

olduğu kolaylıkla tahkik edilir. Eğer

$$(\beta-\rho+l_{et}\lambda)^2 \gg |\, 2l_{et}\lambda\rho \,| \qquad \text{(VI.6.4)}$$

ise bu son ifâde

$$\omega \approx -\frac{(\beta-\rho+l_{et}\lambda)}{2l_{et}}\left\{1 \pm \left[1 + \frac{2\lambda l_{et}\rho}{(\beta-\rho+l_{et}\lambda)^2}\right]\right\} \qquad \text{(VI.6.5)}$$

şekline girer ve $\rho \gg \beta$ olması hâlinde de buradan, her iki kökün büyük bir yaklaşıklıkla

$$\omega_1 = \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho + l_{et}\lambda} \quad \text{ve} \quad \omega_2 = -\frac{\beta - \rho + l_{et}\lambda}{l_{et}} \qquad \text{(VI.6.6)}$$

ifâdeleriyle verileceği hesaplanır.

Ilık bir reaktör için $l_{et} \sim 10^{-3}$ saniye ve $\lambda \sim 0.08$ san^{-1} mertebesindedir. Böylece $l_{et}\lambda \sim 8 \times 10^{-5}$ olur. $\beta = 0.0075$ olduğundan (VI. 6. 4) bağıntısını sağlayacak kadar küçük ρ değerleri için $l_{et}\lambda$ yı $\beta - \rho$ nun yanında ihmâl etmek kâbil olur. Meselâ $\rho = 200$ p.c.m. lik bir reaktiflik için $\beta - \rho = 0.0075 - 0.002 = 0.0055 < 8 \times 10^{-5}$ olur. Buna göre (VI. 6. 6) ifâdeleri

$$\omega_1 = \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho} \quad \text{ve} \quad \omega_2 = -\frac{\beta - \rho}{l_{et}} \qquad \text{(VI.6.7)}$$

e müncer olur ve $\rho > 0$ olduğu müddetçe $1/\omega_1$ reaktörün kararlı peryodunu temsil eder.

Şimdi (VI. 4b. 8) e binâen

$$\phi(t) = \phi(0)\left[A_1 \exp(\omega_1 t) + A_2 \exp(\omega_2 t)\right] \qquad \text{(VI.6.8)}$$

yazılabilir. Öte yandan (VI. 4b. 9) ve (VI. 4b. 13) bağıntıları dolayısıyla A_1 ve A_2 arasında

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ \frac{A_1\omega_1}{\omega_1 + \lambda} + \frac{A_2\omega_2}{\omega_2 + \lambda} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.6.10)}$$

bağıntıları bulunduğundan bu cebrik denklem sisteminden A_1 ve A_2 çözülebilir ; $\lambda\, l_{et}\, \rho$ da (VI. 6. 4) e binâen gene $(\beta - \rho)^2$ nin yanında ihmâl edilecek olursa

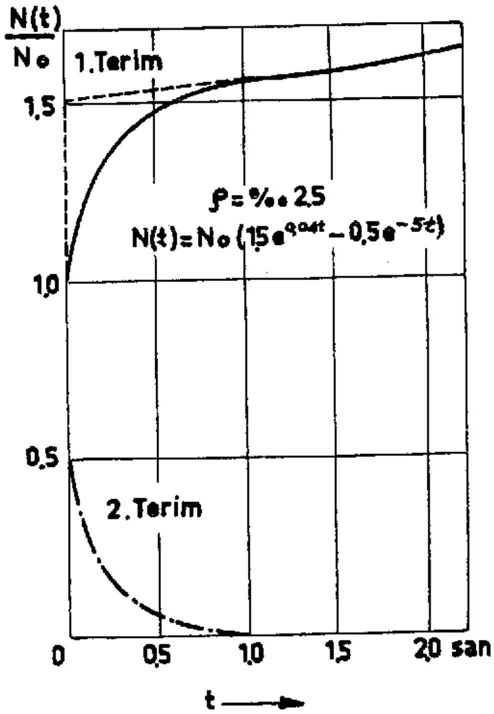
$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\beta}{\beta - \rho} \\ A_2 &= -\frac{\rho}{\beta - \rho} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.6.11)}$$

bulunur. Buna göre ortamdaki nötron akısının zamana bağlı kısmı :

$$\boxed{\phi(t) = \phi(0)\left[\frac{\beta}{\beta-\rho}\exp\left(\frac{\lambda\rho}{\beta-\rho}t\right) - \frac{\rho}{\beta-\rho}\exp\left(-\frac{\beta-\rho}{l_{et}}t\right)\right]} \quad \text{(VI.6 12)}$$

şeklini almış olur. Bu ifâdedeki geçici peryot terimi olan ikinci terimin, t takrîben $5/|\omega_2|$ ye eşit olduktan yâni $t \approx 5\ l_{et}/\beta-\rho$ dan sonra $\phi(t)$ üzerinde pratik olarak hiçbir tesiri kalmamakta ve nötron akısının zamana bağlı dağılımı sâdece ilk terim vâsıtasıyla verilmektedir :

$$\phi(t) \approx \phi(0)\frac{\beta}{\beta-\rho}\exp\left(\frac{\lambda\rho}{\beta-\rho}t\right) \quad \text{(VI.6.13)}$$



Şekil : VI. 4. $\rho = 0.0025$ lik pozitif bir reaktiflik ve tek bir gecikmiş nötron grubu için izâfî nötron akısının zamana bağlı değişimi.

Böylece reaktörün kararlı peryodu

$$T = \frac{\beta-\rho}{\lambda\rho} \quad \text{(VI.6.14)}$$

olmaktadır. ρ nun β yanında ihmâl edilebildiği hâllerde ise

$$T \approx \frac{\beta}{\lambda\rho} \tag{VI.6.15}$$

yazılabilir.

(VI. 6. 12) ile verilmiş olan $\phi(t)$ nötron akısının genel değişimine bir misâl olmak üzere $\rho = 250$ p.c.m. $= 0.0025$ lik bir reaktifliğin tevlîdettiği nötron akımının

$$\phi(t) = \phi(0)[1.5 \exp(0.04\,t) - 0.5 \exp(-5\,t)] \tag{VI.6.16}$$

ifâdesi ile verildiği tesbit edilir. Bu nötron akısının değişimi Şekil: VI. 4 de gösterilmiştir.

7. Büyük Reaktiflikler Hâli. — Şimdiye kadar hep küçük reaktiflikler göz önüne aldık ($\rho \ll \beta$). ρ nun değeri ne kadar büyük olursa Şekil : VI. 1 den de anlaşılacağı vechile ω_0 de o kadar büyük olur. Kâfi derecede büyük reaktiflik değerlerine tekabül eden büyük ω_0 değerleri için (VI. 4a. 19) NORDHEİM denkleminde λ_i ler ω lar yanında ihmâl edilebilir ve böylece

$$\rho \approx \frac{l_{et}\,\omega}{k_{et}} + \sum_{i=1}^{6} \beta_i = \frac{l_{et}}{T k_{et}} + \beta \tag{VI.7.1}$$

olur. Şu hâlde reaktörün kararlı peryodu

$$T \approx \frac{l_{et}}{k_{et}} \frac{1}{\rho - \beta} \tag{VI.7.2}$$

olur.

Eğer reaktöre $\rho = \beta$ olacak şekilde bir reaktiflik ithâl edilmişse $T \to \infty$ olduğu (VI. 7. 2) den görülür. (VI. 4b. 7) denklemlerinin ilkini göz önüne alacak olursak $\rho = \beta$ için

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t) \tag{VI.7.3}$$

olduğu yâni ortamdaki nötron yoğunluğunun ancak gecikmiş nötronların ortaya çıkmasıyla artmakta olduğu anlaşılır. Bu itibarla reaktörün $\rho = \beta$

hâli için yalnız gecikmiş nötronlara nisbetle kritik olduğu söylenir. Yukarıda da zikretmiş olduğumuz gibi bu özel hâle «ânî kritiklik» adı verilmektedir.

Eğer ortamda gecikmiş nötronlar bulunmasaydı (VI. 6. 15) in sağı sıfır olacak ve reaktör *kritik* olacaktı. Kritik olduğu takdirde dahi reaktörün kararlı peryodunun sonsuz olacağı âşikârdır. Ânî kritiklik için de kararlı peryodun sonsuz olduğunu görmüş olduğumuzdan dolayı, sırf kararlı peryodun sonsuz olması keyfiyetinin reaktörün *kritik* olması için karakteristik bir vasıf olmadığı anlaşılmaktadır. Kararlı peryodun sonsuz olması reaktörün kritikliği için *lâzım* olan fakat kâfî gelmeyen bir şart teşkil etmektedir.

Şimdi gene bütün gecikmiş nötronları uygun ortalamalarla tek bir grupta topladığımızı düşünelim ; buna göre ve $\rho = \beta$ olması hâlinde nötron akısının nasıl değişeceğini araştıralım. Bunun için ω_1 ve ω_2 nin değerlerini veren (VI. 6. 3) formülünde $\rho = \beta$ yapar ve λ lı terimlerin $\sqrt{1/l_{et}}$ li terimler yanında kolaylıkla ihmâl edilebileceklerine dikkat edersek

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{\lambda\beta}{l_{et}}} = p\,, \qquad \omega_2 \simeq -\sqrt{\frac{\lambda\beta}{l_{et}}} = -p \tag{VI.7.4}$$

bulunur.

Diğer taraftan (VI. 4b. 9) ve (VI. 4b. 13) bağıntılarından A_1 ve A_2 katsayılarının değerlerinin, kezâ (VI. 7. 4) ifâdeleri de göz önünde tutularak,

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{p+\lambda}{2\lambda} \\ A_2 &= -\frac{p-\lambda}{2\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{VI.7.5}$$

oldukları tesbit edilir. Böylece

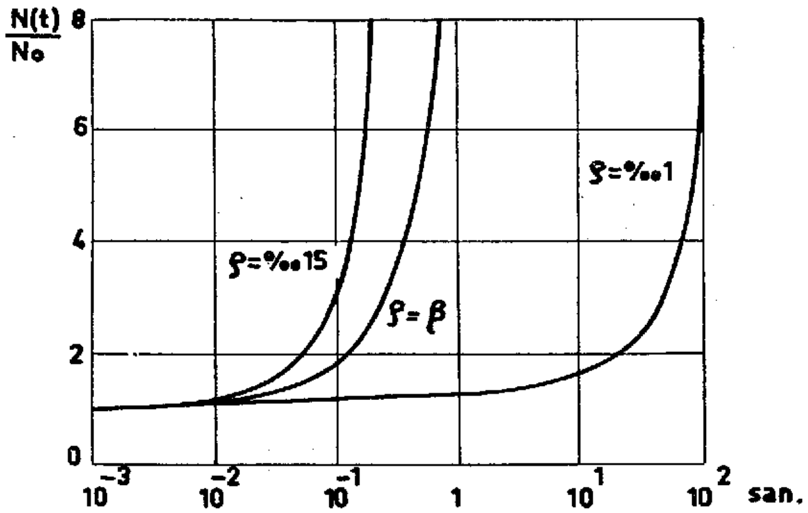
$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(0)\,[A_1 \exp(pt) + A_2 \exp(-pt)] = \\ &= \frac{\phi(0)}{2\lambda}\,[(p+\lambda)\exp(pt) - (p-\lambda)\exp(-pt)] = \\ &= \phi(0)\left[\frac{\exp(pt) + \exp(-pt)}{2} + \frac{p}{\lambda}\,\frac{\exp(pt) - \exp(-pt)}{2}\right] \end{aligned}$$

ve nihâyet

$$\boxed{\phi(t) = \phi(0)\left[\cosh\sqrt{\frac{\lambda\beta}{l_{et}}}\,t + \sqrt{\frac{\beta}{\lambda l_{et}}}\sinh\sqrt{\frac{\lambda\beta}{l_{et}}}\,t\right]} \qquad \text{(VI.7.7)}$$

bulunur.

Büyük reaktiflikler için nötron yoğunluğunun, başlangıç değerine nisbetle, zamanın fonksiyonu olarak nasıl değiştiği Şekil: VI. 5 de gösterilmiştir. ρ nun β civarında bir değeri haiz olduğu takdirde reaktörün kontrolünün ne kadar müşkül olacağını bu şekilden görmek mümkündür. Filhakika



Şekil : VI. 5. Muhtelif değerlerdeki reaktiflikler için izafî nötron yoğunluğunun zamana göre değişimi.

nötron akısının izafî artışının $\rho=\beta$ için meselâ $\rho={}^0/_{00}1$ inkinden en aşağı 100 misli daha çabuk olduğu müşahede olunmaktadır. Eğer $\rho>\beta$ olursa reaktör sâdece ânî nötronlarla üstkritik olur ve izafî nötron artışı da fevkalâde bir hızla büyür ; bu durumda reaktörün standart kontrol mekanizması müessir olamaz. Bu bakımdan ânî kritiklik reaktör emniyeti için çok tehlikeli bir bölge teşkil etmektedir.

8. **Küçük Reaktiflikler Hâli.** — Reaktöre çok küçük bir reaktifliğin ithâl edilmiş olduğunu düşünelim. Bu takdirde gene Şekil : VI. 2 yi göz önünde tutarsak ρ nun çok küçük değerleri için $\omega_0=1/T$ nin sıfıra pek yakın olduğu görülür. Buna göre (VI. 4a. 19) ile verilmiş olan NORDHEİM

denkleminde $\omega = \omega_0$ vazedildiğinde, değerinin küçüklüğü hasebiyle ω_1 büyüklüğü λ_i ler yanında ihmâl edilebilir ve böylece :

$$\rho \simeq \frac{l_{et}\omega_0}{k_{et}} + \omega_0 \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \qquad \text{(VI.8.1)}$$

bulunur ; veyâ $\omega_0 = 1/T$ ve $\lambda_i = 1/l_i$ vazetmek sûretiyle de bu son ifâdeden T kararlı peryodu için

$$T \simeq \frac{1}{\rho}\left[\frac{l_{et}}{k_{et}} + \sum_{i=1}^{6} \beta_i l_i\right] \qquad \text{(VI.8.2)}$$

değeri elde edilir. Bu ifâdede k_{et} in değeri 1 civarındadır ; l_{et} ise en fazla 10^{-3} saniye olur. Hâlbuki kitabımızın birinci cildinin IV. dersinde de işâret ettiğimiz gibi

$$\sum_{i=1}^{6} \beta_i l_i = 0.1 \quad \text{saniye}$$

mertebesindedir. Bu itibarla

$$T \simeq \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{6} \beta_i l_i \qquad \text{(VI.8.3)}$$

yazılabilir. Bu bağıntıdan çıkarılan ilk netice, çok küçük reaktiflikler nazar-ı itibâra alındığında, aynı nükleer yakıt kompozisyonunu haiz bütün reaktörler için T kararlı peryodunun nötronların l_{et} etkin ortalama ömürlerine bağlı olmadığıdır.

Bu dersin 6. bölümünde bütün gecikmiş nötronları tek bir gruba ircâ etmek için ortalama bir

$$\lambda = \frac{\beta}{\sum_{i=1}^{6} \beta_i l_i} \qquad \text{(VI.8.4)}$$

değeri vazetmiştik. (VI. 8. 4) ü göz önünde tutarak artık T için

$$T \approx \frac{\beta}{\rho\lambda} \qquad \text{(VI.8.5)}$$

yazılır. Ortalama bir gecikmiş nötron grubu için λ yı (VI. 8. 4) ifâdesiyle târif etmenin çok küçük reaktiflikler için kararlı peryotları vermekte olan (VI. 6. 15) ifâdesiyle (VI. 8. 5) ifâdesinin özdeş olmalarını intâcettiği görülmektedir.

Bu bölümde T nin ifâdesini çıkartırken ω_0 ın λ_i lere nisbetle küçük olduğunu kabul etmiştik. Buna göre $1/\omega_0 = T$ de l_i lerin en büyüğünden daha büyük olacaktır. 1. cildin Cetvel : 1. 3 üne binâen en büyük l_i takriben 80 saniye olduğuna göre (VI. 8. 2) takribiyetinin mer'î olabilmesi için T nin kabataslak 250 saniyeden daha büyük olması gerektiği söylenebilir. $\sum_{i=1}^{6} \beta_i l_i \approx 0.1$ olduğuna göre (VI. 8. 2) takribiyeti

$$\rho < \frac{0,1}{250} < 0.0004 \qquad \text{(VI.8.6)}$$

için câri olabilecektir.

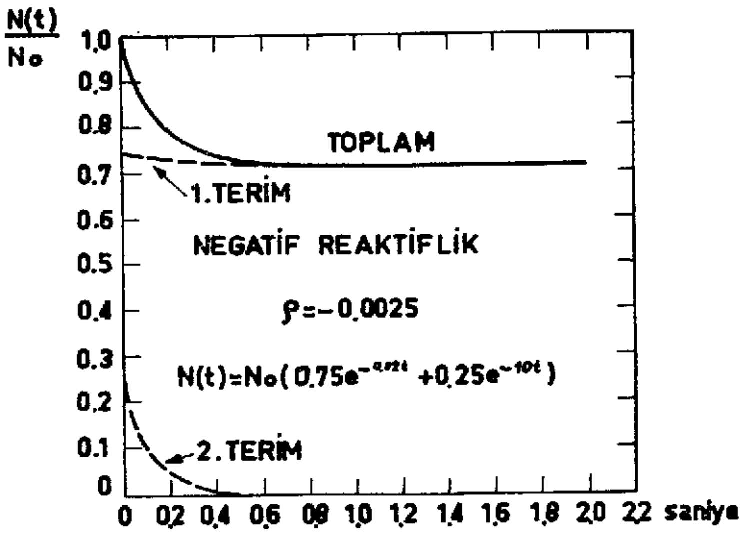
9. Negatif Reaktiflikler Hâli. — Bir reaktörün haiz olduğu reaktifliğin negatif olması hâlinde NORDHEİM denkleminin sâdece negatif kökleri haiz olacağı Şekil : VI. 2 den kolaylıkla görülür. Negatif bir reaktifliğin mevcûd olması hâlinde de NORDHEİM denkleminin en küçük mutlak değerli kökü olan ω_0, pozitif reaktiflik hâlindeki gibi fevkalâde bâriz bir tarzda olmasa bile, diğer köklere tekabül eden terimlerin zamanla sönmesinden sonra gene de kararlı bir peryodun doğmasına sebebiyet verir.

(VI. 6. 12) ifâdesi, hatırlanacağı gibi (VI. 6. 4) şartı tahtında elde edilmişti. Eğer $l_{et} = 0.001$ saniye ve $\lambda = 0.08$ san^{-1} alınacak olursa (VI. 6. 4) eşitsizliğinin hemen hemen her negatif ρ değeri için sağlandığı görülür. Dolayısıyla, tek gecikmiş nötron grubu göz önüne alındığında negatif ρ değerleri için dahi nötron akısının değişimi (VI. 6. 12) ile verilecektir.

Şekil : VI. 4 de $\rho = 0.0025$ lik bir reaktiflik için değişimini vermiş olduğumuz nötron akısına karşıt olmak üzere şimdi de $\rho = -0.0025$ lik bir reaktiflik için nötron akısının

$$\phi(t) = \phi(0)\,[0.75 \exp(-0.02\,t) + 0.25 \exp(-10\,t)] \qquad (VI.9.1)$$

ile verileceği kolaylıkla tesbit edilebilir. Bu nötron akısının değişimi de Şekil : VI. 6 ile verilmiş bulunmaktadır.



Şekil : VI. 6. $\rho = -0.0025$ lik negatif bir reaktiflik ve tek bir gecikmiş nötron grubu için izâfî nötron akısının zamana bağlı değişimi.

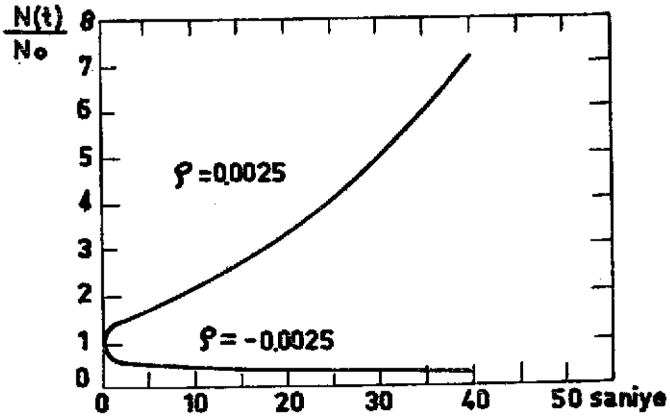
$\rho = 0.0025$ e tekabül eden (VI. 6. 16) nötron akısıyla $\rho = -0.0025$ e tekabül eden (VI. 9. 1) nötron akısı mukayese edilirse her şeyden önce negatif ρ ya tekabül eden nötron akısında her iki eksponansiyelin argümentlerinin negatif olmasına karşılık bunların katsayılarının pozitif olduğu dikkati çekmektedir. Bununla beraber (VI. 9. 1) ifâdesinin ikinci terimindeki büyük üs bu terimin sıfıra ircâını tâcil etmekte ve bu takdirde de reaktörün kararlı peryodu

$$T = \left| \frac{1}{\omega_1} \right| = \frac{1}{0.02} = 50 \quad \text{saniye}$$

olmaktadır. Hâlbuki $\rho = 0.0025$ için kararlı peryot sâdece

$$T = \frac{1}{0.04} = 25 \quad \text{saniye}$$

idi. Eğer ortamdaki bütün nötronlar ânî nötronlar olmuş olsalardı her iki ρ değerine tekabül eden peryotlar 0.4 saniye olacaklardı. Bu bize, gecikmiş nötronların mevcûdiyetleri tahtında, $\rho>0$ için reaktörün kararlı peryodunun her ne kadar artmaktaysa da $\rho<0$ için daha da artmakta olduğunu göstermektedir. Şekil : VI. 4 ile Şekil : VI. 6 nın mukayesesi aynı



Şekil : VI. 7. Aynı mutlak değeri haiz fakat biri pozitif, diğeri ise negatif olan muayyen bir reaktiflik için izâfî nötron akılarının zamana göre değişimlerinin mukayesesi.

bir mutlak değeri haiz fakat biri pozitif, diğeri ise negatif olan iki reaktifliğe tekabül eden nötron akılarının değişim hızları hakkında yukarıda söylediklerimizi teyid eden sarih bir fikir vermektedir (Bk. Şekil: VI. 7).

Şekil : VI. 2 den kolaylıkla görmek mümkündür ki mutlak değerce çok büyük reaktiflikler için asimtotik olarak

$$|\omega_0| \approx \lambda_1 \qquad \text{(VI.9.2)}$$

veyâ

$$T \approx l_1 = 80.2 \text{ saniye} \qquad \text{(VI. 9. 3)}$$

olmaktadır. Bu itibarla bir reaktörü durdurmak için çoğaltkan ortama büyük bir reaktiflik ithâl edilirse nötron akısı önce oldukça süratli bir azalış kaydeder fakat çok kısa bir zaman sonra bütün geçici terimler sıfıra müncer olunca, ancak 80.2 saniyelik **limit bir peryotla** sönecektir.

10. Reaktifliğin Lineer Olarak Değişmesi Hâli. — Reaktör kinetiğinde göz önünde tutulması gereken önemli bir hâl de reaktifliğin, meselâ kontrol çubuklarından birinin kötü işlemesi yüzünden, zamanın lineer bir fonksiyonu olarak durmadan artması hâlidir. Bu hâli teorik olarak inceleyebilmek için reaktifliğin zamanın

$$\rho = At \qquad \text{(VI. 10. 1)}$$

şeklinde bir fonksiyonu olarak değişmeğe başladığı $t=0$ ânından önce reaktörün kararlı bir durumda işlemekte olduğunu kabul edeceğiz. $t=0$ ânından evvel nötron akısının kararlı bir dağılımı haiz olmasından ötürü, gecikmiş nötronları doğuran fisyon ürünü ana - çekirdeklerin konsantrasyonları da denge durumunda olacaklardır. Buna ve (VI. 4b. 7) ifâdesine binâen ve bütün gecikmiş nötron gruplarının tek bir gruba müncer olduklarını farzederek

$$\lambda C = \frac{\beta}{\alpha \bar{l}_{et}} N_0 \tag{VI.10.2}$$

bulunur. Burada N_0 kararlı nötron yoğunluğunu göstermektedir. Şu hâlde bu gecikmiş nötronlar $\beta N_0/\alpha \bar{l}_{et}$ değerini haiz sâbit bir kaynak gibi düşünülebilirler. (VI. 4b. 7) ye ve (VI. 10. 2) ye binâeân ve ortamda sıfırdan farklı bir $\rho = At$ şeklinde bir reaktifliğin mevcûd olması tahtında

$$\frac{dN(t)}{dt} - \frac{At - \beta}{\bar{l}_{et}} N(t) = \frac{\beta}{\bar{l}_{et}} N_0 \tag{VI.10.3}$$

bulunur.

Bu basit diferansiyel denklem

$$P = \frac{-At + \beta}{\bar{l}_{et}}, \quad Q = \frac{\beta N_0}{\bar{l}_{et}} \tag{VI.10.4}$$

vazedilerek çözülürse, K ile muayyen bir integrasyon sâbitini göstererek

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{\beta}{\bar{l}_{et}} \exp\left(\frac{At^2 - 2\beta t}{2\bar{l}_{et}}\right) \left[\int_0^t \exp\left(-\frac{At'^2 - \beta t'}{\bar{l}_{et}}\right) dt' + \frac{K}{N_0}\right] \tag{VI.10.5}$$

yazılabilir.

K sâbitini tâyin maksadıyla $t=0$ için $N(0)/N_0=1$ olması icâbettiğine dikkat ederek

$$K = \frac{\bar{l}_{et} N_0}{\beta} \tag{VI.10.6}$$

bulunur. Buna göre (VI. 10. 5) deki integralli terim,

$$a = \sqrt{\frac{A}{2\bar{l}_{et}}} \; , \qquad b = -\frac{\beta}{\sqrt{2A\bar{l}_{et}}} \tag{VI.10.7}$$

vazederek

$$\exp\left(\frac{\beta^2}{2A\bar{l}_{et}}\right)\int_0^t \exp\left[-(at'+b)^2\right] dt'$$

şeklinde yazılabilir. Bu sefer de

$$at+b=\mu \tag{VI. 10. 8}$$

vazederek

$$\int_0^t \exp\left[-(at'+b)^2\right] dt' = \frac{1}{a}\int_b^{at+b} \exp(-\mu^2)\,d\mu =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{at+b} \exp(-\mu^2)\,d\mu - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{b} \exp(-\mu^2)\,d\mu\right] \tag{VI.10.9}$$

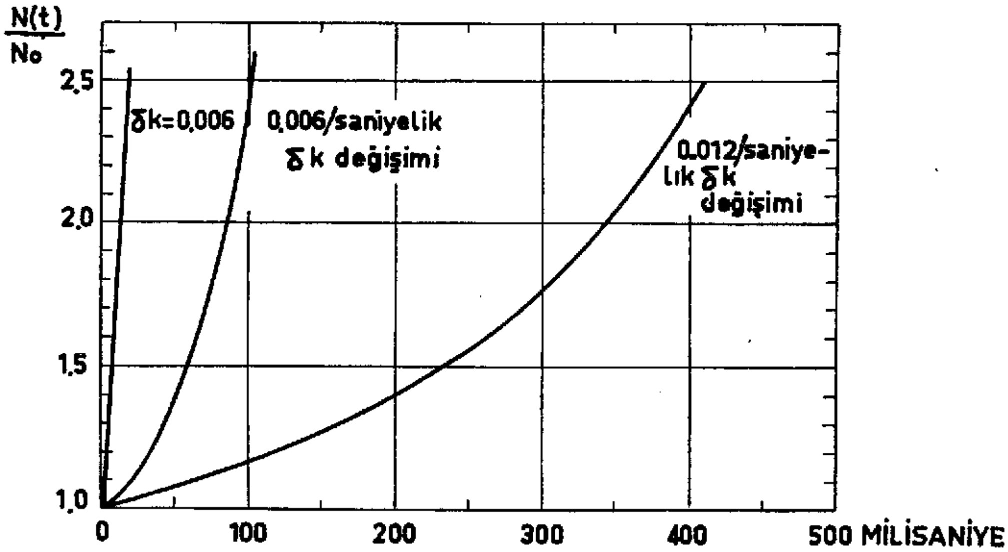
elde edilir. Bu son ifâdede *ihtimâl integrali* şeklinde integraller bulunmaktadır. İhtimâl integrali cetvellenmiş olduğundan (Bk. Marcel Boll : Tables Numériques Universelles, Dunod Ed., 2. baskı, Paris, 1957) bunları değerlendirmek güç değildir. Bu itibarla artık genel çözüm

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{\beta}{\bar{l}_{et}} \exp(-\mu^2)\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_b^{at+b} \exp(-\mu^2)\,d\mu - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{b} \exp(-\mu^2)\,d\mu\right) + \frac{\bar{l}_{et}}{\beta}\exp\left(-\frac{\beta^2}{2A\bar{l}_{et}}\right)\right] \tag{VI.10.10}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu ifâdeden hareketle, kritik bir reaktöre tatbik edilen muhtelif ρ reaktifliği değişimlerinin doğurdukları $N(t)/N_0$ artışı t nin fonksiyonu olarak Şekil : VI. 8 de gösterilmiş bulunmaktadır.



Şekil : VI. 8. Tek bir gecikmiş nötron grubu için ve reaktifliğin sâbit ve zamanın lineer bir fonksiyonu olması hâlinde izâfî nötron akılarının değişimi.

11. Reaktifliğin Sinüs Gibi Değişmesi Hâli ; Transfer Fonksiyonu. — Şimdi kritik olduğunu ($k_{et}=1$) farzettiğimiz bir reaktöre, $|d\rho(\omega)|$ çok küçük olmak şartıyla,

$$\rho(\omega) = d\rho(\omega) \cdot e^{i\omega t} \qquad \text{(VI. 11. 1)}$$

şeklinde muayyen bir ω açısal frekansıyla sinüs gibi bir değişim arzeden bir reaktiflik ithâl edelim ve bu takdirde çoğaltkan ortamdaki nötron yoğunluğunun (veyâ akısının) nasıl değişeceğini araştıralım.

Bu şekilde bir reaktiflik değişimi nötron yutucu bir maddeyi veyâ bir nötron kaynağını peryodik bir tarzda reaktör içine ithâl etmek sûretiyle gerçekleştirilebilir.

Böyle bir reaktiflik değişiminin tevlîdettiği, nötronların ve gecikmiş nötronları doğuran ana - çekirdeklerin yoğunluklarının değişimlerinin de

$$N(t, \omega) = N_0 + dN(\omega) \cdot e^{i(\omega t+\theta)}$$

$$C_i(t, \omega) = C_{i0} + dC_i(\omega) \cdot e^{i(\omega t+\psi_i)} \qquad \text{(VI.11.2)}$$

şeklinde, $\rho(\omega)$ nın değişimlerini sırasıyla θ ve ψ_i faz farklarıyla tâkibedeceklerini farzedelim.

Diğer taraftan çoğaltkan ortamdaki reaktiflik değişimlerinde $|d\rho(\omega)|$ yı çok küçük farzetmekle reaktörün gücünün pratik olarak sâbit kalmakta olduğunu da kabul edebiliriz. Buna göre gecikmiş nötron doğuran ana - çekirdeklerin konsantrasyonlarının denge durumuna erişmiş oldukları ($dC_i/dt=0$) söylenebilir ve (VI. 4b. 7) nin ikinci denkleminden

$$C_i(t) \backsimeq \frac{\beta_i}{\alpha\lambda_i \bar{l}_{et}} N(t) \tag{VI.11.3}$$

yazılabilir. Denge durumunda $C_i(t)$ lerin t ye göre türevlerinin sıfır olması hasebiyle (VI. 11. 3) bağıntısının (VI. 11. 2) faraziyesi muvacehesinde

$$C_{i0} \backsimeq \frac{\beta_i}{\alpha\lambda_i \bar{l}_{et}} N_0 \tag{VI.11.4}$$

şeklinde yazılacağı âşikârdır.

Buna binâen (VI. 4b. 7) denklemlerinin ikincisine $C_i(t, \omega)$ ile $N(t, \omega)$ nın (VI. 11. 2) ile verilen değerlerini ikâme eder ve (VI. 11. 4) bağıntısını da göz önünde tutarsak

$$dC_i(\omega) \cdot e^{i\varphi_i} = \frac{\beta_i}{\alpha \bar{l}_{et}} \frac{dN(\omega) \cdot e^{i\theta}}{j\omega + \lambda_i} \tag{VI.11.5}$$

bulunur. Öte yandan (VI. 4b. 7) denklemlerinden birincisine ikincisinden çıkarılan $C_i(t)$ değerleri ikâme edilirse

$$\bar{l}_{et} \frac{dN(t)}{dt} + \alpha \bar{l}_{et} \sum_{i=1}^{6} \frac{dC_i(t)}{dt} = \rho N(t) \tag{VI.11.6}$$

bulunur. (VI. 11. 1) ve (VI. 11. 2) yazlarını da bu son ifâdeye ikâme etmek sûretiyle

$$j\omega \bar{l}_{et}\, dN(\omega) \cdot e^{i\theta} + \alpha \bar{l}_{et} \sum_{i=1}^{6} dC_i(\omega) j\omega \cdot e^{i\varphi_i} =$$

$$= d\rho(\omega) [N_0 + dN(\omega) \cdot e^{i(\omega t+\theta)}] \tag{VI.11.7}$$

elde edilir. Fakat gerek $d\rho(\omega)$ ve gerekse $dN(\omega)$ birinci mertebeden sonsuz küçük kemmiyetler olarak kabul edildiklerinden bunların çarpımları ikinci mertebeden bir sonsuz küçük olacaktır ; bu itibarla bu çarpım ihmâl edilebilir ve (VI. 11. 5) ifâdesini de göz önünde tutmak sûretiyle (VI. 11. 7) den :

$$\boxed{\frac{1}{N_0}\frac{dN}{d\rho}\cdot e^{j\theta} = \frac{1}{j\omega \bar{l}_{et}}\;\frac{1}{1+\frac{1}{\bar{l}_{et}}\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{j\omega+\lambda_i}}} \tag{VI.11.8}$$

bulunur. Bu denklemi

$$a = \omega^2\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i^2+\omega^2} \tag{VI.11.9}$$

$$b = \omega\left[\bar{l}_{et}+\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i\lambda_i}{\lambda_i^2+\omega^2}\right] \tag{VI.11.10}$$

vazederek

$$\frac{dN}{d\rho}\cdot e^{j\theta} = \frac{N_0}{a+jb} \tag{VI.11.11}$$

şekline sokmak kâbildir. Böylece

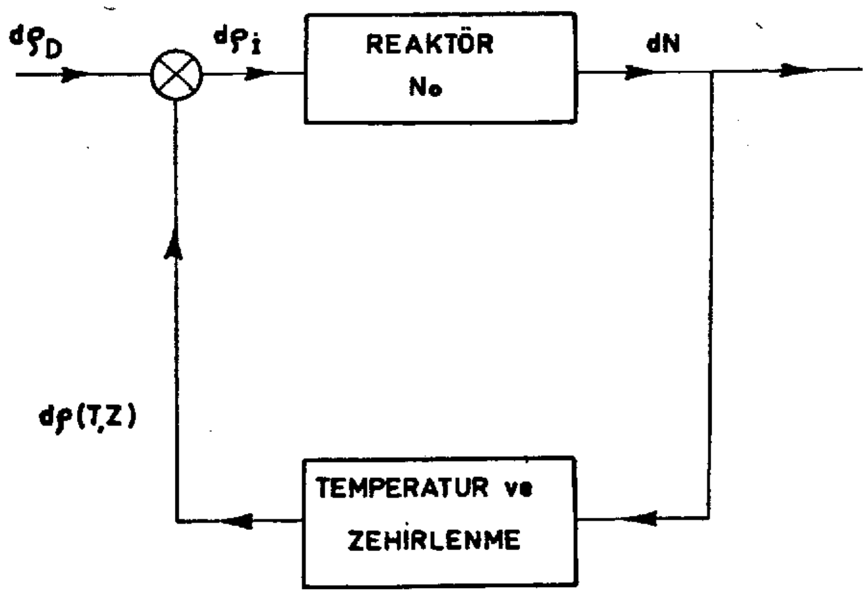
$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{1}{N_0}\frac{dN}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \operatorname{tg}\theta(\omega) &= -\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \tag{VI.11.12}$$

yazılabilir.

Burada reaktörle elektronik bir amplifikatör arasında bir benzerlik kurulmuş bulunmaktadır. Filhakika $d\rho(\omega)\cdot e^{j\omega t}$ şeklinde bir reaktiflik değişikliği esnâsında reaktör tıpkı, genliği G ve fazı da $\theta(\omega)$ olan bir amplifikatör gibi davranmaktadır. (VI. 11. 12) ile târif edilmiş bulunan bu iki büyüklük reaktörün *"transfer fonksiyonu,,* nu teşkil etmektedirler. Şematik olarak bu, Şekil : VI. 9 daki gibi gösterilebilir.

Şekil : VI. 9. $d\rho$ luk bir reaktiflik değişikliğinin dN lik bir nötron seviyesi değişikliği doğurduğunu gösteren şema.

Bu diyagram, $d\rho$ luk bir reaktiflik değişikliğine, N_0 a eşit bir nötron seviyesini haiz bir reaktörün bu nötron seviyesinde dN lik bir değişim icrâ eder tarzda bir cevap vermesi olarak anlaşılmalıdır. Eğer bu şartlar altında hâsıl olan dN nötron yoğunluğu değişikliği meselâ temperatur veyâ zehirlenme olayları vâsıtasıyla tekrar ortamdaki reaktiflik üzerine tesir ediyorsa dN nin kendisinin doğumuna sebebiyet veren $d\rho$ üzerine *"geri beslemesi,,* (feedback) Şekil : VI. 10 daki gibi kapalı bir devreyle gösterilir.



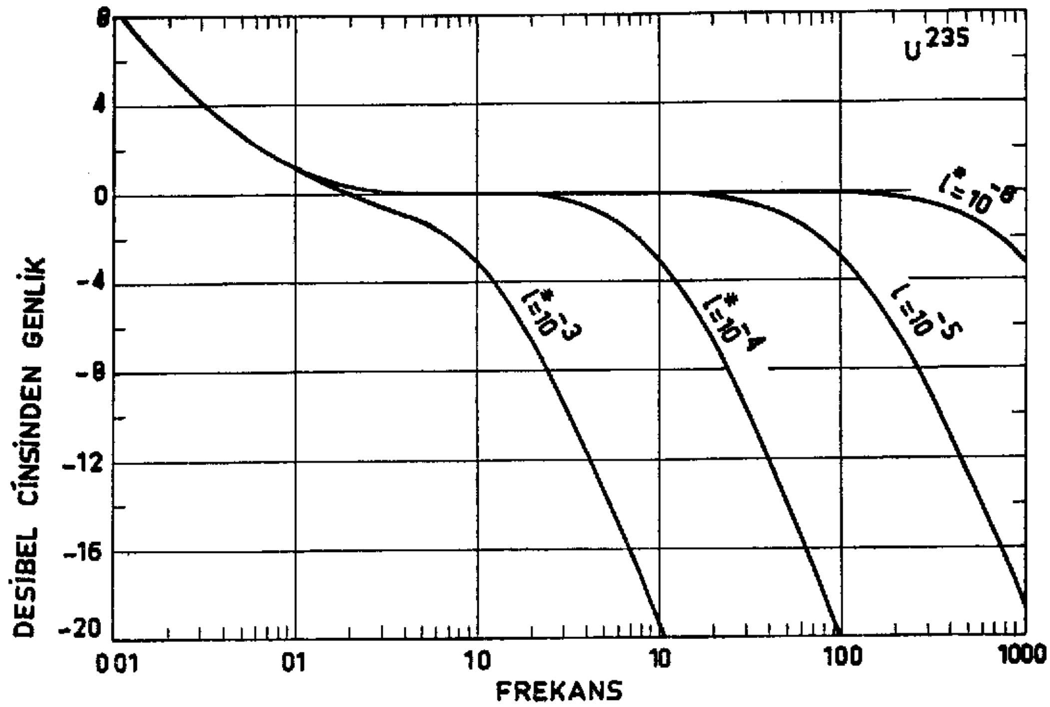
Şekil : VI. 10. Reaktörün temperatur ve fisyon ürünleriyle zehirlenmesine tekabül eden «geri beslenme» şeması. Muayyen bir reaktiflik değişikliği reaktördeki nötron seviyesinde dN lik bir değişim meydana getirmektedir. Hâlbuki reaktördeki temperatura bağlı hâdiseler ve fisyon ürünleriyle zehirlenme olayı bu dN değişimine bağlı olarak bir $d\rho(T, Z)$ reaktiflik değişikliği doğururlar ; bu da reaktöre dışarıdan ithâl olunan $d\rho$ ile mukayese edilir ve aralarındaki $d\rho_i = d\rho_D - d\rho(T, Z)$ farkı dN değişimini sağlayan reaktiflik farkı olarak ortaya çıkar.

(VI. 11. 8) ile verilmiş olan reaktör transfer fonksiyonunun sıfırdan farklı kutup noktalarını r_k ile gösterecek olursak

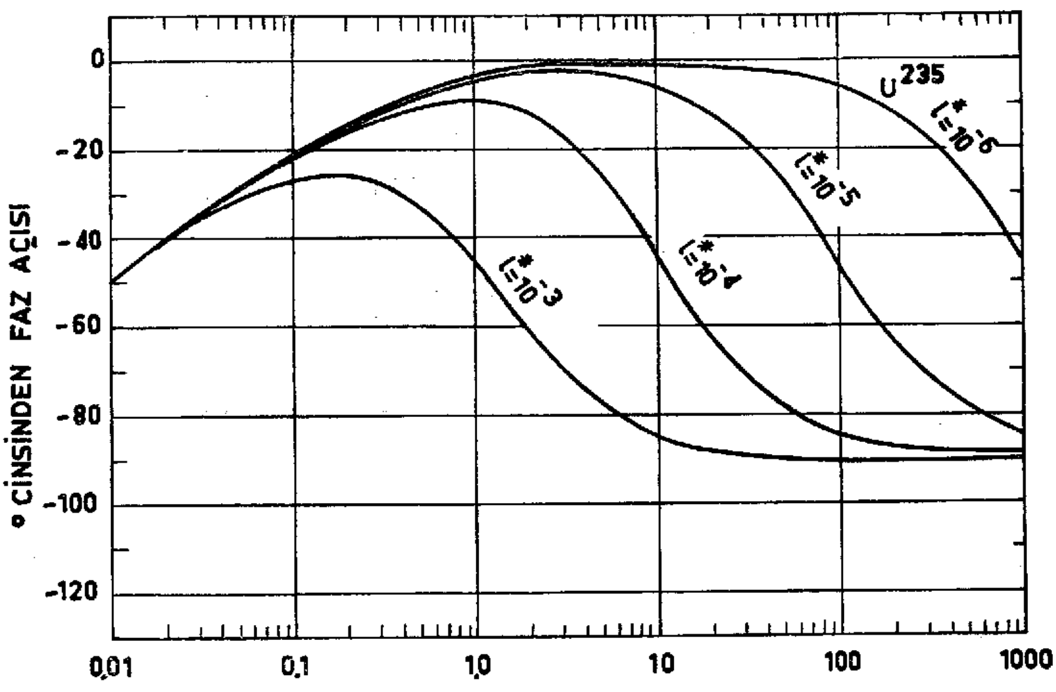
$$\boxed{\frac{1}{N_0}\frac{dN}{d\rho}\cdot e^{j\theta} = \frac{1}{j\omega \bar{l}_{et}} \frac{\prod_{i=1}^{6}(j\omega + \lambda_i)}{\prod_{k=1}^{6}(j\omega + r_k)}} \qquad \text{(VI.11.13)}$$

yazılabileceği de gösterilebilir.

Reaktör transfer fonksiyonunun ihtivâ ettiği λ_i ler β_i ler ve $\bar{l}_{et}$ gibi parametrelerin fonksiyonu olduğu ve her reaktör için, bunun nükleer vasıflarına bağlı olarak, ayrı bir transfer fonksiyonu olacağı âşikârdır. Şekil : VI. 11 ve 12 de U^{235} li ılık bir reaktörün transfer fonksiyonunun G genliği ile $\theta(\omega)$ fazının $\bar{l}_{et}$ e bağlılıkları görülmektedir.



Şekil : VI. 11. U^{235} den müteşekkil bir reaktörün transfer fonksiyonunun genliğinin frekansın fonksiyonu olarak değişimi



Şekil : VI. 12. U^{235} den müteşekkil bir reaktörün transfer fonksiyonunun fazının frekansın fonksiyonu olarak değişimi.

12. Xe^{135} ile Zehirlenmeye Tekabül Eden Reaktör Transfer Fonksiyonu. — Reaktörün Xe^{135} ile zehirlenmesine tekabül eden transfer fonksiyonunu da bulmak kolaydır. Bunun için Xe ve I konsantrasyonlarını veren (IV. 2. 4) ve (IV. 2. 5) denklemlerini göz önüne alıp bu konsantrasyonların denge durumunda bulunduklarını farzedelim. Bu denge durumları X_0 ve I_0 ile belirlenmiş olsun ($dX_0/dt = 0$, $dI_0/dt = 0$). Eğer nötron akısı kendi ϕ_0 sâbit değeri cıvarında genliği küçük olan

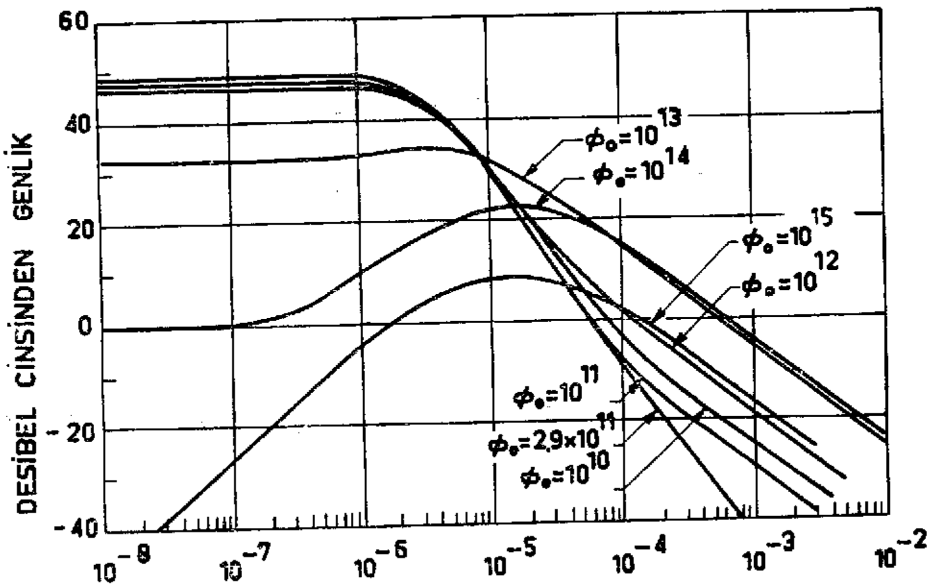
$$\phi(t) = \phi_0 + d\phi(\omega) \cdot e^{i\omega t} \qquad \text{(VI.12.1)}$$

şeklinde bir takım titreşimler icrâ ediyorsa, bunun neticesi olarak ortamdaki Xe ve I konsantrasyonlarının da, ϕ ye olan bağlılıkları göz önüne alındığında,

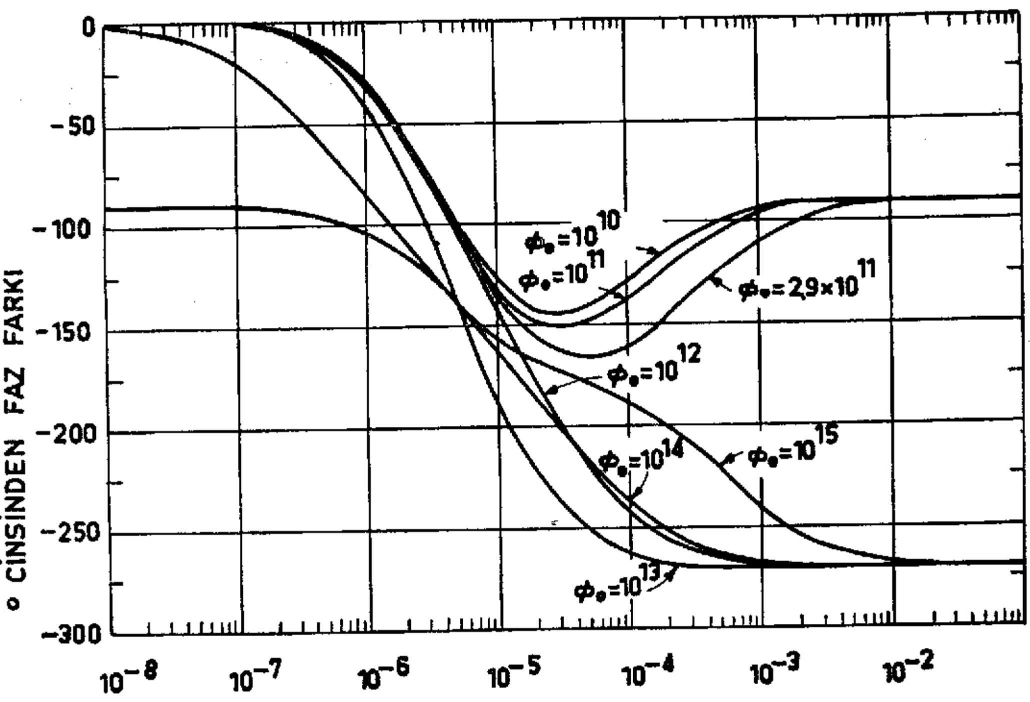
$$X(t) = X_0 + dX(\omega) \cdot e^{i(\omega t + \theta)} \qquad \text{(VI.12.2)}$$

$$I(t) = I_0 + dI(\omega) \cdot e^{i(\omega t + \psi)} \qquad \text{(VI.12.3)}$$

şeklinde muayyen θ ve ψ faz farklarıyla, X_0 ve I_0 denge durumları cıva-



Şekil : VI. 13. Xe ve I ile zehirlenmeye tekabül eden transfer fonksiyonunun genliğinin, frekansın fonksiyonu olarak değişimi.



Şekil : VI. 14. Xe ve I ile zehirlenmeye tekabül eden transfer fonksiyonunun fazının, frekansın fonksiyonu olarak değişimi.

rında küçük genlikli titreşimler yapmaları mantıkîdir. Bu denge durumlarının

$$\begin{aligned} w_i \Sigma_f \phi_0 - \lambda_i I_0 &= 0 \\ (w_x \Sigma_f - \sigma_x X_0)\phi_0 - \lambda_x X_0 + \lambda_i I_0 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VI.12.4)}$$

ile belirleneceklerine işâret ederek, (VI. 12. 1-3) vazlarını Xe ve I konsantrasyonlarını veren (IV. 2. 4) ve (IV. 2. 5) denklemlerine ikâme etmek ve ikinci mertebeden sonsuz küçük terimleri ihmâl etmek sûretiyle

$$j\omega\, dX(\omega) \cdot e^{i\theta} = (w_x \Sigma_f - \sigma_x X_0)\, d\phi(\omega) - (\sigma_x \phi_0 + \lambda_x)\, dX(\omega) \cdot e^{i\theta} + \lambda_i\, dI(\omega) \cdot e^{i\psi}$$

$$dI(\omega) \cdot e^{i\psi} = \frac{w_i \Sigma_f}{j\omega + \lambda_i}\, d\phi(\omega)$$

elde edilir. Bu iki denklem arasında $dI(\omega) \cdot e^{i\psi}$ nin ifnâsı ise Xe konsantrasyonlarına tekabül eden reaktör transfer fonksiyonunun ifâdesini verir :

$$\boxed{\frac{dX}{d\phi}\, e^{i\theta} = \frac{(w_x \Sigma_f - \sigma_x X_0)(j\omega + \lambda_i) + \lambda_i w_i \Sigma_f}{(j\omega + \lambda_i)(j\omega + \sigma_x \phi_0 + \lambda_x)}} \qquad \text{(VI.12.5)}$$

Bu ifâdedeki, Xe konsantrasyonunun denge değeri olan X_0 ı ϕ_0 ın fonksiyonu olarak (VI. 12. 4) denkleminden çıkarmak kabil olduğundan aynı bir reaktör için bu transfer fonksiyonunun

$$\frac{dX}{d\phi}\, e^{i\theta} = F(\omega, \phi_0) \qquad \text{(VI.12.6)}$$

şeklinde yalnız ω ve ϕ_0 a bağlı olduğu anlaşılmış olur. Xe zehirlenmesine tekabül eden transfer fonksiyonunun genliğinin ve faz farkının değişimi Şekil : VI. 13 ve 14 de gösterilmiştir.

13. Transfer Fonksiyonu Vâsıtasıyla Reaktörün Denge Durumlarının Tesbiti. — Gerek (VI. 11. 8) ve gerekse (VI. 12. 5) transfer fonksiyonları nötron yoğunluğunu veyâ zehirlerin konsantrasyonlarını veren denklemlerden hareketle ve bunların sâdece LAPLACE dönüşmüşlerini almak sûretiyle de elde edilebilirler. Bu takdirde bulunacak olan ifâdelerle (VI. 11. 8) ve (VI. 12. 5) arasındaki yegâne fark $j\omega$ lar yerine sâdece t nin LAPLACE tasviri olan s nin gelmesidir. Yâni buna göre bu ifâdelerin ters LAPLACE dönüşmüşlerini almak sûretiyle

$$\frac{d\mathrm{N}(s)}{d\rho(s)} \quad \text{ve} \quad \frac{d\mathrm{X}(s)}{d\phi(s)}$$

ifâdelerinden sâdece t nin fonksiyonu olan ifâdelere geçmek mümkün olacaktır. Bunun için rasyonel birer fonksiyon olan (VI. 11. 8) ve (VI. 12. 5) ifâdeleri önce basit kesirlere ayrılır ve her bir terimin ayrı ayrı ters LAPLACE dönüşmüşü alınır (Bk. 1. cild, EK : IV).

Bu basit kesirlerin haiz oldukları kutup noktalarından herhangi birine p diyelim. Bu reel veyâ $p=\mathrm{A}+j\mathrm{B}$ şeklinde kompleks bir sayı olabilir. Ters LAPLACE dönüşümü yaptığımızda bu kutup noktasından dolayı $\exp(pt)$ şeklinde bir terim ortaya çıkar. Sonsuz küçük bir $d\rho(\omega)$ reaktifliğinin ithâliyle reaktördeki nötron akısının haiz olduğu denge değeri üzerinde hâsıl olan pertürbasyon eğer zamanla sönen bir pertürbasyonsa *"reaktör bu pertürbasyona karşı dengelidir,,* denir. Eğer bu ufak pertürbasyon nötron akısının zamanla her sınırın ötesinde artmasını intâcediyorsa, o zaman da *"reaktörün bu pertürbasyona karşı dengesizlik arzettiği,,* söylenir. Buna göre basit kesirlere ayırmış olduğumuz transfer fonksiyonunun ters LAPLACE dönüşmüşünde karşımıza çıkan $\exp(pt)$ gibi bir terimde p nin reel ve pozitif olması $t \to \infty$ için $\mathrm{N}(t) \to \infty$ demek olacağından, reaktörün denge şartı olarak

$$\boxed{p < 0} \qquad \text{(VI.13.1)}$$

olması gerektiği anlaşılmaktadır.

Transfer fonksiyonunun $p=\mathrm{A}+j\mathrm{B}$ şeklinde kompleks kutup noktalarını haiz olması hâlinde de denge şartı olarak

$$\boxed{\mathrm{A} < 0} \qquad \text{(VI.13.2)}$$

olması gerektiği âşikârdır ; zirâ $\mathrm{A} > 0$ olmasının, genliği gitgide büyümekte olan bir titreşim hâreketine delâlet ettiği mâlûmdur.

Transfer fonksiyonunun herhangi bir dengesizlik arzedip arzetmediği «NYQUİST kriteryumu» ile zarif bir şekilde tesbit edilebilir. Bu kriteryum hakkında daha fazla mâlûmat için bu dersin sonundaki bibliyografyaya baş vurunuz.

14. Reaktör Kinetiğinin Ters Problemi. — Şimdiye kadar hep $\rho(t)$ yi evvelden verilmiş kabul edip buna tekabül eden $N(t)$ yi hesapladık. Nötron yoğunluğunun zamana bağlı muayyen bir tarzda inkişâfına tekabül eden $\rho(t)$ fonksiyonunu tâyin etmek Reaktör Kinetiğinin Ters Problemini teşkil eder.

$\bar{l}_{et}$ i sâbit farzederek (VI. 4b. 7) denklemlerinden hareket etmek sûretiyle bu problemi oldukça kolay bir tarzda çözmek kâbildir. Filhakika bu denklemlerin ikincisini t ya göre integre eder de birincisine ikâme edecek olursak uygun düzenlemelerden sonra

$$\boxed{\rho(t) = \frac{\bar{l}_{et}}{N(t)}\left[\frac{dN(t)}{dt} - \frac{1}{\bar{l}_{et}}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\beta_i\int_{-\infty}^{t} N(t')\exp\left[-\lambda_i(t-t')\right]dt'\right] + \beta} \qquad \text{(VI.14.1)}$$

bulunur.

Buna göre, meselâ, gücü $t=0$ ânından itibaren lineer olarak artan bir reaktör için ρ reaktifliğinin tâkibetmesi gereken programın, $t \leqq 0$ için $N(t) = N_0$ ve $t \geqq 0$ için de $N(t) = N_0 + mt$ olması şartı tahtında

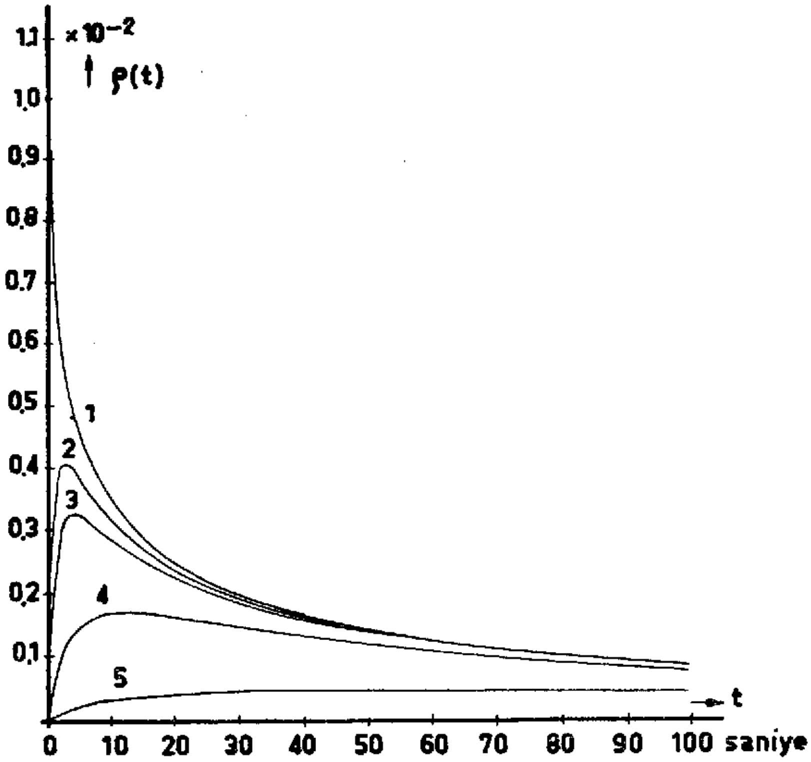
$$\rho(t) = \frac{m\bar{l}_{et}}{N_0 + mt}\left[1 + \sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\bar{l}_{et}\lambda_i}\left(1 - \exp(-\lambda_i t)\right)\right] \qquad \text{(VI.14.2)}$$

ifâdesi ile tâyin edileceği kolaylıkla tesbit edilir.

Kezâ $t=0$ ânından itibâren nötron yoğunluğu $N(t) = N_0 + mt^2$ şeklinde bir değişim tâkibetmesi için $\rho(t)$ nin de

$$\rho(t) = \frac{2mt}{N_0 + mt^2}\left[l^* + \sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right] - \frac{2m}{N_0 + mt^2}\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i^2}\left[1 - \exp(-\lambda_i t)\right] \qquad \text{(VI.14.3)}$$

şeklinde bir program tâkibetmesi icâbettiği de tesbit edilir. Bu program muhtelif m değerleri için Şekil : VI. 15 de gösterilmiş bulunmaktadır.



Şekil : VI. 15. Zamanın kuvadratik bir fonksiyonu olarak değişen nötron yoğunluklarına tekabül eden reaktiflik değişimleri.

BİBLİYOGRAFYA

Reaktör Kinetiği için Bk. :

Soodak *Ed.* : *Reactor Handbook*, 3. cild, Part : A, «*Physics*» ; Interscience Pub., New York, London, 1962.

G. Birkhoff and E. P. Wigner : *Nuclear Reactor Theory, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* ; 11. cild, s. 233 - 328, American Mathematical Society, 1961.

Schultz : *Control of Nuclear Reactor and Power Plants*, 2. baskı ; Mc Graw Hill, New York, Toronto, London, 1961.

H. Grümm und K. H. Höcker : *Lineare Reaktorkinetik und - Störungstheorie, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften* ; 30. cild, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, Göttingen, 1958.

Abdi Dalfes : *Solutions of the Reactor Kinetics Equations,* İst. Tek. Üniv. Nükl. Ener. Enst. Yay. Bülten No : 6, 1962.

Reaktörde üreyen gecikmiş fotonötronlar hakkında etraflı mâlûmat için Bk. :

H. Grümm und K. H. Höcker : *op. cit.* ; s. 235 - 237 ve 272 - 273.

Nyquist kriteryumu için Bk. :

Gille, Pellegrin et Decaulne : *Théorie et Technique des Asservissements ;* Dunod Ed., Paris, 1957.

John G. Truxall : *Control System Syntesis ;* Mc Graw Hill, New York, Toronto, London, 1955.

Reaktörlerin denge durumları (stabilite) için Bk. :

Schultz : *op. cit.*

VII. DERS

Kontrol Çubuklarının Teorisine Giriş

Kontrol çubuklarının nötron yutma kabiliyetlerine göre tasnifi : kara ve külrengi kontrol çubukları - Kontrol çubukları için sınır şartları - Eksenel ve külrengi bir kontrol çubuğu ihtivâ eden bir reaktörün tek gruplu, difüzyon teorisine göre kritikliği - Eksenel ve kara bir kontrol çubuğu ihtivâ eden bir reaktörün tek gruplu difüzyon teorisine göre kritikliği - Eksenel bir kontrol çubuğu ihtivâ eden bir reaktörün iki gruplu difüzyon teorisine göre kritikliği - Eksendışı bir kontrol çubuğu ihtivâ eden silindirik bir reaktörün kritikliği.

1. **Kontrol Çubukları.** — Bu kitabın 1. cildinin V. dersinde de bahsetmiş olduğumuz gibi kontrol çubukları bir reaktördeki reaktifliği depo etmek ve ihtiyaca göre salıvermek üzere nötronları yutma kabiliyeti büyük olan maddelerden müteşekkil çubuklardır. Bunları reaktöre ithâl etmek veyâ dışarı çekmek sûretiyle sistemin, sırasıyla, reaktifliğini azaltmak veyâ arttırmak kâbildir. Reaktör işlemediği zamanlarda bütün kontrol çubukları, genel olarak, sonuna kadar reaktöre ithâl edilmiş bulunurlar. Reaktörü işletmek ve arzu edilen güç seviyesine çıkarabilmek için kontrol çubukları yavaş yavaş reaktörden dışarı çekilmeğe başlanır. Bu arada, reaktörün bundan evvelki işlemesi dolayısıyla reaktörde gizli kalmış ve tamamen sıfıra ircâ olunmamış olan aktivite veyâhut da haricî bir nötron kaynağı vâsıtasıyla çoğaltkan ortamda zincirleme fisyon reaksiyonları inkişâf etmeğe başlar. Çubuklar, emniyet sınırı dâhilinde kalmak şartıyla, reaktör az bir mikdar üstkritik oluncaya kadar dışarı çekilir ve bu pozitif reaktifliğin doğurduğu nötron-akısının (reaktörün gücünün) artışı ortamı istenilen akı (güç) seviyesine ulaştırdıktan sonra çubuklardan biri veyâ birkaçı $k_{et}=1$ olacak şekilde tekrar çoğaltkan ortama ithâl olunur. Bu sûretle kritik olan reaktördeki nötron akısı (reaktörün gücü) arzu edilmiş olan seviyede, istatistiksel fluktuasyonlar hâriç, artık sâbit kalır.

Reaktör durdurulmak istendiği zaman kontrol çubukları hızla çoğaltkan ortama ithâl edilir. Bunun için ya çubukların kendi ağırlıklarından veyâhut da bu iş için özel sûrette düşünülmüş olan bir mancınık sisteminden faydalanılır.

Reaktöre sonuna kadar ithâl edilmiş olduğu zaman, bir kontrol çubuğunun sebep olduğu reaktiflik kaybına kontrol çubuğunun **değeri** adı verilir. Aynı bir kontrol çubuğunun bir reaktörün muhtelif yerlerinde muhtelif değerleri haiz olacağı âşikârdır. Kontrol çubuğu nötron akısının daha kesif olduğu yerlerde daha fazla nötron yutacağından, bu gibi yerlerde daha müessir olacak yâni daha büyük bir değeri haiz olacaktır. Diğer taraftan aynı bir yerdeki kontrol çubuğunun da her zaman aynı değeri haiz olması beklenmemelidir. Filhakika aynı bir yerdeki kontrol çubuğunun değerinin reaktörün gücünün fonksiyonu olarak değiştiği tesbit edilmiştir. Bu olayın bellibaşlı sebeplerinden birisi, reaktörün gücüyle orantılı olarak artan temperaturun kontrol çubuğuna tekabül eden mikroskopik yutulma tesir kesidinde hâsıl ettiği DOPPLER olayıdır.

Şimdi P ile, bir S arayüzeyi ile ayrılmış A ve B gibi iki ortam göz önüne alındığında S yi $A \rightarrow B$ yönünde aşan nötronların B de yutulmaları ihtimâli gösterilirse, B ye

1) $P=1$ olduğu takdirde *«kara»* ortam, ve

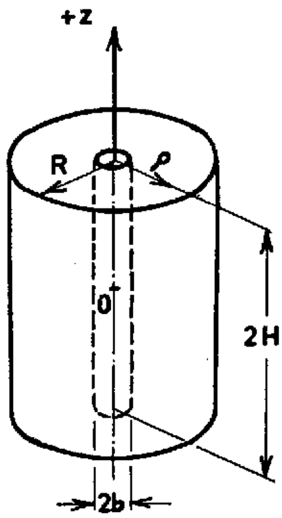
2) $P<1$ olduğu takdirde de *«külrengi»* ortam

adı verilir.

Bu tasnife binâen kontrol çubukları da *«kara»* ve *«külrengi»* kontrol çubukları diye ikiye ayrılabilirler.

2. **Kontrol Çubukları İçin Sınır Şartları.** — Kontrol çubukları için sınır şartlarının tesbitini, bu ders boyunca daima müşahhas bir misâl olarak göz önünde bulunduracağımız, Şekil : VII. 1 deki gibi silindirik bir çoğaltkan ortamın simetri eksenine yerleştirilmiş silindirik bir kontrol çubuğuna nisbetle yapacağız.

Göz önüne alınan eğer *külrengi* bir kontrol çubuğu ise yâni üzerine düşen nötronların hepsini yutmadığından içinde muayyen bir $\phi_B(\rho, z) \neq 0$ olacak şekilde bir nötron akısı mevcutsa, vazedilecek olan sınır şartlarından ikisinin, A çoğaltkan ortamıyla B kontrol çubuğunun $\rho=b$ deki müşterek arayüzlerinde $\phi_A(\rho, z)$ akısının $\phi_B(\rho, z)$ akısına ve mütekabil net nötron akımlarının da kezâ biribirlerine eşitliği şeklinde tezahür edecekleri âşikârdır. Diğer sınır şartları da, bir taraftan çoğaltkan ortamın



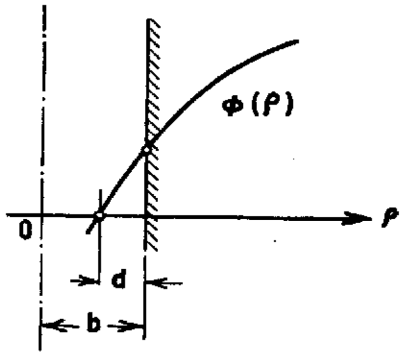
Şekil : VII. 1.

dış sınırlarına tekabül eden uzatılmış (ekstrapole) $\rho=\widetilde{R}$ ve $z=\pm\widetilde{H}$ değerleri için nötron akılarının sıfıra eşit olduklarını, diğer taraftan da kontrol çubuğu içindeki nötron akısının daima sonlu kalması icâbettiğini tesbit edeceklerdir.

Eksenine yerleştirilmiş külrengi bir kontrol çubuğu ihtivâ eden silindirik bir reaktör için sınır şartlarının topluca ifâdesi şu şekli alır :

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \phi_A(\widetilde{R}, z) = \phi_A(\rho, \pm\widetilde{H}) = \phi_B(\rho, \pm\widetilde{H}) = 0 \\
(2) & \phi_B(\rho, z) \text{ her yerde sonlu olmalıdır.} \\
(3) & \phi_A(b, z) = \phi_B(b, z) \\
(4) & D_A\left[\dfrac{\partial\phi_A(\rho, z)}{\partial\rho}\right]_{\rho=b} = D_B\left[\dfrac{\partial\phi_B(\rho, z)}{\partial\rho}\right]_{\rho=b}
\end{array}\right\} \qquad \text{(VII.2.1)}$$

Göz önüne alınan eğer *kara* bir kontrol çubuğu ise üzerine düşen bütün nötronları yutup geriye hiç bir nötron göndermiyor demektir. Bu bakımdan kara bir kontrol çubuğu tıpkı reaktörü çevreleyen boşluk (vakum) gibi davranmaktadır. Bu bölgeye giren herhangi bir nötron çoğaltkan ortamdaki zincirleme fisyon reaksiyonları için artık kaybolmuş demektir. Böylece bu benzerlikten faydalanarak kontrol çubuğuna tekabül eden bir uzatılmış uzunluk ithâli mümkün olmaktadır. Şekil : VII. 2 de görüldüğü gibi d çoğaltkan ortamın, kontrol çubuğunun içine doğru



Şekil: VII. 2. «Kara» bir kontrol çubuğu içine doğru uzatılmış uzunluğun târifi.

uzatılmış uzunluğunu vermektedir. d, **kontrol çubuğunun değil fakat çoğaltkan ortamın nükleer vasıflarının fonksiyonu olarak hesaplanacaktır.** (Niçin ?). $\breve{b}=b-d$ ile târif edilen büyüklüğe *kontrol çubuğunun etkin yarıçapı* adı verilir.

Şimdi $\phi_A(\rho, z)$ yi $\rho=\breve{b}=b-d$ cıvarında bir TAYLOR serisine açalım ; eğer sâdece birinci mertebeden terimlerle iktifâ edip de yüksek mertebeden olanları ihmâl edersek

$$\phi_A(\breve{b}) \cong \phi_A(b) - d \cdot \phi_A'(b) \qquad \text{(VII.2.2)}$$

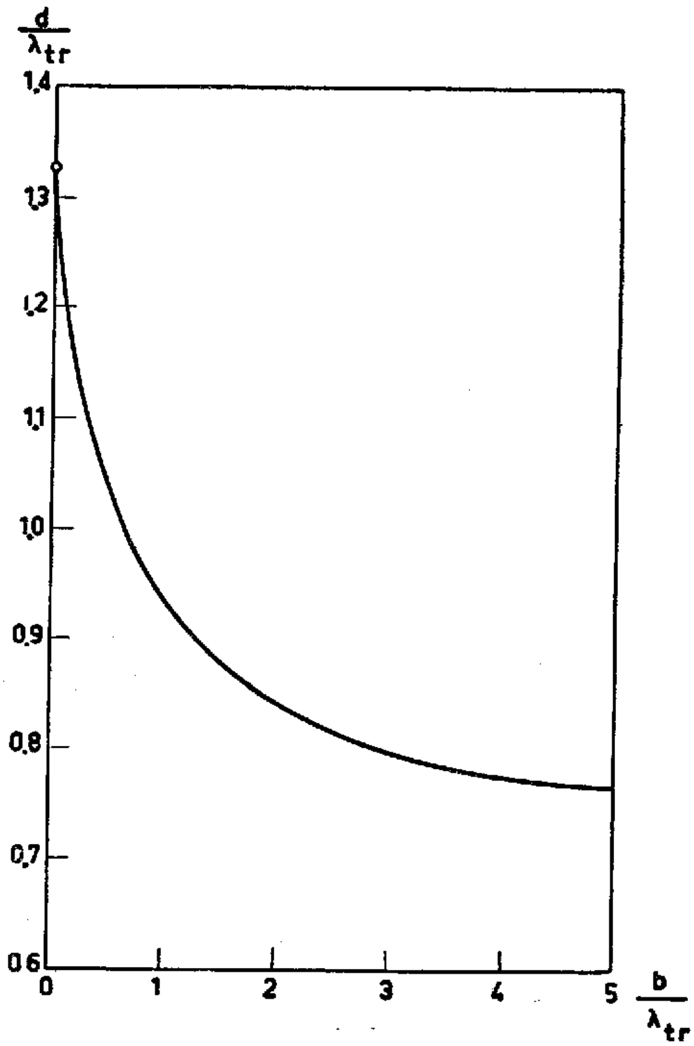
yazabiliriz. Fakat $\rho=\breve{b}$ da $\phi_A(\breve{b})=0$ olacağından bu son ifâde

$$\boxed{\frac{\phi_A(b)}{\phi'_A(b)} = d} \qquad \text{(VII.2.3)}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre ekseninde *kara* bir kontrol çubuğu ihtivâ eden silindirik bir reaktör için sınır şartları da şu şekilde ifâde edilebileceklerdir :

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad \phi_A(\breve{R}, z) = \phi_A(\rho, \pm\breve{H}) = 0 \\ &(2) \quad \frac{\phi_A(b)}{\phi'_A(b)} = d \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.2.4)}$$

Maalesef, kontrol çubuğunun içine uzatılmış olan bu uzunluğun boşlukla çevrili çoğaltkan ortamlar için vârit olduğu gibi basit bir ifâdesini açık olarak vermek mümkün olamamaktadır. Zayıf bir nötron çoğaltma kabiliyeti olan bir ortam içindeki, eğrilik yarıçapı çoğaltkan ortamdaki nötronların ortalama serbest yollarına nisbetle çok büyük olan bir kontrol çubuğu için lineer uzatılmış (ekstrapole) uzunluğun 0.7104 λ_{tr} a eşit olarak kabul edilebileceği mâlûmdur. Diğer taraftan 1. cildin VII. dersinde de söylemiş olduğumuz ve aşağıdaki muhakemenin de teyidettiği gibi eğrilik yarıçapı sıfıra giderse d de $\frac{4}{3}$ λ_{tr} a gitmektedir : filhakika, **sâbit** bir nötron akısının bulunduğu nötron yutmayan bir ortama küçük



Şekil : VII. 3. «Kara» bir kontrol çubuğuna tekabül eden uzatılmış uzunluğun kontrol çubuğunun yarıçapının fonksiyonu olarak değişimi.

bir b yarıçapını haiz *kara* bir küre daldırmış olalım ; yarıçapı çok küçük olduğundan bu kürenin, nötronların açısal dağılımına tesir etmediği kabul edilebilir ; binâenaleyh küreye çarpan nötronların akısı $4\pi b^2 \phi(b)/4$ olur ; diğer taraftan kürenin yüzeyini aşan nötron akımı da

$$4\pi b^2 D \phi'(b) = 4\pi b^2 \frac{\lambda_{tr}}{3} \phi'(b)$$

olacaktır ; fakat küreyi çevreleyen ortam nötron yutucu bir ortam olmadığından kürenin yüzeyine vâsıl olan nötronlarla bu yüzeyi aşanlar biribirlerine eşit olmalıdırlar ; buna binâen ve (VII. 2. 3) târifini göz önünde tutarak

$$d = \frac{\phi(b)}{\phi'(b)} = \frac{4}{3} \lambda_{tr}$$

bulunmuş olur.

Silindirik kara bir kontrol çubuğu için d nin bu iki hâd değer arasındaki değişimi Şekil : VII. 3 de gösterilmiş bulunmaktadır.

3. Külrengi Kontrol Çubuklu Silindirik Reaktör. — Şimdi, ekseninde silindirik bir külrengi kontrol çubuğunu hâvî, kendisi de silindirik olan bir reaktörün kritikliğini ve kontrol çubuğunun ne dereceye kadar müessir olduğunu tek gruplu difüzyon teorisine göre tâyin etmek istiyoruz. Kararlı nötron dağılımı için çoğaltkan ortamdaki (*A bölgesi*) ve kontrol çubuğundaki (*B bölgesi*) ılık nötron akılarının tek gruplu difüzyon teorisi çerçevesi içinde

$$\left.\begin{aligned} & D_A \nabla^2 \phi_A(\rho, z) - \Sigma_{a,A} \phi_A(\rho, z) + k_\infty \exp(-B_g^2 \tau)\, \Sigma_{a,A} \phi_A(\rho, z) = 0 \\ & D_B \nabla^2 \phi_B(\rho, z) - \Sigma_{a,B} \phi_B(\rho, z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII.3.1)}$$

denklemlerini sağlayacakları mâlûmdur.

Bu denklemlerin çözümleri gene değişkenlere ayrışım metoduyla kolaylıkla elde edilir ; (VII. 2. 1) şartlarının ilk ikisinin tatbikiyle ve

$$B_m^2 = \frac{k_\infty \exp(-B_g^2 \tau) - 1}{L^2} \; ; \quad \varkappa_B^2 = \frac{\Sigma_{a,B}}{D_B} \qquad \text{(VII 3.2)}$$

$$\lambda_1^2 = B_m^2 - \left(\frac{\pi}{2\widetilde{H}}\right)^2 \; ; \quad \lambda_2^2 = \varkappa_B^2 + \left(\frac{\pi}{2\widetilde{H}}\right)^2 \qquad \text{(VII.3.2')}$$

vazetmek sûretiyle bu çözümlerin

$$\left.\begin{aligned} \phi_A(\rho, z) &= A \cdot [Y_0(\lambda_1\widetilde{R})J_0(\lambda_1\rho) - J_0(\lambda_1\widetilde{R})Y_0(\lambda_1\rho)] \cos\frac{\pi z}{2\widetilde{H}} \\ \phi_B(\rho, z) &= C \cdot I_0(\lambda_2\rho) \cos\frac{\pi z}{2\widetilde{H}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.3.3)}$$

şeklinde oldukları kolaylıkla tesbit olunur.

Külrengi kontrol çubuğunun sonuna kadar içeri sokulmuş olduğu hâl için reaktörün kritiklik denklemi (VII. 2. 1) şartlarının sonuncusunun tatbikiyle elde edilir :

$$\boxed{\frac{Y_0(\lambda_1\widetilde{R})}{J_0(\lambda_1\widetilde{R})} = \frac{Y_1(\lambda_1 b) - \dfrac{D_B\lambda_2}{D_A\lambda_1}\dfrac{I_1(\lambda_2 b)Y_0(\lambda_1 b)}{I_0(\lambda_2 b)}}{J_1(\lambda_1 b) - \dfrac{D_B\lambda_2}{D_A\lambda_1}\dfrac{I_1(\lambda_2 b)J_0(\lambda_1 b)}{I_0(\lambda_2 b)}}\,.} \qquad \text{(VII.3.4)}$$

Eğer kontrol çubuğunun tamamen reaktörün kalbinin dışına çekilmesinin reaktörde bir boşluk bırakmadığını farzedecek olursak (tıpkı sıvı yavaşlatıcılı reaktörlerde olduğu gibi), reaktörün k_{et} etkin çoğalma katsayısı gene

$$k_{et} = \frac{k_\infty \exp(-B_g^2\tau)}{1 + L^2B_g^2} \qquad \text{(VII.3.5)}$$

bağıntısıyla ifâde olunabilir. k_{et} e tekabül eden $\delta k_{et} = k_{et} - 1$ reaktiflik fazlasını depolamak için kontrol çubuğunun b yarıçapının ne olması gerektiği işte, sonuna kadar ithâl edilmiş kontrol çubuğunu haiz reaktörün kritiklik şartı olan bu transandant (VII. 3. 4) bağıntısından çıkartılabilir.

4. «Kara» Kontrol Çubuklu Silindirik Reaktör. — Üzerine düşen her nötronu yutan, sonuna kadar sokulmuş **kara** bir kontrol çubuğunun mevcûdiyeti tahtında bir reaktörün kritiklik şartını tesis edebilmek için önce sistemdeki nötron akısının sâdece (VII. 3. 1) denklemlerinin ilki tarafından verileceğine dikkati çekelim. Filhakika, üzerine çarpan her nötronu yuttuğundan kara kontrol çubuğunun içinde nötron akısı bulunamaz. Bunu göz önünde tutarak reaktördeki nötron akısına (VII. 2. 4) sınır şartları tatbik edilirse reaktörün kritiklik şartı olarak

$$\boxed{\frac{Y_0(\lambda_1 \widehat{R})}{J_0(\lambda_1 \widehat{R})} = \frac{Y_0(\lambda_1 b) + d \cdot \lambda_1 Y_1(\lambda_1 b)}{J_0(\lambda_1 b) + d \cdot \lambda_1 J_1(\lambda_1 b)}} \qquad \text{(VII.4.1)}$$

ifâdesi elde edilir. Bu transandant denklemden hareket ederek de, kontrol çubuksuz reaktörün haiz olduğu reaktiflik fazlasını depolayıp çoğaltkan ortamın kritik olmasını intâcettirecek şekilde kara kontrol çubuğunun haiz olması gereken b yarıçapını tâyin etmek mümkündür.

Ancak, bu dersin 3. bölümüyle bu bölümdeki bütün hesaplarda ortamdaki nötronları ılık nötronlar olarak kabul etmiş olduğumuzdan ılık nötronların kontrol çubuğu tarafından yutulmalarında sistematik bir mubalağa mevcûd olacağı âşikârdır. Biraz daha sahih bir hesap tarzı nötronları, hiç olmazsa, hızlı ve ılık diye iki enerji gurubuna ayırmakla elde edilecektir. Bu düşünüş tarzında hızlı nötronların kontrol çubuğu tarafından, ihmâl edilebilecek kadar zayıf bir şekilde yutuldukları kabul edliecektir.

5. Kontrol Çubuklarının İki Gruplu Hesabı. — Geçen paragrafın sonunda zikredilen sebebe dayanarak kontrol çubuklarının daha sahih bir teorisi için nötronları hızlı ve ılık olmak üzere iki enerji grubuna ayıralım. Buna göre ϕ_1 hızlı ve ϕ_2 ılık nötron akıları

$$\left.\begin{aligned} D_1\nabla^2\phi_1(\rho, z) - \Sigma_{a,1}\phi_1(\rho, z) + \frac{k_\infty}{p}\Sigma_{a,2}\phi_2(\rho, z) &= 0 \\ D_2\nabla^2\phi_2(\rho, z) - \Sigma_{a,2}\phi_2(\rho, z) + p\Sigma_{yav,1}\phi_1(\rho, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.5.1)}$$

denklemleriyle tâyin edileceklerdir. Bu probleme tekabül eden sınır şartlarını şu tarzda ifâde edebileceğimiz âşikârdır :

Ilık nötronlar için :

$$\left.\begin{aligned} \phi_2(\widehat{R}, z) &= 0 \\ \phi_2(\rho, \pm\widehat{H}) &= 0 \\ \phi_2(\widehat{b}, z) &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \text{(VII.5.2)}$$

Hızlı nötronlar için :

$$\left.\begin{aligned} &\phi_1(\widehat{R}, z) = 0 \\ &\left(\frac{d\phi_1(\rho, z)}{d\rho}\right)_{\varrho=b} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.5.3)}$$

(VII. 5. 3) deki sınır şartlarından sonuncusu kontrol çubuğu ile çoğaltkan ortam arasındaki arayüzey üzerinde net nötron akımının sıfır olduğunu, binâenaleyh kontrol çubuğunda hızlı nötronların herhangi bir yavaşlamaya veyâ yutulmaya mârûz kalmadıklarını ifâde etmektedir. Yalnız bu sınır şartlarında, meseleyi fuzulî yere ağırlaştırmamak gâyesiyle gerek ılık ve gerekse hızlı nötronlara tekabül eden uzatılmış uzunluklar aynı farzedilmiş bulunmaktadırlar.

Dikkatimizi nötron akılarının radyâl kısımlarına teksif edelim. Bu radyâl kısmı R(ρ) ile gösterecek olursak bunun

$$\nabla^2 R(\rho) + \alpha^2 R(\rho) = 0 \qquad \text{(VII. 5. 4)}$$

denklemini tahkik etmesi lâzım geldiğini bilmekteyiz. α^2 de

$$\mu^2 = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{\tau L^2}}\,\right]$$

$$-\nu^2 = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{\tau L^2}}\,\right]$$

gibi iki değer alabiliyordu (Bk. 1. Cilt XVII. Ders). Bu itibarla ve

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 R_1(\rho) + \mu^2 R_1(\rho) = 0 \\ &\nabla^2 R_2(\rho) - \nu^2 R_2(\rho) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.5.5)}$$

olmak üzere hızlı ve ılık nötron akılarının radyâl kısımları

$$\left.\begin{aligned} &\phi_1(\rho) = a_{11} R_1(\rho) + a_{12} R_2(\rho) \\ &\phi_2(\rho) = a_{11} S_1 R_1(\rho) + a_{12} S_2 R_2(\rho) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.5.6)}$$

şeklinde yazılırlar. Burada S_1 ve S_2 ye, bilindiği gibi, kuplâj sâbitleri adı verilmektedir.

Eğer $\delta k_{et} = k_{et} - 1$ çok küçük bir kemmiyet ise

$$\mu^2 \backsimeq \frac{k_{et} - 1}{L^2 + \tau} = \frac{k_{et} - 1}{M^2} \tag{VII.5.7}$$

$$\nu^2 \backsimeq \frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} = \frac{M^2}{\tau L^2} \tag{VII.5.8}$$

yazılabilir ; buna göre S_1 ve S_2 kuplâj sâbitlerinin değerleri de

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{D_1 L^2}{D_2} \\ S_2 &= -\frac{D_1}{D_2} \end{aligned}\right\} \tag{VII.5.9}$$

ye müncer olurlar ve bunların biribirlerine oranı da böylece

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{\tau}{L^2} \tag{VII.5.10}$$

olur.

(VII. 5. 5) denklemlerinin çözümleri

$$\begin{aligned} R_1(\rho) &= c_{11} J_0(\mu\rho) + c_{12} Y_0(\mu\rho) \\ R_2(\rho) &= c_{21} I_0(\nu\rho) + c_{22} K_0(\nu\rho) \end{aligned} \tag{VII. 5. 11}$$

dur.

Ilık ve hızlı nötron akılarının ortamın $\rho = \widetilde{R}$ uzatılmış yarıçapı için sıfır olmaları, gerek $R_1(\rho)$ ve gerekse $R_2(\rho)$ nun $\rho = \widetilde{R}$ için sıfır olmalarıyla tahakkuk eder. Bu sınır şartının tatbikiyle

$$\begin{aligned} R_1(\rho) &= c_{11}\left[J_0(\mu\rho) - \frac{J_0(\mu\widetilde{R})}{Y_0(\mu\widetilde{R})} Y_0(\mu\rho)\right] \\ R_2(\rho) &= c_{22}\left[K_0(\nu\rho) - \frac{K_0(\nu\widetilde{R})}{I_0(\nu\widetilde{R})} I_0(\nu\rho)\right] \end{aligned} \tag{VII.5.12}$$

bulunur.

Şimdi göz önüne aldığımız reaktörün kâfî derecede büyük olduğunu farzedelim ; öyle ki kontrol çubuğunun reaktöre tamamen ithâl edilmesi, reaktörün kontrol çubuksuz kritikliğine tekabül eden μ_0 ın ancak $\Delta\mu$ gibi çok küçük bir artışına sebebiyet versin :

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu \qquad \text{(VII. 5. 13)}$$

μ nün bu değerini (VII. 5. 12) denklemlerinin birincisindeki $J_0(\widehat{\mu R})/Y_0(\widehat{\mu R})$ oranının hesabında kullanalım. Buna göre

$$J_0(\widehat{\mu R}) = J_0[(\mu_0 + \Delta\mu)\widehat{R}] \simeq J_0(\widehat{\mu_0 R}) + \Delta\mu \cdot R \frac{dJ_0(\widehat{\mu_0 R})}{d(\widehat{\mu_0 R})} =$$

$$= J_0(\widehat{\mu_0 R}) - J_1(\widehat{\mu_0 R})\Delta\mu \cdot \widehat{R} \qquad \text{(VII.5.14)}$$

yazılabilir. Hâlbuki kontrol çubuksuz kritik reaktör için $\widehat{\mu_0 R} = 2.405$ olduğunu biliyoruz ; dolayısıyla

$$J_0(\widehat{\mu_0 R}) = 0 \qquad J_1(\widehat{\mu_0 R}) = 0.519 \qquad \text{(VII. 5. 15)}$$

olur, ve $J_0 = (\widehat{\mu R})$ için

$$J_0(\widehat{\mu R}) \simeq -0.519\,\widehat{R} \,.\, \Delta\mu \qquad \text{(VII.5.16)}$$

değeri elde edilir. Öte yandan $\Delta\mu$ nün kabul etmiş olduğumuz gibi, küçük değerleri için

$$Y_0(\widehat{\mu R}) \approx Y_0(\widehat{\mu_0 R}) = 0.510 \qquad \text{(VII. 5. 17)}$$

yazılabilir.

Kritik bir silindirik reaktör için $\mu_0 = 2.405/\widehat{R}$ olması hasebiyle $\widehat{R} = 2.405/\mu_0$ yazılabileceğinden, (VII. 5. 16) ve (VII. 5. 17) ifâdeleri vâsıtasıyla

$$\frac{J_0(\widehat{\mu R})}{Y_0(\widehat{\mu R})} \simeq -\frac{0.519\,\widehat{R} \cdot \Delta\mu}{0.510} = -\frac{0.519}{0.510}\,\frac{2.405}{\mu_0}\,\Delta\mu = -2.45\,\frac{\Delta\mu}{\mu_0} \qquad \text{(VII.5.18)}$$

bulunur.

ρ nun küçük değerleri için $J_0(\mu\rho)$, $Y_0(\mu\rho)$, $I_0(\nu\rho)$ ve $K_0(\nu\rho)$ şu asimtotik ifâdeleri haizdirler (Bk. WATSON : **A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2. baskı, Cambridge University Press, 1944)** :

$$\begin{aligned} J_0(\mu\rho) &\backsimeq 1 \\ Y_0(\mu\rho) &\backsimeq -\frac{2}{\pi}\left(0.116 + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\mu\rho}\right) \\ I_0(\nu\rho) &\backsimeq 0 \\ K_0(\nu\rho) &\backsimeq 0.116 + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\nu\rho}\,. \end{aligned} \tag{VII.5.19}$$

Bu itibarla bir taraftan (VII. 5. 18) ifâdesi, diğer taraftan da (VII. 5. 19) asimtotik değerleri göz önünde tutulmak sûretiyle hızlı nötron akısının $\phi_1(\rho)$ radyâl kısmının :

$$\phi_1(\rho) \backsimeq \alpha\left[1 - 2.44\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\,\frac{2}{\pi}\left(0.116 + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\mu\rho}\right) + \beta\left(0.116 + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\nu\rho}\right)\right] \tag{VII.5.20}$$

şeklinde ifâde edilebileceği anlaşılır ; buradaki α ve β uygun seçilmiş iki sâbittir.

(VII. 5. 3) e göre kontrol çubuğunun $\rho=b$ ile belirlenen yüzeyinde hızlı nötron akısının gradyentinin sıfır olması hasebiyle (VII. 5. 20) ifâdesinin ρ ya göre türevinin $\rho=b$ için sıfır olduğunu yazarsak β için yaklaşık bir değer olarak

$$\beta \backsimeq 2.44\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\cdot\frac{2}{\pi} \tag{VII.5.21}$$

bulunur.

Şimdi dikkatimizi ılık nötron akısına döndürelim. (VII. 5. 6), (VII. 5. 10), (VII. 5. 12), (VII. 5. 18), (VII. 5. 19) ve (VII. 5. 21) vâsıtasıyla ve γ ile gene uygun seçilmiş bir sâbiti göstererek

$$\frac{\phi_2(\rho)}{\gamma S_1} \backsimeq 1 - 2.44\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\cdot\frac{2}{\pi}\left[0.116 + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\mu\rho} + \frac{\tau}{L^2}\left(0.116 + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\nu\rho}\right)\right] \tag{VII.5.22}$$

yazmak kâbildir.

$\Delta\mu$ ye tekabül eden Δk yı, yâni kontrol çubuğunun reaktöre sonuna kadar ithâl olunmak sûretiyle depolayabileceği maksimum reaktiflik fazlasının, şu türlü hesaplanabileceğine işâret edelim :

Kontrol çubuğu reaktöre ithâl edilmediği zaman çoğaltkan ortamın haiz olduğu çoğalma katsayısı $k_{0,et}$ olsun ; buna göre μ_0 ile $k_{0,et}$ arasında

$$\mu_0^2 = \frac{k_{0,et} - 1}{M^2} \tag{VII.5.23}$$

bağıntısı olacaktır. Bu bağıntıyla (VII. 5. 7) bağıntısından faydalanarak

$$\frac{\mu^2 - \mu_0^2}{\mu_0^2} = \frac{(\mu - \mu_0)(\mu + \mu_0)}{\mu_0^2} \backsimeq \frac{\Delta\mu \cdot 2\mu_0}{\mu_0^2} = 2\frac{\Delta\mu}{\mu_0} =$$

$$= \frac{k_{et} - k_{0,et}}{M^2\mu_0^2} = \frac{\Delta k}{M^2\mu_0^2} = \frac{\Delta k}{M^2}\frac{\breve{R}^2}{(2.405)^2} \tag{VII.5.24}$$

yazılabilir. Şu hâlde

$$\frac{\Delta\mu}{\mu_0} = \frac{\Delta k}{2M^2}\frac{\breve{R}^2}{(2.405)^2} \tag{VII.5.25}$$

olur.

Şimdi ılık nötronlar için (VII. 5. 2) sınır şartlarından üçüncüsünü (VII. 5. 22) ye tatbik edecek olursak, $\Delta\mu/\mu_0$ yerine de artık (VII. 5. 25) ile verilen değerini yerleştirmek ve $\mu_0 \approx 2.405/\breve{R}$, $\nu \approx M/L\sqrt{\tau}$ olduğunu da göz önünde tutmak sûretiyle Δk için

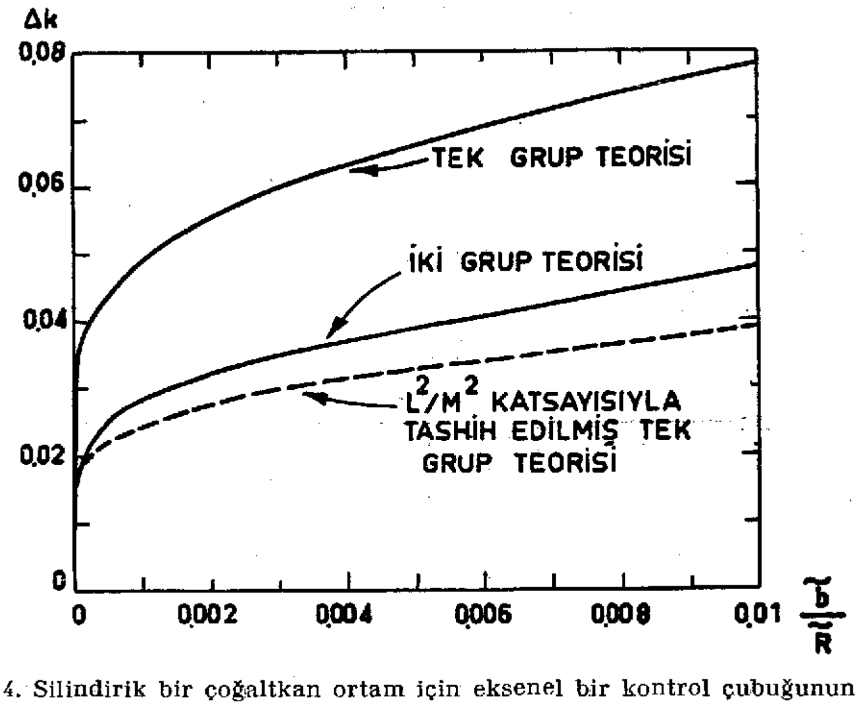
$$\boxed{\Delta k \backsimeq \frac{\dfrac{7.5\,M^2}{\breve{R}^2}}{0.116\left(1 + \dfrac{\tau}{L^2}\right) + \dfrac{\tau}{L^2}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{L\sqrt{\tau}}{M\breve{b}} + \mathrm{Log}\,\dfrac{\breve{R}}{2.4\breve{b}}}} \tag{VII.5.26}$$

ifâdesi elde edilir. Bu, iki gruplu difüzyon teorisine göre R yarıçaplı silindirik bir reaktörün ekseni boyunca yerleştirilmiş b yarıçaplı silindirik bir kontrol çubuğunun depolayabileceği maksimum reaktiflik fazlasını göstermektedir.

(VII. 5. 26) ifâdesinden Δk nın tek guruplu difüzyon teorisine göre haiz olması gereken değerin açık ifâdesini de elde edebiliriz. Bunun için önce tek guruplu difüzyon teorisine göre bütün nötronların ılık olduklarını kabul etmenin, esas itibariyle, nötronların doğar doğmaz, doğdukları noktalarda âniden ılıklaştıklarını kabul etmekle denk olduğuna dikkati çekelim. Buna tekabül eden τ FERMİ çağının özdeş olarak sıfır olması gerektiği âşikârdır. Şu hâlde $\tau \equiv 0$ şartı fisyondan doğan nötronların âni yavaşlayarak ılıklaşmaları şartıdır. Buna binâen (VII. 5. 26) da $\tau = 0$ vazederek elde edilen

$$\boxed{\Delta k \approx \frac{\dfrac{7.5\,M^2}{\widetilde{R}^2}}{0.116 + \operatorname{Log} \dfrac{\widetilde{R}}{2.4\widetilde{b}}}} \qquad \text{(VII.5.27)}$$

ifâdesi de, şu hâlde, ılık nötronların elemanter difüzyon teorisine göre R yarıçaplı silindirik bir reaktörün ekseni boyunca yerleştirlimiş b yarıçapını haiz silindirik bir kontrol çubuğunun depolayabileceği maksimum reaktiflik fazlasını göstermektedir.

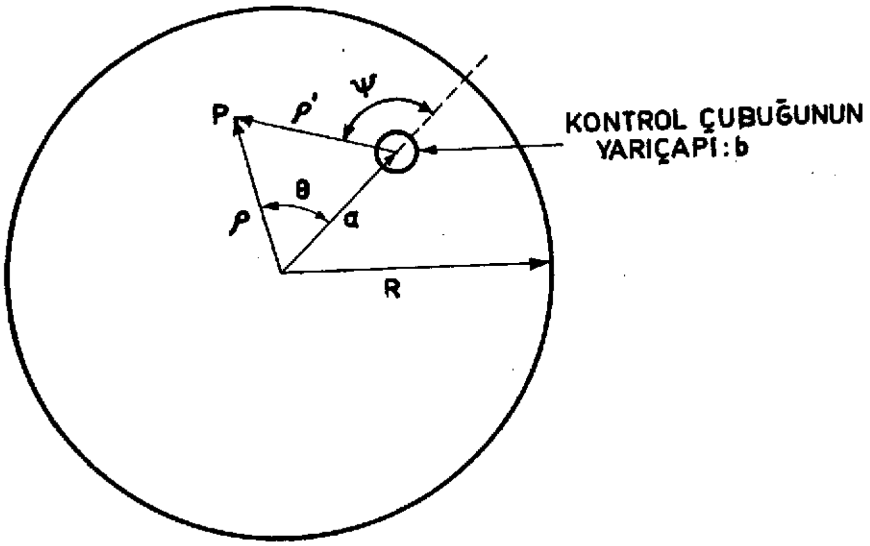


Şekil : VII. 4. Silindirik bir çoğaltkan ortam için eksenel bir kontrol çubuğunun doğurduğu reaktiflik kaybının tek gruplu iki gruplu ve tashih edilmiş tek gruplu difüzyon teorisine göre ve $\widetilde{b}/\widetilde{R}$ nın fonksiyonu olarak değişimleri.

(VII. 5. 26) ve (VII. 5. 27) formüllerini mukayese edebilmek gâyesiyle bunları, muayyen bir reaktör tipi için, $\widetilde{b}/\widetilde{R}$ nın fonksiyonu olarak çizelim (Bk. Şekil : VII. 4). Bu takdirde derhâl göze çarpan şey tek grupla elde edilen Δk değerinin iki grupla elde edilen Δk değerine nisbetle çok mubalâğalı (*takriben % 50 nisbetinde daha fazla*) oluşudur. Öte yandan tek gruba göre Δk yı veren ifâde L^2/M^2 gibi bir tashih katsayısıyla çarpılırsa buna tekabül eden Δk nın da iki gruplu teorinin verdiği ile oldukça mutabakat hâlinde olduğu görülmektedir.

6. Silindirik Bir Reaktördeki Eksendışı Bir Kontrol Çubuğu. — Ekseni reaktörün eksenine paralel fakat onunla çakışmayan silindirik bir kontrol çubuğu göz önüne alındığında (Bk. Şekil : VII. 5) bu durumun doğurduğu simetrisizlik dolayısıyla ϕ nötron akısının yalnız ρ ve z ye değil fakat artık θ azimüt açısına da bağlı olacağı tabiîdir.

Şimdi Şekil : VII. 5 deki gibi bir R yarıçapını ve 2 H yüksekliğini haiz silindirik homogen bir çoğaltkan ortamın merkezine a uzaklığında ve b yarıçapını haiz silindirik bir kontrol çubuğu düşünelim. Çoğaltkan ortamın çıplak olduğunu ve içinde üremekte olan nötronların da eşitenerjili olduklarını farzedeceğiz. Gâyemiz, bu kontrol çubuğu sonuna kadar ithâl edilmiş olduğu takdirde ortamın kritik olabilmesi için b yarıçapının ne olması gerektiğini tâyin etmektir. Bunun için çoğaltkan ortamın muayyen bir k_∞ çoğalma çarpanını haiz olduğu düşünülür ve



Şekil : VII. 5. Eksendışı kontrol çubuğunun teorisi hakkında.

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \qquad \text{(VII.6.1)}$$

şeklinde bir denklemi tahkik etmek üzere, ortamın $\rho = \overset{\frown}{R}$ ve $z = \pm\overset{\frown}{H}$ uzatılmış yüzeylerinde ve bir de kontrol çubuuğnun $\overset{\frown}{b}$ etkin yarıçapında sıfır olan ϕ fonksiyonu aranır.

Çoğaltkan ortamdaki genel nötron akısının, bütün ortamda regüler olan bir ϕ_r akısı ile kontrol çubuğunun bulunduğu yerde bir sengülârite arzeden bir ϕ_s akısının biribirleri üzerine binmesinden hâsıl olduğu kabul edilir ve sonra bu

$$\phi = \phi_r + \phi_s \qquad \text{(VII.6.2)}$$

fonksiyonunun problemin sınır şartlarını tahkik etmesi temin edilir.

Göz önüne aldığımız hâl için (VII. 6. 1) denklemi

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + B^2\phi = 0 \qquad \text{(VII.6.3)}$$

yazılacaktır. $\phi\,(\rho, z, \theta)$ nın

$$\phi\,(\rho, z, \theta) = R(\rho)\,.\,Z(z)\,.\,\Theta(\theta) \qquad \text{(VII. 6. 4)}$$

şeklinde ifâde edilebileceğini farzederek (VII. 6. 3) den

$$\frac{1}{R}(\rho^2 R'' + \rho R') + \frac{\Theta'}{\Theta} + \rho^2\frac{Z''}{Z} + B^2\rho^2 = 0 \qquad \text{(VII.6.5)}$$

bulunur. Buradan regüler eksenel nötron akısının

$$Z(z) = C_1 \cdot \cos\frac{\pi z}{2\overset{\frown}{H}} \qquad \text{(VII.6.6)}$$

ve regüler azimütâl nötron akısının da n - inci modunun

$$\Theta_n(\theta) = C_2\,.\cos n\theta \qquad \text{(VII. 6. 7)}$$

olduğu ve

$$\mu^2 = B^2 - \left(\frac{\pi}{2\widehat{H}}\right)^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} - \left(\frac{\pi}{2\widehat{H}}\right)^2 \qquad \text{(VII.6.8)}$$

vazetmek sûretiyle de radyâl nötron akısının n - inci modunun da

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R = 0 \qquad \text{(VII.6.9)}$$

denklemiyle verildiği bulunur. Bu ise BESSEL tipi bir diferansiyel denklem olduğundan çözümü

$$R_n(\rho) = C_3\, J_n(\mu\rho) + C_4\, Y_n(\mu\rho)$$

şeklindedir. Fakat $\rho = 0$ için $R_n(0) = \infty$ olacağından regüler radyâl nötron akısının $C_4 = 0$ almak sûretiyle

$$R_n(\rho) \sim J_n(\mu\rho) \qquad \text{(VII. 6. 10)}$$

şeklinde olduğu tesbit olunur. (VII. 6. 3) denkleminin lineerliği göz önünde tutulursa (VII. 6. 6), (VII. 6. 7) ve (VII. 6. 10) ifâdelerinden ϕ_r nin ifâdesinin

$$\phi_r = \cos \frac{\pi z}{2\widehat{H}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n' J_n(\mu\rho) \cos n\theta \qquad \text{(VII.6.11)}$$

şekline müncer olduğunu görmek kolaydır.

Nötron akısının sengüler kısmını bulmak için (VII. 6. 3) denklemi, orijin olarak kontrol çubuğunun merkezi alınmak sûretiyle çözülür. Bu takdirde eksenel nötron akısında bir değişiklik olmaz. Sengüler nötron akısının kontrol çubuğu cıvarındaki açısal değişimin m - inci modunun da, buna tekabül eden diferansiyel denklemi çözerek

$$\Theta_{sm}(\theta) = E'_m \cos m\psi + F'_m \sin m\psi \qquad \text{(VII. 6. 12)}$$

ile verileceğini tesbit etmek kolaydır. m-inci moda tekabül eden sengüler radyâl akının genel olarak

$$R_m(\rho') = C_3'\, J_m(\mu\rho') + C_4'\, Y_m(\mu\rho')$$

ifâdesiyle verildiği tesbit olunur. Fakat $\rho'=0$ için yâni kontrol çubuğunun ekseninde, $J_n(\mu\rho')$ fonksiyonu sonlu bir değeri haiz olup çubuğun nötron yutuculuğuna tesir etmeyeceğinden m-inci moddaki sengüler radyâl nötron akısı

$$R_m(\rho') \sim Y_m(\mu\rho') \tag{VII. 6. 13}$$

şeklinde olacaktır. (VII. 6. 3) denkleminin lineerliği göz önüne alındığında ϕ_s için nihâyet

$$\phi_s = \cos \frac{\pi z}{2\widetilde{H}} \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(\mu\rho') \left[E_m \cos m\psi + F_m \sin m\psi\right] \tag{VII.6.14}$$

ifâdesi bulunmuş olur.

Burada $Y_m(m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ fonksiyonlarının, (VII. 6. 3) denklemini kontrol çubuğunun eksenine göre çözerken, değişkenlere ayrışım dolayısıyla ortaya çıkan ve çözümü (VII. 6. 12) olan diferansiyel denklem sebebiyle sonsuz sayıda olduklarına işâret edelim. Eğer kontrol çubuğunun civarındaki nötron akısının ψ azimüt açısına bağlılığı ihmâl edilecek olursa, A muayyen bir sâbit olmak üzere, ϕ_s nin de

$$\phi_s = A \cos \frac{\pi z}{2\widetilde{H}}\, Y_0(\mu\rho') \tag{VII.6.15}$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Böylece genel nötron akısının (VII. 6. 11) ve (VII. 6. 15) ifâdelerine binâen ve $A_n'/A = A_n$ vazederek :

$$\phi = \phi_r + \phi_s = A \cos \frac{\pi z}{2\widetilde{H}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(\mu\rho) \cos n\theta + Y_0(\mu\rho')\right] \tag{VII.6.16}$$

şeklinde olduğu bulunur. Bu ifâdeyi daha kullanışlı bir şekle sokmak için BESSEL fonksiyonlarının toplam teoreminden istifâde edelim (Bk. WATSON : *op. cit.*). Şekil : VII. 5 i de göz önünde bulundurmak sûretiyle bu teoreme göre $Y_0(\mu\rho')$ yerine

$$Y_0(\mu\rho') = Y_0(\mu\rho)J_0(\mu a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\mu\rho)J_n(\mu a) \cos n\theta \tag{VII.6 17}$$

yazabiliriz. Bu takdirde ϕ ye reaktörün $\rho = \overset{\frown}{R}$ uzatılmış yüzeyinde sıfır olması şartını tatbik edersek (VII. 6. 16) ve (VII. 6. 17) ye göre

$$\phi(\overset{\frown}{R}) = A \cos \frac{\pi z}{2\overset{\frown}{H}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(\mu \overset{\frown}{R}) \cos n\theta + Y_0(\mu \overset{\frown}{R}) J_0(\mu a) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\mu \overset{\frown}{R}) J_n(\mu a) \cos n\theta \right] = 0 \qquad \text{(VII.6.18)}$$

olur. Şimdi

$$n = 0 \quad \text{için} \quad \varepsilon_n = 1$$

$$n > 0 \quad \text{için} \quad \varepsilon_n = 2$$

olacak şekilde bir büyüklük târif ederek (VII. 6. 18) in

$$\phi(\overset{\frown}{R}) = A \cos \frac{\pi z}{2\overset{\frown}{H}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n J_n(\mu \overset{\frown}{R}) + \varepsilon_n Y_n(\mu \overset{\frown}{R}) J_n(\mu a) \right] \cos n\theta = 0 \qquad \text{(VII.6.19)}$$

tarzında yazılacağı görülür. Buradan, derhâl

$$A_n = - \frac{\varepsilon_n Y_n(\mu \overset{\frown}{R}) J_n(\mu a)}{J_n(\mu \overset{\frown}{R})} \qquad \text{(VII.6.20)}$$

olduğu bulunur. Buna göre ϕ nin nihaî ifâdesi olarak da

$$\phi = A \cos \frac{\pi z}{2\overset{\frown}{H}} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n Y_n(\mu \overset{\frown}{R}) J_n(\mu a)}{J_n(\mu \overset{\frown}{R})} J_n(\mu \rho) \cos n\theta + Y_0(\mu \rho') \right] \qquad \text{(VII.6.21)}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci sınır şartı olarak da radyâl nötron akısının kontrol çubuğunun içine doğru uzatılmış uzunlukta yâni $\rho' = \overset{\frown}{b}$ etkin yarıçapında sıfır olacağını yazalım. Maalesef bu keyfiyeti (VII. 6. 21) de $\rho' = \overset{\frown}{b}$ vazetmekle tebarüz ettiremeyiz. En iyisi bunu kontrol çubuğunun içine doğru uzatılmış uzunluğun târifi olan

$$\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\rho'}\right)_{\varrho'=b} = \frac{1}{\widehat{b}-b} = \frac{1}{d} \qquad \text{(VII.6.22)}$$

bağıntısından hareket ederek ifâde etmektir. Bu şartı tatbik ederken $\rho=a$, $\rho'=b$ ve $\theta=0$ almak lâzımdır. Buna binâen ve

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho'} = -A\mu\cos\frac{\pi z}{2\widehat{H}}\, Y_1(\mu\rho') \qquad \text{(VII.6.23)}$$

olmasından dolayı (VII. 6. 21) ve (VII. 6. 22) den

$$\boxed{\mu Y_1(\mu b) + Y_0(\mu b)\cdot d = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n Y_n(\mu\widehat{R}) J_n^2(\mu a)}{J_n(\mu\widehat{R})}\cdot d} \qquad \text{(VII.6.24)}$$

bulunur. Bu ifâde, ekseninin haricinde fakat ona paralel silindirik bir kontrol çubuğu ihtivâ eden silindirik bir reaktör için kritiklik denklemini teşkil etmektedir.

Bu kritiklik denklemini çözebilmek için şöyle hareket edilir : meselâ k_∞ üzerinde muayyen bir fark husûle getirecek olan b yarıçapı aranmak istendiği takdirde (VII. 6. 8) bağıntısından μ^2 tesbit edilir ; ve reaktörün uzatılmış $\widehat{R}$ yarıçapı ve kontrol çubuğunun reaktör eksenine olan a uzaklığı mâlûm olduğundan b yi (VII. 6. 24) den bir iterasyon işlemiyle tâyin etmek mümkün olur.

Reaktörde birden fazla kontrol çubuğu bulunduğu takdirde hesaplarda tâkibedilecek olan metot ana hatlarıyla bu bölüm boyunca izah edilenin aynısıdır. Yalnız bu takdirde ortamdaki nötron akısı mûtad değişkenlerden ve parametrelerden başka bir de kontrol çubuklarının biribirlerine izâfî uzaklıklarının fonksiyonu olacaktır. Bu itibarla her kontrol çubuğu dağılımının en müessir dağılım olmayacağı âşikârdır. Ortamda meselâ iki kontrol çubuğu bulunsa

1) bunların tesirleri bir maksimum arzedecek şekilde aralarındaki uzaklığı âyarlamanın mümkün olduğu, ve

2) muayyen bir uzaklıktan sonra da kontrol çubuklarının toplam tesirlerinin her birinin münferit tesirinin toplamından daha büyük olduğu yâni başka bir deyişle kontrol çubuklarının mesâfesi bu muayyen uzaklıktan daha küçükse bunların toplam tesirlerinin, her birinin münferit tesirinin toplamından daha küçük olacağı gösterilmiştir (**kontrol çubuklarının biribirlerini gölgelemeleri olayı**).

VIII. DERS

Pertürbasyon Teorisi

Pertürbasyon teorisinin matematik esasları - Kendi kendine ek operatörler - Ek operatörler - Pertürbasyon teorisinin fizikî esasları - Pertürbasyon operatörü - İstatistiksel ağırlık - Önem fonksiyonu kavramı - Çok gruplu difüzyon teorisinde pertürbasyon hesabı - Pertürbasyon matrisi.

1. **Pertürbasyon Teorisinin Matematik Esasları.** — Çoğaltkan ortamlarda husûle gelen pertürbasyonların teorisine girişmeden önce bu bahiste sık sık kullanacağımız bazı matematik kavramları gözden geçirmek faydalı olacaktır. Bunlardan biri ek operatör kavramıdır. Bu kavramı izah etmeden önce de buna sıkı sıkıya bağlı bazı hususları bir kere daha hatırlatmakta fayda vardır.

Muayyen bir R bölgesinde târif edilmiş bir $\phi(\vec{r})$ fonksiyonuna lineer bir $\mathbf{O}$ operatörü [1] tatbik etmek onu bir dönüşüme tâbî tutmaktır. $\vec{r}$ yervektörü R de $\phi(\vec{r})$ yi çizerken $\mathbf{O}$ nun tasvir bölgesi olan R' de de $\mathbf{O}\phi(\vec{r})$ elde edilir. Özel olarak eğer $\phi(\vec{r})$ ye $\mathbf{O}$ nun tatbikinin neticesinde, λ gibi bir sâbit çarpan yaklaşıklığıyla gene $\phi(\vec{r})$ fonksiyonu elde ediliyorsa, yâni

$$\mathbf{O}\phi(\vec{r}) = \lambda\phi(\vec{r}) \qquad \text{(VIII. 1.1)}$$

şeklinde bir bağıntı varsa bunu gerçekleyen λ ve $\phi(\vec{r})$ ye sırasıyla $\mathbf{O}$ nun **özdeğeri** ve bu özdeğere tekabül eden **özfonksiyonu** adı verilir. (VIII.

(1) ϕ ve ψ gibi fonksiyonlar üzerine tatbik edilen bir $\mathbf{O}$ operatörünün lineerliği, a ile bir skaleri göstermek üzere,

$$\mathbf{O}(\phi+\psi) = \mathbf{O}\phi + \mathbf{O}\psi \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{O}(a\phi) = a\mathbf{O}\phi$$

bağıntıları ile târif edilir.

1. 1) i sağlayan λ sâbitlerini ve bunlara tekabül eden bütün $\phi(\vec{r})$ fonksiyonlarının araştırılması **O** operatörünün özdeğer problemini teşkil eder. Bir operatörün haiz olduğu bütün özdeğerler **operatörün spektrumunu** meydana getirirler. Lâlettâyin bir **O** operatörünün özdeğerleri ya sonlu, ya da sonsuz sayıda olabildiği gibi münferit veyâ sürekli değerler de alabilirler. Bundan başka belirli bir özdeğere birden fazla farklı fonksiyonun tekabül etmesi hâlinde özdeğer probleminin soysuzlaşmış olduğu söylenir.

Bazı hâllerde **O** nun özfonksiyonları dik (ortogonâl) bir fonksiyon dizisi meydana getirebilirler. Bu takdirde

$$\int_R \phi_i^*(\vec{r})\phi_j(\vec{r})d\vec{r} = \begin{cases} \gamma = \text{sâbit} & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \qquad \text{(VIII.1.2)}$$

şeklinde diklik bağıntıları cârî olur [2]. Burada ϕ_i ve ϕ_j ile **O** nun iki özdeğeri gösterilmiştir. ϕ_i nin kompleks eşleniğinin alınması özfonksiyonların kompleks fonksiyonlar dahi olabilmeleri ihtimâline tekabül etmektedir. ϕ_i reel ise kompleks eşleniği gene kendisi olacağından (VIII. 1. 2) târifi diklik şartlarının şimdiye kadar görmüş olduğumuzdan daha geniş bir teşmilini teşkil etmektedir. Diklik şartının ifâdesindeki integrale ϕ_i ve ϕ_j fonksiyonlarının **iç çarpımı** adı verilir.

Şimdi (VIII. 1. 1) denklemini λ_i ve λ_j gibi iki farklı özdeğer için göz önüne alalım :

$$\mathbf{O}\phi_i = \lambda_i\phi_i$$

$$\mathbf{O}\phi_j = \lambda_j\phi_j$$

Bunlardan birincisinin soldan ϕ_j ile ve ikincisinin de sağdan ϕ_i ile iç çarpımlarını teşkil edip taraf tarafa biribirlerinden çıkartalım :

$$\int_R \phi_j^*\mathbf{O}\phi_i d\vec{r} - \int_R (\mathbf{O}\phi_j)^*\phi_i d\vec{r} = (\lambda_i - \lambda_j^*)\int_R \phi_j^*\phi_i d\vec{r}. \qquad \text{(VIII.1.3)}$$

---

[2] (VIII. 1. 2) diklik târifinde özdeğerlerden hangisinin kompleks eşleniğinin alınacağı sâdece bir kabul meselesidir. Meselâ mezkûr formülde $\phi_i(\vec{r})$ yerine $\phi_j(\vec{r})$ nin kompleks eşleniğini almak sûretiyle de diklik bağıntıları yazılabilirdi. Yalnız târif olarak ne kabul edilmişse bütün hesaplarda aynı sırayı muhafaza etmek zarurîdir.

Eğer **O** nun özfonksiyonları dik bir fonksiyon dizisi meydana getiriyorlarsa bu son ifâdenin sağ yanı bütün i, j sayı çiftleri için sıfır olur ve böylece :

$$\boxed{\int_R \phi_j^* \mathbf{O} \phi_i \, d\vec{r} = \int_R (\mathbf{O}\phi_j)^* \phi_i \, d\vec{r}} \tag{VIII.1.4}$$

bulunur. Karşıt olarak, eğer **O** operatörü (VIII. 1. 4) özelliğini haizse bunun özfonksiyonlarının dik bir fonksiyon dizisi teşkil edecekleri (VIII. 1. 3) den derhâl görülür. Buna göre (VIII. 1. 4) bağıntısını gerçekleyen bir operatöre **kendi kendine ek operatör** adı verilir. Böylece şu mühim teoremi ispat etmiş olmaktayız :

TEOREM : *Lineer bir operatörün kendi kendine ek olabilmesi için gerek ve yeter şart bunun özfonksiyonlarının dik bir fonksiyon dizisi teşkil etmeleridir.*

Biz bu derste daha ziyâde diferansiyel matris operatörleriyle meşgûl olacağımızdan şimdi de özdeğer probleminin ve iç çarpımın bu tip operatörler için ne gibi özellikler arzettiklerine işâret edelim. Bunun için bileşenleri, sırasıyla, $\phi^1(\vec{r})$, $\phi^2(\vec{r}), \ldots,$ $\phi^n(\vec{r})$ olan bir vektörü

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi^n \end{bmatrix} \tag{VIII.1.5}$$

şeklinde bir sütûn matrisle göstereceğiz ve buna bir sütûn-vektör adını vereceğiz. T indisi ile işâret edeceğimiz ve **transpozisyon** adını vereceğimiz işlemi, bu sütûn-vektörü bir satır-vektöre dönüştüren işlem olarak târif edeceğiz ve bunu

$$\Phi_T(\vec{r}) = (\phi^1 \, \phi^2 \, . \, . \, . \, . \, . \, \phi^n) \tag{VIII.1.6}$$

ile göstereceğiz. $\Phi_T(\vec{r})$ ye $\Phi(\vec{r})$ nin **transpozesi** de denir. Kezâ, $\Phi(\vec{r})$ nin de $\Phi_T(\vec{r})$ nin transpozesi olduğu âşikârdır. Buna göre aynı bir vektöre ardarda tatbik olunan iki transpozisyon işleminin vektörü invaryant bıraktığı, yâni değiştirmediği, kolayca görülmektedir. Transpozisyon işlemini kare matrisler için de târif etmek kâbildir. Buna göre bir kare matrisin transpozesi matrisin satırlarıyla sütûnlarını mübâdele etmek sûretiyle elde edilecektir. Gene kolaylıkla görülür ki bir kare matrise ardarda tatbik olunan iki transpozisyon işlemi bu matrisi invaryant bırakmaktadır.

I ile esas köşegenindeki elemanları bire, diğerleri de sıfıra eşit olan birim matrisi gösterirsek bir **O** kare matrisine tekabül eden özdeğer problemi

$$\mathbf{O}\,\Phi=\lambda\,\mathbf{I}\,\Phi \tag{VIII. 1. 7}$$

veyâhut da

$$(\mathbf{O}-\lambda\,\mathbf{I})\,\Phi=0 \tag{VIII. 1. 8}$$

şeklinde ifâde olunabilir. Bu hâliyle (VIII. 1. 8) in, esas itibâriyle, ihtivâ ettiği denklem sayısınca bilinmeyeni haiz homogen bir denklem sistemi olduğu âşikârdır. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümleri olabilmesi için esas determinantının özdeş olarak sıfıra eşit olması icâbeder :

$$|\,\mathbf{O}-\lambda\mathbf{I}\,|\equiv 0\,. \tag{VIII.1.9}$$

Bu ise λ için, genel olarak, sistemdeki bilinmeyen sayısınca, meselâ n adet λ_i özdeğerinin hesaplanmasını mümkün kılar. Belirli bir λ_i değerine tekabül eden ve

$$\mathbf{O}\phi_i=\lambda_i\,\mathbf{I}\,\phi_i$$

denkleminin çözümünü teşkil eden

$$\Phi_i=\begin{bmatrix}\phi_i^1\\ \phi_i^2\\ \vdots\\ \vdots\\ \phi_i^n\end{bmatrix} \tag{VIII.1.10}$$

sütûn-vektör fonksiyonu **O** matris operatörünün bir özvektördür.

Bu formalizm çerçevesi içinde iki vektörün iç (skaler) çarpımı

$$\int_R \Psi_T^* \Phi \, d\vec{r} = [\Psi, \Phi] \qquad \text{(VIII.1.11)}$$

ifâdesiyle târif olunacaktır.

Bu arada önemli bir husus olarak bir matris çarpımında kompleks eşlenikleri veyâ transpozeleri alınan matrislerin sıralarının şu kaidelere uygun olarak değiştiğini hatırda tutmak lâzımdır :

$$(\mathbf{ABCD})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\mathbf{C}^*\mathbf{D}^* \ , \quad (\mathbf{ABCD})_T = \mathbf{D}_T\mathbf{C}_T\mathbf{B}_T\mathbf{A}_T . \qquad \text{(VIII.1.12)}$$

Şimdi, bir **O** operatörü kendi kendine ek değilse yâni **O** nun özfonksiyonları târif bölgelerinde dik bir fonksiyon dizisi meydana getirmiyorlarsa **O** nun ve buna tekabül eden özfonksiyonların yardımıyla öyle bir $\mathbf{O}^+$ operatörü inşâ edebileceğimizi göstereceğiz ki bunun özfonksiyonlarıyla **O** nun özfonksiyonları arasında bunların müşterek târif bölgesi olan R de diklik bağıntıları câri olsun. Bunun için gerek **O** ya ve gerekse $\mathbf{O}^+$ a tekabül eden özdeğer problemlerini beraberce yazalım :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}\Phi &= \lambda\Phi \\ \mathbf{O}^+\Psi &= \mu\Psi \end{aligned} \qquad \text{(VIII.1.13)}$$

ve $\mathbf{O}^+$ operatörünün istenilen özelliğe sâhip olması için, **O** operatörü ile aralarında

$$[\Psi, \mathbf{O}\Phi] = [\mathbf{O}^+\Psi, \Phi] \qquad \text{(VIII.1.14)}$$

şeklinde bir bağıntının, yâni

$$\int_R \Psi_T^* \mathbf{O}\Phi \, d\vec{r} = \int_R (\mathbf{O}^+\Psi)_T^* . \Phi \, d\vec{r} \qquad \text{(VIII.1.15)}$$

bağıntısının mevcûd olmasının gerek ve yeter bir şart olduğunu gösterelim. Filhakika (VIII. 1. 13) denklemlerinin birincisinin Ψ ile soldan ve ikincisinin de Φ ile sağdan iç (skaler) çarpımını teşkil eder de biribirlerinden taraf tarafa çıkartırsak $\mathbf{O}^+$ ın (VIII. 1. 14) ile verilmiş olan târifini göz önünde bulundurmak sûretiyle ve **O** nun muayyen bir λ_i özdeğeriyle $\mathbf{O}^+$ ın muayyen bir μ_j özdeğeri için

$$(\lambda_i - \mu_j^*)[\Psi_j, \Phi_i] = [\Psi_j, \mathbf{O}\Phi_i] - [\mathbf{O}^+\Psi_j, \Phi_i] \qquad \text{(VIII.1.16)}$$

bulunur ki bu da O^+ ı (VIII. 1. 14) ile târif ettiğimiz takdirde ve $\lambda_i \neq \mu_j^*$ ise hakikaten **O** nun özfonksiyonları olan Φ -lerle O^+ ın özfonksiyonları olan Ψ ler arasında diklik bağıntılarının mevcûdiyetini göstermektedir. Tersine olarak eğer Φ lerle Ψ ler arasında diklik bağıntıları varsa (VIII. 1.16) ifâdesinden O^+ ın (VIII. 1. 14) bağıntısını gerçeklemek zorunda olduğu neticesi çıkar. Bu sûretle târif edilmiş olan O^+ operatörüne **O** ya **ek operatör** denir.

Şimdiye kadar sâdece O^+ ın târifini vermekle iktifâ ettik ve O^+ ı bilfiil inşâ edebilmek için pratik bir kaide vermedik. O^+ ın **O** ya olan sıkı bağlılığını anlayabilmek için O^+ ın daha açık bir târifi olan (VIII. 1. 15) ifâdesini göz önünde bulundurmak lâzımdır. Matris çarpımının transpozisyonu hakkında (VIII. 1. 12) ile vermiş olduğumuz kaideyi de nazar-ı itibara alarak

$$\int_R \Psi^*_T O \Phi d\vec{r} = \int_R (O^+\Psi)_T^* \Phi \, d\vec{r} = \int_R \Psi_T^*(O^+)_T^* \Phi \, d\vec{r} \qquad \text{(VIII.1.17)}$$

yâni

$$O = (O^+)_T^*$$

veyâhut da her iki tarafın kompleks eşleniğini ve transpozesini alırsak

$$\boxed{O^+ = O_T^*} \qquad \text{(VIII.1.18)}$$

olduğu bulunur. Şu hâlde + işlemi bir matrisin elemanlarının kompleks eşleniğini aldıktan sonra matrisin transpozesini almağa (veyâ, aynı şey olmak üzere, bir matrisin transpozesini aldıktan sonra transpoze matrisin elemanlarının kompleks eşleniklerini almağa) delâlet etmektedir.

2. Pertürbasyon Teorisinin Fizikî Esasları. — Çoğaltkan bir ortamın mütemâyiz vasıflarının küçük değişimlerine pertürbasyon adı verilir. Meselâ, fisyon ürünlerinden Sm, Xe ve I un birikmesi çoğaltkan bir ortamın ortalama makroskopik yutulma tesir kesidinde bir pertürbasyon icrâ eder. Pertürbasyonlara diğer bir misâl olarak da bir reaktördeki kontrol çubuklarından birinin az bir miktar hareket ettirilmesiyle çoğaltkan ortamda meydana gelen reaktiflik değişikliği gösterilebilir.

Çoğaltkan bir ortamda yutulma tesir kesidi, difüzyon katsayısı ve nötronların ortalama ömürleri üzerinde vuku bulan pertürbasyonları daima k_∞ çoğalma katsayısının veyâhut da kritiklik denklemi vâsıtasıyla ortamın kritik boyutlarının üzerinde vuku bulan pertürbasyonlar olarak ifâde etmek mümkündür.

Eğer çoğalma katsayısı k_∞ olan bir ortamda vuku bulan bir pertürbasyon bütün ortamda birbiçim ise yâni ortamın her noktasında aynı değeri iktisâbediyorsa, ortamın bu pertürbasyonun tesiri altında haiz olacağı f', p', ε', η' v.s. gibi yeni mikroskopik özelliklerini mâlûm formülleriyle hesaplayarak buradan pertürbasyona mârûz kalmış olan ortamın yeni k'_∞ çoğalma katsayısı hesaplanabilir ve böylece

$$\delta k = k'_\infty - k_\infty$$

pertürbasyonu ve buna tekabül eden ϕ' nötron akısı tâyin edilebilir.

Fakat sistemde vuku bulan bir pertürbasyon, eğer sistemin bütününü değil de sâdece muayyen bir veyâ birkaç alt bölgesini veyâ noktasını ilgilendiriyorsa bu bölge veyâ noktalarda husûle gelen pertürbasyonların çoğaltkan ortamın bütünü üzerinde nasıl bir tesir icrâ ettikleri kolaylıkla kestirilemez. İşte çoğaltkan ortamlar için pertürbasyon teorisi, ortamdaki bu gibi mevzî değişimlerin sistemin glôbâl özellikleri üzerinde ne gibi tesirler icrâ ettiklerini araştırır.

Difüzyon teorisinde kritik bir ortamdaki ϕ_0 kararlı nötron akısını veren diferansiyel denklem

$$\vec{\nabla} D(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_0(\vec{r}, u) - \Sigma_a(\vec{r}, u) \phi_0(\vec{r}, u) + k_\infty \exp[-B_g^2 \tau(u)] \Sigma_a(\vec{r}, u) \phi_0(\vec{r}, u) = 0 \qquad \text{(VIII.2.1)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada genelliği sağlamak için D nin yervektörüne ve Σ_a ile ϕ_0 ın da hem yervektörüne ve hem de u letarjisine bağlı oldukları farzedilmiştir. Şimdi, eğer biri nötron tüketimine ve diğeri de nötron üretimine işâret etmek üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -\vec{\nabla} D(\vec{r}) \vec{\nabla} + \Sigma_a(\vec{r}, u) \\ k_\infty \mathbf{U} &= k_\infty \exp[-B_g^2 \tau(u)] \Sigma_a(\vec{r}, u) \end{aligned} \qquad \text{(VIII.2.2)}$$

şeklinde bir tüketim ve bir de üretim operatörü târif edecek olursak (VIII. 2. 1) denklemini kısaca

$$(\mathbf{T} - k_\infty \mathbf{U})\phi_0 = 0 \qquad \text{(VIII.2.3)}$$

yazmak kâbil olacaktır.

Şimdi, sistem içinde muayyen bir bölgede bir pertürbasyonun vuku bulduğunu düşünelim. Bu pertürbasyon hasebiyle sistemin çoğalma katsayısı da δk kadar bir değişim kaydedecektir. Eğer çoğaltkan ortama dışarıdan ve pertürbasyonun vuku bulduğu alt bölge veyâ noktada $-\delta k$ kadar bir reaktiflik ithâl etseydik ortamdaki ilk pertürbasyon ifnâ olmuş olur ve sistem gene aynı k_∞ çoğalma katsayısını ve (VIII. 2. 1) denklemini tahkik eden bir ϕ_0 kararlı nötron akısını haiz olurdu. Bu itibarla biz de göz önüne almış olduğumuz pertürbasyona mârûz kalmış olan sisteme, tekrar kritik olabilmesini sağlayacak olan $-\delta k$ reaktifliğini hayâlen ithâl edelim. Böylece, pertürbasyona uğramış büyüklükleri de üslerle (′) göstererek,

$$[\mathbf{T}' - (k_\infty - \delta k)\mathbf{U}']\phi_0'(\vec{r}, u) = 0 \qquad \text{(VIII.2.4)}$$

olurdu.

Şimdi de gerek **T** ve **U** operatörlerine ve gerekse $\phi_0'(\vec{r}, u)$ nötron akısına müessir olan pertürbasyonun

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{T} + \delta\mathbf{T} \\ \mathbf{U}' &= \mathbf{U} + \delta\mathbf{U} \\ \phi_0'(\vec{r}, u) &= \phi_0(\vec{r}, u) + \delta\phi_0(\vec{r}, u) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.2.5)}$$

şeklinde olduğunu ve herhangi iki büyüklük üzerindeki pertürbasyonların çarpımının, ikinci mertebeden sonsuz küçük bir ifâde olmak hasebiyle, ihmâl edilebileceğini farzedelim. Bu takdirde, $\phi_0(\vec{r}, u)$ nun (VIII. 2. 3) ü tahkik etmekte olduğu keyfiyetini de göz önünde tutarak, (VIII. 2. 5) ifâdelerinin yardımıyla (VIII. 2. 4) denkleminden

$$(\mathbf{T} - k_\infty \mathbf{U})\, \delta\phi_0(\vec{r}, u) + (\delta\mathbf{T} - k_\infty \delta\mathbf{U})\phi_0(\vec{r}, u) = -\delta k \cdot \mathbf{U}\phi_0(\vec{r}, u) \qquad \text{(VIII.2.6)}$$

bulunur. Bu denklem bu hâliyle doğrudan doğruya çözülemeyecek kadar karışık bir manzara arzetmektedir. Bu denklemi çözüp de δk yı bulabilmek için şu dolambaçlı yola başvuracağız :

$\psi_0(\vec{r}, u)$, biraz sonra târif edeceğimiz ve hakkında, şimdilik sâdece $\phi_0(\vec{r}, u)$ nun târif bölgesini târif bölgesi olarak kabul ettiğini bildiğimiz bir fonksiyon olsun. (VIII. 2. 6) denkleminin her iki yanını soldan $\psi_0^*(\vec{r}, u)$ ile soldan çarpıp bütün u letarjileri ve $\phi_0(\vec{r}, u)$ ile $\psi_0(\vec{r}, u)$ nun müşterek târif bölgesi olan R üzerinden integre edelim. Buna binâen

$$-\frac{\delta k}{k_\infty} = \frac{\int_R d\vec{r} \int_u \left\{ \psi_0^*(\vec{r},u)[\mathbf{T}-k_\infty \mathbf{U}]\delta\phi_0(\vec{r},u) + \psi_0^*(\vec{r},u)[\delta\mathbf{T}-k_\infty \delta\mathbf{U}]\phi_0(\vec{r},u) \right\} du}{k_\infty \int_R d\vec{r} \int_u \psi_0^*(\vec{r},u)\,\mathbf{U}\,\phi_0(\vec{r},u)\,du} \tag{VIII.2.7}$$

bulunur.

Artık $\psi_0(\vec{r}, u)$ yu etraflıca tâyin etmenin zamanı gelmiştir. Bunu yaparken göz önünde bulundurulması gereken en önemli nokta $\psi_0(\vec{r}, u)$ yu (VIII. 2. 7) ifâdesini mümkün olduğu kadar basit bir şekle ircâ edecek tarzda seçmektir. Bunun için, $\psi_0(\vec{r}, u)$ yu $(\mathbf{T}-k_\infty \mathbf{U})$ operatörüne tekabül eden ek fonksiyon olarak, yâni

$$(\mathbf{T}^+ - k_\infty \mathbf{U}^+)\psi_0(\vec{r}, u) = 0 \tag{VIII.2.8}$$

ek denklemini tahkik eden fonksiyon olarak seçmenin (VIII. 2. 7) ifâdesini çok basitleştireceğini iddia ediyoruz.

Filhakika, bu dersin birinci kısmında görmüş olduğumuz vechile ve $(\mathbf{T}-k_\infty \mathbf{U})$ operatörüyle $(\mathbf{T}^+ - k_\infty \mathbf{U}^+)$ operatörünün biribirlerine ek operatörler olmaları hasebiyle (VIII. 2. 7) nin payındaki integrantın birinci terimini

$$\int_R d\vec{r} \int_u \psi_0^*(\vec{r}, u)\,[\mathbf{T} - k_\infty \mathbf{U}]\,\delta\phi_0(\vec{r}, u)du =$$

$$\int_R d\vec{r} \int_u \delta\phi_0^*(\vec{r}, u)\,[\mathbf{T}^+ - k_\infty \mathbf{U}^+]\psi_0(\vec{r}, u)\,du$$

şeklinde yazmak kâbil olacaktır. Bu sonuncu ifâdenin sağ tarafı ise

(VIII. 2. 8) târifine binâen sıfırdır. Buna göre (VIII. 2. 7) ifâdesi de artık

$$\boxed{-\frac{\delta k}{k_\infty}=\frac{\int\limits_R d\vec{r}\int\limits_u \psi_0^*(\vec{r},u)\,[\delta\mathbf{T}-k_\infty\delta\mathbf{U}]\,\phi_0(\vec{r},u)\,du}{k_\infty\int\limits_R d\vec{r}\int\limits_u \psi_0^*(\vec{r},u)\mathbf{U}\,\phi_0(\vec{r},u)\,du}} \qquad \text{(VIII.2.9)}$$

şekline girmiş olur.

3. İstatistiksel Ağırlık Ve Önem Fonksiyonu. — Ilık bir reaktör için ek fonksiyonun fizikî bakımdan neye delâlet ettiğini daha iyi anlayabilmek gâyesiyle dikkatimizi eşitenerjili nötronların difüzyonuna teksif edelim. Böylelikle reaktöre ait büyüklüklerin u ya bağlı olmadıklarını ve $\phi(\vec{r})$ nötron akısının da

$$\vec{\nabla} D \vec{\nabla}\, \phi(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r})\, \phi(\vec{r}) + k_\infty \Sigma_a(\vec{r})\, \phi(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(VIII.3.1)}$$

denklemini tahkik ettiğini kabul etmiş olmaktayız. Şimdi göz önüne alacağımız bir reaktörün kâlbinin muayyen bir $\vec{r}_0$ noktasındaki makroskopik yutulma tesir kesidinin kararlı hâle nazaran $\delta\Sigma_a$ gibi bir artış gösterdiğini, yâni

$$\Sigma'_a(\vec{r}) = \Sigma_a(\vec{r}) + \delta\Sigma_a \cdot \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad \text{(VIII.3.2)}$$

şeklinde olduğunu farzedelim. Kolayca görülür ki bu hâle tekâbül eden tüketim ve üretim operatörlerindeki pertürbasyonlar, tek gruplu nötron difüzyonu çerçevesi içinde

$$\delta\mathbf{T} = \delta\Sigma_a \cdot \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad \text{(VIII.3.3)}$$

$$\delta\mathbf{U} = 0$$

olurlar. (VIII. 3. 3) ifâdelerine binâen ve

$$k_\infty \int_R \psi_0^*(\vec{r})\mathbf{U}\phi_0(\vec{r})\, d\vec{r} = \frac{1}{C}$$

vazederek (VIII. 2. 9) ifâdesinden

$$-\frac{\delta k}{k_\infty} = C \int_R \psi_0^*(\vec{r})\,[\delta\Sigma_a \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)]\,\phi_0(\vec{r})\, d\vec{r} =$$

$$= C \cdot \delta\Sigma_a \cdot \psi_0^*(\vec{r}_0)\,\phi_0(\vec{r}_0) \qquad \text{(VIII.3.4)}$$

yâni

$$\psi_0^*(\vec{r}_0) = \frac{-\dfrac{\delta k}{k_\infty}}{C \cdot \delta\Sigma_a \cdot \phi_0(\vec{r}_0)} \qquad \text{(VIII.3.5)}$$

elde edilir. Buradan $\psi_0^*(\vec{r})$ nin, bir sâbit yaklaşıklığıyla, birim zamanda yutulan nötron başına k_∞ çoğalma katsayısındaki izâfî değişim olduğu anlaşılmaktadır.

(VIII. 3. 4) bağıntısı, çoğaltkan ortamın muhtelif noktalarındaki makroskopik yutulma tesir kesitlerinin değişimlerinin

$$W(\vec{r}) = \psi_0^*(\vec{r})\,\phi_0(\vec{r}) \qquad \text{(VIII.3.6)}$$

fonksiyonu üzerinden ortalandıklarını göstermektedir. $W(\vec{r})$ ye bu yüzden *«istatistiksel ağırlık fonksiyonu»* adı verilir.

Gene (VIII. 3. 4) ifâdesine dönecek olursak pertürbasyona mâruz kalmış olan sistemde, nötronların bir $\vec{r}$ noktasında pertürbasyon hasebiyle fazladan yutulmalarının bir ölçüsü olan (yâni $\vec{r}_0$ noktasında pertürbasyondan dolayı fazladan yutulan nötronların sayısını veren) $\delta\Sigma_0 \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\,\phi(\vec{r}_0)$ büyüklüğüne tekabül eden ağırlık fonksiyonunun $\psi_0^*(\vec{r})$ olduğu görülür. $\psi_0^*(\vec{r})$ ye de bu bakımdan **önem fonksiyonu** adı verilmektedir. Filhakika kolayca idrâk olunacağı vechile, $\psi_0^*(\vec{r})$ nin büyük değerleri ihraz ettiği noktalarındaki yutulmadan ileri gelen pertürbasyonun tevlîdettiği $\delta k/k_\infty$ değişimi de o kadar büyük (önemli) olacaktır.

Şimdi bir an, tek bir enerji grubu için cârî zamana bağlı olmayan difüzyon denklemini göz önüne alacak olursak bu denkleme tekabül eden ek diferansiyel operatörün bizâtihî, denklemin esas diferansiyel operatörü olduğu kolaylıkla tahkik edilir. Dolayısıyla eşitenerjili nötronların kararlı dağılımlarını veren difüzyon teorisinde ek denklemin çözümü olan $\psi_0(\vec{r})$ ek fonksiyonu reel bir fonksiyon olup $\phi_0(\vec{r})$ ile orantılıdır :

$$\psi_0(\vec{r}) \sim \phi_0(\vec{r}). \qquad \text{(VIII. 3. 7)}$$

Buna binâen tek gruplu difüzyon teorisinde istatistiksel ağırlık

$$W(\vec{r}) \backsim \phi_0^2(\vec{r}) \qquad \text{(VIII.3.8)}$$

şeklindedir.

Eşitenerjili nötronlar hâli için önem fonksiyonunun neye delâlet ettiği daha sarih olarak ortaya konabilir. Evvelemirde, $\psi_0(\vec{r}) \sim \phi_0(\vec{r})$ olduğundan, önem fonksiyonunun tahkik ettiği sınır şartlarının $\phi_0(\vec{r})$ ninkilerin aynı olacağına işâret edelim.

Şimdi çoğaltkan bir ortamın bir $\vec{r}_0$ noktasında bir t_0 ânında bulunan serbest bir nötronu göz önüne alalım. Bu nötron ortam için $\vec{r}_0$ noktasında bir kaynak teşkil etmektedir. $\vec{r}_0$ noktası ortamın dış yüzeyine ne kadar yakınsa bu nötronun t_0 ânını tâkibeden zaman içinde dışarı sızması ihtimâlinin de o kadar büyük olacağı bedihîdir. t_0 ânında $\vec{r}_0$ da bulunan bu nötronun o noktada bir fisyona sebep olduğunu düşünelim ve $t=t_0$ dan $t=\infty$ a kadar geçen zaman aralığı içinde mevcûdiyetlerini sırf t_0 ânında $\vec{r}_0$ noktasında vuku bulmuş olan fisyona borçlu olan bütün fisyon nötronlarının sayısını nazar-ı itibâra alalım. Bu nötronların sayısının da $\vec{r}_0$ ın çoğaltkan ortamın dış yüzeyine yakınlığı nisbetinde düşük olacağı âşikârdır. Buna mukabil $\vec{r}_0$ ortamın ne kadar içindeyse biribirini tâkibeden nesillerde doğan nötronların sayısı, bunların dışarı sızıncaya kadar yutulmaları ve yeni yeni fisyonlara sebep olmaları ihtimâli daha kuvvetli olduğundan, çok daha yüksek olacaktır. Dolayısıyla, ortamda nötron akısının kesif olduğu yerlerde bir nötronun zincirleme fisyon reaksiyonlarının temâdisi bakımından **öneminin**, nötron akısının nisbeten daha zayıf bulunduğu yerlere göre, daha büyük olduğu anlaşılmaktadır ki bu da tek gruplu difüzyon teorisinde önem fonksiyonunun nötronların akısıyla orantılı olduğu keyfiyetini teyîdetmektedir.

Bu cildin VI. dersinin (VI. 2. 21) formülüne binâen **kritik** bir ortamdaki bir $\vec{r}_0$ noktasına ithâl edilen η nötron dolayısıyla o ortamda husûle gelen nötron akısının

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{v\eta}{\gamma}\chi_0(\vec{r}_0)\chi(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v\eta}{\gamma}\chi_n(\vec{r}_0)\chi_n(\vec{r}) \cdot \exp\left(\frac{\delta k_n}{l_n{*}}t\right) \qquad \text{(VIII.3.9)}$$

ifâdesiyle verilmiş olduğu bulunur. Yukarıdaki paragrafta izah olunduğu vechile çoğaltkan bir ortamın bir $\vec{r}_0$ noktasındaki bir nötronun önemi, bu noktadaki nötrondan ötürü $t=0$ dan $t=\infty$ a kadar bütün ortamda hâsıl olan nötronların toplam sayısıyla ölçüleceğinden (VIII. 3. 9) ifâdesinin sağ yanını v ile bölüp bütün reaktör hacmı ve $t=0$ ile $t=\infty$ arasında integre edecek olursak $\vec{r}_0$ daki bir nötronun öneminin

$$N(\vec{r}_0) = \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\chi_0(\vec{r}_0) \qquad \text{(VIII.3.10)}$$

olduğunu bulunuz. Bu ifâdeden görüldüğü vechile $\vec{r}_0$ daki η nötronun önemi o noktadaki kararlı nötron akısıyla orantılıdır. Böylece, eşitenerjili nötronların difüzyon teorisi muvacehesinde, muayyen bir noktadaki nötron öneminin o noktadaki kararlı nötron akısıyla orantılı olduğu keyfiyeti bir kere daha teyidedilmiş olmaktadır. Şurasına hassaten işâret edelim ki çok gruplu difüzyon teorisinde, meselâ i-inci gruba tekabül eden nötron akısıyla mütekabil önem fonksiyonu arasında eşitenerjili nötronlar için olduğu gibi basit bir bağıntı maalesef yoktur.

(VIII. 3. 10) ifâdesinden kolaylıkla görüldüğü üzere nötronların önemi, göz önüne alınmış olan çoğaltkan ortamın simetri ekseni (veyâ noktasında) maksimum değeri iktisâbetmekte ve ortamın uzatılmış sınırında da sıfır olmaktadır. Bu keyfiyet önem fonksiyonunun da tıpkı nötron akısı gibi aynı sınır şartlarını tahkik etmekte olduğunu teyidetmekte ve aynı zamanda da önem fonksiyonu kavramını çok daha müşahhas bir kavram kılmaktadır.

4. Çok Gruplu Difüzyon Teorisinde Pertürbasyon Hesabı. — Nötronların zamana bağlı çok gruplu difüzyon teorisinde nötron akıları

$$\mathbf{P}\Phi = \frac{d\Phi}{dt} \tag{VIII.4.1}$$

şeklinde bir denklem sistemini tahkik ederler. Buradaki P diferansiyel kare matrisi, kararlı nötron akıları hâline tekabül eden **O** matrisine

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & & & & & & \\ & v_2 & & & & \mathrm{O} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & v_i & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & \mathrm{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & v_n \end{bmatrix} \tag{VIII.4.2}$$

hız matrisi vâsıtasıyla bağlı olup, I. cildin (XV. 2. 7) ifâdesine dayanarak

$$\mathbf{P} = \mathbf{VO} = \begin{bmatrix} v_1[D_1\nabla^2-(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{yav,1})] & 0 & \cdots & \cdots & v_1 \dfrac{k_\infty}{p}\Sigma_{a,n} \\ v_2\Sigma_{yav,1} & v_2[D_2\nabla^2-(\Sigma_{a,2}+\Sigma_{yav,2})] & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & v\Sigma_{yav,i-1} & v_i[D_i\nabla^2-(\Sigma_{a,i}+\Sigma_{yav,i})] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & v_n\Sigma_{yav,n-1} & v_n[D_n\nabla^2-\Sigma_{a,n}] \end{bmatrix} \tag{VIII.4.3}$$

şeklinde ifâde olunabilir.

Eğer

$$\Phi(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r}) \exp(\omega t) \tag{VIII.4.4}$$

vazedecek olursak (VIII. 4. 1) ifâdesini

$$\mathbf{P}\,\Phi(\vec{r}) = \omega\,\mathbf{I}\,\Phi(\vec{r}) \tag{VIII.4.5}$$

şeklinde yazmak kabil olur. ω ya «*çoğaltkan ortamın peryodunun tersi*» adı verilir. (VIII. 4. 5) denklemi bize, ω nın kararlı hâle tekabül eden

$$\mathbf{P}\Phi(\vec{r}) = 0 \tag{VIII. 4. 6}$$

denkleminin bir özdeğeri olmasının zarurî olduğunu göstermektedir. (VIII. 4. 6) ya tekabül eden ek denklem

$$\mathbf{P}^{+}\Psi(\vec{r}) = 0 \tag{VIII. 4. 7}$$

şeklinde olacaktır. Fakat **P** matrisi esas itibâriyle sâdece reel büyüklükler ihtivâ ettiğinden $\mathbf{P}^{+}$ ek matrisi de sâdece **P** nin transpoze matrisi olacaktır. Şu hâlde artık yalnız

$$\mathbf{P}_T\Psi(\vec{r}) = 0 \tag{VIII. 4. 8}$$

yazabiliriz. Buna tekabül eden özdeğer problemi de, gene

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r}) \exp(\omega t)$$

vazederek,

$$\mathbf{P}_T\,\Psi(\vec{r}) = \omega\,\mathbf{I}\,\Psi(\vec{r}) \tag{VIII.4.9}$$

olur.

Şimdi herhangi bir pertürbasyon sebebiyle (VIII. 4. 5) yerine, $\Phi'(\vec{r})$ ile pertürbasyona mârûz kalan nötron akısını, ω' ile de pertürbasyon dolayısıyla artık $(\mathbf{P}+\delta\mathbf{P})$ şeklinde yazılacak olan matris operatörüne tekabül eden özdeğeri göstermek üzere

$$(\mathbf{P}+\delta\mathbf{P})\,\Phi'(\vec{r}) = \omega'\,\Phi'(\vec{r}) \tag{VIII.4.10}$$

yazılacaktır.

(VIII. 4. 9) u soldan $\Phi_T'(\vec{r})$ ve (VIII. 4. 10) u da, gene soldan, $\Psi_T(\vec{r})$ ile çarpıp Φ' ile Ψ nin târif bölgesi olan R üzerinden integre ettikten sonra taraf tarafa çıkartalım :

$$-\int_R \Phi_T' \mathbf{P}_T \Psi d\vec{r} + \int_R \Psi_T \mathbf{P} \Phi' d\vec{r} + \int_R \Psi_T (\delta \mathbf{P}) \Phi' d\vec{r} = (\omega' - \omega) \int_R \Psi_T \Phi' d\vec{r} \tag{VIII.4.11}$$

elde edilir. Fakat **P** ile $\mathbf{P}_T$ biribirlerine ek operatörler olduklarından bu dersin 1. kısmında gösterdiğimiz vechile (VIII. 4. 11) deki ilk iki terim mutlak değerce birbirlerine eşit olup, bu ifâdeden

$$\omega' - \omega = \frac{[\Psi_T, (\delta \mathbf{P}) \Phi']}{[\Psi_T, \Phi']} \tag{VIII.4.12}$$

neticesi çıkar.

Eğer $\delta \mathbf{P}$ pertürbasyon matrisindeki pertürbasyon terimleri kâfi derecede küçükse $\Phi'(\vec{r})$ yerine ilk takribiyette $\Phi(\vec{r})$ vazedilebilir. Bu takdirde çoğaltkan ortamın peryodunun tersinin değişimi olan $\omega' - \omega = \delta\omega$,

$$\boxed{\delta\omega = \frac{[\Psi_T, (\delta \mathbf{P}) \Phi]}{[\Psi_T, \Phi]}} \tag{VIII.4.13}$$

ifâdesiyle verilir.

Eğer eşitenerjili nötronların difüzyonu göz önüne alınıyorsa, bu takdirde $\psi \sim \phi$ olacağından $\delta\omega$ nın ifâdesi

$$\boxed{\delta\omega = \frac{[\phi, \mathbf{P}\, \phi]}{[\phi, \phi]}} \tag{VIII.4.14}$$

olur.

Çok kere çoğaltkan bir ortamın D, Σ_a, k_∞ v.s. gibi nükleer parametrelerinin ortamı tam kritik bırakacak şekilde pertürbasyonlarını göz önüne almak lâzım gelir ; meselâ kritik bir ortama bir nötron yutucu ithâl edilse bunun tesirini ifnâ etmek için kontrol çubuklarını bir miktar ortamın dışına çekmek veyâ ortama bir miktar daha nükleer yakıt ilâve etmek lâzım gelir. Bu takdirde bu her iki pertürbasyon da biribirlerini ifnâ ederler ve nötron akısı da gene kararlı kalır. Çoğaltkan ortamın, bu pertürbasyonlar tatbik edilmeden önce de ve biribirlerini ifnâ eden bu pertürbasyonlar tatbik edildikten sonra da kritik olmaya devam etmesi her iki hâlde de ortamın peryodunun sonsuz olduğuna delâlet eder. Dolayısıyla reaktörün peryodunun tersinin değişimi de sıfırdır. Bu ise :

$$\delta\omega = 0$$

yâni

$$[\phi, (\delta \mathbf{P})\phi] = 0 \qquad \text{(VIII.4.15)}$$

demektir.

Meselâ, yukarıda vermiş olduğumuz misâle dönecek olursak ve çoğaltkan ortam içindeki bir $\vec{r}_0$ noktasına, buradaki makroskopik yutulma tesir kesidini $\delta\Sigma_a$ kadar değiştirecek bir $\delta\Sigma_a . \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ pertürbasyonu ithâl edip bunun tesirini de ifnâ etmek üzere ortamın çoğalma katsayısını δk kadar arttırmak sûretiyle, biribirlerini ifnâ eden bu iki pertürbasyon eşitenerjili nötronların difüzyon teorisi muvacehesinde şu denklemle ifâde edilebilecektir :

$$\vec{\nabla} D(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) - [\Sigma_a(\vec{r}) + \delta\Sigma_a \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] \phi(\vec{r}) +$$

$$+ (k_\infty + \delta k) [\Sigma_a(\vec{r}) + \delta\Sigma_a \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0))] \phi(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(VIII.4.16)}$$

Σ_a ve k_∞ üzerindeki pertürbasyonları kâfi derecede küçük olduklarını farzedecek olursak ikinci mertebeden pertürbasyonları ihmâl edebiliriz. Buna göre bu probleme ait pertürbasyon operatörü

$$\delta \mathbf{P} = -\delta\Sigma_a \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + k_\infty \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + \delta k \cdot \Sigma_a \qquad \text{(VIII.4.17)}$$

şeklindedir. Bu ifâdeyi göz önünde tutarak, $\vec{r}_0$ noktasında makroskopik yutulma tesir kesidi $\delta\Sigma_a$ kadar arttırılan bir çoğaltkan ortamın tekrar kritik olabilmesi için k_∞ çoğalma katsayısının

$$\delta k = -(k_\infty - 1) \frac{\delta\Sigma_a}{\Sigma_a} \frac{\phi^2(\vec{r}_0)}{\int_R \phi^2(\vec{r})\, d\vec{r}} \qquad \text{(VIII.4.18)}$$

kadar arttırılması gerektiği (VIII. 4. 15) formülünden kolayca tâyin edilir.

ALIŞTIRMALAR :

1. S ile bir skaleri ve $\vec{V}$ ile de bir vektörü göstererek

$$\mathrm{div}(S\vec{V}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}\ S}) \,.\, \vec{V} + S\ \mathrm{div}\ \vec{V}$$

özdeşliğinden faydalanmak sûretiyle eşitenerjili farzedilen nötronların v hızlarında bir δv, ortamın difüzyon katsayısında bir δD, k_∞ çoğalma katsayısında bir δk ve Σ_a makroskopik yutulma tesir kesidinde de bir $\delta \Sigma_a$ pertürbasyonu husûle geldiğini farzederek $\delta \mathbf{P}$ pertürbasyon operatörünü ve $\delta \omega$ yı tâyin ediniz.

2. v_1, v_2, D_1, D_2, $\Sigma_{a,1}$ ve $\Sigma_{a,2}$ nin pertürbasyona mârûz kalmış olduğunu farzederek iki gruplu difüzyon teorisine tekabül eden pertürbasyon matrisini yazınız.

IX. DERS

Nötronların Transport Teorisine Giriş:

GENEL TRANSPORT DENKLEMİ

Âdî difüzyon denkleminin yetersizliği - Açısal nötron akısı - Açısal nötron akısıyla âdî nötron akısı ve nötron akımı arasındaki münâsebetler - Nötron bilânçosu - Transport denkleminin birinci şekli - Transport denkleminin sınır şartları - İkinci kademeden nötronların ortalama sayısı kavramı - Transport denkleminin ikinci şekli - Muhtelif cins çarpışmalarda nötronların enerji ve yön değiştirmelerine tekabül eden ihtimâllerin açık ifadeleri.

1. **Âdî Difüzyon Denkleminin Yetersizliği.** — Bu derse kadar olan bütün incelemelerimizi, sâdece, nötronların âdî difüzyon teorisinin denklemlerine istinâdettirdik. Bu denklemler, difüzyonun vuku bulduğu ortamdaki nötron akısının ve nötronların maddeyle olan muhtelif araetkilerine tekabül eden tesir kesitlerinin yöne tâbî olmadıkları faraziyesine dayanıyorlardı. Hâlbuki bir nötronun sonlu kütleyi haiz bir çekirdekle çarpışması L-sisteminde tam mânâsıyla izotrop sayılamayacağı gibi nötron akısı da kuvvetli nötron yutucu bölgelerin ve ortamın boşlukla çevrili sınırlarının cıvarlarında da izotrop bir dağılım arzedemez. Zirâ bir ortamın izotropluğu ortamın herbir noktasına her yönden aynı sayıda nötron gelmesi ve buradan da her yöne eşit sayıda nötron intişâr etmesiyle kâimdir. Hâlbuki çoğaltkan ortamda, kuvvetli bir nötron yutma kabiliyetini haiz bir bölgenin, veyâ boşlukla çevrili bir dış yüzeyin cıvarındaki lâlettâyin bir noktaya böyle bir bölgeden gelen nötronların sayısı ya sıfırdır veyâhut da ortamın diğer yönlerinden gelenlerinki yanında çok küçüktür. Dolayısıyla bu çeşit bölgeler cıvarında nötron akısı mecbûren anizotrop olacak, yâni yöne de tâbî bulunacaktır. Bu itibarla, bilhassa heterogen reaktörler hususunda nötron akısının yöne bağlılığının göz önünde bulundurulması gerektiği bir kere daha ortaya çıkmakta ve, keza, âdî difüzyon teorisinin ve buna dayanarak elde edilmiş, meselâ

uzatılmış uzunluğun ifâdesi gibi, neticelerinin boşlukla çevrili ortamların sınırlarında cârî olmadığı da bir kere daha teyidedilmiş olmaktadır.

Yukarıdaki mülâhazalardan, nötronların çoğaltkan ortamlardaki dağılımlarını daha sıhhatli bir şekilde inceleyebilmek için âdî difüzyon teorisinden çok daha mükemmel bir teori lâzım geldiği anlaşılmaktadır. Biz bu dersten itibâren,bu şartı sağlayan «**Nötronların Transport Teorisi**»ne bir giriş yapmak istiyoruz. Bu teori ileride neşretmeyi tasarladığımız ayrı bir kitapta daha geniş olarak ele alınacağından şimdiki derslerimiz bu mevzua ancak bir başlangıç mâhiyetini taşımaktadırlar.

2. Genel Târifler ve Tahditler. — Difüzyon teorisinde nötronların $N(\vec{r}, t)$ yoğunluğu merkezî bir rôl oynamakta ve buradan hareketle târif olunan $\phi\,(\vec{r}, t)$ nötron akısı ile $\vec{J}(\vec{r}, t)$ nötron akımının zaman ve 3 boyutlu uzay içindeki dağılımları esas tetkik mevzuunu teşkil etmekteydiler. Hâlbuki nötronlar, genel olarak, farklı hızlara ve farklı hareket yönlerine sâhip oldukları için, bir de $\vec{v}=v\vec{\Omega}$ hız vektörüne tâbîdirler. Bu itibarla bunların topluluklarının inkişafları tek bir yoğunluk fonksiyonu vâsıtasıyla 3 boyutlu uzayda mükemmelen belirtmeğe imkân olamamaktadır. Bunun için yervektörünün 3 bileşeniyle $\vec{v}=v\vec{\Omega}=\sqrt{2E}\,.\,\vec{\Omega}$ hızvektörünün 3 bileşeninin müştereken meydana getirdikleri 6 boyutlu «*faz uzayı*» nazar-ı itibâra alınır ve böylece âdî uzayın $(x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$ noktasında bulunan $(v_{x0}\,,\ v_{y0}\,,\ v_{z0})$ hız bileşenlerini haiz bir nötronun bu 6 boyutlu faz uzayının $(x_0\,,\ y_0\,,\ z_0\,,\ v_{x0}\,,\ v_{y0}\,,\ v_{z0})$ noktasını işgâl etmekte olduğu düşünülür. Nasıl ki bir t ânında bir nötronun $\vec{r}_0=(x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$ yervektörünün verilmesiyle onun 3 boyutlu uzayda o andaki durumu tamamen belli oluyorsa, gene bir t anında bir nötronun faz uzayındaki $\vec{q}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0,\ v_{x0},\ v_{y0},\ v_{z0})$ yervektörünün verilmesiyle de onun bu 6 boyutlu faz uzayında o andaki durumu veyâ, başka bir deyişle, nötronun hem 3 boyutlu âdî uzaydaki durumu ve hem de haiz olduğu hızın büyüklüğü ve istikameti tamamen belirlenmiş olur. Burada, faz uzayındaki 3 hız koordinatı yerine hızın v mutlak değeriyle $\vec{\Omega}$ yön vektörünün haiz olduğu iki bileşenin de nazar-ı itibâra alınabileceğine işâret edelim. Hattâ v değeri yerine nötronun E kinetik enerjisi de alınabilir. Buna göre ve $\vec{\Omega}$ nın küresel koordinatlar bakımından θ zenit ve φ azimüt açılarıyla belirlenebileceğini de göz önünde tutarak 6 boyutlu faz uzayının bileşenleri

$$(x, y, z, \mathrm{E}, \theta, \varphi)$$

olacak ve bu uzayın elemanter $d\vec{q}$ hacım elemanı da

$$d\vec{q} = d\vec{r}\, d\mathrm{E}\, d\Omega = dx\, dy\, dz\, d\mathrm{E} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad \text{(IX.2.1)}$$

ifâdesiyle verilecektir.

Transport teorisinin merkezî ehemmiyeti haiz büyüklüğü $\Phi(\vec{r}, \mathrm{E}, \vec{\Omega}, t)$ ile gösterilen açısal nötron akısıdır. Buna göre

$$\Phi(\vec{r}, \mathrm{E}, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{r}\, d\mathrm{E}\, d\Omega\, dt = \Phi(\vec{r}, \mathrm{E}, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{q}\, dt$$

ifâdesi muayyen bir t ânını ihtivâ eden dt zaman aralığı zarfında, muayyen bir $\vec{r}$ noktasını kuşatan elemanter bir $d\vec{r} = dx\, dy\, dz$ hacım elemanı içinde bulunan, enerjileri muayyen bir E enerjisini çevreleyen $d\mathrm{E}$ enerji aralığında olan ve yönleri de muayyen bir $\vec{\Omega}$ yönü cıvarındaki bir $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ katı açısıyla belirlenen elemanter koni içine düşen nötronların sayısını vermektedir (Bk. Şekil : IX. 1).

Faz uzayındaki $\Phi(\vec{r}, \mathrm{E}, \vec{\Omega}, t)$ dağılım fonksiyonunun âdî uzaydaki $\phi(\vec{r}, t)$ dağılım fonksiyonundan daha çok mâlûmat ihtivâ etmekte olduğu âşikârdır. Difüzyon teorisi çerçevesi içinde târif edilmiş olan bütün dağılım fonksiyonlarının Φ dağılım fonksiyonu vâsıtasıyla târif ve tâyin edilebilmelerine mukabil, meselâ ϕ den hareketle Φ yi bulmak mümkün değildir. Φ den hareketle nötronların âdî uzaydaki yoğunluk dağılımı

$$\mathrm{N}(\vec{r}, t) = \int_{\vec{\Omega}} \int_0^\infty \frac{1}{v}\, \Phi(\vec{r}, \mathrm{E}, \vec{\Omega}, t)\, d\mathrm{E}\, d\Omega \qquad \text{(IX 2.2)}$$

ile, akı dağılımı

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_{\vec{\Omega}} \int_0^\infty \Phi(\vec{r}, \mathrm{E}, \vec{\Omega}, t)\, d\mathrm{E}\, d\Omega \qquad \text{(IX 2.3)}$$

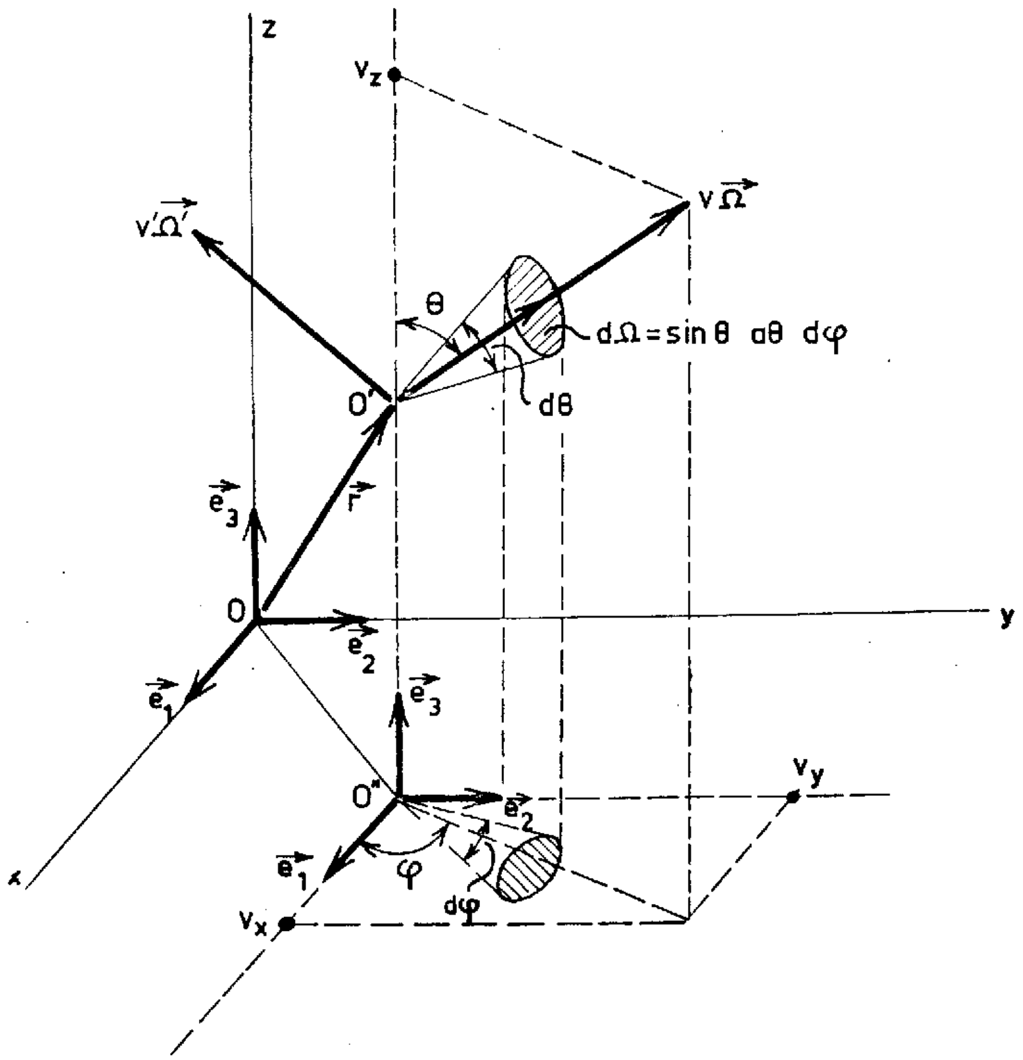
ile, nötronların uzaydaki enerji spektrumu

$$\mathrm{F}(\vec{r}, \mathrm{E}) = \int_{\vec{\Omega}} \int_0^\infty \frac{1}{v}\, \Phi(\vec{r}, \mathrm{E}, \vec{\Omega}, t)\, dt\, d\Omega \qquad \text{(IX.2.4)}$$

ile ve nötron akımı da

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \int_{\vec{\Omega}} \int_0^{\infty} \vec{\Omega}\, \Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\, dE\, d\Omega \qquad \text{(IX.2.5)}$$

ile verilecektir.



Şekil: IX. 1

Bundan sonraki bölümde genel transport denklemini çıkartacağız. Fakat bunu yapmadan önce göz önüne aldığımız ortamda hem 1) nötronların yoğunluk fluktuasyonlarının kâbil-i ihmâl addedilebilecek kadar olduğunu, ve hem de 2) nötronlar arasındaki çarpışmaların nazar-ı itibâra alınmayacak kadar az olduğunu kabul edeceğiz.

Birinci şart transport denkleminin nötronların dağılımlarını sıhhatle tâyin edebilmesi bakımından elzemdir. Filhakika, N ile nötron yoğunluğunu gösterirsek yoğunluk fluktuasyonu $1/\sqrt{N}$ ile verilir ; eğer içinde 2.2×10^{12} nötron/cm²/saniye mertebesinde ortalama bir ılık nötron akısının bulunduğu bir ortam alırsak, bu ortamdaki yoğunluk fluktuasyonunun $1/\sqrt{N}=1/\sqrt{\phi/v}=\%\,0.03$ olmasına mukabil meselâ $\phi=10^6$ nötron/cm²/saniye hâli için $1/\sqrt{N}=\%\,40$ olacaktır. İkinci şartın teoriye ithâli ise transport denkleminde lineer olmayan terimlerin mevcûdiyetine mâni olmaktadır.

3. Genel Transport Denkleminin Birinci Şekli. — Genel transport denklemini, faz uzayının bir $d\vec{q}$ elemanter hacım elemanında dt zaman aralığı için bir nötron bilânçosu yaparak çıkartacağız. Bunun için faz uzayının bir $d\vec{q}$ elemanter hacım elemanındaki nötron bilânçosuna tesir edebilecek olayların nötronların elâstik ve inelâstik çarpışmaları, ortamdaki muhtelif çekirdekler tarafından yutulmaları, nükleer yakıtın fisyonu dolayısıyla ânî ve gecikmiş nötronların doğumu ve ortamdaki yabancı nötron kaynaklarının nötron üretimi olduğuna işâret edelim.

Şimdi bahis konusu olan bilânçoyu, faz uzayının elemanter $d\vec{q}=d\vec{r}\,dE\,d\Omega$ hacım elemanına ve dt zaman aralığına nisbetle şöyle yazabiliriz :

$$\begin{aligned}
&\left[\text{Nötron sayısının zamana göre net değişimi}\right] = -\left[dt \text{ zamanı zarfında } d\vec{q} \text{ yu terkeden nötronların sayısı}\right] + \\
&+\left[\text{lâlettâyin } E' \text{ enerjisi ve } \vec{\Omega}' \text{ yönünü haizken elâstik veyâ inelâstik çarpışmayla } d\vec{q} \text{ ya intikâl eden nötronların sayısı}\right] + \left[\text{fisyondan doğan ânî nötronların sayısı}\right] + \\
&+\left[\text{fisyon ürünlerinden doğan gecikmiş nötronların sayısı}\right] + \left[\text{yabancı kaynakların ürettiği nötronların sayısı}\right] \qquad \text{(IX 3.1)}
\end{aligned}$$

$d\vec{q}$ elemanter faz hacmında dt zaman aralığı zarfında mevcûd nötronlar $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, d\vec{q}\, dt$ olduğundan bunun zamana göre net değişimi

$$\frac{dN(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)}{dt}\vec{dq}\,dt = \frac{\partial N}{\partial t}\vec{dq}\,dt + \left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right)\vec{dq}\,dt =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial t}\vec{dq}\,dt + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\vec{e_1} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{e_2} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{e_3}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial x}\vec{e_1} + \frac{\partial N}{\partial y}\vec{e_2} + \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{dq}\,dt =$$

$$= \frac{\partial N(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)}{\partial t}\vec{dq}\,dt + v\,\vec{\Omega}\cdot\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\,N(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\right]\vec{dq}\,dt =$$

$$= \frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)}{\partial t}\vec{dq}\,dt + \mathrm{div}_x\left[\vec{\Omega}\,\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\right]\vec{dq}\,dt \qquad \text{(IX.3.2)}$$

ile verilecektir. Bu ifâdelerde $\overrightarrow{\mathrm{grad}_x}$ ve div_x operatörlerindeki x indisi türevlerin sâdece yer koordinatlarına göre alınacağına işâret etmektedir. Biz de zâten bundan dolayıdır ki $v\vec{\Omega}$ yı $\overrightarrow{\mathrm{grad}_x}$ in sağına alarak div_x yazabilmiş bulunmaktayız. Diğer taraftan $\vec{\Omega}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\Phi$ nin de Φ nin $\vec{\Omega}$ istikametindeki R koordinatına göre türevi yâni

$$\vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}$$

demek olduğuna dikkati çekelim.

E enerjisini haizken yutulan veyâ, elâstik veyâhut inelâstik bir çarpışmaya mârûz kalan bir nötronun enerjisi E den farklı bir değer alacağından bu nötron $\vec{dq}$ yu terketmiş olur. Buna binâen

$$\Sigma_t(\vec{r},E) = \Sigma_a(\vec{r},t) + \Sigma_s(\vec{r},E) + \Sigma_{in}(\vec{r},E) \qquad \text{(IX.3.3)}$$

ile toplam makroskopik tesir kesidini gösterirsek (IX. 3. 1) bilânçosunun sağ yanının ilk teriminin değeri

$$-\Sigma_t(\vec{r},E)\,\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\,\vec{dq}\,dt \qquad \text{(IX.3.4)}$$

olacaktır.

$\Sigma_s(\vec{r};E',\vec{\Omega'}\to E,\vec{\Omega})$ ve $\Sigma_{in}(\vec{r};E',\vec{\Omega'},\to E,\vec{\Omega})$ ile bir nötronun lâlettâyin bir E′ enerjisini ve $\vec{\Omega'}$ yönünü haizken E enerjisini ve $\vec{\Omega}$ yönünü haiz olacak şekilde, sırasıyla, elâstik ve inelâstik saçılmaya mârûz kalmasına tekabül eden makroskopik tesir kesitleri gösterilirse elâstik ve inelâstik saçılmalar yoluyla dt zaman aralığı zarfında $d\vec{q}$ ya intikal eden nötronların sayısı da

$$d\vec{q}\,dt \int_{\vec{\Omega}'}\int_0^\infty \left[\Sigma_s(\vec{r}\,;E',\vec{\Omega}'\rightarrow E,\vec{\Omega}) + \Sigma_{in}(\vec{r}\,;E',\vec{\Omega}'\rightarrow E,\vec{\Omega})\right]\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t)dE'd\Omega' \qquad \text{(IX.3.5)}$$

ifâdesiyle verilecektir.

$\beta(E)$ ile E enerjisini haiz olan bütün nötronlara nisbetle aynı enerjiyi haiz olan gecikmiş nötronların oranını, $\nu(E)$ ile E enerjisini haiz nötronların sebep oldukları fisyonlarda ortalama olarak açığa çıkan ânî nötronların sayısını ve $f_0(E)/4\pi$ ile de bir ânî fisyon nötronunun E enerjisini haiz olarak herhangi bir istikamette intişâr etmesi ihtimâlini göstererek dt zarfında $d\vec{q}$ da doğan ânî fisyonların sayısı

$$d\vec{q}\,dt\frac{f_0(E)}{4\pi}\int_{\vec{\Omega}'}\int_0^\infty \left[1-\beta(E')\right]\nu(E')\,\Sigma_f(\vec{r},E')\,\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t)\,dE'\,d\Omega' \qquad \text{(IX.3.6)}$$

olacaktır. Burada $f_0(E)$ nin yarı denel WATT formülü ile verilen ânî fisyon spektrumu olduğu âşikârdır. $1/4\pi$ katsayısı, fisyon olayının izotrop olduğunu farzederek, bir ânî fisyon nötronunun muayyen bir E enerjisini ve lâlettâyin bir yönü haiz olarak doğması ihtimâlinin normalize edilebilmesini temin maksadıyla bulunmaktadır. Filhakika

$$\int_{\vec{\Omega}}\int_0^\infty \frac{f_0(E)}{4\pi}\,dE\,d\Omega = 1 \qquad \text{(IX.3.7)}$$

dir.

$f_i(E)/4\pi$ ile i-inci gecikmiş nötron grubuna ait bir nötronun muayyen bir E enerjisini haiz olarak herhangi bir istikamette intişârı ihtimâlini göstermek üzere, 6 muhtelif gecikmiş nötron grubunda dt zaman aralığında doğan $d\vec{q}$ daki gecikmiş nötronların toplam sayısının da, bu cildin VII dersinin 3. bölümünde yapmış olduğumuz bir muhakemenin ışığı altında,

$$\vec{dq}\,dt\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\frac{f_i(E)}{4\pi}\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\lambda_i(t-t')\right]\int_{\vec{\Omega}'}\int_0^{\infty}\beta_i(E')\,\nu(E')\times$$
$$\times\,\Sigma_f(\vec{r},E')\,\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t')\,dE'\,d\Omega'\,dt' \qquad \text{(IX.3.8)}$$

olacağı bulunur.

Artık (IX. 3. 1) bilânçosunun matematik ifâdesi olan nötronların **Genel Transport Denklemini**, dt zarfında $\vec{dq}$ da yabancı kaynaklar tarafından neşredilen nötronların sayısını da $K(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)$ ile göstererek, (IX. 3. 2), (IX. 3. 4), (IX. 3. 5), (IX. 3. 6) ve (IX. 3. 8) ifâdelerinin yardımıyla aşağıdaki şekilde yazmamız kâbil olur :

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)}{\partial t}=-\vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}_r}\,\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)-\Sigma_t(\vec{r},E)\,\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)+$$
$$+\int_{\vec{\Omega}'}\int_0^{\infty}\left[\Sigma_s(\vec{r};E',\vec{\Omega}'\to E,\vec{\Omega})+\Sigma_{in}(\vec{r};E',\vec{\Omega}'\to E,\vec{\Omega})\right]\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t)\,dE'\,d\Omega'+$$
$$+\frac{f_0(E)}{4\pi}\int_{\vec{\Omega}'}\int_0^{\infty}\left[1-\beta(E')\right]\nu(E')\,\Sigma_f(\vec{r},E')\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t)\,dE'\,d\Omega'+\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\frac{f_i(E)}{4\pi}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\lambda_i(t-t')\right]\int_{\vec{\Omega}'}\int_0^{\infty}\beta_i(E')\,\nu(E')\,\Sigma_f(\vec{r},E')\,\Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t')\,dE'\,d\Omega'\,dt'$$
$$+K(\vec{r},E,\vec{\Omega},t) \qquad \text{(IX.3.9)}$$

4. **Transport Denkleminin Sınır Şartları.** — Çözümünün fizikî bir gerçeği aksettirmek durumunda olması dolayısıyla (IX. 3. 9) transport denkleminin **sınır şartları** ile **başlangıç şartları**'nı tesbit etmek gerekir.

Farklı nükleer vasıfları haiz iki ortam sâdece bir A arayüzeyi ile biribirlerinden ayrılmışlarsa bunlardan birindeki bir nötron topluluğunun diğer ortama geçtiği anda haiz olacağı nötronların sayısının beriki ortamı terkettiği anda haiz olduğu nötron sayısına eşit olması lâzım geldiği âşikârdır. Bu her iki nötron sayısı arasında bir fark ancak, göz önüne alınan A arayüzeyinin çok ince bir nötron yutucu tabaka olması hâlinde ortaya çıkar. Aksi hâlde bir nötron topluluğundaki nötronların sayısının bir ortamdan diğerine geçerken sâbit kalmaması için bir sebep yoktur. Buna binâen transport denkleminin çözümü olan $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, iki ortamı ayıran $\vec{r}_A$ arayüzeyinde, belki A ya teğet doğrultular hâriç, her $\vec{\Omega}$ doğrultusu için sürekli olmalıdır ; yâni bu ortamları I ve II ile gösterirsek $\vec{\Omega}$ lar üzerinde zikrettiğimiz tahdit hâriç

diğer bütün $\vec{\Omega}$ lar için:

$$\boxed{\Phi_I(\vec{r}_A, E, \vec{\Omega}, t) = \Phi_{II}(\vec{r}_A, E, \vec{\Omega}, t)} \qquad \text{(IX.4.1)}$$

olmalıdır.

Boşlukla çevrili bir ortam için sınır şartı da boşluktan ortama doğru gelen hiçbir nötronun bulunmadığını göz önünde tutarak kolaylıkla tesis edilir. $\vec{r}_s$ ile ortamla kendisini kuşatan boşluğun müşterek arayüzeyine tekabül eden yervektörünü gösterirsek, sınır şartı

dışarıdan içeriye yönelmiş her $\vec{\Omega}$ için

$$\boxed{\Phi(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}, t) = 0} \qquad \text{(IX.4.2)}$$

şeklinde ifâde olunacaktır.

Bundan başka Φ nin fizikî bir mânâsı olabilmesi için, göz önüne alınan ortamın her yerinde sonlu ve pozitif kalması da önemli bir şarttır (**fizikî anlam şartı**).

Bir de **sonsuzdaki şart**'a işâret edelim. Esas itibâriyle hiçbir fizikî sisteme sonsuz denemez. Sonsuz bir ortam daha ziyâde matematik bir idealizasyondan ibârettir. Bununla beraber çok uzaktaki bir kaynaktan, hiç çarpışma yapmadan, dosdoğru göz önüne alınan bölgeye gelen nötronların sayısı ihmâl edilebilecek kadar az ise böyle bir kaynağı sonsuzdaymış gibi farzedebiliriz. Bu itibarla nötronların transport denkleminin çözümünün sağlayacağı sonsuzdaki şart daima : sonsuzdan dosdoğru gelen nötronların sayısının sıfır olmasını intâcedecektir.

Transport denklemini tahkik eden Φ açısal nötron akısı zamanın fonksiyonu ise, göz önüne alınan fizikî bir hâle göre çözümü tâyin edebilmek için, yukarıda bahsolunan sınır v.s. şartlarından başka denklemin bir de **başlangıç şartları**'nı tâyin etmek lâzımdır. Gecikmiş nötronlar ihmâl edilirse problemimizin sınır şartı, bir $t=t_0$ başlangıç ânı için $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ nin verilmiş olmasından ibârettir. Fakat eğer gecikmiş nötronlar ihmâl edilmiyorlarsa, bu takdirde (IX. 3. 9) da $(t-t')$ ye bağlı bir terim bulunması $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ nin bütün $t \leqq t_0$ lar için bilinmiş olmasını zarurî kılar. Bununla beraber bu güçlük, gecikmiş nötronları doğuran fisyon ürünü ana-çekirdeklerin C_i konsantrasyonlarını veren diferansiyel denklemleri göz önüne almak ve (IX. 3. 9) daki son integrali de C_i ler cinsinden ifâde etmekle tahfif edilebilir. Bu sûretle Φ nin bütün $t \leqq t_0$ için haiz olduğu değerleri bilecek yerde Φ nin ve $i=1, 2, \ldots, 6$ olmak üzere C_i lerin $t=t_0$ başlangıç ânındaki değerlerini bilmek kâfîdir (B. VI ders, 4b bölümü).

Bir integrodiferansiyel denklem olan genel transport denklemi (IX. 3. 9) şekliyle en basit geometriler için dahi çözüm bakımından muazzam güçlükler arzetmektedir. Bu itibarla biz de Nötronların Transport Teorisi'ne sâdece bir giriş mâhiyetinde olan bu derslerimizde bu denklemin çok daha basit şekillerini incelemek istiyoruz. Bu özel hâllerin tetkikine geçmeden önce (IX. 3. 9) denklemini bir kere de biraz farklı bir formalizme dayanarak yazmak ve bu formalizmin tabiî bir neticesi olarak ithâl edilen bazı kavramlar üzerinde durmak istiyoruz.

5. İkinci Kademeden Nötronların Ortalama Sayısı Kavramı ve Genel Transport Denkleminin İkinci Şekli. — $c(\vec{r}, E', t')$ ile bir ortamın $\vec{r}$ noktasında t ânında E′ enerjisini haiz birinci kademeden (*primer*) bir nötronun bir çarpışmada tevlîdettiği ikinci kademeden (*sökonder*) nötronların sayısını gösterelim. Bundan başka $f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')$ de t' ânında E′ enerjisi ve $\vec{\Omega}'$ yönünü haiz olarak bir çarpışma yapan bir nötronun

E enerjisini ve $\vec{\Omega}$ yönünü haiz ikinci kademeden nötronların doğumuna sebep olması ihtimâli olsun. İkinci kademeden nötronlar, elâstik ve inelâstik çarpışmalarda ve bir de fisyon tevlîdeden çarpışmalarda olduğu gibi, çarpışmanın vuku bulduğu t' ânında ; veyâhut da, gecikmiş nötronların intişârı hâlinde olduğu gibi, t' çarpışma ânından daha sonraki bir t ânında açığa çıkarlar.

Şimdi, (IX. 3. 9) transport denkleminin sağ yanındaki integrâl ihtivâ eden terimleri yâni genel olarak çarpışmalar neticesinde husûle gelen ikinci kademeden nötronların genel nötron bilânçosuna iştirâklerini gösteren terimleri yukarıda ithâl etmiş olduğumuz kavramlara dayanarak hesaplamak istiyoruz. Önce

$$\Sigma_t \Phi \; d\vec{q} \; dt \qquad \text{(IX. 5. 1)}$$

ifâdesinin dt zamanı zarfında faz uzayının $d\vec{q}$ hacım elemanını terkeden nötronların sayısını gösterdiği kadar, $d\vec{q}\; dt$ içinde vuku bulan her türlü çarpışmaların sayısına da delâlet ettiğine işâret edelim. Çarpışan nötronlara tekabül eden büyüklükler (′) ile işâretlendiği takdirde $t-t'$ ânını çevreleyen dt' zaman fasılası zarfında faz uzayının $d\vec{r}\; dE'\; d\Omega'$ elemanter hacım elemanı içinde, nötronlarla çekirdekler arasında vuku bulan çarpışmaların sayısı

$$\Sigma_t(\vec{r}, E')\, \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t-t')\, d\vec{r}\, dE'\, d\Omega'\, dt' \qquad \text{(IX.5.2)}$$

dür. Bu çarpışmalar neticesinde, aynı $d\vec{r}$ geometrik hacmı içinde fakat dt zamanı zarfında ve enerjileri bir E enerjisini çevreleyen dE aralığında, yönleri de bir $\vec{\Omega}$ yönünü kuşatan bir $d\Omega$ elemanter konisi içinde olarak ortaya çıkan ikinci kademeden nötronların sayısı

$$\Sigma_t(\vec{r}, E')\, c(\vec{r}, E', t')\, f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')\, \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}, t-t')\, d\vec{r}\, dE'\, d\Omega'\, dt'\, dE\, d\Omega\, dt$$

$$= d\vec{q}\, dt\, \Sigma_t(\vec{r}, E')\, c(\vec{r}, E', t')\, f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')\, \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t-t')\, dE'\, d\Omega' dt' \qquad \text{(IX.5.3)}$$

olur. Çarpışmalar neticesinde $d\vec{q}\; dt$ ye intikâl eden bütün ikinci kademeden nötronların sayısı (IX. 5. 3) ü E′, $\vec{\Omega}'$ ve t' nün mümkün bütün değerleri üzerinden integre etmekle elde edilir :

$$d\vec{q}\,dt \int\int\int \Sigma_t(\vec{r},E')\, c(\vec{r},E',t')\, f(E',\vec{\Omega}' \rightarrow E,\vec{\Omega};t')\, \Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t-t')\, dE'\, d\vec{\Omega}'\, dt' \qquad \text{(IX.5.4)}$$

Buna göre transport denklemini de bu formalizm çerçevesi içinde, ve (IX. 3. 1), (IX. 3. 2), (IX. 3. 4) ve (IX. 5. 4) ü de göz önünde bulundurarak, artık

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)}{\partial t} + \vec{\Omega}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}_r}\,\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t) + \Sigma_t(\vec{r},E)\,\Phi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t) = \\ &= \int\int\int \Sigma_t(\vec{r},E')\, C(\vec{r},E',t')\, f(E',\vec{\Omega}' \rightarrow E,\vec{\Omega};t') \times \\ &\qquad \times \Phi(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t-t')\, dE'\, d\Omega'\, dt' + K(\vec{r},E,\vec{\Omega},t) \qquad \text{(IX.5.5)} \end{aligned}}$$

şeklinde yazmak kâbil olur.

6. $c(\vec{r},E',t')\ f(E',\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega};t')$ **nün Şekli.** — Kısaca

$$c_t'\,f(E'\vec{\Omega}' \rightarrow E,\vec{\Omega};t')$$

ile göstereceğimiz bu fonksiyonun, eğer bütün çarpışmalar fisyonla neticelenmiş olsa alacağı değeri $[c_t' f(E',\vec{\Omega}' \rightarrow E,\vec{\Omega};t')]_f$ ile işâretleyelim. Benzer notasyonları elâstik ve inelâstik çarpışmalar için de kullanacağız. Elâstik çarpışmada ikinci kademeden nötronların intişârı ânîdir. İnelâstik çarpışmada ise nötronun çekirdeğe çarpmasıyla ikinci kademeden bir nötronun intişârı arasında muayyen bir zaman fâsılası bulunmasına rağmen bu fâsılanın fevkalâde küçük olması, inelâstik çarpışmada da ikinci kademeden nötronun intişârının, rahatça, ânî olarak kabul edilebilmesini sağlar. Bu itibarla $[c_t' f(E',\vec{\Omega}' \rightarrow E,\vec{\Omega};t')]_s$ ve $[c_t' f(E',\vec{\Omega}' \rightarrow E,\vec{\Omega};t')]_{in}$ ifâdelerinin zamana bağlılıkları $\delta(t')$ şeklinde DİRAC fonksiyonları vâsıtasıyla temin edilmiş olacaktır. Öte yandan bu tip çarpışmalarda birinci ve ikinci kademeden nötronların sayısı daima 1 olduğundan, meselâ elâstik çarpışma için

$$[c'_t f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')]_s = [f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_s \cdot \delta(t') \qquad \text{(IX.6.1)}$$

yazılabilecektir. Şekil itibâriyle aynı bir bağıntı inelâstik çarpışma için de vârid olacaktır.

Eğer bir Φ nötron akısı sebebiyle birim hacımda ve birim zaman aralığında hâsıl olan ikinci kademeden nötronların sayısını hesaplamak istersek her çeşit çarpışmanın doğurduğu bu nötronların sayılarını ayrı ayrı hesaplayıp toplamamız lâzım geleceği âşikârdır. Buna göre

$$\Sigma_t(E') . c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t') \cdot \Phi = \Sigma_f(E') [c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')]_f \cdot \Phi +$$
$$+ \Sigma_c(E') [c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')] \cdot \Phi + \Sigma_s(E') [f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_s \cdot \delta(t') . \Phi +$$
$$+ \Sigma_{in}(E') [f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_{in} \cdot \delta(t') . \Phi \qquad \text{(IX.6.2)}$$

yazılacaktır. Işınlı yakalanma için ikinci kademeden nötron sayısının sıfır olduğunu göz önünde tutarak (IX. 6. 2) ifâdesi, kezâ her iki tarafı Φ ile böldükten sonra,

$$\Sigma_t(E') \cdot c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t') = \Sigma_f(E') \cdot [c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t)]_f +$$
$$+ \Sigma_s(E') [f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_s \cdot \delta(t') + \Sigma_{in}(E') [f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_{in} \cdot \delta(t') \qquad \text{(IX.6.3)}$$

şekline girmiş olur.

Bir takribiyet olmak üzere inelâstik çarpışmanın L-sisteminde izotrop olduğu kabul edilebilir. Eğer $F_{in}(E' \to E)$ ile ilk enerjisi E' olan bir nötronun elâstik olmayan bir çarpışma sonunda E enerjisine sâhip olabilmesi ihtimâlini gösterirsek

$$[f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_{in} = \frac{1}{4\pi} F_{in}(E' \to E) \qquad \text{(IX.6.4)}$$

olur.

Elâstik bir çarpışmada nötronun kaybettiği ΔE enerjisi hem sükûnette olduğu farzedilen hedef çekirdeğin kütlesine ve hem de gerek çarpışmadan önce ve gerekse sonra L-sisteminde haiz olduğu $\vec{\Omega}$ ve $\vec{\Omega}'$ yönleri arasındaki açının kosinüsüne yâni $\vec{\Omega} . \vec{\Omega}'$ skaler çarpımına bağlıdır.

1. cildin IX. dersinden faydalanarak ΔE nin

$$\Delta E = E'\left[1 - \frac{1-\alpha}{2}(1 - \vec{\Omega}.\vec{\Omega}')\right] \tag{IX.6.5}$$

şeklinde ifâde olunabileceği kolaylıkla tesbit olunur. Buna binâen, muayyen bir E' enerjisini ve bir $\vec{\Omega}'$ yönünü haiz olan bir nötronun elâstik bir çarpışmadan sonra E enerjisi ve $\vec{\Omega}$ yönünü haiz olabilmesi ihtimâli

$$[f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_s = \delta\left\{E - (E' - \Delta E)\right\} = \delta\left\{E - E'\left[1 - \frac{1-\alpha}{2}(1 - \vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}')\right]\right\} \tag{IX.6.6}$$

olacaktır. Bu ifâdenin $\vec{\Omega}$ ve $\vec{\Omega}'$ ye göre simetrik olduğu da ayrıca kayda değer bir keyfiyettir. Eşitenerjili nötronlar bahis konusu olduğunda eğer bir de elâstik çarpışmanın da izotrop olduğunu kabul edecek olursak

$$[f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_s = \frac{1}{4\pi} \tag{IX.6.7}$$

olacağı kolayca görülür.

$[c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')]_f$ nin hesabına gelince, bunun biri ânî fisyon nötronlarına diğeri de gecikmiş nötronlara ait iki terim ihtivâ etmesi gerektiği âşikârdır. Bir fisyonun neticesi olarak t' den daha büyük olmayan bir zaman fasılasından sonra açığa çıkan nötronların ortalama sayısını $\nu(t')$ ile gösterirsek $\nu(0)$ da ânî nötronların sayısına delâlet etmiş olacaktır. Diğer taraftan da $F_f(E, t')$ bir nötronun fisyon tevlîdeden bir çarpışmanın vuku bulduğu ândan t' kadar bir zaman sonra ve E enerjisini haiz olarak intişâr etmesi ihtimâlini göstersin. Bir ihtimâliyet olması bakımından $F_f(E, t')$ fonksiyonu E ye göre normalize edilmiş, yâni

$$\int_0^\infty F_f(E, t')\, dE = 1 \tag{IX.6.8}$$

özelliğini haiz bir fonksiyondur. Buna göre $F_f(E, 0)$ ifâdesi de bize ânî bir fisyon nötronunun E enerjisini haiz olarak intişârı ihtimâlini verecektir. $F_f(E, 0)$, derslerimizde şimdiye kadar $f_0(E)$ ile göstermiş olduğumuz ve yarı denel WATT formülüyle tâyin edilmiş olan ânî fisyon spektrumundan başka bir şey değildir. Bunları ve fisyonun L-sisteminde izotrop olduğunu göz önünde tutarak $[c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')]_f$ nin ânî nötronlara taallûk eden kısmının

$$\frac{1}{4\pi} \nu(0)\, \delta(t')\, F_f(E, 0) \qquad \text{(IX.6.9)}$$

şeklinde olduğu anlaşılmaktadır. Şimdi $[c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')]$ nin zamana bağlı kısmını tâyin edebilmek için şu muhakemeyi yapacağız :

Bir nötronun sebep olduğu fisyonun bir neticesi olarak E enerjisini haiz olan ve fisyonu tevlîdeden çarpışmadan t' sâniye sonra neşrolunan nötronların sayısına kısaca $\eta(t')$ diyelim. Buna göre, bir nötronun sebep olduğu bir fisyon sonucunda E enerjisini haiz olarak fisyondan sonra t' ilâ $t'+dt'$ ânları arasında neşrolunan ikinci kademeden nötronların sayısı $\eta(t')\, dt'$ olacaktır. Bu ise âşikâr olarak, dt' fasılası zarfında açığa çıkan $d\nu(t')$ gecikmiş nötrondan E enerjisini haiz olarak doğanların sayısına eşit olacaktır. Bu nötronların intişârının da izotrop olduğunu göz önünde tutarak

$$\eta(t')\, dt' = \frac{1}{4\pi} d\nu(t') \cdot F_f(E, t') \qquad \text{(IX.6.10)}$$

olur. Buna göre $\eta(t')$ de

$$\eta(t') = \frac{1}{4\pi} \frac{d\nu(t')}{dt'} F_f(E, t') \qquad \text{(IX.6.11)}$$

ile verilecektir. Netice itibâriyle

$$[c_t' f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}; t')]_f = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d\nu(t')}{dt'} F_f(E, t') + \nu(0)\, \delta(t')\, F_f(E, 0) \right] \text{(IX.6.12)}$$

olduğu anlaşılmış olur. Birkaç MeV lik enerjiler için ν, pratik olarak enerjiye tâbî değildir. ν nün bu sınırdan sonraki enerjiye bağlılığı da nötronların enerji spektrumunun pratik üst sınırına kadar kalan aralıkta, eski değerine nisbetle ν üzerinde çok bâriz bir fark husûle getirmediğinden bu kısımda da ν nün E ye tâbî olmadığı farzedilmiş bulunmaktadır.

(IX. 6. 12) ifâdesinin bütün E, $\vec{\Omega}$ ve t' ler üzerinden integralini alırsak eşitenerjili nötronların kararlı dağılımlarına tekabül eden, fisyon başına açığa çıkan nötron sayısını buluruz. Böylece

$$\int_0^\infty \int_{\vec{\Omega}} \int_0^\infty c_{t'}\, f(E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega}\, ; t')\, dE\, d\Omega\, dt' = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{\vec{\Omega}} \int_0^\infty \left[\frac{d\nu(t')}{dt'} F_f(E, t') + \right.$$

$$\left. + \nu(0)\, \delta(t')\, F_f(E, 0) \right] dE\, d\Omega\, dt' = \nu(0) + \int_0^\infty \frac{d\nu(t')}{dt'}\, dt' = \nu(0) +$$

$$+ \nu(\infty) - \nu(0) = \nu(\infty) = \nu \qquad \text{(IX.6.13)}$$

bulunur. Şu hâlde zamana bağlı olmayan hâller için

$$[c_{t'}\, f(F', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})]_f = \frac{1}{4\pi} \nu \cdot f_0(E) \qquad \text{(IX 6.14)}$$

olacaktır.

X. DERS

Eşitenerjili Nötronların Transport Teorisine Giriş

Eşitenerjili nötronlar için transport denklemi - Zamana bağlı problemlerin kararlı hâle ircâı - Karşıtlık teoremi - Transport denkleminin bir integrâl denkleme ircâı - Basit hâller için integrâl denklemin çözümü.

1. Eşitenerjili Nötronlar İçin Transport Denklemi. — (IX. 3. 9) veyâ (IX. 5. 5) ile verilmiş olan nötronların transport denklemi çok genel bir denklem olup bunun en basit geometriler için dahi, şimdiye kadar, açık ve tam çözümleri inşâ edilebilmiş değildir. Bu itibarla biz de bu derste (IX. 5. 5) denkleminin ancak bazı özel hâllerini incelemeğe gayret edeceğiz.

Genel transport denkleminin oldukça basit bir şeklini : 1) nötronların eşitenerjili olduklarını ve 2) gecikmiş nötronların da ihmâl edilebileceklerini farzederek elde edebiliriz. Buna göre (IX. 5. 5) in

$$\frac{1}{v}\,\frac{\partial\Phi(\vec{r},\vec{\Omega},t)}{\partial t}+\operatorname{div}_x[\vec{\Omega}\,.\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega},t)]+\Sigma_t(\vec{r})\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega},t)=$$

$$=K(\vec{r},\vec{\Omega},t)+c(\vec{r})\,\Sigma_t(\vec{r})\int_{\vec{\Omega}'}\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}',t)\,f(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega})\,d\Omega' \qquad \text{(X.1.1)}$$

şekline müncer olduğu kolaylıkla tesbit olunur. Burada $f(\vec{\Omega}'\rightarrow\vec{\Omega})$ yerine sâdece $f(\vec{\Omega}'\,.\,\vec{\Omega})$ yazılmış olması, $\vec{\Omega}'$ ve $\vec{\Omega}$ ya olan bağlılığı elâstik çarpışmadan ileri gelen f fonksiyonunun bu iki vektöre göre simetrik bir fonksiyon olduğunu şimdiden tebârüz ettirmiş olmak içindir. Bu özellikten ileride faydalanacağız.

Görüldüğü gibi (X. 1. 1) denklemi hem şekil, hem de ihtivâ ettiği bağımsız değişken sayısı bakımından (IX. 5. 5) denklemine nisbetle büyük bir sâdelik arzetmektedir. Daha da ileri giderek, ve problemin genelliğine halel getirmeden t değişkeninden de sarf-ı nazar etmek kâbildir. Filhakika zamana bağlı transport denkleminin genel çözümünü nötronların muayyen bir hayalî (*fiktif*) ortamdaki kararlı dağılımlarını veren denklemin çözümüne ircâ etmek mümkün olmaktadır. Bunu ispatlamak için (X. 1. 1) in t ye göre LAPLACE dönüşmüşünü alalım. $\bar{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega)$ ile $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ nin ve $\bar{K}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega)$ ile de $K(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ nin LAPLACE dönüşmüşlerini göstererek denklemimiz

$$\mathrm{div}_x [\vec{\Omega} \cdot \bar{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega)] + \left[\Sigma_t(\vec{r}) + \frac{\omega}{v}\right] \bar{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) = \bar{K}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) +$$

$$+ c(\vec{r})\, \Sigma_t(\vec{r}) \int_{\vec{\Omega}'} \bar{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}', \omega)\, f(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})\, d\Omega' \tag{X.1.2}$$

şekline dönüşmüş olur. Bu ise (X. 1. 1) e tekabül eden zamana bağlı olmayan denklemlerle aynı yapıyı haizdir. Tek fark ikinci terimde Σ_t yerine $\Sigma_t + (\omega/v)$ vazedilmiş olmasından ileri gelmektedir. Bu denklemi çözerek $\bar{\Phi}$ yi bulduktan sonra bunun ω ya göre ters LAPLACE dönüşmüşünü almak bize (X. 1. 1) in çözümünü verir.

IX. dersten bilindiği vechile $c(\vec{r})\, \Sigma_t(\vec{r})$ çarpımının açık ifâdesi $\Sigma_t(\vec{\mathbf{r}})$ yi ihtivâ etmez. Meselâ elâstik çarpışmalar L-sisteminde izotrop olarak kabul edilirlerse $f(\vec{\Omega}' . \vec{\Omega}) = 1/4\pi$ ve $c(\vec{r}) = [\Sigma_s(\vec{r}) + \nu\, \Sigma_f(\vec{r})] / \Sigma_t(\vec{r})$ yazılabilir. Buna binâen zamana bağlı eşitenerjili nötronların transport denklemini çözmenin, makroskopik toplam tesir kesidi $\Sigma_t(\vec{r}) + (\omega/v)$ olan hayalî bir ortamdaki eşitenerjili nötronların kararlı dağılımlarını tâyin etmeğe müncer olduğunu görmüş olmaktayız.

Şimdi son bir kere daha nazarımızı (X. 1. 1) denklemine tevcih edip buradaki kaynak terimini yok farzedelim : $K(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = 0$. Eğer

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \exp(\omega t) \tag{X. 1. 3}$$

vazedecek olursak (X. 1. 1) denklemi

$$\mathrm{div}_x[\vec{\Omega}\,.\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega})] + \left[\Sigma_t(\vec{r}) + \frac{\omega}{v}\right]\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}) =$$

$$= c(\vec{r})\,\Sigma_t(\vec{r}) \int_{\vec{\Omega}'} \Phi(\vec{r},\vec{\Omega}')\, f(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega})\, d\Omega' \qquad (X.1.4)$$

şekline girer. Bu homogen integrodiferansiyel denklemin aynı zamanda ω parametresine göre bir özdeğer problemi teşkil ettiği de görülmektedir. Eğer çoğaltkan ortam sonlu bir yaygınlığı haiz ise (X. 1. 4) özdeğer probleminin özdeğerlerinin sayılabilir sonsuz sayıda münferit değerleri haiz oldukları ve bundan başka, bu özdeğerler arasında kompleks olanlar varsa bunların reel kısımlarının da en büyük reel özdeğerden daha küçük oldukları gösterilebilir. ω_0 ile en büyük özdeğeri gösterelim. Diğer özdeğerler de reel kısımları gitgide azalan ω_1, ω_2,......, ω_k,... gibi bir dizi teşkil etsinler. Bu takdirde her ω_k ($k=1, 2, \ldots$) özdeğerine (X. 1. 4) ün bir $\Phi_k(\vec{r},\vec{\Omega})$ özfonksiyonu ve, $K(\vec{r},\vec{\Omega},t)=0$ olmak şartıyla, (X. 1. 1) in

$$\Phi_k(\vec{r},\vec{\Omega},t) = \Phi_k(\vec{r},\vec{\Omega})\exp(\omega_k t) \qquad (X.1.5)$$

şeklinde özel bir çözümü tekâbül edecektir. Transport denklemi lineer bir denklem olduğundan genel çözümü bütün özel çözümlerin lineer bir kombinezonu olacak yâni

$$\Phi(\vec{r},\vec{\Omega},t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\Phi_k(\vec{r},\vec{\Omega},t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\Phi_k(\vec{r},\vec{\Omega})\exp(\omega_k t) \qquad (X.1.6)$$

ile verilecektir.

ω_0 ın cebrik değeri diğer bütün ω_k ların reel kısımlarının değerlerinden daha büyük olduğundan t nin kâfî derecede büyük değerleri için (X. 1. 6) daki bütün terimler ilk terim yanında küçük kalacaklardır. Buna binâen transport denkleminin çözümü de

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(\vec{r},\vec{\Omega},t) \frown a_0\,\Phi_0(\vec{r},\vec{\Omega})\exp(\omega_0 t) \qquad (X.1.7)$$

ye müncer olur. ω_0 büyüklüğüne ortamın peryodu adı verilir. Eğer $\omega_0 < 0$

ise (X. 1. 7) den kolayca görüleceği üzere ortamdaki nötron akısı zamanla eksponansiyel olarak söner (: **altkritik ortam**) ; $\omega_0 > 0$ ise nötron akısı zamanla eksponansiyel olarak artar (: **üstkritik ortam**) ; $\omega_0 = 0$ ise ortamdaki nötron akısı zamana tâbî değil ve kararlı bir dağılım arzediyor demektir. Bu takdirde, difüzyon teorisindeki gibi ortama gene **kritik ortam** adı verilir.

2. Eşitenerjili Nötronlar İçin Karşıtlık Teoremi. — Eşitenerjili nötronların zamana tâbî olmayan dağılımlarının tahkik ettiği transport denkleminin mühim bir özelliği **karşıtlık** (*resiprosite*) **teoremini** tahkik etmesidir. Bu cildin VI. dersinde eşitenerjili nötronların difüzyon denklemi için bu teoremi tesis etmiştik. Şimdi bunun daha şumûllü bir ifâdesini transport denkleminin bir özelliği olarak tesis edeceğiz. Bunun için önce çoğaltkan bir ortamda bir $\vec{r}_0$ noktasında $\vec{\Omega}_0$ doğrultusuna doğru nötron neşreden K_0 şiddetinde noktasal bir nötron kaynağı göz önüne alalım ve $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}\ ; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)$ ile de kararlı akı dağılımına tekabül eden transport denklemini tahkik eden nötron akısını gösterelim. Buna binâen

$$\mathrm{div}_x [\vec{\Omega} . \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}\ ; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0) + \Sigma_t(\vec{r})\, \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}\ ; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0) = K_0\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \delta(\vec{\Omega} . \vec{\Omega}_0)$$
$$+ c(\vec{r})\, \Sigma_t(\vec{r}) \int_{\vec{\Omega}'} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}'\ ; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)\, f(\vec{\Omega}' . \vec{\Omega})\, d\Omega' \qquad \text{(X 2.1)}$$

olur.

Şimdi aynı ortamda bir $\vec{r}_1$ noktasında ve $-\vec{\Omega}_1$ doğrultusunda nötron neşreden aynı K_0 şiddetini haiz noktasal nötron kaynağı için transport denklemini yazalım. $-\vec{\Omega}_1 . \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 . \vec{\Omega}$ olduğunu da göz önünde tutarak transport denklemini bu şartlar altında ve $-\vec{\Omega}$ için yazarsak

$$-\mathrm{div}_x[\vec{\Omega} . \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}\ ; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)] + \Sigma_t(\vec{r})\, \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}\ ; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1) = K_0\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)\, \delta(\vec{\Omega} . \vec{\Omega}_1)$$
$$+ c(\vec{r})\, \Sigma_t(\vec{r}) \int_{\vec{\Omega}'} \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}'\ ; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)\, f(\vec{\Omega}' . \vec{\Omega})\, d\Omega' \qquad \text{(X.2.2)}$$

olur.

(X. 2. 1) ve (X. 2. 2) ye tekabül eden sınır şartları, $\vec{n}(\vec{r}_s)$ ile göz önüne aldığımız ortamın $\vec{r}_s$ dış yüzey noktasında dışarı doğru yönelmiş normâl birim vektörünü gösterirsek,

$$\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0 \quad \text{için} \quad \Phi(\vec{r}_s,\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)=\Phi(\vec{r}_s,\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)=0 \qquad (X\ 2.3)$$

bağıntılarıyla ifâde olunurlar. Şimdi (X. 2. 1) i $\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)$ ve (X. 2. 2) yi de $\Phi(\vec{r},\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)$ ile çarpıp biribirlerinden çıkartalım :

$$\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1).\,\mathrm{div}_x[\vec{\Omega}\cdot\Phi(\vec{r},\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)]+\Phi(\vec{r},\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)\times$$

$$\times\,\mathrm{div}_x[\vec{\Omega}\,\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)]=\mathrm{div}_x[\vec{\Omega}\cdot\Phi(\vec{r},\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)\,\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)]=$$

$$=\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)\cdot K_0\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0)-\Phi(\vec{r},\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)\cdot K_0\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\,\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_1)+$$

$$+c(\vec{r})\,\Sigma_t(\vec{r})\int_{\vec{\Omega}'}[\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)\,f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}';\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)-$$

$$-\Phi(\vec{r},\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)\,f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\,\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega}';\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)]\,d\Omega'. \qquad (X.2.4)$$

Bu ifâdeyi ortamın V hacmı üzerinden integre edelim. GAUSS formülü vâsıtasıyla bu ifâdenin sol tarafının integrali bir yüzey integraline dönüştürülür ve böylece

$$\int_V \mathrm{div}_x[\vec{\Omega}\cdot\Phi(\vec{r},\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)\,\Phi(\vec{r},-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)]\,d\vec{r}=$$

$$\int_S[\vec{n}(\vec{r}_s)\cdot\vec{\Omega}]\,\Phi(\vec{r}_s,\vec{\Omega};\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0)\,\Phi(\vec{r}_s,-\vec{\Omega};\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1)\,d\vec{r}_s\equiv 0 \qquad (X.2.5)$$

olduğu bulunur, çünkü (X. 2. 3) sınır şartından dolayı Φ fonksiyonu ortamın dış yüzeyinde sıfır olmaktadır. Böylece (X. 2. 4) ifâdesinin, ortamın V hacmı üzerinden alınmış olan integrali

$$\Phi(\vec{r}_0, -\vec{\Omega}, \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1) \cdot K_0\, \delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0) - \Phi(\vec{r}_1, \vec{\Omega}; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0) \cdot K_0\, \delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_1) +$$

$$+ \int_V c(\vec{r})\, \Sigma_t(\vec{r}) \int_{\vec{\Omega}'} [\Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)\, f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\, \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}'; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0) -$$

$$- \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)\, f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\, \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}'; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)]\, d\Omega'\, d\vec{r} = 0 \qquad (X.2.6)$$

a müncer olur. Bu ifâde de bu sefer bütün $\vec{\Omega}$ lar üzerinden integre edilirse

$$K_0 \cdot [\Phi(\vec{r}_0, -\vec{\Omega}_0; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1) - \Phi(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)] +$$

$$+ \int_V c(\vec{r})\, \Sigma_t(\vec{r}) \int_{\vec{\Omega}'} \int_{\vec{\Omega}} [\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}'; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)\, f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\, \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1) -$$

$$- \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)\, f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\, \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}'; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)]\, d\Omega\, d\Omega'\, d\vec{r} = 0 \qquad (X.2.7)$$

bulunur. Eğer $\vec{\Omega}'$ ile $\vec{\Omega}$ biribirleriyle mübâdele edilirlerse $f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})$nın $\vec{\Omega}'$ ve $\vec{\Omega}$ ya göre simetrik olduğunu da göz önünde tutarak

$$\int_{\vec{\Omega}'} \int_{\vec{\Omega}} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)\, f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\, \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)\, d\Omega\, d\Omega' =$$

$$= \int_{\vec{\Omega}} \int_{\vec{\Omega}'} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0)\, f(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\, \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}'; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)\, d\Omega'\, d\Omega \qquad (X.2.8)$$

olduğu görülür. Buna binâen de (X. 2. 7) den

$$\boxed{\Phi(\vec{r}_1, \vec{\Omega}_1; \vec{r}_0, \vec{\Omega}_0) = \Phi(\vec{r}_0, -\vec{\Omega}_0; \vec{r}_1, -\vec{\Omega}_1)} \qquad (X.2.9)$$

bulunur. İşte bu, karşıtlık teoreminin matematik ifâdesini teşkil etmektedir :

Karşıtlık Teoremi : *$\vec{r}_0$ da $\vec{\Omega}_0$ yönünde nötron neşreden noktasal bir kaynak dolayısıyla bir $\vec{r}_1$ noktasında husûle gelen $\vec{\Omega}_1$ yönünü haiz nötronların akısı, $\vec{r}_1$ de $-\vec{\Omega}_1$ yönünde nötron neşreden aynı şiddetteki noktasal bir kaynak dolayısıyla bir $\vec{r}_0$ noktasında husûle gelen $-\vec{\Omega}_0$ yönünü haiz nötronların akısına eşittir.*

3. Eşitenerjili Nötronların Transport Denkleminin Bir İntegrâl Denkleme İrcâı. — Eşitenerjili nötronların kararlı dağılımını veren transport denklemini kısaca

$$\vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}_r}\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega})+\Sigma_t(\vec{r})\,\Phi(\vec{r},\vec{\Omega})=K(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad (X\,3.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Transport denkleminde nötron kaynağını ifâde eden bütün sağ yandaki terimleri burada kısaca $K(\vec{r},\vec{\Omega})$ ile göstermiş bulunuyoruz. Geçen derste de işâret etmiş olduğumuz vechile $(\vec{\Omega}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}})$ operatörü $\vec{\Omega}$ doğrultusunda türev almaya delâlet eder. $\vec{\Omega}$ doğrultusundaki noktaları R apsisiyle gösterelim. Eğer $\vec{\Omega}$ ekseni üzerinde $P(\vec{r})$ ve $P(\vec{r}_0)$ noktalarını göz önüne alırsak bunlar arasındaki uzaklık $\vec{r}-R\vec{\Omega}$ olacaktır. Buna binâen

$$\vec{r}\rightarrow\vec{r}-R\vec{\Omega} \qquad (X.\,3.\,2)$$

değişken dönüşümünü yapıp $(\vec{\Omega}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}})$ ın mânâsını da göz önünde tutarak (X. 3. 1) denklemini

$$-\frac{\partial\Phi(\vec{r}-R\vec{\Omega},\vec{\Omega})}{\partial R}+\Sigma_t(\vec{r}-R\vec{\Omega})\,\Phi(\vec{r}-R\vec{\Omega},\vec{\Omega})=K(\vec{r}-R\vec{\Omega},\vec{\Omega}) \qquad (X.3.3)$$

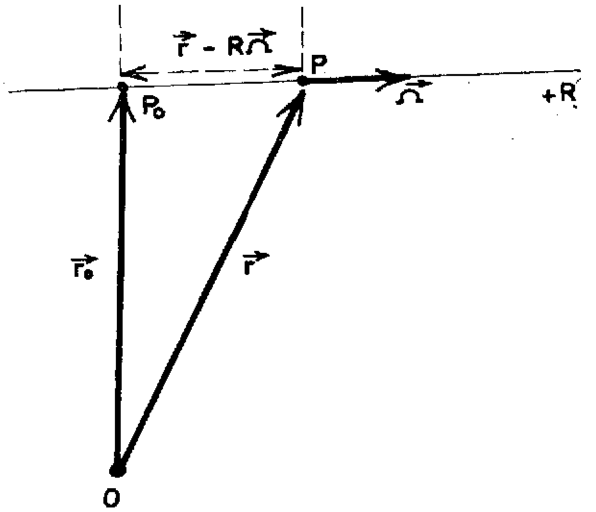
şekline sokmak kâbildir. Bu basit diferansiyel denklemin çözümü

$$\Phi(\vec{r}-R\vec{\Omega},\vec{\Omega})=\Phi(\vec{r}-R_0\vec{\Omega},\vec{\Omega})\exp\left[\int_{R_0}^{R}\Sigma_t(\vec{r}-R''\vec{\Omega})\,dR''\right]+$$
$$+\int_{R}^{R_0}K(\vec{r}-R'\vec{\Omega})\exp\left[\int_{R'}^{R}\Sigma_t(\vec{r}-R''\vec{\Omega})\,dR''\right]dR' \qquad (X.3.4)$$

olarak yazılabilir. Bu ifâde

$$\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = \alpha(\vec{r} - R\vec{\Omega}, \vec{r} - R'\vec{\Omega}) = \int_{R}^{R'} \Sigma_t(\vec{r} - R''\vec{\Omega})\, dR'' \qquad (X.3.5)$$

vazetmekle epeyi basitleşir. $\alpha(\vec{r}, \vec{r}')$ ye, $\vec{r} - R\vec{\Omega}$ ve $\vec{r} - R'\vec{\Omega}$ noktaları arasındaki **optik uzaklık** adı verilir.



Şekil : X. 1

$\alpha(\vec{r}, \vec{r}')$ nün ithâlinin (X. 3. 5) de icrâ edeceği basitleştirmeyi açıkça ortaya koymadan önce bir de şuna dikkati çekelim : eğer göz önüne aldığımız ve boşlukla çevrili olduğunu farzettiğimiz ortamın dış yüzeyi muayyen bir $R_0 > 0$ değeri için $\vec{r} - R_0\vec{\Omega}$ doğrusu tarafından deliniyorsa R_0 ın bu değeri için $\Phi(\vec{r} - R_0\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$, geçen ders tesis etmiş olduğumuz (IX. 4. 2) sınır şartına binâen sıfır olur. Böylece R_0 ın, ortamın sınırına tekabül eden değeri için (X. 3. 4) denklemi, $\alpha(\vec{r}, \vec{r}')$ nün târifini de göz önünde tutarak, ve bundan başka formalizmi daha da basitleştirmek gâyesiyle $R=0$ vazetmek sûretiyle

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{0}^{R_0} K(\vec{r} - R'\vec{\Omega}) \exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r} - R'\vec{\Omega})]\, dR' \qquad (X.3.6)$$

ifâdesine müncer olur. Ortamın dışında $\Sigma_t = 0$ olacağından α da sıfıra eşittir. Diğer taraftan $K(\vec{r} - R'\vec{\Omega})$ nın ortamın dışındaki herhangi bir kaynağa nisbet edilmediği farz edilirse (X. 3. 6) daki integralin üst sınırını ∞ olarak almakta hiçbir mahsur yoktur. Böylece (X. 3. 6) yerine

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^{\infty} K(\vec{r} - R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r} - R'\vec{\Omega})]\, dR' \qquad (X.3.7)$$

yazılabilir. Şimdi $\vec{r}' = \vec{r} - R'\vec{\Omega}$ vazedelim ve

$$K(\vec{r} - R'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = K(\vec{r}', \vec{\Omega}) = \int_{\vec{\Omega}'} K(\vec{r}', \vec{\Omega}')\, \delta(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega})\, d\Omega' \qquad (X.3.8)$$

olduğuna dikkati çekelim. Böylelikle (X. 3. 7) yi

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^{\infty} \int_{\vec{\Omega}'} K(\vec{r}', \vec{\Omega}')\, \delta(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) \exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')]\, d\Omega'\, dR' \qquad (X.3.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Fakat $d\Omega'$ nün ortamın dış yüzeyine ait elemanter bir dS' yüzey parçasını gören katı açı olması hasebiyle ve katı açının târifi mûcibince

$$d\Omega' = \frac{\left(\dfrac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{n} \right) dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \qquad (X.3.10)$$

olacaktır. Filhakika $\vec{r} - \vec{r}' / |\vec{r} - \vec{r}'|$ ile $\vec{\Omega}$ yönündeki birim vektör, $\vec{n}$ ile de dS' nün normal birim vektörü gösterilirse

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{n})\, dS' = \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{n} \right] dS'$$

de dS' nün $|\vec{r}-\vec{r}'| = R'$ yarıçaplı küre üzerine dik izdüşümü olur. Bunun dR' ile çarpımı ise tabanı dS' olan dR' yüksekliğini haiz elemanter bir dV' hacmi meydana getirir. Bu takdirde (X. 3. 9) daki $d\Omega'\, dR'$ yerine

$$d\Omega'\, dR' = \frac{\left[\dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\vec{n}\right] dS'\, dR'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \frac{dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \qquad \text{(X.3.11)}$$

yazmak kâbil olacaktır. Şu hâlde (X. 3. 9) ifâdesi de artık

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_V \frac{K(\vec{r}', \vec{\Omega}')\, \delta(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega}) \exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\, d\vec{r}' \qquad \text{(X.3.12)}$$

veyâ

$$\boxed{\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_V \frac{K\left(\vec{r}', \dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \delta\left(\vec{\Omega}\cdot \dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\, d\vec{r}'} \qquad \text{(X 3.13)}$$

şeklinde yazılacaktır. Bu integrâl denklem $K(\vec{r}, \vec{\Omega})$ kaynak teriminin şekli mâlûm olduğu takdirde $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ nin derhâl tesbit edilebilmesini sağlamaktadır.

4. **(X. 3. 12) nin Basit Hâller İçin Çözümü.** — Bu bölümde nötronların transport denkleminin (X. 3. 12) ile verilmiş olan integrâl şeklini bazı basit hâller için çözmek istiyoruz. En basit hâl olarak önce tesir kesidi sıfır olan ve bir $\vec{r}_0$ noktasında K_0 şiddetini ve $A(\vec{\Omega}')$ açısal dağılımını haiz

$$K(\vec{r}', \vec{\Omega}') = K_0 A(\vec{\Omega}')\, \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) = K_0 \cdot A\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \qquad \text{(X.4.1)}$$

şeklinde noktasal anizotrop bir nötron kaynağı ihtivâ eden bir ortam göz önüne alacağız. (X. 4. 1) i (X. 3. 12) ye vazetmek sûretile $\Phi(\vec{r},\vec{\Omega})$ derhâl tesbit edilir :

$$\Phi(\vec{r},\vec{\Omega}) = \int_{V'} \frac{K_0 \cdot A(\vec{\Omega}')\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)\,\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}')\,d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} =$$

$$= \int_{V'} \frac{K_0 \cdot A\left(\dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)\,\delta\left(\vec{\Omega}\cdot\dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot A\left(\dfrac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \cdot \delta\left(\vec{\Omega}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) \qquad \text{(X.4.2)}$$

Bu netice bize tesir kesidi sıfır olan ve $\vec{r}_0$ noktasında K_0 şiddetiyle $A(\vec{\Omega}')$ açısal dağılımını haiz noktasal anizotrop bir nötron kaynağı bulunan bir ortamın muayyen bir $\vec{r}$ noktasında ancak ve ancak $\vec{r}-\vec{r}_0$ ile $\vec{\Omega}$ aynı doğrultudaysalar, $\vec{\Omega}$ doğrultusunda ve

$$\frac{K_0 . A\left(\dfrac{\vec{r}-\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}$$

şiddetini haiz bir nötron akısı mevcut olacağını göstermektedir.

Toplam akıyı elde etmek üzere (X. 4. 2) nin $\vec{\Omega}$ üzerinden integralini alırsak neticede

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{K_0 . A\left(\dfrac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \qquad \text{(X.4.3)}$$

bulunur. Bu da, $\vec{r}_0$ daki noktasal bir kaynaktan intişâr eden nötronların şiddetinin kaynaktan itibaren $|\vec{r}-\vec{r}_0|$ mesâfesinde $1/|\vec{r}-\vec{r}_0|$ kadar zayıfladığını teyidetmektedir.

(X. 3. 12) denkleminin ikinci bir tatbikatına vesile olmak üzere sırf yutucu bir ortamda ($\Sigma_t = \Sigma_a$) bir $\vec{r}_0$ noktasına yerleştirilmiş K_0 şiddetinde izotrop bir nötron kaynağı göz önüne alalım. Buna binâen

$$K(\vec{r}', \vec{\Omega}') = \frac{K_0}{4\pi}\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \tag{X.4.4}$$

olur. Ve buna tekâbül eden açısal nötron akısı da

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{V'} \frac{K_0}{4\pi} \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)\,\delta\left(\vec{\Omega} \cdot \dfrac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\, d\vec{r}' =$$

$$= \frac{K_0}{4\pi\,|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}\,\delta\left(\vec{\Omega} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\right) \exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r}_0)] \tag{X.4.5}$$

ifâdesiyle tâyin edilmiş olur. Kaynak eğer referans sisteminin orijinindeyse ($\vec{r}_0 = 0$)

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{K_0}{4\pi r^2}\,\delta\left(\vec{\Omega} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right) \exp[-\alpha(\vec{r}, 0)] \tag{X.4.6}$$

olur.

Toplam nötron akısını bulmak için bütün $\vec{\Omega}$ lar üzerinden (X. 4. 6) yı integre etmek lâzımdır. Böylece

$$\phi(\vec{r}) = \frac{K_0 \cdot \exp[-\alpha(\vec{r}, 0)]}{4\pi r^2} \tag{X.4.7}$$

elde edilmiş olur.

(X. 3. 12) denkleminin, gene orijinde K_0 şiddetinde izotrop noktasal bir nötron kaynağı ihtivâ eden sırf yutucu fakat bu sefer *homogen* bir ortam için çözümünü de, bu hâl için optik uzaklığın

$$\alpha(\vec{r}, 0) = \Sigma_a r$$

ye müncer olduğuna dikkat ederek, hemen yazmak kâbildir ve böylece de

$$\phi(\vec{r}) = \frac{K_0 \exp(-\Sigma_a r)}{4\pi r^2} \tag{X.4.8}$$

bulunmuş olur.

5. Çoğaltkan Bir Ortam İçin Transport Denkleminin İntegrâl Şekli. — Çoğaltkan bir ortamdaki eşitenerjili nötronların transport denklemini integrâl şekliyle yazabilmek için önce eşitenerjili nötronların kararlı dağılımlarını veren transport denkleminin, (IX. 5. 15) i de göz önünde tutarak

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}_r \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = K(\vec{r}, \vec{\Omega}) +$$
$$+ c(\vec{r}) \Sigma_t(\vec{r}) \int_{\vec{\Omega}'} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') f(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \, d\Omega' \tag{X.5.1}$$

şeklinde yazılabileceğine dikkati çekelim. Eğer çarpışmaların izotrop bir şekilde cereyan ettiğini farzedersek, yâni

$$f(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}$$

ise, (X. 5. 1) in sağ yanındaki integrâl $\phi(\vec{r})$ toplam nötron akısının târifinden başka birşey olmaz. Buna göre, $(\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})$ operatörünün delâlet ettiği mânâyı ve gene Şekil : X. 1 i nazar-ı itibâra alarak

$$-\frac{\partial \Phi(\vec{r} - R\vec{\Omega}, \vec{\Omega})}{\partial R} + \Sigma_t(\vec{r} - R\vec{\Omega}) \Phi(\vec{r} - R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} c(\vec{r} - R\vec{\Omega}) \Sigma_t(\vec{r} - R\vec{\Omega}) \phi(\vec{r} - R\vec{\Omega}) + K(\vec{r} - R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \tag{X.5.2}$$

yazılır. Bu denklem (X. 3. 3) denkleminden sadece sağ yanı dolayısı ile fark etmektedir. (X. 3. 3) ün çözümü olan (X. 3. 12) de K yerine (X. 5. 2) nin sağ yanını koyarsak (X. 5. 1) in çözümü olarak

$$\boxed{\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_V \left[\frac{1}{4\pi} c(\vec{r'}) \Sigma_t(\vec{r'}) \phi(\vec{r'}) + K(\vec{r'}, \vec{\Omega'})\right] \delta(\vec{\Omega'} \cdot \vec{\Omega}) \frac{\exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r'})]}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} d\vec{r'}}$$

(X.5.3)

bulunur. Buradan $\phi(\vec{r})$ yi verecek olan integrâl denkleme geçmek için (X. 5. 3) ün her iki yanını da bütün $\vec{\Omega}$ lar üzerinden integre etmek kâfidir. Böylece $\phi(\vec{r})$ yi tesbit eden denklemin de

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int_V \left[\frac{1}{4\pi} c(\vec{r'}) \Sigma_t(\vec{r'}) \phi(\vec{r'}) + K(\vec{r'})\right] \frac{\exp[-\alpha(\vec{r}, \vec{r'})]}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} d\vec{r'}} \qquad (X.5.4)$$

şeklinde olduğu anlaşılmış olur.

6. Yabancı Kaynak İhtivâ Etmeyen Sonsuz Homogen Çoğaltkan Ortam. — Bu bölümde hiçbir yabancı nötron kaynağı ihtivâ etmeyen sonsuz yaygınlığı haiz çoğaltkan bir ortamdaki toplam $\phi(\vec{r})$ nötron akısını transport teorisine dayanarak tesbit etmek istiyoruz.

Ortamın homogenliğinden ötürü $c(\vec{r}) = c$, $\Sigma_t(\vec{r}) = \Sigma_t$ ve $K(\vec{r})$ de sıfır olacaktır. Buna göre optik uzaklık $\alpha = \Sigma_t . |\vec{r} - \vec{r'}|$ ye müncer olur ve $\phi(\vec{r})$ yi veren (X. 5. 4) denklemi de bu şartlar altında

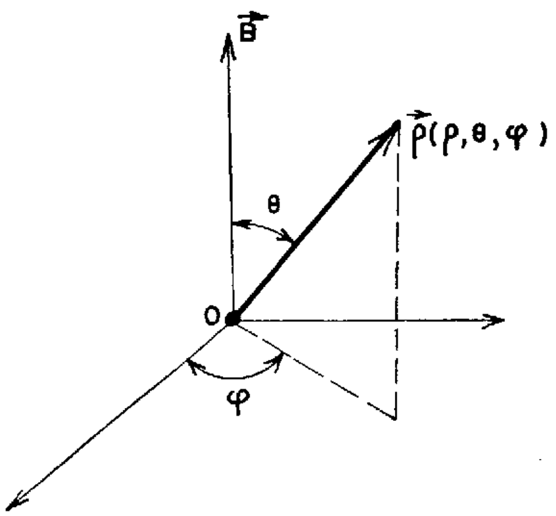
$$\phi(\vec{r}) = \frac{c\Sigma_t}{4\pi} \int_V \frac{\phi(\vec{r'}) \cdot \exp(-\Sigma_t \cdot |\vec{r} - \vec{r'}|)}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} d\vec{r'} \qquad (X.6.1)$$

şekline girer.

Şimdi $\vec{u}$ ile bir birim vektörü göstermek sûretiyle $\vec{B} = B\vec{u}$ diye bir vektör târif edelim ve $\phi(\vec{r})$ nin

$$\phi(\vec{r}) = \exp(j \vec{B} . \vec{r}) \qquad (X. 6. 2)$$

şeklinde ifâde edilip edilemeyeceğini araştıralım. (X. 6. 2) ifâdesi (X. 6. 1) denklemine vazedilirse



Şekil : X. 2

$$\exp(j\vec{B}\cdot\vec{r}) = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_V \frac{\exp(-\Sigma_t\cdot|\vec{r}-\vec{r}'| + j\vec{B}\cdot\vec{r})\,d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \qquad \text{(X.6.3)}$$

bulunur. Şimdi $\vec{\rho}=\vec{r}-\vec{r}'$ vazedelim (Şekil : X. 2). Buna göre

$$d\vec{\rho} = \rho^2 d\rho \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \rho^2 d\rho\, d\mu\, d\varphi$$

olur ($\mu=\cos\theta$), ve (X. 6. 3) den de

$$1 = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_V \frac{\exp(-\Sigma_t\rho + j\vec{B}\cdot\vec{\rho})\,d\vec{\rho}}{\rho^2} =$$

$$= \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_0^\infty d\rho\int_{-1}^{1} d\mu\int_0^{2\pi}\exp(-\Sigma_t\rho + jB\rho\mu)\,d\varphi = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\left[\frac{4\pi}{B}\text{ arc tg }\frac{B}{\Sigma_t}\right] \qquad \text{(X.6.4)}$$

elde edilir. Yâni, eğer $\vec{B}$ nin normu olan B

$$\boxed{\frac{\Sigma_t}{B} \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{\Sigma_t} = \frac{1}{c}} \tag{X.6.5}$$

nin bir çözümü ise $\phi(\vec{r})$ de (X. 6. 2) vazına binâen bihakkın

$$\phi(\vec{r}) = \exp(j\vec{B}\,.\,\vec{r})$$

şeklinde ifâde edilmiş olur.

$\phi(\vec{r})\,.\,\exp(-r)$ nin $r \to \infty$ için sıfıra gitmesi şartı tahtında (X. 6. 1) denkleminin en genel çözümünün, $f(\vec{u})$ ile keyfî bir fonksiyonu göstermek üzere

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{u}} f(\vec{u}) \exp(j B \vec{u} \cdot \vec{r})\, d\vec{u} \tag{X.6.6}$$

ifâdesiyle verileceği ispat edilmiştir (Bk. **K. M. Case, F. de Hoffmann, G. Placzek** : Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, p. 49-52, U. S. Government Printing Office, 1953 ; veyâ **B. Davison** : Neutron Transport Theory, 2. baskı, p. 52-53, Clarendon Press Oxford, 1958). Eğer (X. 6. 6) nın her iki tarafının da lâplâsiyenini alırsak

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{u}} f(\vec{u}) \nabla^2 \exp(j B\vec{u} \cdot \vec{r}) d\vec{u} = -B^2 \int_{\vec{u}} f(\vec{u}) \exp(j B\vec{u} \cdot \vec{r})\, d\vec{u}$$

$$= -B^2\, \phi(\vec{r})$$

yâni

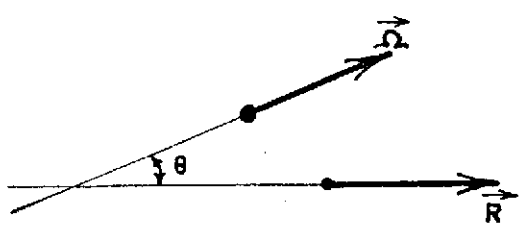
$$\boxed{\nabla^2\,\phi(\vec{r}) + B^2\,\phi(\vec{r}) = 0} \tag{X.6.7}$$

bulunur. Bu ise, mâlûm olduğu vechile sonlu bir ortamdaki nötronların kararlı dağılımını veren difüzyon denklemidir. Binâenaleyh transport denkleminin çözümleri keză difüzyon denkleminin de çözümleridir. Tersine olarak difüzyon denkleminin çözümleri de sonsuz bir ortam için transport denklemini tamamen tahkik ederler. Fakat sonlu ortam için difüzyon denkleminin çözümleri transport denklemini ancak sınırdan uzak bölgeler için yaklaşıklıkla tahkik ederler. Zirâ ancak bu gibi bölgelerde nötron akısı oldukça izotrop bir dağılım arzedebilmektedir.

ALIŞTIRMALAR

1. Transport denkleminin (IX. 5. 5) şeklini göz önünde tutarak gene bir LAPLACE dönüşümü vâsıtasıyla zamana bağlı transport probleminin kararlı transport problemine ircâ edilebileceğini gösteriniz. Bu hâle tekâbül eden dönüşmüş denklemdeki Φ, K, $\nu(t')$ ve $F_f(E, t')\nu(t')$ ye tekâbül eden dönüşmüş terimler nasıl târif edilmiş olacaklardır ?

2. Bir yön, şekilde görüldüğü gibi, ya bir $\vec{\Omega}$ birim vektörünün verilmesiyle, ya $\vec{\Omega}$ ile referans yönü olarak seçilmiş bir başka yön arasındaki θ açısı ile veyâhut da bu açının muayyen bir fonksiyonu ile belirlenebilir. Farklı iki $\vec{\Omega}$ ve $\vec{\Omega}'$ birim vektörleri için



Şekil : X. 3

$$\vec{\Omega} \neq \vec{\Omega}' \quad \text{için} \quad \delta(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = 0$$

$$\int_{\vec{\Omega}'} \delta(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')\, d\Omega' = 1 \quad \text{ve} \quad \int_{\vec{\Omega}'} F(\vec{\Omega}')\, \delta(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')\, d\Omega' = F(\vec{\Omega})$$

bağıntılarını haiz bir DIRAC fonksiyonunu derste kullandık. Şimdi $\mu = \cos\theta = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$ vazederek

$$\mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' \neq 1 \quad \text{için} \quad \delta(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' - 1) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \delta(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' - 1)\, d\Omega' = 1$$

bağıntıları ile târif edilmiş $\delta(\vec{\Omega}\,.\,\vec{\Omega}'-1)$ fonksiyonu ile $\delta(\vec{\Omega}\,.\,\vec{\Omega}')$ arasında ne gibi bir bağıntı bulunduğunu ve

$$\int_{-1}^{1} F(\vec{\Omega}')\,\delta(\vec{\Omega}\,.\,\vec{\Omega}'-1)\,d\Omega'$$

nün neye eşit olduğunu gösteriniz.

3. Eşitenerjili nötronlar için transport denklemini küresel ve silindirik homogen ortamlar için yazınız.

4. Noktasal kaynak hâlinde homogen bir ortamdaki $\vec{J}(\vec{r})$ nötron akımını veren integrâl denklemi yazınız.

XI. DERS

Küresel Harmonikler Metodu

Düzlem için küresel harmonikler metodu - Düzlemsel geometri için transport denkleminin P_n takribiyeti ve bunun formel çözümü - P_1 takribiyeti ve bunun âdî difüzyon denklemiyle bağıntısı - Transport tesir kesidi - Genelleştirilmiş FİCK kanunu - Küresel harmonikler metodu için sınır şartları - MARK sınır şartları - MARSHAK sınır şartları.

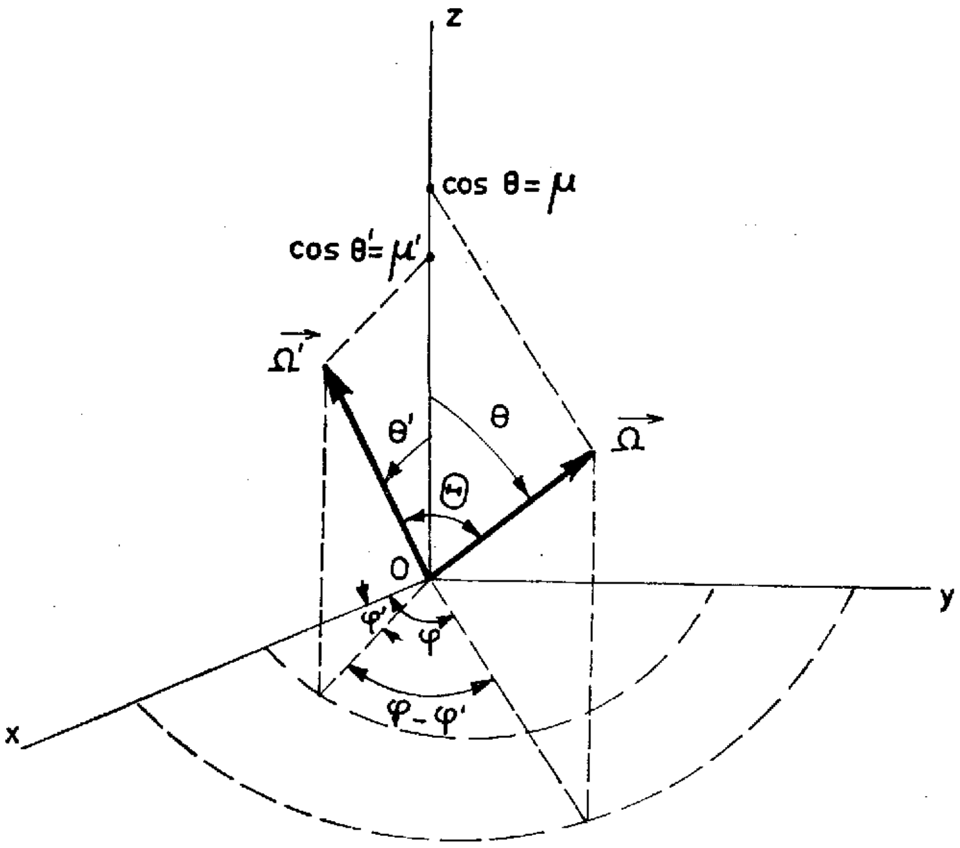
1. Düzlemsel Geometri İçin Küresel Harmonikler Metodu. — Nötronların transport teorisine bir giriş mâhiyetinde olan bu derslerimizde, bu teoride müstesnâ bir mevkî işgâl eden «**Küresel Harmonikler Metodu**» ndan da kısaca bahsetmek yerinde olacaktır. Ancak derslerimizin gâyesini ve seviyesini aşmamış olmak için burada bu metodun sâdece düzlemsel geometri hâline tatbiki nazar-ı itibâra alınacaktır.

Şimdi homogen bir ortamdaki eşitenerjili nötronların kararlı dağılımlarının (X. 1. 1) e binâen

$$\vec{\Omega} \, . \, \overrightarrow{\mathrm{grad}_x} \, \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma_t \, \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = K(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \\ + \Sigma_s' \int_{\vec{\Omega}} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') \, f(\vec{\Omega}' . \vec{\Omega}) \, d\Omega' \qquad \text{(XI.1.1)}$$

ile verileceğine dikkati çekelim. Eğer ortamda z eksenine dik olarak yerleştirilmiş düzlemsel bir de nötron kaynağı varsa bir taraftan ortamın homogenliği, diğer taraftan da problemin bu şartlar altında arzettiği simetri dolayısıyla nötron dağılımını sâdece (y, z) düzleminde incelemek kâbil olur (Bk. Şekil : XI. 1).

(y, z) düzleminde nötronların dağılımını incelemek için koordinat olarak z ve $\mu = \cos\theta$ kifâyet edecektir. Buna binâen ve ayrıca



Şekil : XI. 1

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_r}\, \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\dfrac{z}{\cos \theta} \right)} = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad \text{(XI.1.2)}$$

olduğuna da dikkat ederek (XI. 1. 1) i φ ler üzerinden integre edelim :

$$2\pi\mu \frac{\partial \Phi (z, \vec{\Omega})}{\partial z} + 2\pi \Sigma_t \Phi (z, \vec{\Omega}) = 2\pi K (z, \vec{\Omega}) +$$

$$+ \Sigma_s' \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \Phi (z, \vec{\Omega}) f (\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) d\mu' \, d\varphi' \, d\varphi . \qquad \text{(XI.1.3)}$$

Burada $d\Omega' = d\mu' \, d\varphi'$ olduğu keyfiyeti nazar-ı itibâra alınmıştır. Şimdi

$$\Phi(z,\mu) = \int_0^{2\pi} \Phi(z,\vec{\Omega})\, d\varphi = 2\pi\, \Phi(z,\vec{\Omega}) \qquad \text{(XI.1.4)}$$

$$K(z,\mu) = \int_0^{2\pi} K(z,\vec{\Omega})\, d\varphi = 2\pi\, K(z,\vec{\Omega}) \qquad \text{(XI.1.5)}$$

vazederek (XI. 1. 3) ifâdesi

$$\mu \frac{\partial \Phi(z,\mu)}{\partial z} + \Sigma_t \Phi(z,\mu) = K(z,\mu) + \Sigma_s' \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \Phi(z,\mu') f(\mu_0)\, d\mu'\, d\varphi' \qquad \text{(XI.1.6)}$$

şekline girer.

Nötronun saçılma açısının kosinüsü olan $\vec{\Omega}' . \vec{\Omega} = \mu_0$ ın hem $\vec{\Omega}'$ ve hem de Ω birim vektörünün koordinatlarının yâni θ, θ', φ ve φ' veyâ μ, μ', φ ve φ' nün fonksiyonu olduğu bedihîdir. Filhakika küresel trigonometrinin esas formülüne binâen (Bk. **MACİT BÜKE : Analitik Geometri**, s. 240-241, İst. Üniv. Fen Fak. Yay. No . 36, 1960) μ_0 ın

$$\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\, \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi') \qquad \text{(XI.1.7)}$$

olduğu hesaplanır.

Diğer bütün büyüklükler mâlûm olsa dahi $\Phi(z,\mu)$ yü (XI. 1. 6) integrodiferansiyel denkleminden çıkarmak kolay değildir. Bunun için bu denklemi sağlayan muhtelif büyüklükleri birer küresel harmonik fonksiyonlar serisine açarak (XI. 1. 6) yı bu açılımların momentleri cinsinden ifâde etmeğe çalışılır. Buna binâen

$$\Phi(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \Phi_k(z)\, P_k(\mu) \qquad \text{(XI.1.8)}$$

$$K(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} K_k(z)\, P_k(\mu) \qquad \text{(XI.1.9)}$$

$$f(\mu_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} f_k P_k(\mu_0) \qquad \text{(XI 1.10)}$$

vazedilir. Buradaki $P_k(\mu)$ ifâdelerine **birinci cins küresel harmonik fonksiyonlar** veyâ **LEGENDRE polinomları** adı verilir. Bunlar $(-1,1)$ aralığında

$$\int_{-1}^{1} P_k(\mu) P_l(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2k+1}\, \delta_{kl} \tag{XI.1.11}$$

şeklinde bir takım diklik bağıntılarını tahkik ederler. Bunların ilk birkaç tânesi şu şekildedir :

$$P_0(\mu) = 1$$

$$P_1(\mu) = \mu$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$$

. . . .

(XI. 1. 11) diklik bağıntılarından hareket ederek yukarıdaki seriye açılımların momentlerinin

$$\Phi_k(z) = 2\pi \int_{-1}^{1} \Phi(z, \mu) P_k(\mu)\, d\mu \tag{XI.1.12}$$

$$K_k(z) = 2\pi \int_{-1}^{1} K(z, \mu) P_k(\mu)\, d\mu \tag{XI.1.13}$$

$$f_k = 2\pi \int_{-1}^{1} f(\mu_0) P_k(\mu_0)\, d\mu_0 \tag{XI.1.14}$$

ile verildiği kolayca çıkartılır.

$f(\mu)$ fonksiyonu, bir çekirdekle çarpışması neticesinde bir nötronun haiz olduğu saçılma açısının kosinüsünün μ_0 olması ihtimâlini veren ihtimâliyet fonksiyonunu temsil etmesi bakımından normalize edilmiştir ve

$$\int_{-1}^{1} f(\mu_0)\, d\mu_0 = \int_{-1}^{1} f(\mu_0)\, P_0(\mu_0)\, d\mu_0 = \frac{f_0}{2\pi} = 1 \qquad \text{(XI.1.15)}$$

dir.

Diğer taraftan saçılma açısının kosinüsünün μ_0 ortalama değerinin, âşikâr olarak, μ_0 ın $f(\mu_0)$ a göre ortalaması olacağına da dikkati çekelim :

$$\overline{\cos\Theta} = \bar{\mu}_0 = \int_{-1}^{1} f(\mu_0)\, \mu_0\, d\mu_0 = \int_{-1}^{1} f(\mu_0)\, P_1(\mu_0)\, d\mu_0 = \frac{f_1}{2\pi} \cdot \qquad \text{(XI.1.16)}$$

Şimdi, $\Sigma_s' f(\vec{\Omega}' . \vec{\Omega})$ ifâdesi bütün $\vec{\Omega}'$ doğrultuları üzerinden integre edilirse toplam Σ_s makroskopik saçılma tesir kesidi bulunur. (XI. 1. 15) ifâdesi de göz önünde tutulursa bunun Σ_s ye

$$\Sigma_s = \int_{\vec{\Omega}} \Sigma_s' f(\vec{\Omega}' . \vec{\Omega}) d\Omega' = \Sigma_s' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} f(\mu_0)\, d\mu_0 = 2\pi\, \Sigma_s' \qquad \text{(XI.1.17)}$$

bağıntısıyla bağlı olduğu görülmüş olur.

(XI. 1. 8 ilâ 10) açılımlarını (XI. 1. 6) ifâdesine vazettikten sonra denklemin sağ yanındaki integrâli hesaplamak için LEGENDRE polinomlarının toplam teoreminden faydalanılır. μ, μ' ve μ_0 Şekil : XI. 1 deki anlamlarını haiz olmak şartıyla

$$P_k(\mu_0) = P_k(\mu) P_k(\mu') + 2 \sum_{m=1}^{k} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} P_{km}(\mu)\, P_{km}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \qquad \text{(XI.1.18)}$$

olduğu ispat olunur. Bu formüldeki $P_{km}(\mu)$ ifâdelerine **asosye LEGENDRE polinomları** adı verilir. (XI. 1. 10) ve (XI. 1. 17) ye binâen

$$f(\mu_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} f_k P_k(\mu) P_k(\mu') +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \frac{2k+1}{4\pi} f_k P_{km}(\mu) P_{km}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \qquad \text{(XI.1.19)}$$

olur. $f(\mu_0)$ ın bu ifâdesini (XI. 1. 6) daki yerine vazettikten sonra bu denklemdeki integrâl hesaplanırsa (XI. 1. 19) daki çift toplamın $(0,2\pi)$ aralığında φ ve φ' ye göre integralinin sıfır olması dolayısıyla ve (XI. 1. 17) ye binâen :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mu\frac{\partial\Phi_k(z)}{\partial z}+\Sigma_t\,\Phi_k(z)-K_k(z)-\Sigma_s f_k\,\Phi_k(z)\right]P_k(z)=0 \qquad (XI.1.20)$$

bulunur. Bu denklem bu şekliyle bize $\Phi(z,\mu)$ nün seriye açılımındaki $\Phi_k(z)$ momentlerini vermekten uzaktır. $\Phi_k(z)$ leri tâyin edebilmek için (XI. 1. 20) den, μ ye tâbî olmayan denklemler elde etmek lâzımdır. Bunun için önce (XI. 1. 20) deki her terim $P_n(\mu)$ ile çarpılır ve $(-1,1)$ aralığında μ ye göre integre edilir. Bu arada (XI. 1. 20) ifâdesindeki ilk terimden dolayı ortaya çıkan

$$\int_{-1}^{1}\mu\,P_k(\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu$$

şeklindeki integrâl de LEGENDRE polinomları için câri olan

$$(k+1)P_{k+1}(\mu)+k\,P_{k-1}(\mu)=(2k+1)\,\mu\,P_k(\mu) \qquad (XI.1.21)$$

reküranş bağıntısıyla hesaplanırsa neticede

$$\boxed{\begin{gathered}(n+1)\frac{\partial\Phi_{n+1}(z)}{\partial z}+n\frac{\partial\Phi_{n-1}(z)}{\partial z}+(2n+1)\,\Sigma_t\left(1-\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}f_n\right)\Phi_n(z)=K_n(z)\\ (n=0,1,2,\ldots.) \qquad (XI.1.22)\end{gathered}}$$

bağıntıları elde edilir. Bunlar $\Phi(z,\mu)$ nün açılımındaki moment fonksiyonları için sonsuz adet kuple diferansiyel denklemden müteşekkil lineer bir sistem teşkil etmektedirler. Bu sistemi yaklaşık olarak çözebilmek gâyesiyle, pratikte, $\Phi(z,\mu)$ nün açılımındaki muayyen bir n-inci momentten sonraki bütün momentlerin sıfır oldukları farzedilir yâni $\Phi(z,\mu)$ nün açılımında ilk $n+1$ terimin açısal akının kâfî derecede sıhhatle belirlenmesine yettiği kabul edilir ve, böylece, sonsuz diferansiyel denklemden müteşekkil denklem sistemi yerine ikâme olunan $n+1$ adet kuple diferansiyel denklemden müteşekkil olan sistem çözülür. Bu sonlu sisteme (XI. 1. 1) transport denkleminin **P_n takribiyeti** adı verilir.

2. P_n Takribiyetinin Formel Çözümü. — Şimdi, $K_n(z)=0$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) olmak üzere $n+1$ denklemden müteşekkil P_n takribiyetini formel olarak çözebilmek için $\Phi_n(z)$ lerin

$$\Phi_n(z)=g_n \exp(\omega \Sigma_t z) \qquad \text{(XI. 2. 1)}$$

şeklinde ifâde edilip edilemeyeceklerini araştıralım. (XI. 2. 1) kabûlü (XI. 1. 22) ye vazedildiği takdirde g_n ler için, $\alpha_n=1-(\Sigma_s f_n/\Sigma_t)$ vazederek,

$$\omega\left[(n+1)\, g_{n+1}+n g_{n-1}\right]+(2n+1)\,\alpha_n g_n=0 \qquad \text{(XI.2.2)}$$
$$(n=0,1,2,\ldots.)$$

şeklinde $n+1$ denklemden müteşekkil homogen bir cebrik denklem sistemi bulunur. g_n lerin sıfırdan farklı olabilmesi için bu sistemin esas determinantının sıfıra eşit olması lâzımdır :

$$\begin{vmatrix}
\alpha_0 & \omega & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\
\omega & 3\alpha_1 & 2\omega & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\
0 & 2\omega & 5\alpha_2 & 3\omega & \ldots\ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3\omega & 7\alpha_3 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & (n-1)\omega & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & (2n-1)\,\alpha_{n-1} & n\omega \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & n\omega & (2n+1)\,\alpha_n
\end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(XI.2.3)}$$

Bu denklem ω için, (XI. 2. 1) vazını mümkün kılacak olan müsait değerleri tâyin etmektedir. Âşikâr olarak bu denklemin çözümü olan her ω_i için (XI. 2. 1) cârî olmalıdır. Şu hâlde $\Phi_n(z)$ momentleri de (XI. 2. 1) şeklinde bir takım terimlerin lineer kombinezonları olacaktır. g_n lerin de ω_i lere tâbî olacakları göz önünde tutulursa

$$\Phi_n(z)=\sum_i A_i\, g_n(\omega_i)\,.\exp(\omega_i\, \Sigma_t\,.\, z) \qquad \text{(XI.2.4)}$$
$$(n=0,1,2,\ldots.)$$

bulunur. Buradaki A_i katsayıları da sınır şartlarıyla tâyin olunurlar (Bk. bu dersin 5. bölümü).

3. P_1 Takribiyeti : Âdî Difüzyon Denklemi. — (XI. 1. 1) transport denkleminin tahdid edici bazı şartlar altında âdî difüzyon denklemine müncer olmasını ümidetmek tabiîdir. Bu ümid, küresel harmonikler metodunda P_1 takribiyetini göz önüne almakla tahakkuk eder. Filhakika $n=0,1$ e tekabül eden denklemlerde $n>1$ e tekabül eden terimlerin sıfır olduklarını kabul ederek ve kaynak terimi için de sâdece K_0 la yetinerek (K_0 dan sonraki terimleri ihmâl etmek $K(z,\mu)$ nün μ ye bağlı olmadığını ifâde etmeğe denktir), şu sistem elde edilmiş olur :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z} + \Sigma_a \Phi_0(z) = K_0(z) \\ &\frac{1}{3}\frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} + (\Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu}_0)\Phi_1(z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{XI.3.1}$$

Bu denklemlerden ikincisinin türevini alalım ; sonra da birincisini $-(\Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu}_0)$ ile çarpıp bu iki ifâdeyi biribirlerinden çıkartalım. Bu takdirde

$$\boxed{\frac{1}{3(\Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu}_0)} \frac{\partial^2 \Phi_0(z)}{\partial z^2} - \Sigma_a \Phi_0(z) + K_0(z) = 0} \tag{XI.3.2}$$

bulunur. Bu ise

$$\boxed{D = \frac{1}{3(\Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu}_0)}} \tag{XI.3.3}$$

vazetmek şartıyla âdî difüzyon denkleminden başka bir şey değildir. Böylece transport teorisinin difüzyon katsayısı için verdiği değerin âdî difüzyon teorisininkinden farklı olduğu anlaşılmaktadır. Biz 1. cildin VI. dersinden itibâren D üzerindeki bu tashihi, yutulmanın saçılmaya nisbetle ihmâl edilebilecek kadar az olduğu ortamlar için ithâl etmiş bulunuyorduk. Fakat bu tashihin hikmet-i vücûdu ancak bu vesîleyle şimdi ortaya çıkmaktadır. D nin bu yeni târifindeki $\Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu}_0$ ifâdesine **makroskopik transport tesir kesidi** adı verilir ve bu Σ_{tr} ile gösterilir.

(IX. 3. 1) denklemlerinden ikincisini de (XI. 3. 3) ün ışığı altında

$$\boxed{\Phi_1(z) = -D\,\frac{\partial\Phi_0(z)}{\partial z}} \tag{XI.3.4}$$

şeklinde yazılabileceği âşikârdır. Buna göre P_1 takribiyetinde, $\Phi_0(z)$ âdî difüzyon teorisindeki nötron akısına ve $\Phi_1(z)$ de nötron akımına tekâbül etmektedir. P_1 takribiyetinde, açılımdaki momentler için böyle uygun fizikî bir tefsir bulunabilmesine karşılık daha ileri takribiyetlerde açılım momentlerinin neye delâlet ettiklerini kestirebilmek maalesef imkânsızlaşmaktadır. Diğer taraftan (XI. 1. 12) ifâdesine dönecek olursak P_1 takribiyeti için zâten

$$\Phi_0(z) = 2\pi\int_{-1}^{1}\Phi(z,\mu)P_0(\mu)\,d\mu = 2\pi\int_{-1}^{1}\Phi(z,\mu)\,d\mu \tag{XI.3.5}$$

ve

$$\Phi_1(z) = 2\pi\int_{-1}^{1}\Phi(z,\mu)P_1(\mu)\,d\mu = 2\pi\int_{-1}^{1}\Phi(z,\mu)\,\mu d\mu \tag{XI.3.6}$$

olduğu görülmektedir. Bu sonuncu ifâdenin ise z apsisini haiz olan noktada z ler doğrultusundaki net nötron akımını gösterdiği mâlûmdur. Bunu

$$\begin{aligned} J(z) = \Phi_1(z) &= 2\pi\int_{0}^{1}\Phi(z,\mu)\,\mu\,d\mu - 2\pi\int_{0}^{-1}\Phi(z,\mu)\,\mu d\mu \\ &= J_+(z) - J_-(z) \end{aligned} \tag{XI.3.7}$$

şeklinde yazmak da kâbildir. Bu ifâdenin birinci teriminin $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ şartını sağlayan yönlerden gelen nötronların, ikinci teriminin de $-1 \leqslant \mu \leqslant 0$ şartını sağlayan yönlerden gelen nötronların akımlarını gösterdiği anlaşılmaktadır. P_1 takribiyetinde $\Phi(z,\mu)$ nün (XI. 1. 8) e binâen

$$\Phi(z,\mu) = \frac{1}{4\pi}\Phi_0(z) + \frac{3}{4\pi}\mu\,\Phi_1(z) \tag{XI.3.8}$$

şeklinde yazılabileceği göz önünde tutulacak olursa

$$J_+(z) = \int_{0}^{1}\Phi(z,\mu)\,\mu\,d\mu = \frac{1}{4}\Phi_0(z) + \frac{1}{2}\Phi_1(z) \tag{XI.3.9}$$

$$J_-(z) = \int_0^{-1} \Phi(z, \mu)\, \mu\, d\mu = \frac{1}{4}\Phi_0(z) - \frac{1}{2}\Phi_1(z) \qquad \text{(XI.3.10)}$$

bulunur.

4. **Genelleştirilmiş FİCK Kanunu.** — Transport teorisi çerçevesi içinde FİCK kanunundan çok daha genel bir ifâde elde etmek kâbildir. Bunun için (XI. 1. 6) denklemini göz önüne alıp $f(\mu_0)$, $P_k(\mu_0)$ cinsinden seriye açalım ve bu arada da LEGENDRE polinomlarının toplam teoreminden faydalanalım. Buna binâen

$$\mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma_t \Phi(z,\mu) = K(z,\mu) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \Sigma_s f_k P_k(\mu) \int_{-1}^{1} P_k(\mu') \Phi(z, \mu')\, d\mu' \qquad \text{(XI.4.1)}$$

bulunur. Bu $P_1(\mu)$ ile çarpıldıktan sonra μ üzerinden $(-1,1)$ aralığında integre edilirse (XI. 1. 16), (XI. 1. 17) ve (XI. 3. 6) yardımıyla

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{1} \mu P_1(\mu) \Phi(z, \mu) d\mu + \Sigma_t \Phi_1(z) = K_1(z) + \Sigma_s \overline{\mu}_0 \Phi_1(z) \qquad \text{(XI.4.2)}$$

elde edilir. $P_1(\mu) = \mu$ ve $\Phi_1(z) = J(z)$ olduğunu göz önünde tutarak bu son ifâde

$$J(z) = -\frac{1}{\Sigma_t - \Sigma_s \overline{\mu}_0} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{1} \mu^2 \Phi(z, \mu)\, d\mu \qquad \text{(XI.4.3)}$$

şekline girer. Burada

$$\overline{\mu^2} = \frac{\int_{-1}^{1} \mu^2 \Phi(z, \mu)\, d\mu}{\int_{-1}^{1} \Phi(z, \mu)\, d\mu}$$

yâni

$$\overline{\mu^2} \,.\, \Phi_0(z) = \int_{-1}^{1} \mu^2 \Phi(z, \mu)\, d\mu \qquad \text{(XI.4.4)}$$

yazederek (XI. 4. 3)

$$\boxed{J(z) = -\frac{1}{\Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu}_0} \frac{\partial}{\partial z} [\overline{\mu^2} \cdot \Phi_0(z)]} \tag{XI.4.5}$$

şekline girmiş olur. Eğer göz önüne alınan eşitenerjili nötronlar için $\overline{\mu^2}$ yer koordinatına bağlı değilse bu ifâdeyi türev işâretinin dışına çıkarmak kâbil olur. Öte yandan, bu takdirde $\overline{\mu^2} = 1/3$ olduğu da kolaylıkla hesaplanır ve böylece gene

$$J(z) = -D \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} \tag{XI.4.6}$$

bulunur.

Şimdi $P_0(\mu) = 1$ ve $P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$ vâsıtasıyla

$$\mu^2 = \frac{1}{3} P_0(\mu) + \frac{2}{3} P_2(\mu) \tag{XI.4.7}$$

yazılabileceğine dikkat edelim. (XI. 1. 8) açılımını da göz önünde tutmak sûretiyle, bu takdirde

$$\overline{\mu^2} = \frac{\int_{-1}^{1} \mu^2 \Phi(z, \mu)\, d\mu}{\Phi_0(z)} = \frac{1}{\Phi_0(z)} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3} P_0(z) + \frac{2}{3} P_2(z) \right] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \Phi_k(z) P_k(\mu)\, d\mu = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{\Phi_2(z)}{\Phi_0(z)} \tag{XI.4.8}$$

bulunur. Adî difüzyon teorisi P_1 takribiyetine dayandığı için bu teori çerçevesinde $\Phi_2(z) = 0$ kabul edilir. Bu sebeple difüzyon teorisinde yukarıda da görmüş olduğumuz vechile, $\overline{\mu^2} = 1/3$ olmaktadır. Eğer $\Phi_2(z)/\Phi_0(z)$ oranı z ye bağlı olmazsa $\overline{\mu^2}$ de z ye bağlı olmayacağından gene âdî mânâda FİCK kanununun ve dolayısıyla buna bağlı bulunan difüzyon denkleminin cârî olacağı anlaşılmaktadır. Ancak bu şartın tahakkukunda, genel olarak, D difüzyon katsayısının mûtaddan farklı bir değer iktisâbedeceği de âşikârdır.

5. Küresel Harmonikler Metodu İçin Sınır Şartları. — Küresel harmonikler metodunun fizikî problemlere tatbik edilebilir olması için bu metodun bünyesine uygun sınır şartları formüle etmek elzem olduğu âşikârdır. IX. derste (XI. 4. 1) ve (XI. 4. 2) ifâdeleriyle gerek biribirlerinden farklı iki bitişik ortamın arayüzeyinde ve gerekse boşlukla çevrili bir ortamın dış sınırında açısal nötron akısının tahkik etmesi lâzım gelen sınır şartlarını vermiştik. Şimdi düzlem hâl için meselâ (XI. 4. 2) nin $z=z_s$ sınırında

$$-1 \leqslant \mu \leqslant 0 \quad \text{için} \quad \Phi(z_s, \mu) = 0 \qquad \text{(XI. 5. 1)}$$

şekline müncer olduğuna işâret edelim. Küresel harmonikler metoduna göre P_n takribiyetinde

$$\Phi(z_s, \mu) = \frac{1}{4\pi}\Phi_0(z_s)\,P_0(\mu) + \frac{3}{4\pi}\Phi_1(z_s)\,P_1(\mu) + \ldots\ldots + \frac{2n+1}{4\pi}\Phi_n(z_s)\,P_n(\mu) \qquad \text{(XI. 5. 2)}$$

olur. Fakat bu hâl için artık (XI. 5. 1) şartını gerçeklemek mümkün değildir. Zirâ P_n takribiyetinde (XI. 5. 2) ile verilen $\Phi(z_s, \mu)$ ifâdesinin sonlu sayıda (esâsında $n+1$ adet) sâbit ihtivâ etmesine mukabil (XI. 5. 1) şartının (XI. 5. 2) ifâdesine tatbiki, μ değişkeninin $(-1{,}0)$ aralığında her değeri alabilmesinden ötürü, sonlu sayıda bilinmeyen sâbit ihtivâ eden sonsuz bir cebrik denklem sistemi verecektir ki bu da bu sistemin, ihtivâ ettiği bilinmeyenlere nisbetle, **kompatibl** olmadığını ortaya koymaktadır. Buna binâen, mecbûren, μ nün keyfî olarak seçilmiş $n+1$ değerine tekâbül eden $n+1$ denklem göz önüne alıp bu sonlu sistemi çözerek $n+1$ adet $\Phi_k(z_s)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ fonksiyonunu tesbit etmek zarûreti doğmaktadır. Aynı keyfiyet iki farklı ortamın müşterek arayüzeylerinde cârî olan sınır şartı için de böyledir. Yalnız bu hâl için P_n takribiyeti çerçevesi içinde (IX. 4. 1) in yerini tutabilecek uygun sınır şartlarını derhâl yazmak kâbildir. Filhakika I ve II ortamlarının $z=z_A$ daki müşterek arayüzeylerinde

$$\Phi_I(z_A, \mu) = \Phi_{II}(z_A, \mu) \qquad \text{(XI.5.3)}$$

olması lâzımdır ; P_n takribiyetinde ise (XI. 5. 3) yerine

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{I,k}(z_A)\,P_k(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{II,k}(z_A)\,P_k(\mu) \qquad \text{(XI.5.4)}$$

yazılacaktır ; bu sonuncu ifâdenin her iki yanı da $P_k(\mu)$ ile çarpılıp $(-1{,}1)$ aralığında μ üzerinden integre edilirse P_n takribiyetinde (XI.5.3) sınır şartının yerini tutmak üzere

$$\boxed{\begin{array}{c}\Phi_{\mathrm{I},k}(z_A) = \Phi_{\mathrm{II},k}(z_A) \\ (k = 0,1, \cdots, n)\end{array}} \tag{XI.5.5}$$

bağıntıları elde edilmiş olur. Bunlar P_n takribiyetine göre iki farklı ortamın müşterek arayüzeylerinde, $\Phi(z, \mu)$ açısal akısının LEGENDRE polinomları serisine açılımındaki açılım momentlerinin $z = z_A$ arayüzeyinde sürekli olmaları şartını ifâde etmektedirler. Şunu da (ispatını vermeden) kaydedelim ki P_{2n} gibi çift bir takribiyet veyâ P_{2n+1} gibi tek bir takribiyet göz önüne alındığında, aradüzleme tekâbül eden sınır şartlarında, tek takribiyetlerin kendilerinkinden hemen bir sonraki çift takribiyetlere nisbetle daha sıhhatli neticeler vermesi şeklinde tecellî eden bir fark ortaya çıkmaktadır (Bk. **B. DAVISON : Neutron Transport Theory,** 2. baskı, s, 127, Oxford Clarendon Press, 1958). Bu, pratikte, daima P_{2n+1} gibi tek takribiyetlerin tercih edilmelerini izah etmektedir.

P_n takribiyeti çerçevesi içinde, boşlukla çevrili bir ortamın $z = z_s$ de bulunan dışyüzeyine tekâbül eden sınır şartları MARK ve MARSHAK tarafından ayrı ayrı teklif edilmişlerdir. MARK, sınır şartı olarak, μ_i ler

$$P_{n+1}(\mu) = 0 \tag{XI. 5. 6}$$

denkleminin kökleri olmak üzere

$$\boxed{\Phi(z_s, \mu_i) = 0} \tag{XI.5.7}$$

şartlarını tatbik etmiştir. MARSHAK'ın sınır şartları ise

$$\boxed{\begin{array}{c}\int_0^1 \Phi(z_s, \mu)\, \mu^{2i-1}\, d\mu = 0 \\ \left(i = 1,2, \ldots, \dfrac{n+1}{2}\right)\end{array}} \tag{XI.5.8}$$

şeklinde ifâde olunmaktadır. MARSHAK sınır şartlarının lehine bir delil (XI. 5. 8) in $i = 1$ için ortama dışarıdan giren nötronların toplam sayısının, yâni dışarıdan içeri doğru nötron akımının sıfır olması demek olan

$$\int_0^1 \Phi(z_s\,,\,\mu)\,\mu\,d\mu = 0 \tag{XI.5.9}$$

şartını da ihtivâ etmiş olmasıdır. Mamafih, genel olarak, aşağı mertebeden takribiyetler için MARSHAK sınır şartlarının diğerlerine ve yüksek takribiyetler için de (meselâ P_5 ve bazan da P_7 den sonraki takribiyetler için de) MARK sınır şartlarının diğerlerine faik olduğu tesbit edilmiştir.

ALIŞTIRMALAR :

1. Eşitenerjili nötronlar için zamana bağlı transport denkleminin P_n takribiyetini teşkil ediniz.

2. Zamana bağlı P_1 takribiyetinin denklemlerini çıkarınız ve bunları âdî difüzyon teorisinin verdiği denkleme kıyas ederek inceleyiniz.

3. P_3 takribiyeti çerçevesi içinde $\Phi(z, \mu)$ yü tâyin ediniz.

4. Değişik vasıfları haiz iki ortamın müşterek arayüzeyleri $z=0$ daki bir düzlemdir. Nötronların bu düzlemdeki açısal dağılımlarını P_3 takribiyetine göre inceleyiniz.

5. P_3 takribiyetine göre sonlu tek bir boyutu haiz bir ortamın kritiklik şartını teşkil ediniz.

XII. DERS

Transport denkleminin düzlemsel geometri için çözümüne giriş

Sonsuz ortamdaki izotrop düzlemsel kaynak hâli - MİLNE problemi - MİLNE denklemi - Varyasyonel çözüm metodu - MİLNE probleminde uzatılmış uzunluğun tâyini.

1. Sonsuz Ortamdaki İzotrop Düzlemsel Kaynak Hâli. — Homogen ve sonsuz bir ortamda $z=0$ düzleminin izotrop bir düzlemsel kaynak meydana getirdiğini tasavvur edelim. Fisyon olmadığını kabul ettiğimiz bu ortamda üstelik bir de, eşitenerjili farzettiğimiz nötronların ortamdaki çekirdeklerle vuku bulan çarpışmalarının izotrop olduğunu tasavvur edecek olursak

$$c(\vec{r})\,\Sigma_t(\vec{r})\,f(\vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}) = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \qquad \text{(XII.1.1)}$$

yazılabilecektir. $z=0$ daki düzlemsel izotrop nötron kaynağının nötron bilânçosuna iştirâki de

$$K(\vec{r}, \vec{\Omega}) = K_0 \frac{\delta(z)}{4\pi} \qquad \text{(XII.1.2)}$$

şeklinde olacaktır. Bunlara binâen, (X. 1. 1) ile verilmiş olan eşitenerjili nötronların transport denklemi, kararlı nötron dağılımı da bahis konusu olduğu takdirde,

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\, \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma_t\, \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = K_0 \frac{\delta(z)}{4\pi} + \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{\vec{\Omega}'} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}')\, d\Omega' \qquad \text{(XII.1.3)}$$

şekline müncer olacaktır.

Problemin arzettiği simetri dolayısıyla nötronların dağılımını sâdece (y, z) düzleminde incelemek kâbildir (Bk. Şekil : XI. 1). Bu düzlemde de bağımsız koordinat değişkeni olarak z ile $\mu = \cos\theta$ yı almak kifâyet eder. Buna göre, bir taraftan

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{grad_x}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\dfrac{z}{\cos\theta}\right)} = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \text{ve} \quad d\Omega' = \mu'\, d\mu'\, d\varphi'$$

olduğunu göz önünde tutmak, diğer taraftan da $2\pi\,\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \Phi(z, \mu)$ vazetmek şartıyla (XII. 1. 1) denklemini φ ler üzerinden integre etmek sûretiyle problem (y, z) düzlemine ircâ edilmiş ve bu düzlemdeki nötronların kararlı dağılımına tekabül eden transport denklemi olarak da

$$\boxed{\mu \frac{\partial \Phi(z,\mu)}{\partial z} + \Sigma_t\, \Phi(z, \mu) = \frac{K_0}{2}\,\delta(z) + \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{1} \Phi(z, \mu')\, d\mu'} \qquad \text{(XII.1.4)}$$

bulunmuş olur. Önce buna tekâbül eden

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma_t\, \Phi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{1} \Phi(z, \mu')\, d\mu' \qquad \text{(XII.1.5)}$$

homogen denklemini çözebilmek için

$$\Phi(z, \mu) = \alpha(\mu)\,.\,\exp(-\varkappa z) \qquad \text{(XII. 1. 6)}$$

vazedelim. Böylece

$$(-\mu\varkappa + \Sigma_t)\,.\,\alpha(\mu) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{1} \alpha(\mu')\, d\mu' \qquad \text{(XII.1.7)}$$

olur. Bu ifâdenin sağ yanı μ ye tâbî olmadığından bunu c gibi bir sâbite eşitleyerek

$$\alpha(\mu) = \frac{c}{\Sigma_t - \varkappa\mu} \qquad \text{(XII.1.8)}$$

bulunur. Bunun ise (XII. 1. 7) ifâdesine vazetmek sûretiyle

$$c = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{1} \frac{c d\mu}{\Sigma_t - \varkappa\mu} = \frac{c\Sigma_s}{2\varkappa} \operatorname{Log} \frac{\Sigma_t + \varkappa}{\Sigma_t - \varkappa} \tag{XII.1.9}$$

veyâ

$$\frac{\Sigma_s}{2\varkappa} \operatorname{Log} \frac{\Sigma_t + \varkappa}{\Sigma_t - \varkappa} = \frac{\Sigma_s}{\varkappa} \operatorname{arg\,tanh} \frac{\varkappa}{\Sigma_t} = 1 \tag{XII.1.10}$$

bulunur. Bu denklem bize (XII. 1. 6) vazını mümkün kılan $\varkappa$ nın değerini verir. Şu hâlde $\varkappa$, (XII. 1. 10) bağıntısıyla tâyin edilmiş olmak üzere (XII. 1. 5) in çözümü

$$\Phi(z, \mu) = \frac{c \cdot \exp(-\varkappa z)}{\Sigma_t - \varkappa\mu} \tag{XII.1.11}$$

şeklinde olacaktır.

Şüphesiz ki z ve μ yerine $-z$ ve $-\mu$ (veyâ $\varkappa$ yerine $-\varkappa$) vazetmekle homogen denklemin diğer bir çözümü daha bulunmuş olacaktır. Buna göre (XII. 1. 11) ifâdesi pozitif z ler için kaynaktan çok uzaktaki çözümü ve diğeri de büyük negatif z ler için olan çözümü aksettirmektedir.

Şimdi homogen olmayan (XII. 1. 4) denklemini çözebilmek için bunun her iki yanının z ye göre FOURİER dönüşmüşünü alalım. Gerek göz önüne aldığımız ortamın sonsuz yaygınlığı haiz oluşu ve gerekse Φ nin sonsuzdaki şartı tahkik etmesi transport denklemini FOURİER dönüşümüne tâbî tutmamızı destekleyen sebeplerdir. $\Phi(z, \mu)$ için sonsuzdaki şartı, yâni

$$\lim_{z \to -\infty} \Phi(z, \mu) = \lim_{z \to \infty} \Phi(z, \mu) = 0$$

şartını da kullanarak (XII. 1. 4) ün

$$(\Sigma_t + j\omega\mu)\,\overline{\Phi}(\omega, \mu) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{1} \overline{\Phi}(\omega, \mu)\, d\mu + \frac{K_0}{2\sqrt{2\pi}} \tag{XII.1.12}$$

şekline müncer olduğu kolaylıkla tesbit olunur. (Bk. 1. cild, EK : IV). Burada da denklemin sağ yanı μ ye tâbi değildir. Buna $\Phi(\omega)$ dersek (XII. 1. 12) ifâdesi

$$\overline{\Phi}(\omega\,,\mu) = \frac{\overline{\Phi}(\omega)\sqrt{2\pi}}{\Sigma_t + j\omega\mu} \tag{XII.1.13}$$

şeklinde yazılabilir. Homogen denklemin çözümünde yapmış olduğumuz gibi burada da bu ifâdeyi integrâl denkleme vazedelim. Böylece

$$\overline{\Phi}(\omega,\mu) = \cancel{\overline{\Phi}(\omega)} = \frac{\Sigma_s}{2}\,\overline{\Phi}(\omega)\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{\Sigma_t + j\omega\mu} + \frac{K_0}{4\pi} = \frac{\Sigma_s}{2}\,\overline{\Phi}(\omega)\,\frac{1}{j\omega}\,\mathrm{Log}\,\frac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega} + \frac{K_0}{4\pi}$$

$$= \frac{\Sigma_s}{\omega}\,\overline{\Phi}(\omega)\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega}{\Sigma_t} + \frac{K_0}{4\pi} \tag{XII.1.14}$$

bulunur. Bu denklem bize $\overline{\Phi}(\omega)$ nın değerini verir :

$$\overline{\Phi}(\omega) = \frac{K_0}{4\pi}\left[1 - \frac{\Sigma_s}{2j\omega}\,\mathrm{Log}\,\frac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega}\right]^{-1} \tag{XII.1.15}$$

$\Phi(z,\mu)$ nün FOURİER dönüşmüşü olan $\overline{\Phi}(\omega,\mu)$ den hareketle $\Phi(z,\mu)$ nün, ters FOURİER dönüşümü vâsıtasıyla,

$$\Phi(z\,,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\Phi}(\omega\,,\mu)\exp(j\omega z)\,d\omega \tag{XII.1.16}$$

ile verileceğini göz önünde tutarak bu son ifâde ile (XII. 1. 13) ve (XII. 1. 15) ifâdelerine binâen açısal nötron akısı

$$\Phi(z\,,\mu) = \underset{8\pi^2}{\frac{K_0}{4\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(j\omega z)\,d\omega}{(\Sigma_t + j\omega\mu)\left[1 - \frac{\Sigma_s}{2j\omega}\,\mathrm{Log}\,\frac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega}\right]}$$

ve $\Phi(z)$ toplam nötron akısı da

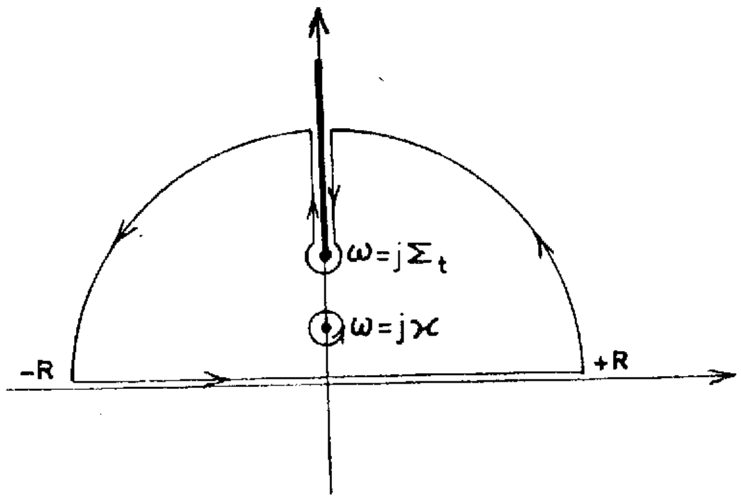
$$\Phi(z) = \int_{-1}^{1}\Phi(z\,,\mu)\,d\mu = \frac{K_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(j\omega z)\,\mathrm{Log}\,\frac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega}\,d\omega}{j\omega\left[1 - \frac{\Sigma_s}{2j\omega}\,\mathrm{Log}\,\frac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega}\right]} \tag{XII.1.17}$$

bağıntılarıyla taayyün etmiş olurlar.

(XII. 1. 14) ifâdesindeki integrantın paydasını sıfır kılan yâni

$$\frac{\Sigma_s}{2j\omega} \operatorname{Log} \frac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega} = 1 \qquad \text{(XII.1.18)}$$

bağıntısını gerçekleyen ω değerleri integrantın kutup noktalarını meydana getirirler. (XII. 1. 10) ile (XII. 1. 18) in mukayesesi bu integratın **kutup noktalarının** $\omega = \pm j\varkappa$ olduğunu göstermektedir. Bundan başka, integrantın ifâdesindeki Log ları sonsuz kılan $\omega = \pm j\Sigma_t$ değerleri de **dallanma noktalarını** teşkil ederler. Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisine göre bu integrali hesaplamamız için Şekil : XII. 1 deki gibi bir integras-



Şekil : XII. 1

yon yolu tâkibetmemiz uygun olacaktır. Buna göre (XII. 1. 17) nin değeri integrasyon yolu içindeki kutup noktasında integrantın haiz olduğu rezidüzünün $2\pi j$ katı ile integralin dallanma noktasındaki CAUCHY esas değerinin toplamına eşit olacaktır.

Bunun için önce $\omega = j\varkappa$ daki rezidüyü hesaplayalım. İntegrantı $f(\omega)$ ile gösterirsek, bunun $\omega = j\varkappa$ daki rezidüsü $f(\omega)$ nın bu nokta cıvarında LAURENT serisine açılımında $1/\omega - j\varkappa$ teriminin katsayısıdır ; veyâhut da, $f(\omega)$ fonksiyonu $\omega - j\varkappa$ da basit bir kutba mâlik olduğu için LAURENT serisi $1/\omega - j\varkappa$ dan başlayacağından rezidü

$$\lim_{\omega \to j\varkappa} [f(\omega) \, . \, (\omega - j\varkappa)]$$

ya eşit olacaktır. Elimizdeki hâl için ikinci târif daha uygundur. Buna göre (XII. 1. 17) nin integrantının $\omega = j\varkappa$ daki rezidüsü

$$\lim_{\omega \to j\varkappa} \left\{ \frac{(\omega - j\varkappa) . \exp(j\omega z) \operatorname{Log} \dfrac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega}}{j\omega - \dfrac{\Sigma_s}{2} \operatorname{Log} \dfrac{\Sigma_t + j\omega}{\Sigma_t - j\omega}} \right\}$$

ile verilecektir. Fakat $\omega = j\varkappa$ için bu ifâdenin gerek payı ve gerekse paydası sıfır olmaktadır. Limiti hesaplayabilmek için L'HÔPİTAL kaidesini kullanacak olursak $\omega = j\varkappa$ daki rezidü olarak, (XII. 1. 10) bağıntısını da göz önünde tutarak,

$$\frac{2\varkappa(\Sigma_t^2 - \varkappa^2) \exp(-\varkappa z)}{j\Sigma_s . (\varkappa^2 - \Sigma_t \Sigma_a)} \qquad \text{(XII.1.19)}$$

bulunur. Bu rezidüye tekabül eden nötron akısı da

$$\boxed{\Phi_{A_s}(z) = \frac{K\varkappa(\Sigma_t^2 - \varkappa^2)}{\Sigma_s(\varkappa^2 - \Sigma_t \Sigma_a)} \exp(-\varkappa z)} \qquad \text{(XII.1.20)}$$

olacaktır.

$\omega = j\Sigma_t$ deki dallanma noktasının nötron akısına tesirini (XII. 1. 17) nin bu noktasıdaki CAUCHY esas değerini göz önünde tutmak sûretiyle bir reel integrâl şeklinde tâyin etmek kâbildir :

$$\Phi_{tr}(z) = \int_0^\infty \frac{2\Sigma_t^2(1+\eta) \exp[-(1+\eta)\Sigma_t z] d\eta}{\left[2\Sigma_t(1+\eta) - \Sigma_s \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{2}{\eta}\right)\right]^2 + \pi^2 \Sigma_s^2} . \qquad \text{(XII.1.21)}$$

Buna göre toplam nötron akısı

$$\Phi(z) = \Phi_{A_s}(z) + \Phi_{tr}(z) = \frac{\varkappa(\Sigma_t^2 - \varkappa^2)}{\Sigma_s(\varkappa^2 - \Sigma_t \Sigma_a)} \exp(-\varkappa z) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{2\Sigma_t^2(1+\eta) \exp[-(1+\eta)\Sigma_t z] d\eta}{\left[2\Sigma_t(1+\eta) - \Sigma_s \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{2}{\eta}\right)\right]^2 + \pi^2 \Sigma_s^2} \qquad \text{(XII.1.22)}$$

şekline girmiş olur. Buradaki integrâl terim $\exp(-z)$ e nisbetle daha çabuk bir tarzda söner. Bunun sebebi integrâlin alt limitinin 0 oluşu ve $\eta=0$ için integrantın paydasının da ∞ oluşudur. Buna mukabil ilk terim $\exp(-z)$ e nisbetle çok daha yavaş sönecektir. Şu hâlde kaynağa göre, ortalama serbest yola nisbetle büyük öyle bir mesafe bulmak kâbildir ki (XII. 1. 22) ifâdesindeki ikinci terim daima ihmâl edilebilsin. Eğer nötron yakalanması kâfi derecede az ise birinci terim tek bir ortalama serbest yola dahi kıyasla gene de iyi bir takribiyet teşkil eder. Bu takdirde (XII. 1. 7) karakteristik denkleminde $\arg\tanh(\varkappa/\Sigma_t)$ seriye açılabilir ve :

$$\frac{\varkappa}{\Sigma_s} = \arg\tanh\frac{\varkappa}{\Sigma_t} = \frac{\varkappa}{\Sigma_t} + \frac{\varkappa^3}{3\Sigma_t^3} + \dots = \frac{\varkappa}{\Sigma_t}\left(1 + \frac{\varkappa^2}{3\Sigma_t^2}\right) \tag{XII.1.23}$$

bulunur ; D nin 1. ciltte (VI. 1. 7) ile verilmiş olan târifini hatırlayarak (XII. 1. 23) den de $\varkappa^2$ nin değeri için

$$\varkappa^2 = \frac{3\Sigma_t^2}{\Sigma_s}\Sigma_a = \frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2} \tag{XII.1.24}$$

ifâdesi elde edilir.

2. **MİLNE Denklemi.** — Nötron yutucu olmayan homogen bir ortamın, nötronları izotrop olarak saçma hassasına mâlik olduğunu farzedelim. Bu ortamda, üstelik, yabancı nötron kaynaklarının bulunmadığını da kabul edecek olursak eşitenerjili nötronların (IX. 5. 4) ile verilen transport denkleminin

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_V \phi(\vec{r})\frac{\exp(-\Sigma_s|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\,d\vec{r}' \tag{XII.2.1}$$

ye müncer olacağı kolaylıkla tesbit olunur. Şimdi nötron akısının sâdece tek bir z koordinatının fonksiyonu olduğunu ve ϕ nin târif bölgesinin de $z=0$ dan $z=\infty$ a kadar uzanan pozitif yarım düzlemden meydana geldiğini farzedelim. Buna göre (XII. 2. 1) ifâdesini x ve y üzerinden integre etmeliyiz. (x, y) düzleminde kutupsal koordinatlar kullanalım. Buna binâen

$$dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$$

olacaktır. Buna göre (XII. 2. 1)

$$\phi(z) = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty \phi(z')\, dz' \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\exp[-\Sigma_s \sqrt{|z-z'|^2+\rho^2}]}{|z-z'|^2+\rho^2} \rho\, d\rho\, d\varphi \qquad \text{(XII.2.2)}$$

olur. Şimdi

$$\sqrt{(z-z')^2+\rho^2} = u$$

vazedelim. Buna binâen

$$\rho\, d\rho = u\, du$$

şekline girer ve $\rho=0$ için $u=|z-z'|$ ve $\rho=\infty$ için de $u=\infty$ olur. φ ye göre integrâl almayı da icrâ ederek (XII. 2. 2) bağıntısının

$$\phi(z) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^\infty \phi(z') dz' \int_{|z-z'|}^\infty \frac{\exp(-\Sigma_s u)}{u} du \qquad \text{(XII.2.3)}$$

şekline girdiği görülür. Şimdi meseleyi daha derli toplu bir şekilde ifâde edebilmek için Σ_s yi birim olarak kabul edelim : $\Sigma_s=1$. Buna göre ve

$$E_1(|z-z'|) = \int_{|z-z'|}^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du = \int_1^\infty \frac{\exp(-|z-z'|u)}{u} du \qquad \text{(XII.2.4)}$$

vazederek (XII. 2. 3) yerine kısaca

$$\boxed{\phi(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1(|z-z'|)\, \phi(z')\, dz'} \qquad \text{(XII.2.5)}$$

yazılabilir. Buna **MİLNE denklemi** adı verilir. MİLNE bu denklemi, esas itibariyle, yıldız atmosferlerinin fizikî yapısını incelerken bulmuştur. Mühim olan şudur ki gerek yıldız atmosferlerindeki radyasyon transferi teorisi ve gerekse nötronların transport teorisi bazı hususî şartlar altında aynı matematik yapıyı (strüktürü) haiz iki teori olup birinin temel denklemlerinden diğerininkilere kolaylıkla geçilebilmektedir. Zâten nötronların transport teorisindeki birçok özel problem ve bunların çözümleri için vazolunan matematik metotlar çok seneler evvel, teorik olarak çalışan astrofizikçiler tarafından yıldız atmosferlerindeki radyasyon transferi terminolojisi çerçevesi içinde çözülmüş ve inkişâf ettirilmiş bulunmaktaydılar. Bununla beraber nötronların transport teorisinin inkişâfının teorinin matematik yapısı bakımından sâdece astrofizikçilerin eseri olduğunu zannetmek hatâdır, zirâ âlimlerin yüzü nötronlardan yana döndükten sonra teoriciler sırf bu sahayı göz önünde tutarak, fakat tabiî nötronların transport teorisiyle yıldız atmosferlerindeki radyasyon transferi teorisi arasındaki paralellikten dolayı, aynı zamanda bu sonuncu teorinin de yararına olmak üzere, pek dâhiyâne çözüm usûlleri vazetmişlerdir. Bunların bir kısmını ileride neşredeceğimiz «Nötronların Transport Teorisi» kitabımıza bırakarak mütemmim mâlûmat için şimdilik okuyucuyu dersin sonundaki bibliyografyaya sevkediyoruz.

MİLNE denkleminin çözümü yutucu olmayan homogen bir yarım düzlemdeki nötron akısının ortamın sınırında nasıl davranacağını vermesi ve transport teorisinin difüzyon teorisinden farkını göstermesi bakımından ilgi çekicidir. Biz aşağıdaki bölümde MİLNE problemini çözerek uzatılmış uzunluğun transport teorisine göre haiz olduğu değeri tesis edeceğiz.

3. MİLNE Probleminde Uzatılmış Uzunluğun İfâdesi. — Bu bölümde yabancı nötron kaynağı ihtivâ etmeyen sırf difüzleyici homogen bir yarım düzlemdeki nötron akısının ortamın dışında nerede sıfıra müncer olduğunu tesbit etmek yâni kısacası **MİLNE problemindeki** uzatılmış uzunluğun ifâdesini tesis etmek istiyoruz. MİLNE problemi çerçevesi içinde nötron akısının ifâdesini bu giriş derslerinde çıkarmaktan imtinâ ettik. Bunun için kullanılması lâzım gelen WİENER - HOPF metodu kitabın seviyesinin biraz üzerinde matematik bilgisini icâbettirmektedir. Hattâ uzatılmış uzunluğun ifâdesinin de aynı metotla elde edilebilmesine rağmen biz burada, cebrik işlemler bakımından çok daha kolay anlaşılabilir bir metot olan varyasyonel metodu tercih ettik. Buna dayanarak uzatılmış uzunluğun ifâdesini çıkarmadan önce bazı tamamlayıcı matematik mâlûmat vermek yerinde olacaktır.

a. Varyasyonel Metodun Matematik Temeli.

Şimdi

$$q_e(x) = \int_0^\infty K(x, y)\, q_e(y)\, dy + f(x) \qquad \text{(XII.3.1a)}$$

şeklinde bir integrâl denklem verilmiş olsun. Buradaki $K(x, y)$ çekirdeğinin

$$\int_0^\infty K(x, y)\, q_0(y)\, dy = \int_0^\infty K(y, x)\, q_0(x)\, dx \qquad \text{(XII.3.2a)}$$

bağıntısını tahkik eden pozitif ve simetrik bir çekirdek, $f(x)$ in sınırlı ve

$$\int_0^\infty | f(x) |\, dx$$

integrâlinin de mevcûd olduğunu kabul edeceğiz. Formalizmi kısaltmak gâyesiyle

$$\int_0^\infty K(x, y)\, q(y)\, dy = \Lambda_x\{q\}$$

vazedersek (XII. 3. 1a) da

$$q_e(x) = \Lambda_x\{q_e\} + f(x) \qquad \text{(XII.3.3a)}$$

şekline girer.

Şimdi

$$I\{q\} = \frac{\int_0^\infty q(x)\left[q(x) - \int_0^\infty K(x, y)\, q(y)\, dy\right] dx}{\left[\int_0^\infty q(x)\, f(x)\, dx\right]^2} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty q(x)[q(x) - \Lambda_x\{q\}]dx}{\left[\int_0^\infty q(x)\, f(x)\, dx\right]^2} \qquad \text{(XII.3.4a)}$$

ile verilmiş olan bir fonksiyonel göz önüne alalım. Gâyemiz, bu fonksiyonelin payı daimâ pozitif kalmak şartıyla, $q(x)$ fonksiyonu (XII. 3. 3a) yı tahkik eden $q_e(x)$ fonksiyonuna yaklaştığı zaman $I\{q\}$ nun da minimum değerine yaklaştığını göstermektedir. Bunun için de $q(x)$ in (XII. 3. 3a) nın esas çözümü olan $q_e(x)$ den, $\Delta(x)$ ile keyfî bir fonksiyonu ve ε ile de sonsuz küçük bir kemmiyeti göstermek sûretiyle, $\varepsilon \cdot \Delta(x)$ kadar farkettiğini farzedelim :

$$q(x) = q_e(x) + \varepsilon \cdot \Delta(x) . \qquad \text{(XII. 3. 5a)}$$

Bundan başka $q(x)$ in de, $f_1(x)$ ile $f(x)$ in tâbî olduğu aynı şartlara tâbî bir fonksiyonu göstererek,

$$q(x) = \Lambda_x\{q\} + f_1(x) \qquad \text{(XII. 3. 6a)}$$

şeklinde bir integrâl denklemi tahkik ettiği kabul edilebilir.

$q(x) = q_e(x) + \varepsilon \cdot \Delta(x)$ in $\varepsilon \to 0$ için $q_e(x)$ e gitmesi hâlinde $f_1(x)$ in de, (XII. 3. 6a) ya binâen, $f(x)$ e gitmesi âşikârdır. Buna göre

$$f_1(x) = f(x) + \varepsilon \cdot \Delta_1(x) \qquad \text{(XII. 3. 7a)}$$

vazedilebilir. $\Delta_1(x)$ burada gene keyfî bir fonksiyona işâret etmektedir. Şu hâlde (XII. 3. 6a) denklemi

$$q(x) - \Lambda_x\{q\} = f(x) + \varepsilon \, . \, \Delta_1(x) \qquad \text{(XII.3.8a)}$$

şeklinde yazılabilecektir. Bu şerâit tahtında (XII. 3. 4a) fonksiyoneli

$$I\{q\} = \frac{\int_0^\infty [q_e(x) + \varepsilon \cdot \Delta(x)]\,[f(x) + \varepsilon \cdot \Delta_1(x)]\,dx}{\left[\int_0^\infty [q_e(x) + \varepsilon \cdot \Delta(x)] \cdot f(x)\,dx\right]^2} \qquad \text{(XII.3.9a)}$$

olur.

Bu ifâdenin ε a göre türevinin $\varepsilon = 0$ için değerinin, biraz hesaptan sonra,

$$\left[\frac{dI\{q\}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\int_0^\infty [\Delta(x) f(x) + \Delta_1(x) q_e(x)]\,dx}{\left[\int_0^\infty q_e(x) f(x)\,dx\right]^2} \qquad \text{(XII.3.10a)}$$

ile verildiği bulunur. Bu ifâdenin paydasının neye delâlet ettiğini anlamak için (XII. 4. 3a) ve (XII. 3. 8a) yı biribirlerinden çıkartalım ; bu takdirde

$$\Lambda_x\left\{q(y)-q_e(y)\right\}-[q(x)-q_e(x)]=\varepsilon\cdot\Delta_1(x) \qquad \text{(XII.3.11a)}$$

olur. Şimdi (XII. 3. 5a) i de göz önünde tutarsak (XII. 3. 11a) dan

$$\Delta_1(x)=\Lambda_x\{\Delta(y)\}-\Delta(x) \qquad \text{(XII.3.12a)}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (XII. 3. 3a) hasebiyle

$$f(x)=q_e(x)-\Lambda_x\{q_e(y)\} \qquad \text{(XII.3.13a)}$$

yazılabileceği de göz önünde tutulursa (XII. 3. 12a) ve (XII. 3. 13a) ifâdelerinin yardımıyla (XII. 3. 10a)

$$\left[\frac{d\mathrm{I}\{q\}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\frac{\int_0^{\infty}\Delta(x)\cdot\Lambda_x\{q_e(y)\}dx-\int_0^{\infty}q_e(x)\cdot\Lambda_x\{\Delta(y)\}}{\left[\int_0^{\infty}q_e(x)\,f(x)\,dx\right]^2}$$

şekline girer. Hâlbuki $K(x, y)$ çekirdeğinin simetrik bir çekirdek olması hasebiyle

$$\int_0^{\infty}\Delta(x)\cdot\Lambda_x\{q_e(y)\}\,dx=\int_0^{\infty}q_e(x)\cdot\Lambda_x\{\Delta(y)\}\,dx \qquad \text{(XII.3.14a)}$$

olacağı müşahede edilmektedir. Buna göre

$$\left[\frac{d\mathrm{I}\{q\}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=0 \qquad \text{(XII.3.15a)}$$

olmuş olur.

$\mathrm{I}\{q\}$ fonksiyonelinin payının, $q(x)=q_e(x)+\varepsilon\cdot\Delta(x)$ ne olursa olsun, daimâ pozitif kalması şartı tahtında $\varepsilon\to 0$ için, yâni bahis konusu fonksiyoneldeki $q(x)$ deneme fonksiyonu (XII. 3. 3a) integrâl denkleminin çözümü olan $q_e(x)$ fonksiyonuna yaklaştığı zaman, bu son (XII. 3. 15a) neticesi $\mathrm{I}\{q\}$ nun da minimumuna gittiğini göstermektedir ki bu da zâten ispat etmek istediğimiz şeydir.

Şimdi $q(x)=q_e(x)$ için $\mathrm{I}\{q\}$ nun ihrâz ettiği bu minimum değeri hesaplamak üzere $\mathrm{I}\{q\}$ nun (XII. 3. 4a) ile verilmiş olan ifâdesinde $q(x)=q_e(x)$ vazetmenin ve, neticeye çabucak ulaşabilmek için de, paydaki köşeli parantezin birinci terimi yerine $q_e(x)$ in (XII. 3. 1a) ile verilmiş olan ifâdesini yerleştirmenin kâfî olduğuna işâret edelim. Böylece

$$\min I\{q\} = I\{q_e\} = \frac{\int_0^\infty q_e(x)\left[q_e(x) - \int_0^\infty K(x,y)\, q_e(y) dy\right] dx}{\left[\int_0^\infty q_e(x)\, f(x)\, dx\right]^2}$$

$$= \frac{\int_0^\infty q_e(x)\left[\int_0^\infty K(x,y)\, q_e(y) dy + f(x) - \int_0^\infty K(x,y)\, q_e(y)\, dy\right] dx}{\left[\int_0^\infty q_e(x)\, f(x)\, dx\right]^2} \qquad \text{(XII.3.16a)}$$

yâni

$$\min I\{q\} = \frac{1}{\int_0^\infty q_e(x)\, f(x)\, dx} \qquad \text{(XII.3.17a)}$$

bulunur.

b. Varyasyonel Metotla MİLNE Problemindeki Uzatılmış Uzunluğun Tâyini.

Şimdi (XII. 1. 2) denklemine dönelim. MİLNE probleminde göz önüne alınan ortam için $\Sigma_a = 0$ dır. Buna göre formalizmi sâdeleştirmek gâyesiyle $\Sigma_s = 1$ vazedip sağdaki integrâle de $\phi(z)$ dersek bu denklemi

$$\mu \frac{\partial \Phi(z,\mu)}{\partial z} + \Phi(z,\mu) = \frac{1}{2}\phi(z) \qquad \text{(XII.3.1b)}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu takdirde

$$\Phi(z,\mu) = \chi(z,\mu) \exp\left(-\frac{z}{\mu}\right) \qquad \text{(XII.3.2b)}$$

vazedip bunu (XII. 3. 1b) ye ikâme etikten ve bulunan ifâdeyi de z ler üzerinden integre ettikten sonra, tekrar (XII. 3. 2b) yi göz önünde tutarak ve

$$\mu > 0 \text{ için}: \qquad \Phi(0,\mu) = 0 \qquad \text{(XII. 3. 3b)}$$

sınır şartına da bağlı olarak

$$\Phi(z,\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^z \phi(z') \exp\left[-\dfrac{z-z'}{\mu}\right] dz' & \mu > 0 \text{ için} \quad \text{(XII.3.4b)} \\[2ex] -\dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^\infty \phi(z') \exp\left[-\dfrac{z-z'}{\mu}\right] dz' & \mu < 0 \text{ için} \quad \text{(XII.3.5b)} \end{cases}$$

bulunur. Bunları μ ler üzerinden integre etmekle $\phi(z)$ için gene

$$\phi(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty E_1(|z-z'|)\,\phi(z')\,dz' \qquad \text{(XII 3.6b)}$$

bulunur.

Göz önüne aldığımız ve $z>0$ yarıdüzleminden ibâret olan homogen ortamın $z=0$ sınırını aşıp dışarı çıkan nötronların açısal dağılımı $\mu<0$ için $\Phi(z,\mu)$ yü veren (XII. 3. 5b) ifâdesinde $z=0$ vazetmekle elde edilir :

$$\boxed{\Phi(0,\mu) = -\frac{1}{2\mu}\int_0^\infty \phi(z') \exp\left(\frac{z'}{\mu}\right) dz'} \qquad \text{(XII.3.7b)}$$

(XII. 3. 1b) yi $(-1,1)$ aralığında μ ler üzerinden integre edelim ; net nötron akımının

$$J(z) = -\int_{-1}^{1} \mu\,\Phi(z,\mu)\,d\mu \qquad \text{(XII.3.8b)}$$

olduğunu da göz önünde tutarak

$$\boxed{\frac{\partial J}{\partial z} = 0} \qquad \text{(XII.3.9a)}$$

bulunur, yâni ortamdaki nötron akımı sâbittir ; bu sâbiti F ile gösterelim :

$$J(z) = F \qquad \text{(XII. 3. 10b)}$$

(XII. 3. 1b) yi bir kere de μ ile çarptıktan sonra $(-1,1)$ aralığında μ ler üzerinden integre edelim. Bu takdirde

$$K(z) = \int_{-1}^{1} \mu^2 \Phi(z, \mu) \, d\mu \qquad \text{(XII.3.11a)}$$

olmak şartıyla

$$\frac{\partial K}{\partial z} = F$$

yâni, z_0 bir sâbit olmak üzere

$$K(z) = F \cdot (z + z_0) \qquad \text{(XII. 3. 12b)}$$

olur.

z nin çok büyük *(asimtotik)* değerleri için, yâni **homogen** ortamın $z=0$ daki sınırından çok içerilere doğru gidildi miydi, $\Phi(z, \mu)$ nün de artık izotrop bir dağılıma yaklaşacağı âşikârdır, zirâ 1) ortam homogendir ve 2) cıvarda herhangi bir nötron yutucu veyâ bir sınır bulunmamaktadır. Bu itibarla $z \to \infty$ için $\Phi(z, \mu) \to \Phi(z)$ olacak ve (XII. 3. 11b) de

$$K(z) \cong \phi(z) \int_{-1}^{1} \mu^2 \, d\mu = \frac{1}{3} \phi(z) \qquad \text{(XI.3.13b)}$$

yazılabilecektir. Buna göre de (XII. 3. 12b) den dolayı

$$\phi(z) \cong 3F \cdot (z + z_0) \qquad \text{(XII. 3. 14b)}$$

olur. Buradaki z_0 da (XII. 12b) ye binâen

$$K(0) = z_0 = \int_{-1}^{0} \mu^2 \Phi(0, \mu) \, d\mu \qquad \text{(XII.3.15b)}$$

vâsıtasıyla tâyin olunacaktır. Burada integrâlin üst limiti olarak sıfır vazedilmiş olması (XII. 3. 3b) sınır şartından ileri gelmektedir.

Şimdi $\Phi(0, \mu)$ nün (XII. 3. 7b) ile verilmiş olan ifâdesini (XII. 3. 15b) ye ikâme edersek,

$$E_3(z) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-zu)}{u^3}\, du \tag{XII.3.16b}$$

vazetmek şartıyla

$$z_0 = \int_{-1}^{0} \mu^2 \Phi(0,\mu)\, d\mu = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_3(z')\, \phi(z')\, dz' \tag{XII.3.17b}$$

bulunur.

Fakat (XII. 3. 14b) bağıntısı ancak $z \to \infty$ için câri olan asimtotik bir bağıntıdır. $\phi(z)$ ile bunun asimtotik kısmı olan $3z$ arasındaki farka $3q(z)$ diyelim :

$$\phi(z) = 3F \cdot [z + q(z)] \tag{XII. 3. 18b}$$

Buna binâen z_0

$$z_0 = \frac{3}{2}\left[\int_0^{\infty} z'\, E_3(z')\, dz' + \int_0^{\infty} q(z')\, E_3(z')\, dz'\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4} + \int_0^{\infty} q(z')\, E_3(z')\, dz'\right] \tag{XII.3.19b}$$

ile verilmiş olur. (Bk. EK : Eksponansiyel integrâl fonksiyonları). (XII. 3. 6b) ile (XII. 3. 18b) bağıntılarından da

$$\boxed{q(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} q(z')\, E_1(|z - z'|)\, dz' + \frac{1}{2} E_3(z)} \tag{XII.3.20b}$$

bulunur. Buradaki $E_1(|z-z'|)$ çekirdeği simetrik bir fonksiyon olup $E_3(z)$ nin de integrâli mevcuttur.

Şimdi $I\{q\}$ fonksiyoneline dönersek bunun minimumunun (XII. 3. 1a), (XII. 3. 16a), (XII. 3. 20b) ve (XII. 3. 19b) ye binâen

$$\min \mathrm{I}\{q\} = 2\left[\int_0^\infty q(z)\,\mathrm{E}_3(z)\,dz\right]^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{3}z_0 - \frac{1}{2}} \qquad \text{(XII.3.21b)}$$

olduğu bulunur. I$\{q\}$ fonksiyonelinin, minimumu cıvarında, q nun değişimine zayıf bir şekilde bağlı olduğu ispatlanır. Buna binâen $q(z)$ yerine bir sâbit yerleştirecek olursak (XII. 3. 20a) vâsıtasıyla I$\{q\}$ nun ifâdesinden

$$\mathrm{I}\{q\} = \frac{9}{4} \qquad \text{(XII.3.22b)}$$

bulunur. Bu değer yukarıda söylenilenlere binâen I$\{q_e\}$ ninkinden çok az farkedecektir. Buna göre (XII. 3. 21b) ve (XII. 3. 22b) den

$$z_0 = \frac{17}{24} = 0.7083 \qquad \text{(XII.3.23b)}$$

elde edilir. Bu bize $\phi(z)=0$ olduğu noktanın apsisini, yâni transport teorisine göre uzatılmış uzunluğun ifâdesini vermektedir. (Evvelce Σ_s yi birim olarak seçmiş olduğumuzdan uzatılmış uzunluğun ifâdesinde λ_s nin bulunmayışı insanı şaşırtmamalıdır).

Ortamdaki asimtotik nötron akısının (XII. 3. 14b) ile verilen ifâdesinden

$$z = -z_0 \quad \text{için} \quad \phi(z) = 0$$

olduğu görülmektedir.

Evvelki derslerimizde transport teorisinin difüzyon teorisine nisbetle daha sahih bir uzatılmış uzunluk verdiğinden ve bunun değerinin de 0.7104 olduğundan bahsetmiştik. Göz önüne almış olduğumuz bu varyasyonel tekniğin bütün üstün kudreti (XII. 3. 16a) daki fonksiyonelde $q(z)$ deneme fonksiyonu yerine sâdece bir sâbit vazetmekle dahî z_0 ın % 0.3 den daha küçük bir hatâ ile tâyinini mümkün kılabilmesindedir. Eğer I$\{q\}$ fonksiyonelinde $q(z)=$sâbit koyacak yerde

$$q(z) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_2\,\mathrm{E}_2(z) + \mathrm{A}_3\,\mathrm{E}_3(z)$$

vazetseydik biraz uzunca hesaplardan sonra, ilk altı rakkamı doğru olmak üzere

$$\boxed{z_0 = 0.710\ 446} \tag{XII.3.24b}$$

bulacaktık.

BİBLİYOGRAFYA

1) R. E. MARSHAK : Phys. Rev. **71**, s. 688-93, 1947.

2) B. DAVISON : **idem.**, **71**, s. 694-697, 1947.

3) G. PLACZEK : **idem.**, **72**, s. 550-555, 1947.

4) G. PLACZEK : **idem.**, **72**, s. 556-558, 1947.

5) C. MARK : **idem.**, **72**, s. 558-564, 1947.

6) J. LECAINE : **idem.**, **72**, s. 564-566, 1947.

7) M. NELKIN : Nuc. Sci. Engin., **7**, s. 552-553, 1960.

8) V. KOURGANOFF, I. W. BUSBRIDGE : **Basic Methods in Transfer Problems**, s. 126-152, Oxford Clarendon Press, 1952.

9) D. DAVISON, J. SYKES : **Neutron Transport Theory**, 2. baskı, s. 195-217, Oxford Clarendon Press, 1958.

XIII. DERS

Transport Denkleminin Çokgruplu Difüzyon Denklemlerine İrcaı

P_1 takribiyetine göre en genel çokgrup denklemlerinin çkarılması - Bunların özel bir hâli ile OKRENT denklemleri arasındaki fark - STUMMEL denk lemleri.

1. P_1 Takribiyetine Göre Çokgrup Denklemleri. — Çokgrup denklemlerini transport denkleminden genel bir tarzda çıkartmak için (IX. 3. 9) transport denkleminden hareket edeceğiz. Bunun için de önce, ılık enerjiyle, nötronların haiz oldukları maksimum enerji arasındaki enerji aralığını N adet alt aralığa bölüp her alt aralığa tekabül eden nötron grubunu da şöyle târif edeceğiz : $E_i < E_{i-1}$ olmak üzere, enerjileri (E_i, E_{i-1} aralığında bulunan her nötronun i-inci enerji grubunda bulunduğu addolunacaktır ; bu târife göre ılık grubun N-inci grupla çakışacağı âşikârdır. i-inci gruba tekâbül eden $\Phi_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ açısal akısı

$$\Phi_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \int_{E_{i-1}}^{E_i} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, dE\,, \tag{XIII.1.1}$$

makroskopik fisyon veyâ toplam tesir kesidinin aynı gruptaki değeri

$$\Sigma,_i(\vec{r}) = \frac{\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma(\vec{r}, E)\, \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, dE}{\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)\, dE} \tag{XIII.1.2}$$

ile, bir nötronun j-inci gruptan elâstik çarpışma yoluyla daha düşük enerjili bir i-inci gruba aktarılmasına tekabül eden $\Sigma_{mod, j \to i}$ makroskopik tesir kesidi

$$\Sigma_{mod,\, j\to i}(\vec{r}\,;\,\vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}) = \frac{\int\limits_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t)\, dE' \int\limits_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma_s(\vec{r}\,;\, E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})\, dE}{\int\limits_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t)\, dE'} \qquad \text{(XIII.1.3)}$$

ifâdesiyle ve bir nötronun gene j-inci gruptan inelâstik çarpışma yoluyla daha düşük enerjili bir i-inci gruba aktarılmasına tekâbül eden $\Sigma_{in, j \to i}$ makroskopik tesir kesidi de

$$\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r}\,;\,\vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}) = \frac{\int\limits_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t)\, dE' \int\limits_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma_{in}(\vec{r}\,;\, E', \vec{\Omega}' \to E, \vec{\Omega})\, dE}{\int\limits_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t)\, dE'} \qquad \text{(XIII.1.4)}$$

ifâdeleriyle târif olunacaklardır. Kezâ i-inci gruba tekâbül eden fisyon başına açığa çıkan ν_i nötron sayısını, mezkûr gruptaki gecikmiş nötronların β_i oranını ve gene aynı gruptaki k-ıncı grup gecikmiş nötronların $\beta_{k,i}$ oranını da sırasıyla

$$\nu_i = \int\limits_{E_{i-1}}^{E_i} \nu(E)\, dE \qquad \text{(XIII.1.5)}$$

$$\beta_i = \int\limits_{E_{i-1}}^{E_i} \beta(E)\, dE \qquad \text{(XIII.1.6)}$$

$$\beta_{k,i} = \int_{E_{i-1}}^{E_i} \beta_k(E)\, dE \qquad \text{(XIII.1.7)}$$

ifâdeleriyle târif edeceğiz. Bundan başka fisyon spektrumuyla gecikmiş nötronların haiz olduğu spektrumların i-inci gruba tekâbül eden değerleri de sırasıyla

$$f_{o,i} = \int_{E_{i-1}}^{E_i} f_0(E)\, dE \qquad \text{(XIII.1.8)}$$

$$f_{k,i} = \int_{E_{i-1}}^{E_i} f_k(E)\, dE \qquad \text{(XIII.1.9)}$$

dir.

Şimdi (IX. 3. 9) genel transport denkleminin bütün terimlerini E_{i-1} ile E_i sınırları arasında E ler üzerinden integre edelim. Bir taraftan (XIII. 1. 1) ilâ (XIII. 1. 9) târifleri mûcibince, diğer taraftan da E′ ye göre alınmış olan integraller yerine, enerji gruplarının süreksiz bir dizi teşkil etmesi sebebiyle, toplamlar ikâme edilebilmesi dolayısıyla (IX. 3. 9) transport denklemi şu şekilde bir integro-differansiyel denklem sistemine müncer olur :

$$\frac{1}{v_i}\frac{\partial \Phi_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} = -\vec{\Omega}\cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\, \Phi_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \Sigma_{t,i}(\vec{r})\, \Phi_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} \int_{\vec{\Omega}'} \left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r}, \vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}) + \Sigma_{in,j\to i}(\vec{r}, \vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}) \right] \Phi_j(\vec{r}, \vec{\Omega}', t)\, d\Omega' +$$

$$+ \frac{f_{o,i}}{4\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_{\vec{\Omega}'} (1-\beta_j)\, \nu_j\, \Sigma_{f,j}\, \Phi_j(\vec{r}, \vec{\Omega}', t)\, d\Omega' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{6}\lambda_k f_{k,i}\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{\infty}\int_{\vec{\Omega}'}\beta_{k,j}\,\nu_j\,\Sigma_{f,j}\,\Phi_j(\vec{r},\vec{\Omega}',t')\exp[-\lambda_k(t-t')]\,d\Omega'\,dt'+$$

$$+K_i(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{XIII.1.10}$$

Burada v_i ile, kolayca anlaşıldığı vechile, i-inci gruba tekâbül eden ortalama nötron hızı gösterilmiş bulunmaktadır.

Şimdi zamana bağlı skaler nötron akısını

$$\phi_i(\vec{r},t)=\int_{\vec{\Omega}}\Phi_i(\vec{r},\vec{\Omega},t)\,d\Omega \tag{XIII.1.11}$$

ile ve nötron akımını da

$$\vec{J}_i(\vec{r},t)=\int_{\vec{\Omega}}\vec{\Omega}\cdot\Phi_i(\vec{r},\vec{\Omega},t)\,d\Omega \tag{XIII.1.12}$$

ile gösterelim.

P_1 takribiyeti muvacehesinde

$$\Phi_i(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\frac{1}{4\pi}\phi_i(\vec{r},t)+\frac{3}{4\pi}\vec{\Omega}\cdot\vec{J}_i(\vec{r},t) \tag{XIII.1.13}$$

yazabiliriz. Buna göre bu ifâdeyi (XIII. 1. 10) denklemlerine yerleştirip de önce bütün yönler üzerinden ve sonra da her bir terimi $\vec{\Omega}$ ile skaler olarak çarptıktan sonra bütün yönler üzerinden integre edecek olursak şu denklem sistemlerini elde etmiş oluruz :

$$\frac{1}{v_i}\frac{\partial\phi_i(\vec{r},t)}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{J}_i(\vec{r},t)-\Sigma_{t,i}(\vec{r})\phi_i(\vec{r},t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{i}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r})+\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r})\right]\phi_j(\vec{r},t)+f_{o,i}\sum_{j=1}^{N}(1-\beta_j)\,\nu_j\Sigma_{f,j}(\vec{r})\,\phi_j(\vec{r},t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{6}\lambda_k f_{k,i}\sum_{j=1}^{N}\beta_{k,j}\nu_j\Sigma_{f,j}(\vec{r})\int_0^t\phi_j(\vec{r},t')\exp[-\lambda_k(t-t')]\,dt'+K_i(\vec{r},t) \tag{XIII.1.14}$$

$$(i=1,2,\ldots,N)$$

$$\frac{1}{v_i}\frac{\partial\vec{J}_i(\vec{r},t)}{\partial t}=-\frac{1}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_i(\vec{r},t)-\Sigma_{t,i}(\vec{r})\,\vec{J}_i(\vec{r},t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{i}\mu_{ji}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r})+\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r})\right]\vec{J}_j(\vec{r},t)\,. \tag{XIII.1.15}$$

$$(i=1,2,\ldots,N)$$

Burada

$$\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r})+\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r})=\int_{\vec{\Omega}}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})+\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\right]d\Omega \tag{XIII.1.16}$$

ve

$$\mu_{ji}=\frac{\displaystyle\int_{\vec{\Omega}}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})+\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\right]\cos(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega})\,d\Omega}{\displaystyle\int_{\vec{\Omega}}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})+\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\right]d\Omega} \tag{XIII.1.17}$$

vazedilmiş bulunmaktadır. Şimdi j-inci gruptan i-inci gruba aktarılmaya tekâbül eden $\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r})$ ve $\Sigma_{in,j\to i}(\vec{r})$ makroskopik tesir kesitlerini göz önüne alırsak j nin hiç bir zaman i den büyük olamayacağı âşikârdır. Öte yandan $j=i$ için

$$\Sigma_{mod,i\to i}(\vec{r})=\int_{\vec{\Omega}}\Sigma_{mod,i\to i}(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\,d\Omega \tag{XIII.1.18}$$

ve

$$\Sigma_{in,i\to i}(\vec{r}) = \int_{\vec{\Omega}} \Sigma_{in,i\to i}(\vec{r}\,;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\,d\Omega \qquad \text{(XIII.1.19)}$$

ifâdeleriyle verilecek olan tesir kesitlerinin sâdece, aynı bir grup içindeki yön değişimlerine tekâbül eden tesir kesitleri oldukları anlaşılmaktadır. Bu husus 1. ciltte çokgruplu elemanter difüzyon teorisini açıkladığımız XV. derste rastlamadığımız ve yalnız P_1 takribiyetine münhasır olan bir özelliktir. Filhakika 1. cildin (XV. 2. 10) formülüyle verilmiş olan OKRENT denklemlerinde böyle bir tesir kesidini ihtivâ eden bir terim bulunmamaktadır. (XIII. 1. 14) ve (XIII. 1. 15) denklem sistemlerinde $\Sigma_{mod,i\to i}(\vec{r})$ ve $\Sigma_{in,\to i}(\vec{r})$ li terimlerin mevcûdiyetleri makroskopik toplam tesir kesidinde zahirî bir azalma husûle gelmesine sebep olmaktadır. Hâkikaten de, eğer

$$\widehat{\Sigma}_{t,i}(\vec{r}) = \Sigma_{t,i}(\vec{r}) - \Sigma_{mod,i\to i}(\vec{r}) - \Sigma_{in,i\to i}(\vec{r}) \qquad \text{(XIII.1.20)}$$

vazedersek (XIII. 1. 14) ve (XIII. 1. 15) denklemleri

$$\frac{1}{v_i}\frac{\partial\phi_i(\vec{r},t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J}_i(\vec{r},t) - \widehat{\Sigma}_{t,i}(\vec{r})\phi_i(\vec{r},t) +$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r}) + \Sigma_{in,j\to i}(\vec{r})\right]\phi_j(\vec{r},t) + f_{o,i}\sum_{j=1}^{N}(1-\beta_j)\,\nu_j\,\Sigma_{f,j}(\vec{r})\phi_j(\vec{r},t) +$$
$$+\sum_{k=1}^{6}\lambda_k f_{k,i}\sum_{j=1}^{N}\beta_{k,j}\,\nu_j\,\Sigma_{f,j}(\vec{r})\int_0^t \phi_j(\vec{r},t')\exp\left[-\lambda_k(t-t')\right]dt' + K_i(\vec{r},t) \qquad \text{(XIII.1.21)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\frac{1}{v_i}\frac{\partial\vec{J}_i(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_i(\vec{r},t) - \Big\{\Sigma_{t,i}(\vec{r}) - \mu_{ii}\Big[\Sigma_{mod,i\to i}(\vec{r}) +$$
$$+\Sigma_{in,i\to i}(\vec{r})\Big]\Big\}\vec{J}_i(\vec{r},t) + \sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ji}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r}) + \Sigma_{in,j\to i}(\vec{r})\right]\vec{J}_j(\vec{r},t)\,\cdot \qquad \text{(XIII.1.22)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

şekillerini alırlar ve, görüldüğü gibi, bilhassa (XIII. 1. 21) de, toplam makroskopik tesir kesidinin rolünü de $\widetilde{\Sigma}_{t,i}(\vec{r})$ oynamaktadır.

Şimdi

$$D_{ii} = \frac{1}{3\{\Sigma_{t,i} - \mu_{ii}[\Sigma_{mod,i\to i} + \Sigma_{in,i\to i}]\}} \qquad \text{(XIII.1.23)}$$

vazedersek (XIII. 1. 22) denklemleri

$$\vec{J}_i(\vec{r}, t) = -D_{ii}\left\{\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi_i(\vec{r}, t) + \frac{3}{v_i}\frac{\partial \vec{J}_i(\vec{r}, t)}{\partial t} - \right.$$

$$\left. -3\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ij}\left[\Sigma_{mod,j\to i}(\vec{r}) + \Sigma_{in,j\to i}(\vec{r})\right]\vec{J}_j(\vec{r}, t)\right\} \qquad \text{(XIII.1.24)}$$

şekline girerler. $i=1$ için

$$\vec{J}_1(\vec{r}, t) = -D_{11}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi_1(\vec{r}, t) + \frac{3}{v_1}\frac{\partial \vec{J}_1(\vec{r}, t)}{\partial t}\right] \qquad \text{(XIII.1.25)}$$

olur, ve

$$D_{12} = 3D_{22}D_{11}\mu_{12}(\Sigma_{mod,1\to 2} + \Sigma_{in,1\to 2}) \qquad \text{(XIII.1.26)}$$

vazetmek sûretiyle de $i=2$ için

$$\vec{J}_2(\vec{r}, t) = -D_{22}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi_2(\vec{r}, t) + \frac{3}{v_2}\frac{\partial \vec{J}_2(\vec{r}, t)}{\partial t}\right] -$$

$$-D_{21}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi_1(\vec{r}, t) + \frac{3}{v_1}\frac{\partial \vec{J}_1(\vec{r}, t)}{\partial t}\right] \qquad \text{(XIII.1.26)}$$

bulunur. Genel olarak herhangi bir i indisi için de

$$\vec{J}_i(\vec{r}, t) = -\sum_{j=1}^{i} D_{ij} \left[\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi_j(\vec{r}, t) + \frac{3}{v_j} \frac{\partial \vec{J}_j(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \qquad \text{(XIII.1.27)}$$

bağıntısının cârî olduğu ispat edilir. Bu ifâdedeki D_{ij} katsayıları tıpkı (XIII. 1. 26) daki gibi hesaplanacaklardır. Gruplara tekâbül eden enerji aralıkları eğer nötronların atom çekirdeklerinde vuku bulan çarpışmalarında kaybettikleri ortalama enerji kayıplarına nisbetle kâfi derecede geniş seçilmişlerse D_{ij} matrisinin esas köşegen dışı elemanları genel olarak ihmâl edilebilirler. Buna binâen (XIII. 1. 27) denklemi

$$\vec{J}_i(\vec{r}, t) = -D_i \left[\overrightarrow{\text{grad}}\, \phi_i(\vec{r}, t) - \frac{3}{v_i} \frac{\partial \vec{J}_i(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \qquad \text{(XIII.1.28)}$$

ifâdesine müncer olur.

D_{ij} lerin uzay koordinatlarına bağlı olmayan sâbitler olduğunu kabul edip (XIII. 1. 27) nin her iki yanının da diverjansını alırsak birkaç düzenlemeden sonra

$$-3\sum_{j=1}^{i} \frac{D_{ij}}{v_j} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{J}_j(\vec{r}, t)}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{J}_i(\vec{r}, t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} D_{ij} \nabla^2 \phi_j(\vec{r}, t) \qquad \text{(XIII.1.29)}$$

yazabiliriz.

Şimdi (XIII. 1. 21) denklemini j grubu için yazalım ve bunun t değişkenine göre türevini alalım. Bundan sonra, elde edilen ifâdeyi $3D_{ij}/v_j$ ile çarpıp her bir terimini $j=1$ den $j=i$ ye kadar toplayalım ; neticede, elde edilen denkleme (XIII. 1. 21) denklemini terim terime ekleyerek (XIII. 1. 29) denkleminin de yardımıyla, P_1 takribiyeti çerçevesinde en genel çokgruplu nötron difüzyon denklemleri olan şu integrodiferansiyel denklem sistemini elde etmiş oluruz (Bk. ERDOĞAN ŞUHUBİ ve AHMED YÜKSEL ÖZEMRE : *Nukleonik*, 4, s. 303-306, Springer Verlag : Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962) :

$$
3\sum_{j=1}^{i}\frac{D_{ij}}{v_j^2}\frac{\partial^2\phi_j(\vec{r},t)}{\partial t^2}+\frac{1}{v_i}\frac{\partial\phi_i(\vec{r},t)}{\partial t}+
$$

$$
+3\sum_{j=1}^{i}\frac{D_{ij}}{v_j}\Bigg\{\widetilde{\Sigma}_{t,j}\frac{\partial\phi_j(\vec{r},t)}{\partial t}-\sum_{l=1}^{j-1}[\Sigma_{mod,l\to j}+\Sigma_{in,l\to j}]\frac{\partial\phi_l(\vec{r},t)}{\partial t}-
$$

$$
-f_{o,j}\sum_{l=1}^{N}(1-\beta_l)\nu_l\Sigma_{f,l}\frac{\partial\phi_l(\vec{r},t)}{\partial t}\Bigg\}=\sum_{j=1}^{i}D_{ij}\nabla^2\phi_j(\vec{r},t)-
$$

$$
-\widetilde{\Sigma}_{t,i}\phi_i(\vec{r},t)+\sum_{j=1}^{i-1}[\Sigma_{mod,j\to i}+\Sigma_{in,j\to i}]\phi_j(\vec{r},t)+
$$

$$
+f_{o,i}\sum_{j=1}^{N}(1-\beta_j)\nu_j\Sigma_{f,j}\phi_j(\vec{r},t)+\sum_{k=1}^{6}\lambda_k f_{k,i}\times
$$

$$
\times\sum_{j=1}^{N}\beta_{k,j}\nu_j\Sigma_{f,j}\int_0^t\phi_j(\vec{r},t')\exp[-\lambda_k(t-t')]\,dt'+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{i}\frac{3D_{ij}}{v_j}\sum_{k=1}^{6}\lambda_k f_{k,j}\sum_{l=1}^{N}\beta_{k,l}\nu_l\Sigma_{f,l}\times\Bigg[\phi_l(\vec{r},t)-
$$

$$
-\lambda_k\int_0^t\phi_l(\vec{r},t')\exp[-\lambda_k(t-t')]\,dt'\Bigg]+
$$

$$
+K_i(\vec{r},t)+\sum_{j=1}^{i}\frac{3D_{ij}}{v_j}\frac{\partial K_j(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{(XIII.1.30)}
$$

$$
(i=1,2,\cdots,N)
$$

F. 18

Bu integrodiferansiyel denklem sisteminin fevkalâde girift bir sistem olduğu görülmektedir. Bununla beraber tatbikatta (XIII. 1. 30) sistemini biraz sâdeleştirmek mümkündür. Filhakika, enerji gruplarını, meselâ, sâdece son iki grubun gecikmiş nötronları ihtivâ etmesini sağlayacak şekilde seçmenin bu denklemleri bir hayli hafifleteceği âşikârdır. Bundan başka şuna da nazar-ı dikkati çekelim ki U-238 gibi bazı nükleer yakıtlara tekâbül eden fisyon tesir kesidinin ancak 1 MeV den yüksek enerjilerde sıfırdan farklı olması ve U-235 gibi bazı nükleer yakıtların fisyon spektrumlarının ılık bölgeye kadar uzanmayışı da (XIII. 1. 30) denklemlerinde bazı hafifletici tâdilâta yol açmaktadır.

Başka bir sâdeleştirme de yukarıda zikrettiğimiz vechile, $i \neq j$ için $D_{ij} = 0$ olacak şekilde, enerji grupları kâfi derecede geniş tutulduğu vakit ortaya çıkmaktadır. Filhakika bu şart tahakkuk ettiği takdirde (XIII.1.21) ile (XIII.1.28) denklemlerini göz önünde tutarak (XIII.1.30) denklemleri yerine şu denklem sisteminin yazılabileceği kolaylıkla tahkik olunur :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{v_i}\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi_i(\vec{r},t)+\frac{3D_i}{v_i}\frac{\partial\phi_i(\vec{r},t)}{\partial t}\right]=D_i\nabla^2\phi_i(\vec{r},t)-\\
&-\widehat{\Sigma}_{t,i}\left[\phi_i(\vec{r},t)+\frac{3D_i}{v_i}\frac{\partial\phi_i(\vec{r},t)}{\partial t}\right]+\sum_{j=1}^{i-1}(\Sigma_{mod,j\to i}+\Sigma_{in,j\to i})\times\\
&\times\left[\phi_j(\vec{r},t)+\frac{3D_j}{v_j}\frac{\partial\phi_j(\vec{r},t)}{\partial t}\right]+f_{o,i}\sum_{j=1}^{N}(1-\beta_j)\,\nu_j\,\Sigma_{f,j}\times\\
&\times\left[\phi_j(\vec{r},t)+\frac{3D_j}{v_j}\frac{\partial\phi_j(\vec{r},t)}{\partial t}\right]+\sum_{k=1}^{6}\lambda_k f_{k,i}\times\\
&\times\sum_{j=1}^{N}\beta_{k,j}\,\nu_j\,\Sigma_{f,j}\left[\frac{3D_j}{v_j}\phi_j(\vec{r},t)+\left(1-\frac{3D_j}{v_j}\lambda_k\right)\int_0^t\phi_j(\vec{r},t')\times\right.\\
&\left.\times\exp[-\lambda_k(t-t')]\,dt'\right]+K_i(\vec{r},t)+\frac{3D_i}{v_i}\frac{\partial K_i(\vec{r},t)}{\partial t}\,. \qquad \text{(XIII.13.1)}
\end{aligned}
$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$

Eğer nötronların kararlı dağılımlarını nazar-ı itibâra alır ve gecikmiş nötronları da ihmâl edersek (XIII. 1. 31) denklemlerinden derhâl

$$\boxed{\begin{aligned} & D_i \nabla^2 \phi_i(\vec{r}) - \widehat{\Sigma}_{t,i}\, \phi_i(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{i-1} (\Sigma_{mod,j\to i} + \Sigma_{in,j\to i})\, \phi_j(\vec{r}) + \\ & + f_{o,i} \sum_{k=1}^{N} \nu_k\, \Sigma_{f,k}\, \phi_k(\vec{r}) + K_i(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(XIII.1.32)} \end{aligned}}$$

elde edilir ki bu denklem sistemi 1. cildin (XV. 2. 10) formülüyle verilmiş olan OKRENT denklem sisteminin formel olarak tıpatıp aynıdır. Yegâne fark, (XIII. 1. 32) denklemlerindeki $\widehat{\Sigma}_{t,i}$ toplam tesir kesidinin târifinden ileri gelmektedir.

2. **F. STUMMEL Denklemleri.** — Bu dersin birinci bölümünde görmüş olduğumuz, transport denkleminden hareketle, P_1 takribiyeti muvacehesinde, çokgruplu difüzyon teorisinin temel denklemlerini çıkarmaya mâtuf usûl bu teorideki makroskopik tesir kesitleri, fisyon başına açığa çıkan nötron sayısı v.s. gibi sâbitleri formel olarak târif edebiliyordu. Fakat bütün bu sâbitlerin târifinin nötronların enerji dağılımının (spektrumunun) evvelden bilinmesine bağlı olması ve genel olarak da bu dağılımın önceden sıhhatle bilinmemesi bu teorinin zaafını teşkil etmektedir. Pratikte, çokgruplu difüzyon teorisine dayanarak bir reaktör hesabı yapılmak istendiğinde, nötronların bu reaktördeki enerji dağılımları (spektrumlaır) hakkında bir bilgi, ya bundan önce hemen hemen aynı vasıfları haiz olarak imâl edilmiş bir reaktördeki nötron dağılımından veyâhut da sırf bu iş için imâl olunan model bir reaktör üzerinde yapılan tecrübelerden elde edilir ve inşâ edilecek reaktörün çokgruplu hesaplarında kullanılacak olan sâbitler de buna binâen hesaplanırlar.

Çokgruplu reaktör hesaplarındaki bu mahzuru ortadan kaldırmak için FRİEDRİCH STUMMEL başka bir metot teklif etmiştir (Bk. F. STUMMEL : *Nukleonik,* 4, s. 137-149, Springer Verlag ; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962). Bu metot vâsıtasıyla, çokgruplu difüzyon hesapları için lûzumlu sâbitler ,reaktördeki nötron spektrumunun yâni reaktör içindeki bütün nötronların enerji bakımından dağılımlarının bilinmesine ihtiyaç kalmadan hesaplanabilmektedirler. Metodun zamana bağlı nötron dağılımlarına da kolaylıkla tatbik edilebilmesine mukabil biz burada müellifinin takdim tarzını aksettirmekle iktifâ edeceğiz.

Önce, mûtad olduğu vechile, ılık enerjiyle nötronların haiz olabilecekleri maksimum enerji arasını (pratik olarak 0 ilâ 10 MeV arasını) gene N adet alt aralığa bölelim. Lâlettâyin bir i-inci grubu da enerjileri E_{i-1} ile E_i enerjileri arasında kalan nötronların tümü olarak târif edelim. Buna göre ilk grup en yüksek enerjili nötronların grubunu ve N-inci grup da ılık enerjili nötronların grubunu göstereceklerdir.

Bundan sonra her i enerji grubu için $\{p^i_m(E)\}$, $(m=1, 2, \ldots\ldots)$, gibi ve

$$\int_{E_i}^{E_{i-1}} p^i_m(E)\, p^i_n(E)\, dE = \delta_{mn} \qquad \text{(XIII.2.1)}$$

ortonormâllik bağıntılarını gerçekleyen bir tam ortonormâl fonksiyon ailesi târif edilmiş olsun. Bu türlü bir fonksiyon ailesi, meselâ, LEGENDRE polinomlarını i-inci enerji aralığına dönüştürüp uygun bir şekilde norme etmekle elde edilebilir. Böylece her i enerji grubu için $(i=1, 2, \ldots, N)$ zamana bağlı olmayan $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ nötron akısını

$$\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega})\, p^i_m(E) \qquad \text{(XIII.2.2)}$$

şeklinde bir seriye açmak mümkün olur. Bu açılımdaki açılım katsayıları da

$$\Phi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{E_i}^{E_{i-1}} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})\, p^i_m(E)\, dE \qquad \text{(XIII.2.3)}$$

ifâdeleriyle verileceklerdir. Benzer şekilde $K(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ kaynak fonksiyonu da $p^i_m(E)$ ler cinsinden serilere açılabilecektir.

Zamana bağlı olmayan transport denklemini, $K(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ kaynak fonksiyonunun ifâde ettiği mânâyı daha geniş tutarak, kısaca

$$\boxed{\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_x}\, \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma(\vec{r}, E)\, \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = K(\vec{r}, E, \vec{\Omega})} \tag{XIII.2.4}$$

şeklinde yazmak kâbildir. Buna binâen, eğer (XIII. 2. 4) denkleminde $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ yerine (XIII. 2. 2) açılımını yerleştirecek olursak şu denklemi elde ederiz :

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_x}\, \Phi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma(\vec{r}, E)\, \Phi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) - K^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega})\right] p^i_m(E) = 0$$

(XIII.2.5)

Şimdi bu denklemi $p^i_n(E)$ ile çarpıp i-inci enerji aralığı üzerinden integre edelim. (XIII. 2. 1) diklik şartlarına binâen ve

$$\Sigma^i_{mn}(\vec{r}) = \int_{E_i}^{E_{i-1}} \Sigma(\vec{r}, E)\, p^i_m(E)\, p^i_n(E)\, dE \tag{XIII.2.6}$$

vazetmek şartıyla (XIII. 2. 5) denklemini böylece

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_x}\, \Phi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma^i_{mn}(\vec{r})\, \Phi^i_n(\vec{r}, \vec{\Omega}) = K^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) \tag{XIII.2.7}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots\cdots, N \\ m = 1, 2, \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

şekline sokmak mümkün olur.

(XIII. 2. 2) açılımının katsayılarını tâyin eden (XIII. 2. 7) sonsuz diferansiyel denklem sistemi yerine daha kolaylıkla muamele olunabilecek bir sistem vazetmek için (XIII. 2. 2) açılımını meselâ M-inci terimde kesmenin uygun olacağına işâret edelim. Böylece (XIII. 2. 7) sistemi yerine sonlu bir sistem olan

$$\vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{\text{grad}_r}\,\Phi^i_m(\vec{r},\vec{\Omega})+\sum_{n=1}^{M}\Sigma^i_{mn}(\vec{r})\,\Phi^i_n(\vec{r},\vec{\Omega})=K^i_m(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad \text{(XIII.2.8)}$$

sistemi ikâme edilmiş olur. Bu sonuncu sistemin çözümleri, genel olarak, (XIII. 2. 7) sisteminin yaklaşık çözümleri olacaklardır.

Artık $m=1, 2,\ldots, M$ ve $n=1, 2,\ldots, M$ sûretiyle elde edilecek olan Σ^i_{mn} matrislerinin bizzat (XIII. 2. 6) târifine binâen reel ve simetrik olacakları âşikârdır. Buna göre, her i grubu için, Σ^i_{mn} matrisi M adet negatif olmayan reel $\Sigma^i_k(\vec{r})$, $(k=1, 2,\ldots, M)$, özdeğerlerini ve bunlara tekâbül eden biribirlerine ortogonâl $\chi^i_{nk}(\vec{r})$, $(n, k=1, 2,\ldots, M)$, özvektörlerini haizdir. Şu hâlde

$$\sum_{n=1}^{M}\Sigma^i_{mn}(\vec{r})\,\chi^i_{nk}(\vec{r})=\Sigma^i_k(\vec{r})\,\chi^i_{mk}(\vec{r}) \qquad \text{(XIII.2.9)}$$

yazılabilir. Eğer $\chi^i(\vec{r})$ özvektörleri norme edilmiş vektörlerse (ki bu gibi vektörlerin normalizasyonu her zaman mümkündür) aralarında mâlûm şu ortonormâllik bağıntıları câri olacaktır :

$$\sum_{m=1}^{M}\chi^i_{mk}(\vec{r})\,\chi^i_{ml}(\vec{r})=\delta_{kl} \qquad \text{(XIII.2.10)}$$

$\Sigma(\vec{r}, E)$ tesir kesidinin, tatbikatta, çok kere yervektörüne göre bölgeden bölgeye sâbit değerler aldığı bilinmektedir. Buna göre eğer bir V_1 bölgesinde tesir kesidi yervektörüne tâbî değilse

$$\vec{r}\in V_1 \quad \text{için} \qquad \Sigma(\vec{r}, E)=\Sigma(E) \qquad \text{(XIII.2.11)}$$

olacak ve buna binâen de Σ^i_{mn} matrisinin özdeğerleriyle özvektörleri de $\vec{r}$ nin fonksiyonu olmayacaklardır. Şimdi V_1 de

$$\Phi^i_m(\vec{r})=\sum_{k=1}^{M}\chi^i_{mk}\,\Psi^i_k(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad \text{(XIII.2.12)}$$

bağıntılarıyla târif edilmiş olan $\Psi^i_k(\vec{r}, \vec{\Omega})$ fonksiyonlarını ithâl edelim. (XIII. 2. 10) ortonormâllik bağıntılarından dolayı buradan

$$\Psi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \sum_{k=1}^{M} \chi^i_{km} \Phi^i_k(\vec{r}, \vec{\Omega}) \qquad \text{(XIII.2.13)}$$

bulunur. Buna göre de (XIII. 2. 8) sistemi, V_i bölgesi için,

$$\sum_{k=1}^{M} \left[\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\, \Psi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma^i_k\, \Psi^i_k(\vec{r}, \vec{\Omega}) \right] \chi^i_{mk} = K^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) \qquad \text{(XIII.2.14)}$$

şekline müncer olur. Son olarak, eğer bir de

$$S^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \sum_{k=1}^{M} \chi^i_{km} K^i_k(\vec{r}, \vec{\Omega}) \qquad \text{(XIII.2.15)}$$

vazedilirse (XIII.2. 8) sistemi yerine V_i bölgesi için nihâyet

$$\boxed{\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\, \Psi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma^i_m\, \Psi^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S^i_m(\vec{r}, \vec{\Omega})} \qquad \text{(XIII.2.16)}$$

sistemi elde edilmiş olur.

Bibliyografya :

ERDOĞAN ŞUHUBİ, AHMED YÜKSEL ÖZEMRE : *Nukleonik*, **4**, S. 303-306, Springer Verlag ; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962.

FRİEDRİCH STUMMEL : *Nukleonik*, **4**, S. 137-149, Springer Verlag ; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962.

EK: I

HETEROGEN REAKTÖRLERDE GÜC HESABI

Heterogen bir çoğaltkan ortamda elemanter bir $d\vec{r}$ hacım elemanında yutulan nötronların ortalama sayısı, $\overline{\Sigma}_a$ ile ortamın ortalama makroskopik yutulma tesir kesidini ve $\phi(\vec{r}) = \phi_{Max}\chi(\vec{r})$ ile de ortamdaki makroskopik akı dağılımını göstermek sûretiyle.

$$\overline{\Sigma}_a \phi(\vec{r})\, d\vec{r} = \overline{\Sigma}_a\, \phi_{Max}\, \chi(\vec{r})\, d\vec{r} \tag{1}$$

olacaktır. Bu yutulan nötronlardan ortalama olarak ancak

$$f\, \overline{\Sigma}_a\, \phi_{Max}\, \chi(\vec{r})\, d\vec{r} \tag{2}$$

kadarı nükleer yakıt tarafından yutulmuş olacak ve $\Sigma_{a,f}$ ile nükleer yakıtın makroskopik yutulma tesir kesidini göstererek, gene ortalama olarak,

$$\frac{\Sigma_f}{\Sigma_{a,f}}\, f\, \overline{\Sigma}_a \phi_{Max}\, \chi(\vec{r})\, d\vec{r} \tag{3}$$

nötron da fisyona sebep olacaktır.

Bir taraftan 3.2×10^{10} adet fisyonun 1 watt'lık bir enerjinin ortaya çıkmasına sebep olduğunu göz önünde tutar, diğer taraftan da $\overline{\Sigma}_a$ için bu cildin (I. 4. 2) numaralı formülü ile verilmiş olan

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{\Sigma_{a,m}}{1-f}\, \frac{1}{1+\dfrac{V_f}{V_m}\dfrac{\overline{\phi}_f}{\overline{\phi}_m}} = \frac{\Sigma_{a,m}}{1-f}\, \frac{1}{1+\dfrac{V_f}{V_m}\zeta} \tag{4}$$

ifâdesini kullanırsak 1 saniyede elemanter $d\vec{r}$ hacmında açığa çıkan ortalama güc olarak

$$dP = \frac{\phi_{Max}}{3.2 \times 10^{10}} \frac{\Sigma_f}{\Sigma_{a,f}} \frac{f}{1-f} \frac{\Sigma_{a,m} \chi(\vec{r}) d\vec{r}}{1 + \frac{V_f}{V_m} \zeta} \tag{5}$$

bulunur. Buna binâen bütün heterogen ortamda üreyen güc bu ifâdenin ortamın V_r hacmı üzerinden integralini almakla bulunacaktır. $\bar{\chi}$ ile normalize edilmiş makroskopik nötron dağılımına tekâbül eden ortalama değeri gösterirsek

$$P = \frac{\phi_{Max}}{3.2 \times 10^{10}} \frac{\Sigma_f}{\Sigma_{a,f}} \frac{f}{1-f} \frac{\Sigma_{a,m} V_r \bar{\chi}}{1 + \frac{V_f}{V_m} \zeta} \tag{6}$$

bulunur. $V_f \ll V_m$ olduğu hâller için ise bu ifâdenin

$$\boxed{P = \frac{\Sigma_f \phi_{Max} V_r}{3.2 \times 10^{10}} \frac{\Sigma_{a,m}}{\Sigma_{a,f}} \frac{f}{1-f} \bar{\chi}} \tag{7}$$

şekline müncer olacağı âşikârdır.

Aşağıdaki cetvel muhtelif geometriler için $\chi(\vec{r})$ ve $\bar{\chi}$ yi vermektedir.

Ortamın Şekli	$\chi(\vec{r})$	$\bar{\chi}$
Tek Boyutlu	$\cos \frac{\pi x}{X}$	$\frac{2}{\pi}$
Paralelyüzlü	$\cos \frac{\pi x}{X} \cos \frac{\pi y}{Y} \cos \frac{\pi z}{Z}$	$\frac{8}{\pi^3}$
Sonlu Silindir	$J_0 \left(\frac{2.405 \rho}{R} \right) \cos \frac{\pi z}{H}$	$\frac{4 J_1(2\ 405)}{2.405 \pi}$
Küre	$\frac{\sin \frac{\pi r}{R}}{r}$	$\frac{3}{4\pi^2}$

EK: II

ÇOK BÖLGELİ REAKTÖRLERDE ORTALAMA NÖTRON ÖMRÜNÜN ÇOKGRUPLU PERTÜRBASYON TEORİSİNE GÖRE HESABI

Değişik nükleer vasıflarda M adet bölgeden müteşekkil bir reaktör olsun. Grek indisiyle bölgeleri gösterelim : $\mu = 1, 2, \ldots, M$. Nötronların enerji gruplarını da lâtin indisiyle işâretleyelim : $p = 1, 2, \ldots, N$. Reaktördeki nötron akılarının kararlı bir dağılıma sâhip olduklarını kabul ederek bu dağılımları veren OKRENT denklemleri şu şekilde yazılacaklardır :

$$D_{\mu_p} \nabla^2 \phi_{\mu_p}(\vec{r}) - (\Sigma^c_{\mu_p} + \Sigma^f_{\mu_p} + \Sigma^{mod}_{\mu_p} + \Sigma^{in}_{\mu_p}) \phi_{\mu_p}(\vec{r}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{p-1} \left[\Sigma^{mod}_{\mu, m\to p} + \Sigma^{in}_{\mu, m\to p} \right] \phi_{\mu_m}(\vec{r}) + f_{\mu_p} \sum_{k=1}^{N} \nu_{\mu_k} \Sigma^f_{\mu_k} \phi_{\mu_k}(\vec{r}) = 0 \qquad (1)$$

$$\mu = 1, 2, \cdots, M \quad ; \quad p = 1, 2, \cdots, N$$

Bu denklemlerdeki bazı terimlerin bazı enerji grupları ve bazı bölgeler için sıfır olacakları âşikârdır. Buna en basit bir misâl olarak çoğaltıcı olmayan bir ortam için bu denklemlerin ikinci terimlerinin

$$(\Sigma^c_{\mu_p} + \Sigma^{mod}_{\mu_p}) \phi_{\mu_p}(\vec{r}) \qquad (2)$$

ya ve üçüncü ve dördüncü terimlerinin de sıfıra müncer olmalarını gösterebiliriz.

Şimdi (1) denklemlerini daha derli toplu yazabilmek gâyesiyle

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\vec{r}) \\ \phi_{12}(\vec{r}) \\ \vdots \\ \phi_{1N}(\vec{r}) \\ \phi_{21}(\vec{r}) \\ \vdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \vdots \\ \phi_{M1}(\vec{r}) \\ \phi_{M2}(\vec{r}) \\ \vdots \\ \phi_{MN}(\vec{r}) \end{bmatrix} \tag{3}$$

şeklinde bir vektör târif edelim. Diğer taraftan (1) denklemlerine tekâbül eden diferansiyel **O** matris operatörü de $(M \times N)$ mertebesini haiz bir matris olduğundan bu denklemler kısaca

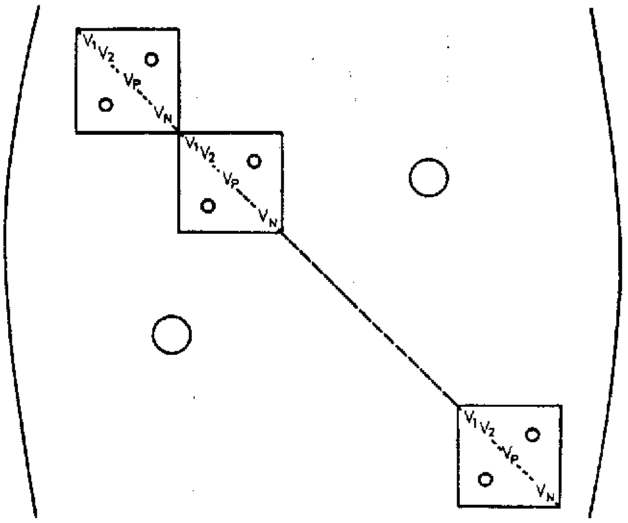
$$\mathbf{O}\Phi = \mathbf{0} \tag{4}$$

şeklinde yazılacaklardır. Fakat biz bu ifâdeden ziyâde, ileride işimize daha uygun geleceğinden,

$$(\mathbf{VO})\Phi = \mathbf{0} \tag{5}$$

ifâdesini kullanacağız. Burada **V** ile

V =



şeklinde diyagonâl hız matrisi gösterilmektedir. Eğer herhangi bir sebepten ötürü reaktörün kararlı durumunda bir pertürbasyon vuku bulursa nötronların dağılımları artık, genel olarak, zamana bağlı bir durum arzeder. Böylece reaktör de sonlu bir peryoda sâhip olmuş olur. Reaktörün haiz olduğu peryodun tersinin değişimini $\delta\omega$ ile ve vuku bulan pertürbasyona tekâbül eden pertürbasyon operatörünü de $\delta\mathbf{P}$ ile gösterirsek (VIII. 4. 13) formülüne binâen

$$\delta\omega = \frac{[\Psi_T, (\delta P)\,\Phi]}{[\Psi_T, \Phi]} \tag{6}$$

olacaktır. Fakat Reaktörlerin Kinetiği bahsinden bilmekte olduğumuz vechile $\delta\omega$ yerine $\delta k/l^*$ yazmak da mümkündür. Buna göre (6) formülünü

$$\delta\omega = \frac{\delta k}{l^*} = \frac{[\Psi_T, (\delta P)\,\Phi]}{[\Psi_T, \Phi]} = \frac{\int_V \Psi_T (\delta P)\,\Phi\, d\vec{r}}{\int_V \Psi_T\, \Phi\, d\vec{r}} \tag{7}$$

tarzında da ifâde edebiliriz. Burada, her zamanki gibi, δk reaktiflik fazlasını ve l^* da nötronların reaktördeki ortalama ömürlerini göstermektedir. Ψ ise (5) sistemine ek sistemin çözüm vektörüdür.

Şimdi, c ile muayyen bir sâbiti ve v_p ile de p-inci gruptaki nötronların haiz oldukları ortalama hızı göstererek, makroskopik yutulma tesir kesidi c/v_p şeklinde olan nötron yutucu bir maddenin reaktörün içine homogen bir tarzda ithâl edilmiş olduğunu farzedelim. Bu nötron yutucu maddenin reaktöre ithâlinin bir neticesi olarak bütün makroskopik yutulma tesir kesitleri, $p=1, 2, \ldots, N$ olmak üzere, c/v_p kadar artmış olacaklardır. Bu sûretle reaktörde vuku bulan pertürbasyon dolayısıyla da reaktörün kararlı durumu bozulmuş olacak ve nötronların enerji gruplarına göre akılarını tâyin eden denklem sistemi de artık

$$(\mathbf{VO'})\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{8}$$

şekline girmiş olacaktır. Buradaki $\mathbf{O'}$ operatörü $\mathbf{O}$ operatöründen, bütün makroskopik yutulma tesir kesitlerini c/v_p kadar arttırmış olmakla elde edilecektir. Bu pertürbasyona tekâbül eden pertürbasyon matrisi de şu hâlde

$$\delta\mathbf{P} = \mathbf{V}(\mathbf{O'} - \mathbf{O}) \tag{9}$$

olacaktır. Makroskopik yutulma tesir kesitleri $\mathbf{O}$ operatörüyle $\mathbf{O'}$ operatörünün yalnız esas köşegenleri üzerindeki elemanlarında bulunduklarından ve $\delta\mathbf{P}$ pertürbasyon matrisi de hız matrisiyle bu iki operatörün farkının çarpımına eşit olduğundan $\delta\mathbf{P}$ nin açık olarak

$$\delta\mathbf{P} = -\mathbf{C} = -\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix} \tag{10}$$

şeklinde olduğu anlaşılmaktadır. Buna binâen ve (7) bağıntısından dolayı

$$\delta\omega = \frac{\delta k}{l^*} = -\frac{\int_V \Psi_T \,\mathbf{C}\, \Phi \, d\vec{r}}{\int_V \Psi_T \, \Phi \, d\vec{r}} = -c \tag{11}$$

olur. Bu son ifâde illiyet nokta-i nazarından da tefsir edilebilir. Filhakika c nin negatif işâretini de göz önünde tutarak, (11) bağıntısının, c sâbiti vâsıtasıyla karakterize edilmiş olan nötron yutucu bir maddenin reaktöre ithâlinin ortamda bir reaktiflik azalması husûle gelmesi ve ortamın kararlılığının bozulması keyfiyetine delâlet ettiği görülmektedir. Nötron yutucu maddenin reaktöre ithâliyle reaktör, tersi sıfırdan farklı olan sonlu bir peryot kazanmış olur. Reaktör peryodunun tersinin değişiminin işâreti negatif olduğu için buradan da reaktöre ithâl edilen herhangi bir nötron yutucunun zincirleme fisyon reaksiyonlarının sönmesine sebep olduğu neticesine varılmış olur.

Tersine olarak, eğer reaktör kritikse peryodu da kararlı ve sonsuzdur ve buna göre de $\delta\omega = 0$ olur. $\delta\omega$ nın sıfır olması hem δk nın ve hem de c nin sıfır olmalarını intâceder. Diğer taraftan (7) bağıntısından

$$l^* = -\frac{\delta k}{c} \tag{12}$$

veyâ buna eşdeğer olan

$$l^* = \left|\frac{\delta k}{c}\right| \tag{13}$$

bağıntısı çıkarılır. Şimdi c yi sıfıra götürelim. Buna paralel olarak ve yukarıda belirtilmiş olan sebep zincirine uygun bir tarzda δk nın mutlak değeriyle reaktörün peryodunun tersi de sıfıra giderler. Buna göre c nin her değeri için bir başka l^* değeri elde ederiz. Limitte hem δk ve hem de c sıfır oldukları zaman dahi l^* ın mevcûd olmaya devam edeceği âşikâr bir şeydir ; buna binâen de kararlı bir reaktördeki nötronların ortalama ömürleri

$$l^*_{\text{kar}} = \lim_{c \to 0}\left|\frac{\delta k}{c}\right| \tag{14}$$

olarak târif edilecektir.

Şimdi reaktördeki nötronların sayısını, birinci pertürbasyon dolayısıyla kaybedilmiş olan reaktifliği telâfi edecek kadar, yâni reaktörün yeniden kritik duruma geçmesini temin edecek kadar, hayâlen (*fiktif olarak*) arttıralım. δk ile nötron yutucu maddenin reaktöre ithâliyle husûle gelen reaktiflik düşüklüğünün mutlak değerini göstererek, nötron sayısındaki bu hayâlî çoğalmayı ν_{μ_k} yerine $\nu_{\mu_k}(1+\delta k)$ vâzetmekle ifâde edeceğiz.

Şimdi $\mathbf{O}''$ ile birbirlerini ifnâ eden her iki pertürbasyonu da ihtivâ eden diferansiyel matris operatörünü gösterelim. Binâenaleyh her iki pertürbasyonun da tatbik edilmiş olduğu reaktördeki nötron akıları bu pertürbasyonların biribirlerini ifnâ etmeleri sebebiyle gene kararlı dağılımları haiz olacaklar ve bu sefer de

$$\mathbf{O}''\Phi=0 \tag{15}$$

sistemiyle tesbit edileceklerdir. $\mathbf{O}''$ operatörü $\mathbf{O}$ operatöründen : 1) her makroskopik yutulma tesir kesidi yerine $\Sigma^a{}_{\mu_p}+(c/v_p)$ ve her ν_{μ_k} yerine de $\nu_{\mu_k}(1+\delta k)$ vazedilmiş olmasıyla farketmektedir. $\delta\mathbf{P}$ pertürbasyon matrisi de

$$\delta\mathbf{P}=\mathbf{O}''-\mathbf{O} \tag{16}$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi bu pertürbasyon matrisinin şeklini daha yakından tetkik etmemiz gerekmektedir. Önce, muayyen bir enerji grubundan meselâ (L+1)-inci gruptan itibâren, gruba tekâbül eden ortalama enerjinin fisyon nötronlarının haiz olabilecekleri minimum enerjiden daha küçük olabileceğine dikkati çekelim. Bu çeşit enerji grupları için (1) OKRENT denklemlerindeki en son terimin sıfır olacağı âşikârdır, ve bu reaktör içindeki her çoğaltkan bölge için böyledir.

Diğer taraftan da (16) da belirtilmiş olduğu vechile $\delta\mathbf{P}$ nin herbir elemanı $\mathbf{O}''$ ile $\mathbf{O}$ nun farkına eşittir. Bütün bu tesbit edilenlere binâen şu neticelerin çıktığı kolaylıkla görülür :

1. $\delta\mathbf{P}$ pertürbasyon matrisi, esas itibâriyle, esas köşegeni üzerinde sıralanmış bulunan N-inci mertebeden M adet $\mathbf{R}_{\mu_{t,m}}$ alt matrisinden ibârettir. ($\mu=1, 2,\ldots, M$)

2. Her $\mathbf{R}_{\mu_{t,m}}$ alt matrisinin yapısı da şöyledir :

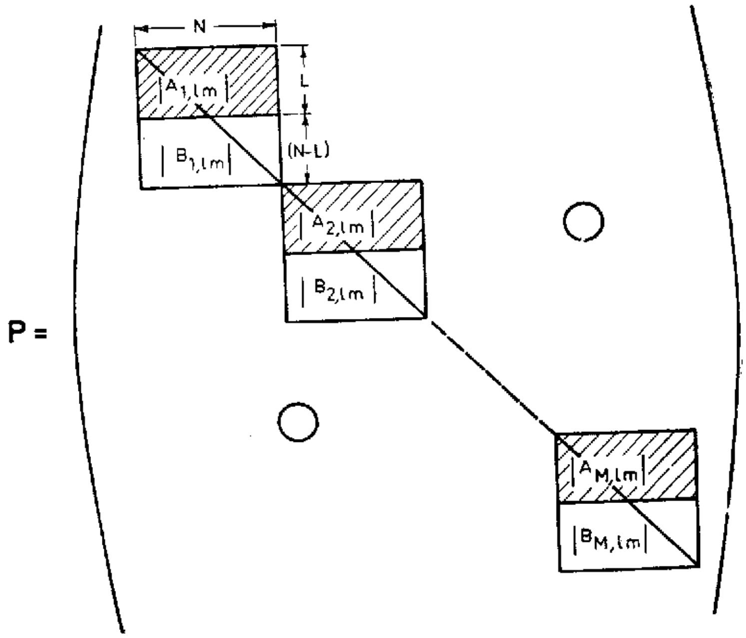
(a) $p=1$ den $p=\mathrm{L}$ ye kadar esas köşegen üzerindeki bütün elemanlar $c/v_p+f_{\mu,p}\,\nu_{\mu,pp}\,\Sigma^f{}_{\mu,pp}\cdot\delta k$ ya ve $p=\mathrm{L}+1$ den $p=\mathrm{N}$ ye kadar da sâdece c/v_p ye eşittirler.

(b) $\mathbf{R}_{\mu_{t,m}}$ matrisinin (L+1)-inci satırının üstünde kalan elemanlar, $l=1, 2,\ldots, \mathrm{L}$ ve $m=1, 2,\ldots, \mathrm{N}$ olmak üzere, $\mathbf{A}_{\mu,lm}$ alt matrisini teşkil ederler. $\mathbf{A}_{\mu,lm}$ nin elemanlarından olup da aynı zamanda $\mathbf{R}_{\mu,tm}$ nin de esas köşegen elemanları olan terimler $f_{\mu,p}\,\nu_{\mu,pn}\,\Sigma^f{}_{\mu,pn}\cdot\delta k$ ya eşittir.

(c) L-inci satırın altında kalan bütün elemanlar, $l=\mathrm{L}+1, \mathrm{L}+2,\ldots, \mathrm{N}$

ve $m=1, 2, \ldots, N$ olmak üzere, $\mathbf{B}_{\mu,\mathrm{lm}}$ alt matrisini teşkil ederler. $\mathbf{B}_{\mu,\mathrm{lm}}$ nin elemanlarından olup da aynı zamanda $\mathbf{R}_{\mu,\mathrm{tm}}$ nin de esas köşegen elemanları olan terimler sıfıra eşittir.

Bunlara binâen $\delta\mathbf{P}$ pertürbasyon matrisi şu şekli alır :



Şimdi l^*_{kar} ortalama ömrünün ifâdesini çıkartacağız. Pertürbasyon matrisinin δk ve c büyüklüklerini açık bir şekilde ihtivâ ettiğini gördük. Reaktörün kritik durumu göz önünde tutulduğunda (7) ifâdesini tatbik ederken c nin $c \to 0$ için limitini almamız lâzımdır. Buna göre

$$\delta\omega = 0 = \lim_{c \to 0} \int_V \Psi_T(\delta\mathbf{P})\, \Phi\, d\vec{r} \tag{17}$$

olacaktır. $\delta\mathbf{P}$ hakkında yapmış olduuğmuz genel ihtarlardan dolayı şu bağıntılar zahmetsizce hesaplanır :

$$\delta\omega = 0 = \lim_{c \to 0} \int_V \Psi_T(\delta\mathbf{P})\, \Phi\, d\vec{r}$$

$$= \lim_{c \to 0} \int_V \left[\sum_{\mu=1}^{M} \sum_{t=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \psi_{\mu t}(\vec{r})\, \mathbf{R}_{\mu,\mathrm{tm}}\, \phi_{\mu m}(\vec{r}) \right] d\vec{r}$$

$$= \lim_{c \to 0} \int_V \Bigg[\sum_{\mu=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{N} \psi_{\mu l}(\vec{r})\, \mathbf{A}_{\mu,lm}\, \phi_{\mu m}(\vec{r}) + \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{l=L+1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \psi_{\mu l}(\vec{r})\, \mathbf{B}_{\mu,lm}\, \phi_{\mu m}(\vec{r}) \Bigg] d\vec{r}$$

$$= \lim_{c \to 0} \int_V \Bigg[\sum_{\mu=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{N} \psi_{\mu l}(\vec{r})\, \mathbf{A}_{\mu,lm}\, \phi_{\mu m}(\vec{r}) + \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{m=L+1}^{N} \psi_{\mu m}(\vec{r}) \left(-\frac{c}{v_m} \right) \phi_{\mu m}(\vec{r}) \Bigg] d\vec{r}$$

$$= \lim_{c \to 0} \int_V \Bigg[\sum_{\mu=1}^{M} \sum_{m=1}^{L} \psi_{\mu m}(\vec{r}) \left(-\frac{c}{v_m} \right) \phi_{\mu m}(\vec{r}) + \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{n=1}^{L} \sum_{m=1}^{N} \psi_{\mu m}(\vec{r}) \left(f_{\mu,m}\, \nu_{\mu,mn}\, \Sigma^f_{\mu,mn} \cdot \delta k \right) \phi_{\mu n}(\vec{r}) + \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{m=L+1}^{N} \psi_{\mu m}(\vec{r}) \left(-\frac{c}{v_m} \right) \phi_{\mu m}(\vec{r}) \Bigg] d\vec{r}$$

$$= \lim_{c \to 0} \int_V \Bigg[-c \cdot \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{m=1}^{N} \psi_{\mu m}(\vec{r}) \left(\frac{1}{v_m} \right) \phi_{\mu m}(\vec{r}) + \delta k . \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{n=1}^{L} \sum_{m=1}^{N} \psi_{\mu m}(\vec{r}) \left(f_{\mu,m}\, \nu_{\mu,mn}\, \Sigma^f_{\mu,mn} \right) \phi_{\mu n}(\vec{r}) \Bigg] d\vec{r}$$

Nihâyet buradan da, l^*_{kar} için

$$\boxed{\lim_{c\to 0}\left|\frac{\delta k}{c}\right| = l^{*}_{\mathrm{kar}} = \frac{\int\limits_{V}\sum\limits_{\mu=1}^{M}\sum\limits_{m=1}^{N}\psi_{\mu_m}(\vec{r})\left(\frac{1}{v_m}\right)\phi_{\mu_m}(\vec{r})\,d\vec{r}}{\int\limits_{V}\sum\limits_{\mu=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{L}\sum\limits_{m=1}^{N}\psi_{\mu_m}(\vec{r})\,(f_{\mu,m}\,\nu_{\mu,mn}\,\Sigma^{f}_{\mu,mn})\,\phi_{\mu_n}(\vec{r})\,d\vec{r}}} \qquad (18)$$

ifâdesi bulunmuş olur. Bu ifâdenin payındaki integrâl bütün reaktör hacmı üzerinden ve paydasındaki integrâl de sâdece reaktördeki çoğaltkan bölgelerin (: $\Sigma^{f} \neq 0$) hacmı üzerinden alınacaktır.

Bibliyografya

AHMED YÜKSEL ÖZEMRE : *Nukleonik*, I, s. 248 - 250, Springer Verlag; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.

EK: III

LEGENDRE POLİNOMLARI

LEGENDRE diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dZ_{\mu\nu}(x)}{dx}\right]+\left[\mu(\mu+1)-\frac{\nu^2}{1-x^2}\right]Z_{\mu\nu}(x)=0 \tag{1}$$

şeklindedir. Bu denklemin çözümlerine, $\nu \neq 0$ olması hâlinde **asosye LEGENDRE fonksiyonları** : $\nu = 0$ olması hâlinde de sâdece **LEGENDRE fonksiyonları** adı verilir. Bu denklem ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olduğundan çözümü $P_{\mu\nu}(x)$ ve $Q_{\mu\nu}(x)$ gibi lineer müstakil iki fonksiyonun lineer kombinezonu şeklinde ifâde olunur. $P_{\mu\nu}(x)$ fonksiyonuna **birinci cins**, $Q_{\mu\nu}(x)$ fonksiyonuna da **ikinci cins LEGENDRE fonksiyonları** denir. $\nu = 0$ olması hâlinde bunlar sırasıyla $P_\mu(x)$ ve $Q_\mu(x)$ ile gösterilirler.

$\nu = 0$ şartından başka bir de $\mu = l = 1, 2, 3, \ldots$ şeklinde tam değerler alıyorsa bu sûretle ortaya çıkan $P_l(x)$ ve $Q_l(x)$ ifâdeleri **LEGENDRE polinomları** adını alırlar. l-inci mertebeden LEGENDRE polinomunun

$$P_l(x)=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\left[x^l-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2}+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\times4(2l-1)(2l-3)}x^{l-4}-\cdots\right] \tag{2}$$

ile verildiği ve aynı mertebeden ikinci cins $Q_l(x)$ LEGENDRE polinomunun da

$$Q_l(x)=\frac{1}{2}P_l(x)\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x}-\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{m}P_{m-1}(x)P_{l-m}(x) \tag{3}$$

şeklinde olduğu gösterilir.

LEGENDRE polinomlarından ilk birkaçı

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x + 3)$$

. . . .

şeklindedir.

Şimdi binom formülüne binâen

$$(x^2 - 1)^l = \sum_{\lambda=0}^{l} (-1)^\lambda \frac{l!}{\lambda!(l - \lambda)!} x^{2(l-\lambda)} \tag{4}$$

olduğunu göz önünde tutup bu ifâdenin x e göre l-inci türevini alalım ; buna göre

$$\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda \frac{l!}{\lambda!(l-\lambda)!} \frac{(2l-2\lambda)!}{(l-2\lambda)!} x^{l-2\lambda} \tag{5}$$

olur. Burada toplam $\lambda=0$ dan, l nin çift veyâ tek olmasına göre, $\lambda=l/2$ veyâ $\lambda=\frac{1}{2}(l-1)$ e kadar alınacaktır. (5) in sağ tarafının

$$\frac{(2l)!}{l!}\left[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\times4(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} + \cdots\right]$$

şekline sokulabileceği göz önünde tutularak ve $P_l(x)$ in (2) ile verilmiş olan târifine binâen de

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l} \tag{6}$$

yazılabilir. Bu ifâde **RODRİGUES formülü** adı altında tanınmaktadır.

$P_l(x)$ polinomlarının ilgi çekici bir başka gösterilişi de

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 2xy + 1}} \tag{6}$$

fonksiyonu, $F(x, 0)$ değeri cıvarında bir MACLAURİN serisine açıldığında ortaya çıkar. Filhakika böyle bir açılımda y^l nin katsayısının $P_l(x)$ olacağını göstermek mümkündür ; yâni

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 2xy + 1}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, y^l \tag{8}$$

dir.

Bütün $P_l(x)$ ler, kolayca anlaşılacağı gibi, biribirlerinden tamamen müstakil değillerdir. Filhakika şu rekürans bağıntıları câri bulunmaktadır :

$$\frac{dP_{l+1}}{dx} - \frac{dP_{l-1}}{dx} - (2l+1) P_l = 0 \tag{9}$$

$$(l+1) P_{l+1} - (2l+1) x P_l + P_{l-1} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{dP_{l+1}}{dx} - x \frac{dP_l}{dx} - (l+1) P_l = 0 \tag{11}$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_l}{dx} - l x P_l + l P_{l-1} = 0 \tag{12}$$

Birçok tatbikatta $P_l(x)$ in argümenti -1 ilâ $+1$ arasında değişir. Bâhusus $x = \cos\theta$ için bu böyledir. Bu takdirde l nin büyük tam değerleri için

1) $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ olmak üzere :

$$P_l(\cos\theta) \rightarrow J_0 \left[(2l+1) \sin \frac{\theta}{2} \right] \tag{13}$$

ve

2) $\theta \gg \frac{1}{l}$ olmak üzere de

$$P_l(\cos\theta) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi l \sin\theta}} \cdot \cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] \tag{14}$$

asimtotik değerlerinin câri olacağı hesaplanmıştır.

Asosye LEGENDRE polinomları da μ ve ν nün $\mu=l=0, 1, 2,\ldots$ ve $\nu=m=0, 1, 2,\ldots$ gibi tam değerleri için târif edilmiş olup

$$P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \tag{15}$$

ile verilmişlerdir. m nin $-l \leqslant m \leqslant l$ bağıntısını gerçeklemesi gerektiğinden şu hâlde her belirli l için $(2l+1)$ adet $P_{lm}(x)$ polinomu olacak demektir. l ve m nin pozitif değerleri için ilk birkaç asosye LEGENDRE polinomu şunlardır :

$$P_{11}(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_{21}(x) = -3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad P_{22}(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_{31}(x) = -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad P_{32}(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_{33}(x) = -15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

. . . .

$(-1,1)$ aralığında asosye LEGENDRE polinomları için

$$\int_{-1}^{1} P_{lm}(x) P_{l'm}(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \tag{16}$$

şeklinde diklik bağıntıları câridir. $m=0$ için asosye LEGENDRE polinomlarına müncer olduklarından (16) bağıntılarından âdi LEGENDRE polinomları için de diklik bağıntıları olarak

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \tag{17}$$

bulunur.

$(-1,1)$ aralığı arasında $P_{lm}(x)$ polinomlarının dik bir fonksiyon dizisi meydana getirmeleri hasebiyle muayyen süreklilik şartlarını sağlayan keyfî bir $f(x)$ fonksiyonunu aynı aralıkta $P_{lm}(x)$ ler cinsinden

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} \alpha_{lm} P_{lm}(x) \tag{18}$$

şeklinde bir seriye açmak mümkün olabilecektir. (18) in her iki tarafını $P_{lm}(x)$ ile çarpıp $(-1,1)$ aralığında integre ederek, (17) diklik bağıntılarından da faydalanmak sûretiyle, açılım katsayılarının

$$\alpha_{lm} = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{1} P_{lm}(x) f(x)\, dx \tag{19}$$

bağıntılarıyla tâyin olunacağı tesbit edilir.

Eğer $\delta(x-x')$ şeklinde bir DİRAC fonksiyonu muayyen bir $\{g(x)\}$ dik fonksiyon dizisi cinsinden seriye açılabiliyorsa $\{g(x)\}$ dik fonksiyon dizisine **kapalı** veyâ **tamam bir dik fonksiyon dizisi** adı verilir ve $\delta(x-x')$ nün bu fonksiyon dizisi yardımıyla gösterilişi de $\{g(x)\}$ in **kapanma** veyâ **tamamlık bağıntısını** teşkil eder. $\delta(x-x')$ yü $P_{lm}(x)$ polinomları cinsinden $(-1,1)$ aralığında seriye açmak mümkündür :

$$\delta(x-x') = \sum_{l=m}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x) P_{l'm}(x') . \tag{20}$$

Bu itibarla (20) bağıntısı da $\{P_{lm}(x)\}$ dik fonksiyonlar dizisi için tamamlık bağıntısını teşkil etmektedir.

LEGENDRE fonksiyonlarından bahis olunurken zikredilmesi faydalı olan bir husus da bunlara bağlı olarak târif olunan **küresel harmonik fonksiyonlardır.** Küresel harmonik fonksiyonlar küresel koordinatlardaki θ ve φ açısal değişkenlerine göre dik bir fonksiyonlar dizisi meydana getirirler.

Filhakika $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ve $0 < \varphi < 2\pi$ olduğu müddetçe, m sâbit ve $l = m, m+1, m+2, \ldots$ olmak üzere $P_{lm}(\cos\theta)$ fonksiyonları $\cos\theta$ değişkenine göre $(-1,1)$ aralığında, ve $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ olmak üzere de $\exp(jm\varphi)$

fonksiyonları dahî φ değişkenine göre $(0,2\pi)$ aralığında tam birer dik fonksiyon dizisi meydana getirirler. Buna göre $P_{lm}(\cos\theta) \, . \exp(jm\varphi)$ çarpımı da birim küre yüzeyinin temsil ettiği bölgede tam bir dik fonksiyon dizisi meydana getirecektir.

Küresel harmonik fonksiyonlar

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos\theta)\exp(jm\varphi) \tag{21}$$

şeklinde bir bağıntı ile târif olunan ortonormâl fonksiyon dizisidir. Buradaki indislerden l, sıfırdan itibâren pozitif tamsayı değerlerini ve m de $m = -l, -(l-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (l-1), l$ değerlerini almaktadırlar. m indisi negatif olan küresel harmonik fonksiyonların, m indisi pozitif olan küresel harmonik fonksiyonların kompleks eşleniklerine

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y^*_{l,m}(\theta, \varphi) \tag{22}$$

bağıntısıyla bağlı olduklarını da burada zikredelim.

Küresel harmoniklerin ortonormallik şartı

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{23}$$

ile ve tamlık bağıntısı da

$$\delta(\varphi - \varphi') \cdot \delta(\cos\theta - \cos\theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \tag{24}$$

ile ifâde olunur.

Küresel harmonik fonksiyonların diğer mühim bir özellikleri de bunların toplam teoremi vâsıtasıyla ortaya çıkmaktadır. Eğer açısal durumları (θ, φ) ve (θ', φ') değerleriyle belirlenen iki vektörün arasındaki açı γ ise küresel trigonometrinin esas bağıntısına binâen

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

olduğu mâlûmdur. Küresel harmonik fonksiyonların toplam teoremi $P_l(\cos\gamma)$ LEGENDRE polinomunun

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta, \varphi)\, Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \tag{25}$$

şeklinde bilineer bir küresel harmonik fonksiyonlar serisine açılabileceğini tesbit eder. LEGENDRE polinomları bahis konusu olduğunda toplam teoreminin

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta)\, P_l(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos\theta)\, P_{lm}(\cos\theta') \times$$

$$\times \cos m(\varphi - \varphi') \tag{26}$$

şeklinde ifâde olunacağı da ispat edilir.

EK: IV

İNTEGRÂL ÜSTEL FONKSİYONLAR

$x \geqslant 0$ ve $n \geqslant 0$ olmak üzere

$$\boxed{E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xw}}{w^n} dw} \tag{1}$$

bağıtısı vâsıtasıyla târif olunan $E_n(x)$ fonksiyonuna n-inci mertebeden integrâl üstel fonksiyon adı verilir. $xw = u$ vazetmek sûretiyle $E_n(x)$ in

$$\boxed{E_n(x) = x^{n-1} \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^n} du} \tag{2}$$

şeklinde de yazılabileceği kolaylıkla tahkik olunur. Buna binâen $n=0$ ve $n=1$ için

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} \tag{3}$$

$$E_1(x) = E(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xw}}{w} dw = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \tag{4}$$

olacağı âşikârdır.

(2) ifâdesinden kısmî integrasyonla $n \geqslant 2$ için câri olan ve bütün yüksek mertebeden $E_n(x)$ fonksiyonlarını $E_1(x) = E(x)$ transandant fonksiyonuna ircâ eden bir rekürans bağıntısı tesis etmek kâbildir. Filhakika

$$E_n(x) = -x^{n-1}\int_x^{\infty} e^{-u}\, d\left(\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}\right)$$

$$= -x^{n-1}\left\{\left|\frac{e^{-u}}{(n-1)\,u^{n-1}}\right|_x^{\infty} + \frac{1}{n-1}\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^{n-1}}du\right\}$$

yâni

$$\boxed{(n-1)\,E_n(x) = e^{-x} - x\,E_{n-1}(x)} \tag{5}$$

bulunur. Buradan $n \geqslant 2$ için $E_n(x)$ fonksiyonunun orijindeki değerinin

$$\boxed{n \geqq 2 \text{ için}: \quad E_n(0) = \frac{1}{n-1}} \tag{6}$$

olduğu bulunur. $E_0(x)$ ve $E_1(x)$ fonksiyonları ise $x=0$ için $+\infty$ a giderler.

$E_n(x)$ fonksyionlarının genel değişimlerini kalitatif olarak inceleyebilmek için birkaç eşitsizlik tesis edeceğiz. Önce $w>1$ ve $n \geqslant 0$ için

$$\frac{1}{w^{n+1}} < \frac{1}{w^n}$$

olması hasebiyle

$$E_{n+1}(x) < E_n(x) \tag{7}$$

olacağına dikkat edelim. Aynı eşitsizliğe binâen

$$E_1(x) < E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} \tag{8}$$

olduğu görülmektedir. Şimdi (5) rekürans formülünde n yerine $n+1$ vazeder ve böylece elde edilen ifâdeyi de (5) ifâdesinden çıkartırsak

$$(n-1)\,E_n(x) - n\,E_{n+1}(x) = x\,[E_n(x) - E_{n-1}(x)] \tag{9}$$

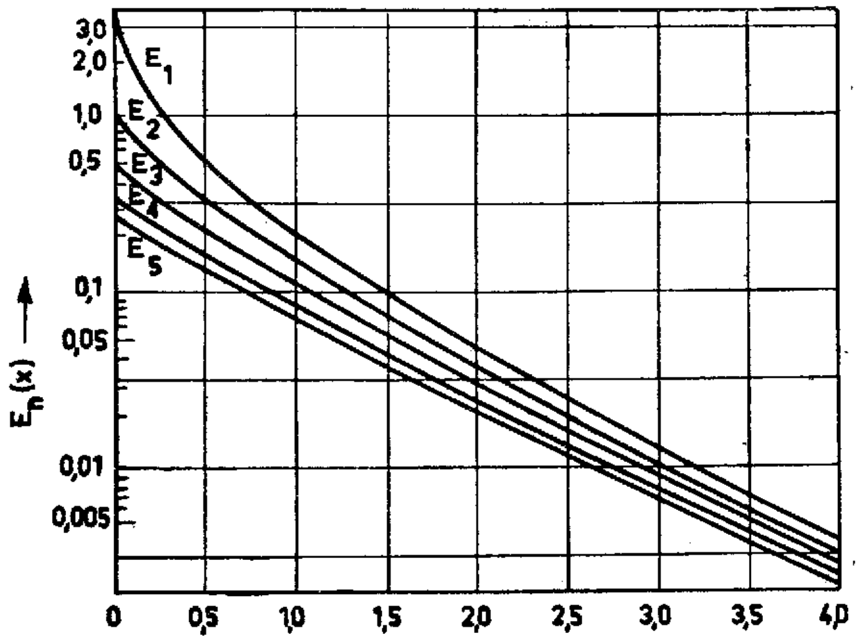
bağıntısı buluruz. Buradan ise $n>1$ için ve (7) eşitsizliğinin yardımıyla

$$(n-1)\,E_n(x) \leqslant n\,E_{n+1}(x) \tag{10}$$

yazmak kâbil olur. Şimdi (5) rekürans bağıntısıyla (7) ve (10) eşitsizliklerini beraberce göz önünde tutmak şartıyla

$$\boxed{n \geqq 1 \quad \text{için:} \quad \frac{e^{-x}}{x+n} < E_n(x) \leqq \frac{e^{-x}}{x+n-1}} \tag{11}$$

eşitsizliğinin cârî olduğu da tesbit olunur. Bu eşitsizlik, $n \geqslant 1$ olmak üzere, herhangi bir mertebeden bir integrâl üstel fonksiyonun değişimi için alt ve üst limitleri tâyin etmektedir. Aşağıdaki şekilde de $n=1$ den $n=5$ e



kadar $E_n(x)$ fonksiyonlarının değişimleri çizilmiş bulunmaktadır. Nasıl çıkarıldığına temas etmeden, fazla büyük olmayan n ve x ler için

$$E_n(x) \approx \frac{1}{3^{\frac{n-2}{2}}}\, e^{-x\sqrt{3}} \tag{12}$$

ifâdesinin de iyi bir takribiyet teşkil ettiğine işâret edelim (Bk. A. UN-

SÖLD : **Physik der Sternatmosphären**, 2. baskı, s. 790, Springer Verlag ; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955).

Şimdi müteâkip kısmî integrasyonlarla

$$\int_x^\infty x^p \, E_n(x) \, dx$$

şeklindeki integralleri hesaplamanın mümkün olacağına da nazar-ı dikkati çekelim. Filhakika

$$\int_x^\infty x^p E_n(x) \, dx = -\frac{x^{p+1}}{p+1} E_n(x) + \int_x^\infty \frac{x^{p+1}}{p+1} E_{n-1}(x) \, dx = \tag{13}$$

$$= -\left\{\frac{x^{p+1}}{p+1} E_n(x) + \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} E_{n-1}(x) + \cdots + \frac{x^{p+n}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} E_1(x)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} \int_x^\infty x^{p+n-1} e^{-x} \, dx$$

bulunur. Bu sonuncu integrâli de gene kısmî integrasyonla hesaplamak kâbildir. Mâmâfih (13) integralini hesaplamak için $E_n(x)$ fonksiyonlarının târif bağıntılarına rücû etmek ve sonra da integrasyon sırasını mübâdele etmek daha elverişlidir. Buna göre (5) bağıntısına dayanarak (13) e eşdeğer olan şu ifâde elde edilir :

$$\int_x^\infty x^p \, E_n(x) \, dx = \int_x^\infty x^p \int_{w=1}^\infty \frac{e^{-xw}}{w^n} \, dw \, dx = \tag{14}$$

$$= \int_{w=1}^\infty \frac{e^{-xw}}{w^{p+n-1}} \left\{ (xw)^p + p(xw)^{p-1} + p(p-1)(xw)^{p-2} + \ldots + p(p-1)\ldots 1 \right\} dw =$$

$$= x^p E_{n+1}(x) + px^{p-1} E_{n+2}(x) + p(p-1) x^{p-2} E_{n+3}(x) + \ldots$$

$$\ldots + p(p-1)(p-2)\ldots 1 \cdot E_{n+p+1}(x)$$

Özel olarak bu ifâdeden

$$\int_x^\infty E_n(x)\,dx = E_{n+1}(x), \quad \text{veyâ} \quad \boxed{n \geqq 1 \ \text{için:} \ \frac{dE_n(x)}{dx} = -E_{n-1}(x)} \tag{15}$$

$$\int_x^\infty x\,E_n(x)\,dx = x\,E_{n+1}(x) + E_{n+2}(x) \tag{16}$$

$$\int_x^\infty x^2\,E_n(x)\,dx = x^2\,E_{n+1}(x) + 2x\,E_{n+2}(x) + 2\,E_{n+3}(x) \tag{17}$$

elde edilir. Gene aynı ifâdeden, alt limitin sıfır olması hâlinde

$$\boxed{\int_0^\infty x^p\,E_n(x)\,dx = \frac{p!}{p+n}} \tag{13}$$

olduğunu görmek kolaydır.

Bu bahsi kapatmadan önce $E_n(x)$ in

$$n > 1 \ \text{için:} \ E_n(x) = \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}E_1(x) + \frac{e^{-x}}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{n-2}(n-m-2)!\,(-x)^m \tag{19}$$

bağıntısını tahkik ettiğini ve

$$\gamma = 0.577216, \quad A_1 = 0, \quad A_n = \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}$$

olmak üzere

$$E_n(x) = \sum_{\substack{m=0\\ m\neq n-1}}^{\infty}\frac{(-x)^m}{m!\,(n-1-m)} + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(\mathrm{Log}\,x - A_n + \gamma) \tag{20}$$

şeklinde de seriye açılabileceğini zikredelim.

$n>0$ ve $x\gg1$ olmak üzere $E_n(x)$ in asimtotik bir açılımı da

$$E_n(x)=\frac{e^{-x}}{x}\left[1-\frac{n}{x}+\frac{n(n+1)}{x^2}-\frac{n(n+1)(n+2)}{x^3}+\cdots\right] \quad (21)$$

şeklindedir.

Bibliyografya :

1) $E_n(x)$ *fonksiyonlarının cetvellenmiş değerleri için Bk.:*

K. M. CASE, F. De HOFFMANN, G. PLACZEK: Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, U. S. Government Printing Office, Washington, 1953.

2) $E_n(x)$ *fonksiyonlarının çekirdek vazifesi gördüğü integrâl dönüşümler için Bk.:*

V. KOURGANOFF, İ. W. BUSBRİDGE: Basic Medhods in Transfer Problems (Radiative Equilibrium and Neutron Diffusion), Clarendon Press, Oxford, 1952.

3) $E_n(x)$ *fonksiyonlarının literatürü için Bk.:*

V. KOURGANOFF, İ. W. BUSBRİDGE: *idem.*

A. UNSÖLD: *idem.*

GENEL BİBLİYOGRAFYA

Bu kısımda «Nötronların Difüzyon Teorisi» nin 2. cildini yazarken faydalandığımız bellibaşlı kitapların listesini vermekteyiz. Muayyen bir bahsi yazarken müracaat ettiğimiz kitap ve makaleleri veya o bahsin daha derin bir şekilde incelenmesine yardım edecek eserleri ilgili bahsin metninin içinde veyâ sonunda zikretmiş olduğumuzdan buraya sâdece çok genel mâhiyetteki kitaplar alınmış bulunmaktadır.

V. KOURGANOFF, İ. BUSBRİDGE : Basic Methods in Transfer Problems (Radiative Equilibrium and Neutron Diffusion), Clarendon Press, Oxford, 1952.

K. M. CASE, F. DE HOFFMAN, G. PLACZEK : Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, U. S. Government Printing Office, Washington D. C. 1953.

M. SİLVESTRİ, L. ORSONİ : Fisica dei Reattori Nucleari, 2. baskı, Politecnico di Milano, 1955.

S. GLASSTONE, M. EDLUND : The Elements of Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Co. İnc. ; Toronto, New York, London, 6 baskı 1957

B. DAVİSON : Neutron Transport Theory, 2. baskı, Clarendon Press, Oxford, 1958.

F. CAP : Physik und Technik der Atomreaktoren, Springer Verlag, Wien, 1958.

H. ETHERİNGTON : Nuclear Engineering Handbook, Mc Graw Hill; New York, Toronto, London, 1958.

W. RİEZLER, W. WALTER : Kerntechnik, B. G. Teubner Verlagsgeselschaft, Stuttgart, 1958.

A. WEİNBERG, E. P. WİGNER : The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, Chicago University Press, Chicago, 1958

H. GRÜMM, K. H. HÖCKER : Lineare Reaktorkinetik und - Störungstheorie, **Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften,** 30. cild, Springer Verlag; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.

E. AMALDI : The Production and Slowing Down of Neutrons, **Handbuch der Physik,** XXXVIII/2, Springer Verlag; Berlin Göttingen, Heidelberg, 1959.

G. I. MARCHUK : Numerical Methods for Nuclear Reactor Calculations, Consultatnt Bureau Inc., New York, 1959.

R. L. MURRAY : Nuclear Reactor Physics, Prentice Hall, 1959.

A. D. GALANIN : Thermal Reactor Theory, Pergamon Press; Oxford, London, New York, Paris, 1960.

R. V. MAGHREBLIAN, D. K. HOLMES : **Reactor Analysis**, Mc Graw Hill ; New York, Toronto, London, 1960.

H. SOODAK Ed.: **Reactor Handbook,** 2. baskı, 3. cild, **Part A :Physics,** Interscience Publishers, New York, London, 1962.

2. CİLDİN YANLIŞ – DOĞRU CETVELİ

NOT : Cetvelde * işâretli satırlar sayfanın altından itibâren sayılacak olan satırlardır.

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
10	11	sıfırıncı takribiyetini	birinci mertebeden tak ribiyetini
10	12	P_0 takribiyetidir.	P_1 takribiyetidir.
121	3*	**«karşılıklık teoremi»**	**«karşıtlık teoremi»**
193	15*	olduğunu bulunuz.	olduğunu buluruz.
196	6*	$\delta\omega = \frac{[\phi, \mathbf{P}\,\phi]}{[\phi, \phi]}$	$\delta\omega = \frac{[\phi, (\delta\,\mathbf{P})\,\phi]}{[\phi, \phi]}$
210	(IX. 5. 5) in orta satırı	$C(\vec{r}, E', t')$	$c(\vec{r}, E', t')$
265	15	$(E_i, E_{i-1}$	(E_i, E_{i-1})

«NÖTRONLARIN DİFÜZYON TEORİSİ» nin 1. Cildine Ek

Yanlış - Doğru Cetveli

S = sayfa, s = satır. Yıldızla işâretlenmiş olan satırlar aşağıdan itibâren sayılacaklardır.

S. 18, s. 2* : $\sum_{r} \Sigma_{r,i}$ *yerine* $\sum_{i} \Sigma_{r,i}$

S. 19, s. 1* : $10^5\, eV$ *yerine* $10^4\, eV$

S. 22, s. 3* : Li^{37} *yerine* Li_3^7

S. 24, Şekilin altı : (eV) *yerine* (MeV)

S. 33, s. 6* : kT *yerine* $\frac{kT}{2}$

S. 47, s. 10 : (IV.2.4) *yerine* (IV.2.5)

S. 73, s. 3* : $\frac{\partial N(r,t)}{\partial t}$ *yerine* $\frac{\partial N(\vec{r},t)}{\partial t}\, dV$

S. 80. Şekilde : $\frac{\phi(x_0)}{d}$ *yerine* $-\frac{\phi(x_0)}{d}$

S. 85, s. 7 : $\frac{1}{2} - \frac{\Sigma_s}{\Sigma^2_{top}}\frac{1}{3d} = \frac{\Sigma_s}{\Sigma^2_{top}}\frac{1}{2v\phi(x_0,t)}\frac{\partial\phi(x_0,t)}{\partial t}$

yerine $\frac{1}{2} - \frac{1}{3d\,\Sigma_{top}} = \frac{1}{2v\,\Sigma_{top}\phi(x_0,t)}\frac{\partial\phi(x_0,t)}{\partial t}$

S. 105, (VIII.6.21) formülündeki denklemin sağ yanına $\exp(-\gamma_{mn} z)$ çarpanı gelecektir.

S. 140, s. 4 : Bu formülden muayyen... *yerine*
Bu formülden hareketle muayyen...

S. 152, s. 1 : V_1 *yerine* v_1

S. 152, s. 2* : toplanmış olarak V_m... *yerine*
toplanmış olan $(A+1)$ toplam kütlesi V_m...

S. 154, s. 2* : vâsıtasıyla sistemin toplam... *yerine*
vâsıtasıyla K - sisteminde toplam...

S. 155, s. 2 : Buradan da derhâl... *yerine*
Buradan da, katsayıların eşitliği prensibiyle, derhâl...

S. 158, s. 8 : $\dfrac{d\theta}{dE_2}$ *yerine* $\left|\dfrac{d\theta}{dE_2}\right|$

S. 158, (XI. 2. 2) formülünde : $=-\dfrac{dE_2}{(1-\alpha)E_1}$ *yerine* $=\dfrac{dE_2}{(1-\alpha)E_1}$

S. 165, s. 2* ve (XI. 2. 2) formülünde : $g(E_0 \rightarrow E)$ *yerine* $g(E_0 \rightarrow E')$

S. 165, s. 9* : $\Gamma > E_1' > E_2' > \cdots > E_n' > E_0$ *yerine* $E_0 > E_1' > E_2' > \cdots > E_n' > \alpha E_0$

S. 169, (XII. 3. 2) ve (XII. 3. 3) formüllerinde : $\varphi(E')$ *yerine* $\psi(E')$

S. 169, Şekil : XII. 2 de enerjinin üst sınırı için : E *yerine* E_0

S. 170, s. 1 : $\alpha E_0 = 0$ *yerine* $\alpha E_0 = E$

S. 171, s. 9 : E enerjisinin *yerine* E_0 enerjisinden

S. 172, (XII. 4. 5) formülünde : $q(E) = \int \dfrac{Eq_0}{E'^2} + \dfrac{Eq_0}{E_0} = q_0$ *yerine*

$$q(E) = \int_{E}^{E_0} \frac{q_0}{E_0} dE' + \frac{q_0 E}{E_0} = q_0$$

S. 173, s. 4 : **Rezonanstan Kaçma İhtimâli** *yerine*
Rezonansa Tutulmama İhtimâli

S. 174, s. 1 : $=1-\dfrac{\Sigma_s}{\Sigma_{top}}$ *yerine* $=1-\dfrac{\Sigma_a}{\Sigma_{top}}$

S. 175, s. 3 : «rezonanstan kaçma ihtimâli» *yerine*
«rezonansa tutulmama ihtimâli»

S. 181, s. 14 : sürekli olduğu *yerine* süreksiz olduğu

S. 181, s. 12* : $F'(\alpha^3 E)$ *yerine* $F'(\alpha^3 E_0)$

S. 184, s. 13* : $F(u) = \Sigma_{top}(u)\varphi(u)$ *yerine* $F(u) = \Sigma_{top}(u)\psi(u)$

S. 184, s. 11* : $q(u)=\bar{\xi}\Sigma_{top}(u)\varphi(u)$ *yerine* $q(u)=\bar{\xi}\Sigma_{top}(u)\psi(u)$

S. 200, (XIII. 2. 3) formülünde : $= \frac{\partial q(\vec{r}, u)}{\partial u}$ *yerine* $\frac{\partial q(\vec{r}, u)}{\partial u} du$

S. 201, (XIII. 3. 1) formülünde : $\exp\left[-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\bar{\xi}\Sigma_{top}(u')}\right]$ *yerine*

$$\exp\left[-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\bar{\xi}\Sigma_{top}(u')} du'\right]$$

S. 202, s. 4 : girer. Bu denkleme... *yerine*
girer. Burada $K(\vec{r}, \tau)=\frac{\bar{\xi}\Sigma_{top}(u)}{D(u)} K(\vec{r}, u)$
vazedilmiş bulunan bu denkleme...

S. 202, s. 2* : $K(\vec{r}, u)=0$ *yerine* $K(\vec{r}, \tau)=0$

S. 227, (XIV. 4. 4) de : $\nabla^2 \phi(\vec{r}, u)+B_g^2\phi(\vec{r}, u)$ *yerine*
$\nabla^2 \phi(\vec{r}, u)+B_g^2\phi(\vec{r}, u)=0$

S. 233, (XV. 2. 3e) de : $q_i(r)=\ldots=\bar{\xi}\Sigma_{s,i}\phi_i(\vec{r})$ *yerine*
$q_i(\vec{r})=\ldots=\bar{\xi}\bar{\Sigma}_{s,t}\bar{\phi}_i(\vec{r})$

S. 242, (XII. 1. 8) de : $-D_iB_k^2(\Sigma_{a,i}+\Sigma_{yav,i})$ *yerine*
$-D_iB_k^2-(\Sigma_{a,i}+\Sigma_{yav,i})$

S. 243, s. 11 : vazederek B^2 leri veren denklemin... *yerine*
vazederek ve bir de $\Sigma_{a,i}/\Sigma_{yav,i} \ll 1$ kabul ederek B^2 leri veren denklemin...

S. 243, (XVI. 1. 11) formülü *yerine*

$$\frac{k_\infty}{p\prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{\Sigma_{a,i}}{\Sigma_{yav,i}}\right)\prod_{i=1}^{n}(1+L_i^2B^2)}=1$$

S. 243, (XII. 9. 5) formülü *yerine*

$$p = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\Sigma_{a,i}}{\Sigma_{yav,i}}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 + \frac{\Sigma_{a,i}}{\Sigma_{yav,i}}\right)}$$

S. 244, (XVI. 1. 14) de : $\phi_i(r) =$ *yerine* $\phi_i(\vec{r}) =$

S. 248 - 249, Şekil : XV. 1-2 : $\prod_1^n \chi_i$ *yerine* k_∞

S. 250, s. 4* : $\phi_1^\circ(\vec{r})$ *yerine* $\phi_2^\circ(\vec{r})$

S. 262, s. 1* : $\phi_1(\vec{r}) =$ *yerine* $\phi_2(\vec{r}) =$

S. 269, (XVII. 2. 8) de : $(1+\bar{\tau}B)$ *yerine* $(1+\bar{\tau}B^2)$

S. 283, (3) formülünde : Σ_a *yerine* Σ_f

S. 317, 1. sütûn ve s. 11 : Bk. Böç Teorisi *yerine*
Bk. Göç Teorisi

GELECEKTİR.