İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ NÜKLEER ENERJİ ENSTİTÜSÜ

GENEL YAYINLAR No: 4

KUVANTUM MEKANİĞİ MATEMATİĞİNE GİRİŞ

Yazan :

Prof. Dr.

JOHN DAVID JACKSON

İllinois Üniversitesi

Çeviren :

Doç. Dr.

AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

İstanbul Üniversitesi

Matbaa Teknisyenleri Basımevi

Divanyolu, Biçkiyurdu sokak 12

İSTANBUL — 1965

TAKDİM

Bu notlar Prof. John David Jackson'ın İllinois Üniversitesinde vermiş olduğu yüksek seviyedeki Kuvantum Mekaniği dersinin ilk senesi için tamamlayıcı bir mâhiyet arzetmekte olup Kuvantum Mekaniğindeki matematik metotların vahdetini kısaca tebârüz ettirmek gâyesini gütmektedirler.

Lineer operatörler, özdeğerler, özfonksiyonlar, dik fonksiyonlara açılımlar, lineer vektör uzayları ilh... hakkında kolay anlaşılabilir bilgi veren bu kitaptan, sâdece Kuvantum Teorisi okuyanlar değil fakat genellikle bütün teorik fizik ve mühendislik, ve hattâ matematik talebeleri de istifâde sağlayabileceklerdir.

Bu kitabın Nükleer Mühendislik talebelerine sağlayacağı faydalara gelince :

Reaktörler Teorisinin temel problemi olan «*çoğaltkan ortamların kritik boyutlarının tâyini*», esas itibariyle, lineer bir diferansiyel operatörün en küçük özdeğerinin tâyini problemine denktir. Diğer taraftan, bilhassa kritik olmayan ortamlardaki ϕ nötron akısının tesbiti çok kere ϕ nin uygun bir dik fonksiyon serisine açılımıyla mümkün olmakta ve bundan başka çoğaltkan ortamların pertürbasyon teorisi de ek matrisler ve bunlar vâsıtasıyla tâyin olunan «*önem fonksiyonları*»(*) ile sıkı sıkıya ilgili bulunmaktadır. Bu itibarla nükleer mühendis namzetleri bu notlardan, ihtiyaçları olan matematik bakımından kendilerini bir hayli techiz edecek bilgileri elde edebileceklerdir. İşte bu gâyeye hizmet içindir ki bu kitap da, taşıdığı isme rağmen, İstanbul Teknik Üniversitesi Nükleer Enerji Enstitüsü Yayınları arasında neşredilmiş bulunmaktadır.

Çeviren

(*) Bk. Ahmed Yüksel Özemre: *Nötronların Difüzyon Teorisi*, Cild: 1 ve 2; İst Tek. Üniv. Nükleer Enerji Enstitüsü Yay, Genel Yayınlar No: 1 ve 3, (1963).

İÇİNDEKİLER

1
GİRİŞ

Bu notların amacı kuvantum mekaniği matematiğinin esaslarını, fizikî tatbikatta hatâları bertaraf edecek kadar kâfi bir matematik kesinlikle öne sermektir.

Kuvantum teorisinin muhtelif kısımlarında, ilk bakışta oldukça farklı ve birbirleriyle bağıntısı yokmuş gibi görünen matematik metotlar kullanmak faydalıdır. Böylece potansiyel duvarları veyâ hidrojen atomuyla uğraşırken âdi koordinat uzayındaki âdi veyâ kısmî türevli diferansiyel denklemler tekniği kullanılmakta, hâlbuki meselâ harmonik osilâtör gibi bir problem için mücerret lineer operatör metodu zarif bir çözüme imkân vermektedir. Bu kitabın başlıca gâyeleri bütün metotların temelindeki birliği göstermek ve bunların herbirine, kuvantum mekaniğinin fizikî bir bahis olarak bundan sonraki incelenmesinde, herbir probleme, taraftarlığını yapmaksızın ve yeni matematik izahlara ihtiyaç kalmaksızın en iyi metodu tatbik edebilecek şekilde, kâfi derecede ünsiyet peydâ ettirmektir.

Kuvantum teorisi, başında, biri Schrödinger'in (diferansiyel denklemlere dayanan) dalga mekaniği, diğeri de Heisenberg'in matris mekaniği olmak üzere farklı iki matematik teknikle inkişâf etmiştir. Bu her iki tarzın eşdeğerliliği çok geçmeden ispatlanmış ve matematik metotlar, Heisenberg ile Schrödinger'in kullandıkları tekniklerin mücerret bir vektör uzayındaki lineer operatörler formalizminin özel temsilleri olduğunu gösteren Dirac tarafından genelleştirilmiştir.

Süreksizlik kavramı kuvantum teorisinde merkezî bir rol oynar. Fizikî olarak ölçülebilen (ve «*gözlenebilir*» denilen) büyüklüklerin çok kere sâdece, (meselâ ışık kaynaklarının hazırlanışı, inhiraf ettirici mıknatısların teferruatlı projesi, v.s. gibi) dış şartlara bağlı olmayan muayyen bazı değerler aldıkları tesbit olunmuştur. Bu süreksiz gözlenebilirlere önemli misâller (Ritz kombinasyon prensibi ve Rydberg formülünde, Franck-Hertz deneyinde olduğu gibi) enerji ve (Stern-Gerlach deneyinde olduğu gibi de) açısal momenttir. Matematik lisanında bir gözlenebilir büyüklüğün süreksiz, müsait değerlerine *özdeğerler* (bazan karakteristik veyâ has değerler) adı verilir. Fizikçi çok kere verilmiş fizikî bir sistem için özdeğerleri keşfetmek ve bunların biribirleri arasındaki bağıntıları bulmakla ilgilenir. Fizikî sistemin uygun bir matematik tasvirine sâhip olması hâlinde *«özdeğer problemi»* ni çözmeği arzular. Buna binâen matematik özdeğer problemi kuvantum mekaniğinin önemli bir vechesidir. Bu problem diferansiyel denklemler, matrisler veyâ lineer vektör uzayları cinsinden ifâde olunabilir. Biz bu kitapta muhtelif teknikleri göz önüne alıp bunların temel birliğini araştıracağız. Şüphesiz ki kuvantum mekaniğinin tümü süreksiz özdeğerlerle uğraşmaz. Buna binâen matematik münakaşanın bir kısmı doğrudan doğruya özdeğer problemini ilgilendirmeyecektir. Bundan başka pertürbasyon teorisi ile varyasyon metotları gibi bazı bahisler de bu notlarda göz önüne alınmayacaklardır.

Referanslar

Bu notlarda sâdece çıplak esaslar takdim olunacağından öğrenci daha tam incelemelere baş vurmak arzusunu izhar edecektir. Bazı faydalı referansları aşağıya sıralıyoruz:

R. Courant, D. Hilbert, «Methods of Mathematical Physics», cild I, İnterscience. New York, 1953. 2. Bölüm dik açılımlar; 5. Bölüm özdeğer problemi; 7. Bölüm özel fonksiyonlar hakkındadır.

B. Friedman, «Principles and Techniques of Applied Mathematics» Wiley, New York, 1956. Formel olmasına rağmen çok faydalı bir inceleme.

G. Goertzel, N. Tiralli, «Some Mathematical Methods of Physics», Mc Graw Hill, New York, 1960.

P. R. Halmos, «Finite Dimensional Vector Spaces», Princeton University Press, Princeton, N. J. 1942; «İntroduction to Hilbert space», Chelsea, New York, 1951. Bu kitaplar vektör uzaylarının kesin bir matematik münakaşasını vermektedirler.

F. B. Hildebrand, «Methods of Applied Mathematics», Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1952. İlk 100 sayfası matrisler ve vektör uzaylarından bahseder.

H. Margenau, G. M. Murphy, «Mathematics of Physics and Chemistry», 2. baskı, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1956. 2., 3., 7., 8., 10. ve 11. Bölümler mevzumuzla ilgilidir.

P. M. Morse, H. Feshbach, «Methods of Theoretical Physics», 2 cild, Mc Graw Hill, New York, 1953. Her bir bölümün sonunda değerli eklerle dört başı mâmur bir eser.

V. Rojansky, «İntroductory Quantum Mechanics», Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1946. IX. Bölümde matrislerin faydalı bir gözden geçirilmesi; X. ve XI. Bölümler de kısmen mevzu ile ilgili.

H. Sagan, «Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics», Wiley, New York, 1961.

A. Sommerfeld, «Partial Differential Equations», Academic Press, New York, 1949, Daha ziyâde ortonormâl açılımlar, özel fonksiyonlar, özdeğerler ve özfonksiyonlarla ilgili.

Özel fonksiyonlar hakkında fevkalâde faydalı şu referans kitabına nazar-ı dikkati çekmek lâzımdır:

W. Magnus, F. Oberhettinger, «Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics», Chelsea, New York, 1949. Bu kitabı sık sık referans vereceğiz ve bundan böyle kısaca «MO» diye göstereceğiz.

Özel fonksiyonlar ve muhtelif integral dönüşümler hakkında çok daha geniş bilgi için şu kitaplara müracaat edilmelidir:

Bateman Manuscript Project, «Higher Transcendental Functions», 3 cild, A. Erdelyi (Ed.), Mc Graw Hill, New York, 1953.

Bateman Manuscript Project, «Tables of İntegral Transforms», 2 cild, A. Erdelyi (Ed.), Mc Graw Hill, New York, 1954.

Bununla beraber MO nun da oldukça kullanışlı Fourier ve Laplace dönüşümü cetvelleri olduğu da zikredilmelidir.

İntegral cetvelleri ve elemanter fonksiyonların nümerik değerleri için de şu liste verilebilir:

H. B. Dwight, «Tables of İntegrals and Other Mathematical Data», Macmillan, New York.

B. O. Pierce and R. M. Foster, «A Short Table of İntegrals», 4. baskı, Ginn, Boston.

Handbook of Chemistry and Physics, «Mathematical Tables», Mc Graw Hill, New York.

E. Jahnke, F. Emde, «Tables of Functions», Dover, New York, 1945.

Son olarak öğrencinin, âdi diferansiyel denklemlerle, kısmî türevli diferansiyel denklemler için değişkenlere ayrışım metoduyla, Fourier serilerinin elemanlarıyla, matrislerin basit özellikleriyle, üç boyutlu vektör kavramıyla, rotasyonlarla bir mikdar ünsiyeti olduğunun kabul edilmiş olduğunu da söyleyelim. Bundan başka klâsik mekanik bilgisinin de Symon'un (K. R. Symon, Mechanics», 2. baskı, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960) veyâ Slater ve Frank'ın (J. C. Slater, N. H. Frank, «Mechanics» Mc Graw Hill, New York, 1947) kitapları seviyesinde olduğu da farzedilmiş bulunmaktadır.

2

KLASİK FİZİKTEKİ ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

Özdeğer problemleri bütün kuvantum mekaniğine hükmetmektedirler; fakat bunlar klâsik fizikte de iyice bilinmekte ve anlaşılmaktaydılar. Bu gibi problemler sonlu sayıda serbestlik derecesini haiz mekanik sistemlerde (münferit sistemlerde), veyâhut da sonsuz sayıda serbestlik derecesini haiz mekanik veyâ elektromagnetik sistemlerde (sürekli sistemlerde) ortaya çıkarlar. Biz burada, kullanılan matematik metotları hatırlatmak ve özdeğerlerin nasıl ortaya çıktıklarını görmek üzere kısaca birkaç misâli inceleyeceğiz.

2-1 TİTREŞEN TEL

Sâbit bir ρ kütle yoğunluğunu ve T gerilimini haiz, $x=0$ ve $x=a$ noktalarında tesbit edilmiş bir tel, x eksenine dik olarak ölçülen $u(x, t)$ ye eşit bir yer değiştirme ile xy düzleminde hareket edebilmektedir. Telin küçük titreşimleri için hareket denklemi

$$\mathrm{T}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

şeklinde lineer, ikinci mertebeden kısmî türevli bir diferansiyel denklemdir. Hız boyutlarını haiz $v=(\mathrm{T}/\rho)^{1/2}$ diye bir büyüklük târif edersek bu denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Değişkenlere ayrışım metodundan faydalanarak

$$u(x, t) = y(x)\ z(t) \qquad (3)$$

şeklinde bir çözüm kabul edelim; bu takdirde $y(x)$ ile $z(t)$ nin şu biribirlerinden ayrı âdî diferansiyel denklemleri tahkik ettiklerini buluruz

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (kv)^2z = 0. \tag{4}$$

Buradaki k^2 ise henüz tâyin edilmemiş olan bir sâbittir. $y(x)$ ile $z(vt)$ nin, çözümü sinüsler ve kosinüsler olan aynı denklemi tahkik ettiklerini görmekteyiz.

Buraya kadar bir özdeğer problemi bahis konusu edilmedi. Bu mesele ancak sınır şartlarının tatbik edilmesiyle ortaya çıkmaktadır. Bu sınır şartları şöyle ifâde olunurlar:

1. Uzay sınır şartları: bütün t ler için

$$u(0, t) = u(a, t)$$

2. Zaman sınır şartı: $0 \leqq x \leqq a$ için

$$u(x, 0) = F(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = G(x)$$

Önce uzay sınır şartını göz önüne alalım. $y(x)$ için çözüm

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx \tag{5}$$

şeklindedir. Birinci sınır şartını tahkik etmek için $y(0) = y(a) = 0$ olması elzemdir. Buna binâen $B = 0$ olur, ve $A \neq 0$ ise buna göre de $ka = n\pi$ olacaktır. Dolayısıyla bilinmeyen k parametresinin

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

şeklinde sayılabilir bir sonsuz özdeğer dizisini haiz olduğu bulunmuş olur.

Buna binâen, sınır şartlarına uygun en genel çözüm

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \left[A_n \cos \frac{n\pi vt}{a} + B_n \sin \frac{n\pi vt}{a} \right] \tag{7}$$

dır. Burada, başlangıçtaki diferansiyel denklemin lineerliğine uygun olarak lineer süperpozisyonun cârî olduğunun kabul edilmiş olmasına dikkat ediniz. A_n ve B_n katsayıları $t=0$ daki zaman sınır şartları vâsıtasıyla tâyin edilirler. Bu, ileride (Böl. 3-1) de incelenecek olan Fourier serilerinin tersinimine ait bir problem olduğundan burada bununla uğraşmayacağız.

Burada temel olan şey k parametresinin, *uzay sınır şartlarının bir neticesi olarak ortaya çık n münferit (diskret) tabiatıdır.* Bu münferitliğin doğrudan doğruya bir neticesi telin titreşim frekanslarının süreksizliğidir. Temel frekans eğer $\omega=\pi\, v/a$ şeklinde târif olunursa titreşimin müsâit frekansları da

$$\omega_n = n\omega \qquad (n=1, 2, 3,\ldots) \tag{8}$$

şeklindedirler. Bu frekanslara tekabül eden mekanik $[y=\sin(\omega_n x/v)]$ hareketlerine salınımın *normal modları* veyâ *öz modları* adı verilir. Telin, küçük genliği haiz keyfî bir hareketi (7) ye binâen lineer süperpozisyonla teşkil edilebilir.

Problem: a ve b kenar uzunluklarını haiz dikdörtgen şeklinde, bükülüp eğilebilen, düz bir zarın küçük salınımları için salınım özdeğerlerinin nasıl ortaya çıktıklarını gösteriniz. Yer değiştirme için en genel çözümü bulunuz ve, m ile n pozitif tamsayılar olmak üzere özfrekansların

$$\omega_{mn} = \pi v\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2}$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

2-2 TİTREŞEN DAİRESEL İNCE ZAR

Dairesel bir zarın özfrekansları problemi, fazladan bir bağımsız değişken ihtivâ etmesinden maadâ bir de, sınır şartlarına ek olarak başka bir fizikî şartın göz önünde tutulmasını zorunlu kılar. Bu fizikî şart yer değiştirmenin *tekdeğerliliği*dir. Bu şartın problemin özdeğerlerini, sınır şartları kadar tâyin ettiğini göreceğiz.

$u(x, y, t)$ ile yer değiştirmeyi ve v ile de zarın bir hız karakteristiğini göstererek elâstik bir zarın küçük titreşimleri

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{9}$$

kısmî türevli diferansiyel denklemi ile tasvir olunurlar. Hiçbir yer değiştirmenin vukû bulmadığı şeklinde ifâde olunan sınır şartı bir daire boyunca tatbik edileceğinden, (x, y) yerine (ρ, φ) kutupsal koordinatlarını kullanmanın uygun olduğu âşikârdır. Laplace operatörünün kutupsal koordinatlardaki ifâdesini göz önünde tutarak dönüşmüş denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

şekline girer. Burada artık u ile $u(\rho, \varphi, t)$ gösterilmektedir.

$u = R(\rho)\, \Phi(\varphi)\, z(t)$ yazmak sûretiyle tekrar değişkenleri ayırırsak R, Φ, z fonksiyonlarından herbirinin

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} + (kv)^2 z &= 0 \\ \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2\Phi &= 0 \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

âdî diferansiyel denklemlerini tahkik ettiklerini buluruz. Bu denklemlerdeki k^2 ile ν^2 henüz tâyin edilmemiş olan ayrışım katsayılarıdır. Eğer $k^2 > 0$ ise zamana bağlılık, arzu edildiği vechile, salınımlı olacaktır.

Bir özdeğer problemi ortaya koyabilmek için $u(\rho, \varphi, t)$ çözümünü sınır şartlarına ve/veyâ başka şartlara tâbî tutmak zorundayız. Uzaya ait sınır şartı, φ ve t den müstakil olarak $u = 0$ için $\rho = a$ olması şeklinde ifâde olunur. Buna göre

$$R(a) = 0 \tag{12}$$

olacaktır. Fakat diğer φ uzay değişkeni $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ aralığında sınırlı olup dairesel bir zar için sınır şartları bakımından herhangi bir role sâhip değildir. Buna mukabil, $u(\rho, \varphi, t)$ nin $\rho = a$ nın içinde tek değerli olması hakkındaki fizikî zorunluk, p ile bir tamsayı gösterilmek üzere,

$$u(\rho, \varphi, t) = u(\rho, \varphi + 2\pi p, t) \tag{13}$$

şartını ortaya koyar. (11) deki $\Phi(\varphi)$ için çözümün

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm i\nu\varphi} \tag{14}$$

şeklinde olduğu görülür. Buna binâen (13) tekdeğerlilik şartı, $m=0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$ olmak üzere

$$\nu = m \tag{15}$$

olduğunu gösterir. Böylece problemin fizikî şartlarından ötürü ν^2 ayrışım sâbitinin, tamsayıların kareleri olan münferit değerler almak zorunda kaldığını görmekteyiz.

Radyâl denklemin de göz önüne alınması özdeğer probleminin vaz'ını tamamlayacaktır. Eğer $x = k\rho$ diye boyutsuz bir değişken alacak olursak (11) deki radyâl denklem

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0 \tag{16}$$

şekline girer. Burada (15) şartı da tatbik edilmiştir. (16) denklemi, Ek: A da etraflıca tetkik edilmiş olan Bessel denklemidir. Fakat bunun açık çözümünü yazmadan önce bazı kalitatif müşahedelerde bulunacağız. Zarın sınırının teferruatlı şekli ne olursa olsun, problemin fizikî vechesi yer değiştirmenin verilmiş herhangi bir yönde nâmütenâhî artmamasını zozunlu kılmaktadır. Esasında, titreşim yaptığı müddetçe zarın kıvrılmış yüzeyinde mevziî maksimum ve minimumlar da olacaktır. Matematik deyimiyle bu, meselâ radyâl bir çizgi boyunca, yer değiştirme eğrisinin eğriliğinin yer değiştirmenin sıfır olduğu çizgiye nazaran daima konveks olamayacağına delâlet eder. Özellikle, eğer yer değiştirme zarın herhangi bir noktasında sıfırdan hareket ediyor ve bu nokta civarında da pozitif bir eğriliğe sahip bulunuyorsa $[(1/u)(d^2u/ds^2) > 0]$, bu takdirde eğrilik, sınırda sıfıra erişmek üzere bu nokta ile sınır arasında en az bir kere işâret değiştirmek zorundadır. Şekil: 2-1 bu elzem davranışı kalitatif bir tarzda göstermektedir. Uzay koordinatı bakımından salınımlı davranış matematik bakımından (9) dalga denkleminin hiperbolik bir diferansiyel denklem olması keyfiyetiyle ortaya çıkmaktadır.

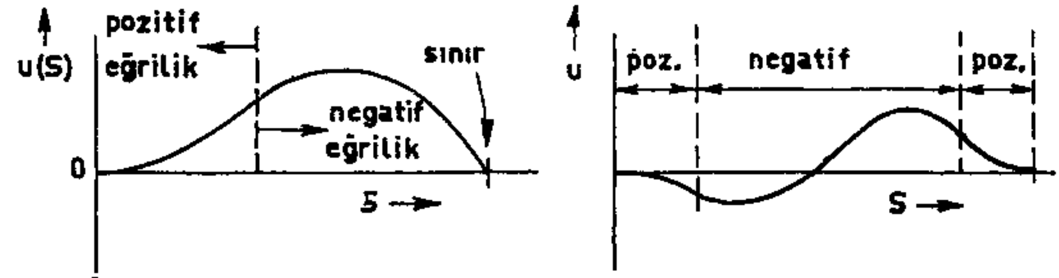
Titreşen tel için sinüs ve kosinüslerin salınım karakterleri kabul edilmiş bulunuyordu. Fakat (16) denkleminin özellikleri bu kadar âşikâr olmayabilirler. Bağlı değişkende,

$$y(x) = \sqrt{x}\, R(x)$$

vazederek küçük bir değişiklik yapmak faydalıdır. Buna binâen y

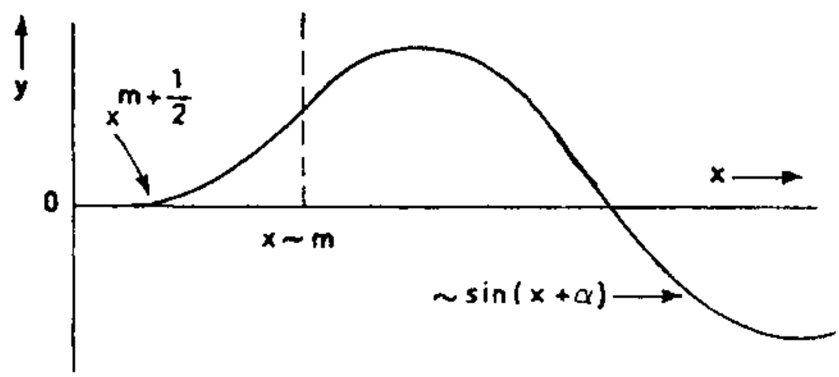
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)y=0 \tag{17}$$

diferansiyel denklemini tahkik eder. Fizikî sebeplerden ötürü bunun $x=0$ da sıfır olan çözümlerini aramaktayız. $y(x)$ in kalitatif özellikleri (17) den kolaylıkla görülür. Küçük x değerleri için $(1/x^2)$ terimi hâkim durumda



Şekil: 2-1

olup $m\neq 0$ olması halinde de pozitif bir eğrilik verir. (Filhakika $x\ll 1$ için $y\sim x^{m+1/2}$ dir). Fakat x in büyük değerleri için $(x\gg m)$, denklem $y\sim\sin(x+\alpha)$ çözümünü haiz basit bir harmonik osilâtör denklemi gibidir. Buna binâen Şekil: 2-2 de de gösterildiği gibi $y(x)$ çözümü, orijin civarında pozitif ve muayyen bir $x\sim m$ noktasının ötesinde de negatif eğriliği haiz olacak şekilde gözükmek zorundadır. (12) sınır şartı âşikâr olarak $x=k\rho$ daki k yı, $y=0$ olduğu yerde ka nın, x in değerlerinden birine eşit olacak şekilde seçerek tahkik edilebilecektir.



Şekil: 2-2

(16) nın Bessel fonksiyonları cinsinden çözümü

$$R(\rho)=A\,J_m(k\rho)+B\,N_m(k\rho) \tag{18}$$

dur. Burada J_m ile N_m, m-inci mertebeden Bessel ve Neumann fonksiyonlarıdır (bk. Ek: A). N_m fonksiyonu $\rho=0$ da sonsuz olduğundan B katsayısının sıfır olması mecbûridir. (12) sınır şartı da

$$J_m(ka)=0$$

olmasını zorunlu kılar. x_{mn} ile Ek: A daki Cetvel: A-1 de cetvellenmiş bulunan $J_m(x)=0$ denkleminin köklerini göstermek sûretiyle, k ayrışım sâbiti şu hâlde,

$$k_{mn}=x_{mn}/a \qquad (19)$$

ile verilmiş olan sâdece münferit değerler alabilmektedir. Azimütâl değişimle tâyin edilen her m değeri için $n=1, 2, 3, \ldots$ ye tekâbül eden sayılabilir sonsuzlukta bir k değer dizisi vardır. Buna binâen k nın münferit özdeğerlerinin hepsi birden iki katlı sonsuz sayılabilir bir dizi meydana getirmektedirler.

Salınımın özfrekansları, (11) e binâen

$$\omega_{mn}=x_{mn}(v/a) \qquad (20)$$

ile verilmişlerdir. Bu frekanslara tekabül eden salınımın normâl modları

$$R_{mn}(\rho)\Phi_m(\varphi)\sim J_m(x_{mn}\,\rho/a)\ \cos(m\varphi+\alpha_m) \qquad (21)$$

dir. Sınır şartları tahkik eden tek değerli bir yer değiştirme için en genel çözüm

$$u(\rho,\varphi,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(x_{mn}\rho\ a)\cos(m\varphi+\alpha_m)\times$$
$$\times\left[A_{mn}\cos(\omega_{mn}t)+B_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\right] \qquad (22)$$

şeklindedir. A_{mn}, B_{mn} katsayılarıyla α_m faz açısı Bölüm 3-4 de gösterileceği üzere, $u(\rho,\varphi,0)=F(\rho,\varphi)$ ve $(\partial u/\partial t)_{t=0}=G(\rho,\varphi)$ başlangıç şartlarıyla tâyin edileceklerdir.

Okuyucunun, özdeğerlerin tâyininde sınır şartlarıyla tek değerlilik arasındaki farka haddinden fazla önem verebileceği endişesiyle, fizikî problemdeki basit bir değişikliğin bunların birini diğerine tahvil edebileceğine işâret edelim. Meselâ, a yarıçaplı dairesel bir zar yerine $\rho=a$, $\varphi=0$ ve $\varphi_0<2\pi$ olmak üzere $\varphi=\varphi_0$ kenarlarıyla sınırlanmış pasta dilimi şeklindeki bir zarı göz önüne alalım. Bu takdirde bütün kenarlardaki yer değiştirmenin sıfır olması şartı azimütâl değişim için (14) çözümünün, $m=1, 2, 3, \ldots$ değerlerini almak ve $\nu=m\pi/\varphi_0$ olmak üzere

$$\Phi(\varphi)=\sin(\nu\varphi)$$

şeklinde olmasını zarûrî kılar. Radyâl fonksiyonlar, özfrekanslar, v.s. de buna uygun olarak değişirler. Böylece her iki ν ve k ayrışım sâbitleri bu hâl için sınır şartları tarafından tâyin edilmiş olurlar. Tekdeğerlilik şartı burada açık olarak işe karışmamaktadır.

2-3 MEKANİK BİR SİSTEMİN KÜÇÜK TİTREŞİMLERİ

Biraz daha farklı matematik ihtivâ eden bir özdeğer problemine bir misâl olmak üzere, N adet serbestlik derecesini haiz mekanik bir sistemin denge durumu civarında yaptığı küçük titreşimleri göz önüne alacağız. Basitlik olsun diye kuvvetin bir potansiyelden türediğini ve kinetik enerjinin de basit bir diyagonâl kuadratik form olduğunu kabul edeceğiz. Buna göre, eğer genelleştirilmiş koordinatlara q_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ dersek kinetik enerji

$$T=\frac{1}{2}\sum_i \dot{q}^2_i \tag{23}$$

olur; burada bütün serbestlik derecelerine tekabül eden etkin kütlelerin bire eşit oldukları kabul edilmiş bulunmaktadır. (Farklı kütleler veyâ T için diyagonâl olmayan bir form hâllerini ihtivâ eden daha genel problemler H. Goldstein: «*Classical Mechanics*», Addison Wesley, Reading, Mass., 1960, Chapter 10 da veyâhut da K. R. Symon: «*Mechanics*» 2. baskı, Addison Wesley, Reading, Mass., 1960, sayfa: 477 ve sonrasında bulunabilir.)

Denge hâli (bütün j ler için $q_j=0$ hâli) etrafındaki küçük titreşimler için potansiyel enerji bir Taylor serisine açılabilir:

$$V\simeq V_0+\frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\, q_i\, q_j+\ldots \tag{24}$$

Bu (24) ifâdesinde denge durumunun târifine binâen q ler cinsinden lineer terim bulunmamaktadır. Sâbit k_{ij} katsayıları da $(\partial^2 V/\partial q_i\, \partial q_j)_0$ ile verilmiş olan etkin yay sâbitleri olup reel bir simetrik matrisin elemanları olarak da telâkkî edilebilirler. (24) de sâdece kuvadratik terimleri bırakacak olursak hareketin Lagrange (veyâ Newton) denklemleri

$$\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{N} k_{ij} q_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{25}$$

olurlar. Bu (25) ile verilen N adet kuple, ikinci mertebeden, âdi diferansiyel denklemden müteşekkil denklem takımı, sistemin denge durumu civarındaki [(24) de daha yüksek terimleri ihmâl etmiş olduğumuzdan] küçük genlikli titreşimlerini tasvir eder. Okuyucunun (25) ifâdesindeki muhtasar notasyon dolayısiyle aklının karışabilmesi hâlini göz önünde tutarak bu denklem takımını açık olarak da yazıyoruz:

$$\left.\begin{array}{l} (\ddot{q}_1 + k_{11} q_1) + k_{12} q_2 + \ldots \qquad + k_{1N} q_N = 0 \\ k_{21} q_1 + (\ddot{q}_2 + k_{21} q_2) + k_{23} q_3 + \ldots + k_{2N} q_N = 0 \\ \vdots \\ k_{N1} q_1 + k_{N2} q_2 + \ldots \qquad + (\ddot{q}_N + k_{NN} q_N) = 0. \end{array}\right\} \tag{26}$$

(26) yı yazarken tek bir koordinat ihtivâ eden terimleri bir araya toplamaya hususî olarak dikkat edilmiş bulunmaktadır.

Özfrekansları ve bunlara tekabül eden normâl titreşim modlarını tâyin etmek için, ω sonradan tâyin edilecek bir sâbit olmak üzere, bir ω frekansını haiz titreşimlerin mevcut olduklarını kabul ediyoruz. Buna göre (25) denklemleri, q ler ile artık titreşimin genliklerini göstermek üzere,

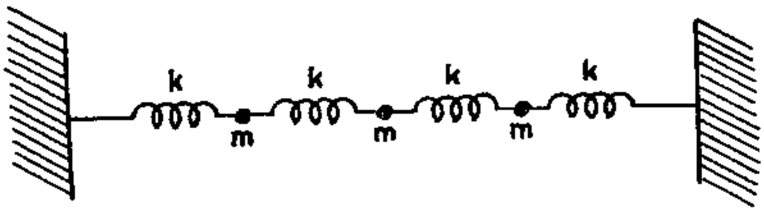
$$\sum_j (k_{ij} - \delta_{ij}\, \omega^2)\, q_j = 0 \tag{27}$$

şeklinde bir cebrik denklem sistemine müncer olur. Lineer cebrik denklemler teorisinden (27) homogen denklemler takımının, ancak bunların katsayılarının determinantı sıfırsa, yâni:

$$|k_{ij} - \omega^2\, \delta_{ij}| = 0 \tag{28}$$

ise, bir çözümü haiz olduğunu bilmekteyiz. (28) denklemine *seküler* veyâ *karakteristik denklem* adı verilir. Bunun sol tarafı ω^2 cinsinden N-inci dereceden reel katsayılı bir polinomdur. Buna binâen (28) in de ω^2 için N adet kökü olacaktır. Bunlar problemin özdeğerlerini teşkil ederler. $k_{ij}=k_{ji}$ ise köklerin hepsinin reel olduklarını göstermek kâbildir.

Problem: Üç eşit kütle aynı kuvvet katsayısını haiz dört yay vâsıtasiyle biribirlerine, aşağıdaki şekilde gösterilmekte olduğu gibi bağlıdırlar. Boyuna titreşimlerinin özfrekanslarını ve her frekansa tekabül eden hareketin normâl modunu bulunuz.



(28) in kökleri olan özfrekanslara bir α indisi tekabül ettirilebilir; ve böylece

$$\omega^2=\omega^2_\alpha \qquad (\alpha=1, 2,\ldots, \mathrm{N}) \tag{29}$$

yazabiliriz. Eğer biribirine eşit iki özfrekans yoksa sisteme *soysuzlaşmamış* (veyâ *dejenere olmamış*) denir; buna mukabil (28) in çok katlı kökleri varsa sistemin *soysuzlaşmış* (veyâ *dejenere olmuş*) olduğundan ve *soysuz* modlara mâlikolduğundan bahsolunur. Basitliği sağlamak için sistemin soysuzlaşmış olmadığını farzediyoruz. Buna binâen her ω_α özfrekansı için (27) cebrik denklemler takımı q_j lerin izâfî değerleri cinsinden bir çözümü haiz olur. Bunları q_j ile göstereceğiz. Buradaki α indisi bunların ω_α özdeğerine tekabül ettiklerine delâlet etmektedir. $q_{j\alpha}$ genliklerinin takımı bir çarpan yaklaşıklığıyla, ω_α frekanslı titreşimin normâl modunu tamâmen tasvir eder. Eğer mekanik sistemdeki her koordinata (α sâbit ve $j=1, 2,\ldots,$ N olmak üzere) $q_{j\alpha}$ ya eşit bir yer değiştirme verilmişse her $q_j(t)$ koordinatı ω_α özel frekansı ile titreşim yapacaktır. N normâl modun lineer süperpozisyonu dolayısıyla küçük titreşimlerin en genel hareketi tasvir olunabilir. Buna binâen

$$q_j(t) = \sum_\alpha q_{j\alpha}\,[\mathrm{A}_\alpha \cos(\omega_\alpha t) + \mathrm{B}_\alpha \sin(\omega_\alpha t)] \tag{30}$$

olur. Münferit j indisi sürekli x değişkenine ve α indisi de n indisine tekabül etmek üzere (30) ifâdesi ile (7) ifâdesi arasındaki benzerliğe dikkat edelim. Bu tekabüliyet $\mathrm{N} \to \infty$ a gittiği zaman teferruatlı bir şekilde tâkibedilebilir. Herbiri m kütlesini haiz, sâbit aralıklı ve biribirlerine ağırlığı olmayan yaylarla bağlanmış N adet noktadan müteşekkil bir takımın dikine titreşimleri misâli ve bunun titreşen tele tekâbüliyeti teferruatlı olarak J. C. Slater ile N. H. Frank'ın «*Mechanics*» (Mc Graw Hill, New York 1947 isimli kitaplarında 151. ve bunu tâkibeden sayfalarda ve, H. C. Corben ile P. Stehle'in «*Classical Mechanics*» (2. baskı, Wiley, New York, 1960) isimli kitaplarında 124. ve 273. sayfalardan itibâren incelenmiştir.

Göz önüne almış olduğumuz özdeğer ve normâl mod problemi matris lisanınca da yazılabilir. Genelleştirilmiş koordinatların sütûnu tarafından teşkil olunan matrisi (ki buna bir sütûn vektör veyâ sâdece bir vektör de denir) $Q(t)$ ile gösteriyoruz:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{pmatrix} \tag{31}$$

Bundan sonra da elemanları k_{ij} kuvvet sâbitlerine eşit olan reel, simetrik (kare) K matrisini târif ediyoruz:

$$K \equiv (k_{ij}) = \begin{pmatrix} k_{11}\, k_{12} \ldots k_{1N} \\ k_{21}\, k_{22} \ldots k_{2N} \\ \vdots \\ k_{N1}\, k_{N2} \ldots k_{NN} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Böylece (25) hareket denklemi, KQ ifâdesiyle Q nun K ile soldan çarpılması demek olan matris çarpımıyla teşkil edilmiş sütûn vektörü göstermek üzere,

$$\ddot{Q} + KQ = 0 \tag{33}$$

matris denkleminin j-inci satırı olur. ω frekanslı harmonik bir zamana bağlılık kabul edecek olursak (33) ifâdesi

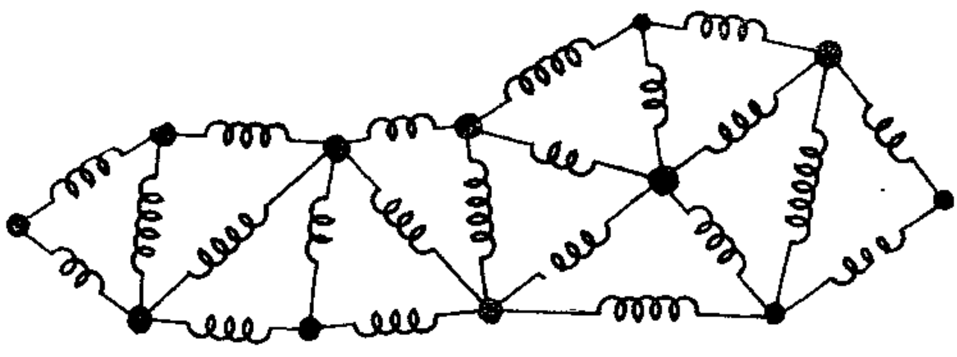
$$KQ = \omega^2 Q \tag{34}$$

şekline girer. Burada ω^2, Q nun her elemanını çarpan bir sayı veyâ ω^2 kere birim I matrisi olarak düşünülebilir.

ω_α^2 özdeğerleri ve Q_α özvektörleri için (34) matris denklemini çözme problemi, cebrik teferruat bakımından, (25) ifâdesinden hareketle

(29) ifâdesine vâsıl oluncaya kadar yapmış olduklarımızın tıpatıp aynıdır. Fakat matrislerin ve sütûn vektörlerin kullanılması lineer bir vektör uzayı kavramını ithâl ettikten sonra çok daha iyi anlaşılabilir bir hâle gelir. Biz de buna binâen, her ne kadar Bölüm 2-5 de problem tekrar âdi üç boyutlu uzayda karşımıza çıkacaksa da, bu özdeğer probleminin matrislerle daha ileri münakaşasını Bölüm 5-9 a bırakıyoruz.

Özfrekansları veren (28) seküler denkleminin elde edilmesini temin eden merhaleleri dikkatle tâkibetmiş olan okuyucu pekâlâ: «Ne gibi fizikî şartlar özdeğerlerin mevcûdiyetlerini zorunlu kıldılar» diye sorabilir. Titreşen tel veyâ zar için bu, uzay sınır şartlarının bir neticesi olarak ortaya çıkmaktadır: her an için bütün sınır üzerinde, sınır şartlarını ancak, uzaklığın bir fonksiyonu olarak belirli bazı dikine yer değiştirmeler gerçekleyebilir. Her ne kadar girift bir mekanik sistemin, farklı genlikleri haiz olsa dahi nâdiren bütün kısımlarının aynı frekansı haiz olarak titreşim yapabilmeleri hadsî olarak âşikâr görünüyorsa da durum, mekanik bir sistemin küçük titreşimleri için daha az vâzıhtır. Filhakika, ilk bir tahminde, bunun mümkün olamayacağı söylenebilir.



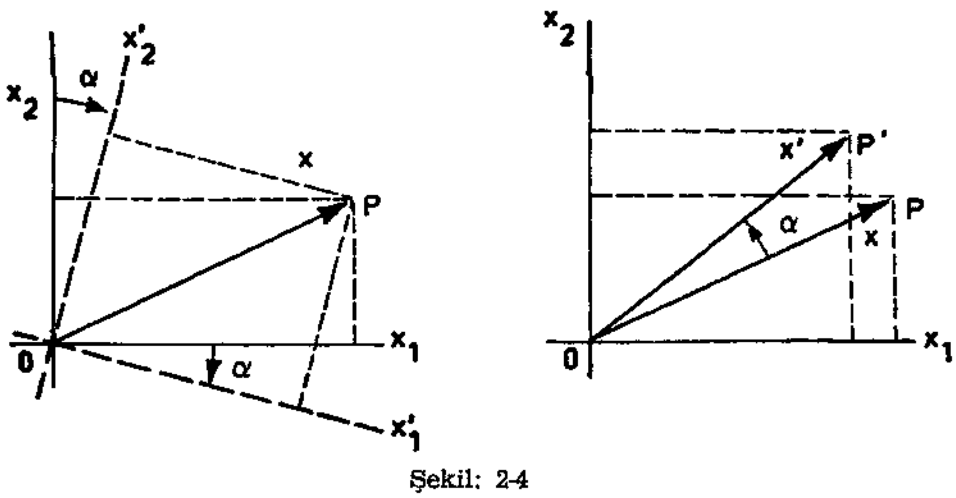
Şekil: 2-3

Analizimiz, sâdece belirli bazı münferit ω_α ($\alpha=1, 2, \ldots, N$) frekansları hariç, sistemin keyfî bir frekansla sinüs şeklinde titreşim yapamayacağını göstermektedir. Bu münferit değerler alma keyfiyetinin fizikî menşei bir «sınır şartı» na bağlanabilir. Bunu vâzıh kılmak için (26) denklem sistemini göz önüne alalım ve, N büyük olduğu takdirde, verilmiş her serbestlik derecesinin sâdece kendi civarındaki birkaç koordinatla kuple olduğunu tasarlayalım. Şekil: 2-3 de gösterildiği gibi yaylar vâsıtasıyla biribirlerine bağlı kütleli noktalar takımı böyle bir sistem olacaktır. Şu hâlde i ve j arasında büyük nümerik farklar bulunduğu takdirde k_{ij} yay sâbitleri sıfır olacaklardır. Bu, (26) denklemlerinin ilk birkaçında bulunan koordinatların son birkaç denklemde ve son birkaç denklemde bulunan koordinatların da, mütekabilen, ilk birkaç denklemde bulunmayacağına delâlettir. Sistemin uçlarından birindeki mevzî davranışı diğer ucundaki mevzî davranışına bağlı olmayacaktır. Bu, sonlu mertebeden bir diferansiyel denklem tarafından tasvir olunan sürekli bir sistemin benzeridir (diferansiyel denklemlere bağlı fark denklemlerini hatırlayınız). Eğer şimdi q_1 ile q_N hakkında vazedilmiş olan bir nevi şart düşünecek olursak [mesela, $q_1(t)=q_N(t)$, veyâ $q_1=q_N=0$], bu takdirde (26) denklemlerinin *bütününü* aynı anda tahkik edebilmenin ancak belirli bazı ω_α frekanslarıyla bunlara tekabül eden $q_{j\alpha}$ genlikleri için mümkün olabileceği âşikârdır. Başka frekans veyâ genlikler için bu denklemlerin bütün takımını değil, sâdece bir alt takımını tahkik etmek mümkün olabilir. [Eğer, meselâ, uçlardan birinden işe başlarsak bu takdirde diğer uca aşağı yukarı vâsıl olabiliriz, fakat genel olarak son veyâ son birkaç denklemi tahkik etmemiz mümkün olmaz (yukarıdaki münferit yay hakkındaki münakaşaya bakınız).]

Bütün k_{ij} ler sıfırdan farklı olsalar bile özdeğer şartının fizikî temeli aynıdır.

2-4 EKSENLERİN DÖNMESİ VE DİK (ORTOGONAL) DÖNÜŞÜMLER

Eksenlerin dönmesi fizikte âşinâ bir problem olup sık sık, denklemleri basitleştırmek veyâ muayyen bir simetriyi âşikâr kılmak için yapılır. Probleme bazı kereler aktif ve pasif denilen iki görüş zâviyesinden bakılabilir. Şimdi bir düzlemde koordinatlar göz önüne alalım. P noktası Şekil: 2-4 de gösterildiği gibi eksenler boyunca x_1 ve x_2 bileşenlerini haiz $\vec{x}$



Şekil: 2-4

koordinat vektörüyle gösterilir. Eğer eksenlerin bir α açısı kadar dönmelerini göz önüne alırsak ya (şeklin sol tarafında gösterildiği gibi) eksenler döndüğü hâlde P noktasının sâbit kaldığını, veyâhut da (şeklin sağ tarafında gösterildiği gibi) eksenlerin sâbit kaldıklarını fakat $\vec{x}$ vektörünün yeni bir $\vec{x}'$ durumuna döndüğünü farzedebiliriz. Her iki hâlde de üslü x_1' ve x_2' koordinatları

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{aligned} \tag{35}$$

ile verilirler.

(35) dönme denklemleri matris denklemi şekline sokulabilirler. Bunu, aktif olarak düşünerek yâni dönme operasyonunun $\vec{x}$ koordinat vektörünü yeni bir $\vec{x}'$ durumuna döndürdüğü Şekil: 2-4 ün sağdaki kısmının istilâhları cinsinden yapmamız daha basit görünmektedir. Şimdi

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir sütûn vektör matrisi ve bir de

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{36}$$

şeklinde kare dönme matrisi târif ediyoruz.

Buna binâen $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ şeklindeki (35) dönme dönüşümü bir matris denklemi olarak

$$x' = R_\alpha x \tag{37}$$

şeklinde yazılabilir.

Eksenlerin bir düzlemdeki dönüşleri eksenlerin üç (veyâ daha fazla) boyuttaki genel dönüşlerinin özel bir hâlidir. Bu türlü uzaklıkları değiştirmeyen dönme dönüşümlerine *dik* veyâ *ortogonâl dönüşümler* denir. $\vec{x}$ vektörünü $\vec{x}'$ ye dönüştüren üç boyutlu genel bir dönme

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \tag{38}$$

veyâ daha açık olarak

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \tag{39}$$

dik dönüşümüyle tasvir olunur. Dönüşümün katsayıları doğrultu kosinüsleridir. Eğer $\vec{x}$ ve $\vec{x}'$ vektörlerinin uzunlukları aynı kalacaklarsa a_{ij} katsayıları muayyen bir şartı ve daha açıkçası

$$\sum_i a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{jk} \tag{40}$$

şartını tahkik etmek zorundadırlar. Buna binâen de dönüşüme dik dönüşüm adı verilir.

Problem: (40) bağıntısını açıkça hesaplayarak ispatlayınız.

$\vec{x}' \to \vec{x}$ şeklindeki ters dönüşüm, dönüşüm katsayıları a_{ij}' olmak üzere

$$x_i = \sum_j a_{ij}'\, x_j' \tag{41}$$

şeklinde yazılır. (38) i (41) e vazedersek

$$x_i = \sum_j \sum_k a_{ij}'\, a_{jk}\, x_k = \sum_k \Big(\sum_j a_{ij}'\, a_{jk}\Big)\, x_k$$

buluruz. Dik bir dönüşümün ve sonra bunun tersinin tatbikiyle $\vec{x}$ vektörü ilk durumuna avdet etmek mecburiyetinde olacağından

$$\sum_j a_{ij}'\, a_{jk} = \delta_{ik} \tag{42}$$

olması lâzımdır. (42) ile (40) ın mukayesesi ters dönüşümün ilk dönüşüme

$$a_{ij}' = a_{ji} \tag{43}$$

bağıntılarıyla bağlı olduğunu göstermektedir.

Dik dönüşümlerin cebri, matris notasyonu ile ifâde olunabilir. A diye reel bir kare matris târif edelim:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{44}$$

ve x ile x' de sütûn vektörler olsunlar:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \tag{45}$$

Buna binâen (38) veyâ (39) dik dönüşümleri

$$x' = \mathrm{A}x \tag{46}$$

şekline girer. (41) ve (43) den, $\widetilde{\mathrm{A}}$ ile (A-dalga diye okuyunuz) A nın transpozesini [eğer $\mathrm{A} = (a_{ij})$ ise $\widetilde{\mathrm{A}} = (a_{ji})$ diye târif olunur] gösterirsek, ters dönüşüm de

$$x = \widetilde{\mathrm{A}}x' \tag{47}$$

yazılır. (46) ile (47) den, I ile birim matrisi göstermek sûretiyle

$$\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{I} \qquad \text{ve} \qquad \widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{A} = \mathrm{I} \tag{48}$$

matris denklemlerini çıkartırız. Bu ifâdeler (40) ın matris şeklindeki eşdeğerleridir. Bir A matrisinin (sağ veyâ sol) tersi olan A^{-1}

$$\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I} \qquad \text{veyâ} \qquad \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

ile târif olunduğundan dik matrisler için ters matrisin transpoze matrise eşit olduğunu görmüş bulunuyoruz:

$$\mathrm{A}^{-1} = \widetilde{\mathrm{A}}. \tag{49}$$

Dik bir matrisin önemli bir özelliği bunun determinantının değeridir. İki matrisin çarpımının determinantının, herbirinin determinantının çarpımlarına eşit olduğu kolayca gösterilebilir. Buna göre, (48) den

$$|\mathrm{A}| \times |\widetilde{\mathrm{A}}| = 1$$

olduğu bulunur. Fakat bir determinantın değeri, bunun satırlarıyla sütûnları mübadele edildiği vakit değişmez. Buna binâen

$$|\mathrm{A}| = \pm 1 \tag{50}$$

olur. Eğer fizikî problem dönmeler ihtivâ ediyorsa pozitif işâreti seçmek normâldir. Negatif işâretin seçilmesi $(\vec{x} \rightarrow -\vec{x})$ şeklinde bir tersinim (inversiyon) yaptıktan sonra bir dönme yapmayı intâceder.

2-5 EULER TEOREMİ VE ÖZDEĞER PROBLEMLERİ OLARAK ESAS EKSENLERE DÖNÜŞÜMLER

Bölüm 2-4 de özdeğer problemlerinin bahsi geçmedi. Lûzumlu matematiği geliştirdikten sonra artık bunu, matrislerin özdeğerleri problemine müncer olan iki fizikî dönme misâlini incelemekle telâfi edeceğiz.

Euler teoremi, bir noktası sâbit olan bir katı cismin genel yer değiştirmesinin muayyen bir eksen etrafında bir dönme olduğunu ifâde eder. Genel bir dik A dönüşümü istılâhiyle bu, âşikâr olarak, muayyen bir A için dönüşüm tarafından değişime mâruz bırakılmayan ve bir R vektörü (veyâ bir R sütûn vektörü) ile belirlenmiş belirli bir istikâmetin mevcûd olduğunu ifâde etmektedir. Buna binâen matris şekliyle Euler teoremi

$$AR = R \tag{51}$$

olacak şekilde bir R sütûn vektörünün bulunabileceğini ifâde etmektedir.

(51) denklemi, B ile verilmiş bir kare matrisi, X ile bir sütûn vektörü ve λ ile de tâyin edilecek bir sâbiti göstermek üzere,

$$BX = \lambda X \tag{52}$$

şeklinde ifâde olunan matrislerin özdeğer probleminin özel bir hâlidir. (52) nin tahkik edilebildiği λ değerlerine özdeğerler ve bunlara tekabül eden X vektörlerine de özvektörler adı verilir. (52) denklemi (34) ile aynı şekli haiz olup çözüm metodu da aynıdır. Bununla Bölüm 5-9 da teferruatlı bir şekilde meşgûl olacağız.

Burada Euler teoreminin, bütün özdeğerleri birim büyüklüğü haiz olmak üzere, en az bir reel özdeğere mâlik dik bir matris olmak hasebiyle A nın özelliklerinden çıkarıldığına işâret etmek kifâyet eder. (Bk. H. Goldstein, «*Classical Mechanics*», Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950, sayfa: 118-123).

Fizikte her ne kadar vektörler (meselâ koordinatlar, momentler, kuvvetler, elektrik alanları) önemliyse de dik dönüşümlerde bütün büyüklükler (38) vektör dönüşüm kaidesine uygun olarak değişmezler. Bir adım daha girift dönşüm özelliklerine sahip bundan sonraki fizikî büyüklükler tansörlerdir (daha doğrusu ikinci mertebeden tansörler, zirâ vektörler birinci mertebeden tansörlerdir). Meselâ atâlet momenti tansörü, basınç tansörü, Maxwell gerilim tansörü v.s. gibi. Eğer T_{ij} ile ikinci mertebeden bir tansörü gösterirsek dik dönüşümlerin kaidesi

$$T_{ij}' = \sum_k \sum_l a_{ik}\, a_{jl}\, T_{kl} \tag{53}$$

şeklinde ifâde olunur. Eğer bir tansörün T_{ij} elemanlarıyla bir T kare matrisi inşâ olunursa, A dik matrisinin (44) târifi ve matris çarpımı kaidelerine göre (53) ifâdesi matris notasyonuyla

$$T' = AT\widetilde{A} = ATA^{-1} \tag{54}$$

şeklinde yazılır. (54) dönüşümüne *benzerlik dönüşümü* ve T' ile T matrislerine de benzer matrisler denir. (Bunlar, farklı iki koordinat sisteminde ifâde edilmiş aynı bir fizikî nesne olabileceklerinden, fizikî nokta-i nazardan, muhakkak ki benzer şeylerdir).

Atâlet momenti tansörünün esas eksenlere dönüşümü bir matris özdeğer problemi olarak ifâde edilebilir. Birim matrisle karıştırılmaması için atâlet momenti tansörünü âdet olduğu üzere I ile değil de T ile göstereceğiz. Problem, T_{ij} ler verildiğinde dönüşmüş T_{ij}' tansörü diyagonâl olacak şekilde bir eksenler dönüşümü veyâ dik bir A dönüşümü bulmak ve kezâ T' nün diyagonâl elemanlarını tâyin etmektir.

Önce (53) den hareket ederek problemi açık olarak münakaşa edelim. T_{ij}' nin diyagonâl elemanları ($i=1, 2, 3$ olmak üzere) λ_i olsunlar. Buna binâen bazı λ_i ler için

$$\lambda_i\, \delta_{ij} = \sum_k \sum_l a_{ik}\, a_{jl}\, T_{kl} \tag{55}$$

olacak şekilde a_{ij} elemanlarını arayalım. Bunu cebrik lineer bir denklem takımına dönüştürmek için her iki tarafı a_{im} ile çarpıp i üzerinden toplam yapalım. Bundan sonra (40) diklik bağıntılarının tatbiki bizi

$$\lambda_j\, a_{jm} = \sum_l T_{ml}\, a_{jl}$$

veyâ, yeniden düzenleyerek

$$\sum_{l}(T_{ml} - \lambda_j \delta_{ml}) a_{lj}' = 0 \qquad (56)$$

bağıntılarına vâsıl eder. (56) yı yazarken A ile $\breve{A}$ nın matris elemanları arasındaki (43) bağıntısını kullandık. j nin her değeri için ($m=1, 2, 3$ olmak üzere) aynı anda üç denklem vardır.

(56) denklemi (27) veyâ (34) lineer denklem sistemlerinin şeklinde olup a_{lj}' elemanlarındaki ikinci indis olan j de λ_j özdeğerinden kinâyedir. Seküler

$$|T_{ml} - \lambda\, \delta_{ml}| = 0 \qquad (57)$$

denklemi (λ_1, λ_2, λ_3) özdeğerlerini verir ve her bir özdeğer için de buna tekabül eden özvektörün bileşenleri olarak tâyin olunan bir a_{lj}' elemanlarından müteşekkil sütûn vardır. Böylece dik A matrisinin sütûnlarının problemin özvektörleri veyâ bunlarla orantılı ifâdeler olduklarını görmekteyiz.

Problem: ε_j ile üç koordinat ekseni boyunca birim vektörleri göstererek (56) nın özvektörleri vektör notasyonu ile

$$\vec{R}_j = a_{1j}'\vec{\varepsilon}_1 + a_{2j}\vec{\varepsilon}_2 + a_{3j}\vec{\varepsilon}_3$$

şeklinde yazılabilirler. Bu vektörlerin atâlet mometi problemindeki fizikî anlamları nedir? Soysuzlaşma yoksa bu üç $\vec{R}_j$ vektörü hakkında ne söylenebilir?

Esas eksenlere ircâ problemi matris notasyonuyla çok kısa olarak ifâde edilebilir. I ile birim matrisi göstermek sûretiyle $T' = \lambda I$ vazedelim. Buna göre (54) den

$$\breve{A}TA = \lambda I \qquad (58)$$

olur. Yâni problem, T yi diyagonalleştiren bir benzerlik dönüşümünü bulma problemi hâline gelmektedir. Her iki tarafı da soldan A ile çarparsak (48) i de göz önünde tutarak

$$T\breve{A} = \lambda\breve{A} \qquad (59)$$

elde ederiz. (59) un matris elemanlarını ayrı ayrı alarak (56) daki üç denklemlik üç sistemi buluruz ve böylece de gene standart cebrik probleme dönmüş oluruz.

3
DİK FONKSİYONLAR VE SERİYE AÇILIMLAR

Titreşen tel problemini incelerken titreşimin genliğini, herbiri ile uzay ve zaman koordinatları arasında verilmiş bir fonksiyonel bağıntı bulunan terimlerin lineer bir toplamı olarak göz önüne almak zorunda kalmıştık. İşte bu, bir veyâ daha fazla değişkenli keyfî bir fonsiyonu bilinen fonksiyonlar cinsinden bir seri ile temsil etme problemine özel bir misâl teşkil etmektedir. Tel için (2-7) genliği, tesbit edilmiş bir zaman için (meselâ $t=0$ için) bütün seriye açılımların en âşinâsı olan bir Fourier seridir.

Her şeyden önce kısaca Fourier serisine açılımı hatırlatacağız. Bundan sonra da misâlleriyle, çok daha genel bir problem olan, sonlu ve sonsuz aralıklarda keyfî bir dik fonksiyonlar dizisi cinsinden bir seriye açma problemine döneceğiz. Son olarak da muhtelif dik polinom dizilerinin ortaya çıkışlarını ve bunların açılım fonksiyonları olarak kullanışlarını inceleyeceğiz.

3-1 FOURİER SERİLERİ

Fourier serilerinin standart problemi keyfî (kısım kısım sürekli) bir $f(x)$ fonkisyonunu sonlu bir aralıkta, meselâ $-\pi \leqq x \leqq \pm\pi$ aralığında, sinüs ve kosinüslerin bir serisi olarak temsil etmektir:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \qquad (1)$$

Buradaki a_m ve b_m katsayıları, genel olarak, sinüs ve kosinüslerin bazı diklik bağıntılarına yâni

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(m'x)\,dx = \pi\delta_{mm'}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(m'x)\,dx = \pi\delta_{mm'}(1+\delta_{m,0})\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(m'x)\,dx = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

şeklindeki bağıntılara uyduklarına dikkat etmekle tâyin edilirler. (1) in her iki yanını da $\sin(mx)$ veyâ $\cos(mx)$ ile çarpıp $(-\pi,\ \pi)$ aralığında integre ettikten sonra (2) nin de yardımıyla bu katsayıların

$$\left.\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx\\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

oldukları bulunur.

Hatırlanması icâbeden oldukça âşikâr birkaç nokta vardır:

1. Eğer $f(x)$ bir tek-fonksiyonsa $[f(-x)=-f(x)]$, sâdece sinüslü terimler vardır.

2. Eğer $f(x)$ bir çift-fonksiyonsa $[f(-x)=+f(x)]$, sâdece kosinüslü terimler vardır.

3. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ da sonlu bir süreksizliği haizse, ε pozitif bir kemmiyet ve $f(a\pm)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x=a\pm\varepsilon)$ olmak üzere (1) Fourier serisi $x=a$ da $[f(a+)+f(a-)]$ değerini haizdir.

Aklı biraz karıştıran bir nokta (1) serisini $(-\pi,\ \pi)$ aralığında kullanacak yerde yarı $(0,\ \pi)$ aralığında kullanmaktır. Meselâ bir $f(x)$ fonksiyonunu $(0,\ \pi)$ aralığında ve katsayıları

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \tag{4}$$

ile verilen bir

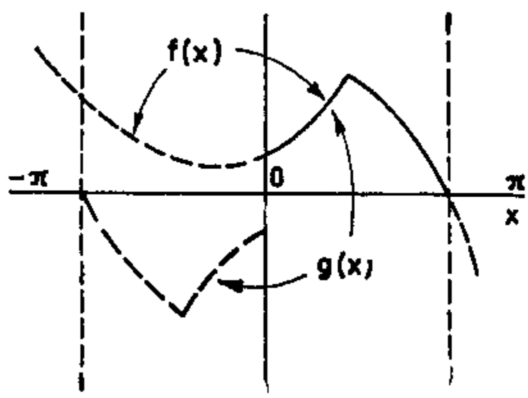
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \tag{5}$$

serisine açmak kâbildir. Bu açılımla (1), esâsında, eğer genişletilmiş $(-\pi, \pi)$ aralığında seriye açılan fonksiyonun

$$x>0 \quad \text{için} \quad g(x) = f(x)$$

$$x<0 \quad \text{için} \quad g(x) = -f(-x)$$

olduğu kabulünü yapacak olursak, aynıdırlar. Buna binâen $g(x)$, açılımı sâdece sinüslü terimler ihtivâ eden tek bir fonksiyon olur. (3) deki integralde $f(x)$ yerine $g(x)$ yerleştirerek b_m katsayıları kolaylıkla (4) şekline dönüştürülebilir. Şekil: 3-1 tipik bir durumu göstermektedir. Yarı $(0, \pi)$ aralığında $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları eşit, fakat $(-\pi, 0)$ aralığında farklıdırlar. $f(x)$ in $(0, \pi)$ deki Fourier sinüs açılımı $g(x)$ in $(-\pi, \pi)$ deki Fourier açılımının aynıdır. $f(x)$ in *bütün* $(-\pi, \pi)$ aralığındaki Fourier açılımının genel olarak oldukça farklı olacağına da dikkat ediniz.



Şekil: 3-1

Sual: $(0, \pi)$ aralığında sâdece kosinüslü terimlerden mürekkep bir açılım yapabilir miyiz? Eğer yapabilirsek bunun $(-\pi, \pi)$ aralığındaki (1) genel Fourier açılımıyla bağıntısı nedir?

Problem 1: $f(x)=\pi x-x^2$ fonksiyonunu $(0, \pi)$ aralığında bir sinüs ve bir kosinüs serisine açınız. Bu açılımlardan hangisi daha çabuk yakınsaklaşmaktadır? Niçin?

Problem 2: $f(x)=\sin^2 x$ fonksiyonunu $(0, \pi)$ aralığında bir sinüs ve bir kosinüs serisine açınız. Bu açılımlardan hangisi daha çabuk yakınsaklaşmaktadır? Problem 1 de yakınsaklığın çabukluğu hakkında ileri sürmüş olduğunuz sebepler buraya da tatbik olunabilir mi?

$(-\pi, \pi)$ aralığı ancak özel bir seçimdir. Eğer $(-a, a)$ aralığını seçecek olursak buna uygun Fourier açılımı

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \tag{6}$$

şeklinde olup bunun katsayıları da

$$\left\{ \begin{matrix} a_m \\ b_m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \left\{ \begin{matrix} \cos \dfrac{m\pi x}{a} \\ \sin \dfrac{m\pi x}{a} \end{matrix} \right\} dx \tag{7}$$

dir.

Titreşen telin başlangıç değer problemi bir Fourier serisi problemidir. $t=0$ daki başlangıç şartlarından ve çözümden [Bk. Bölüm 2, Denk. (7)], başlangıçtaki $F(x)$ yer değiştirmesi ve $G(x)$ hızı için $(0, a)$ aralığında Fourier açılımları olarak

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v B_n}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

buluruz. Bunlara yarı aralıktaki (4,5) tipinde sinüs açılımları gözüyle bakılabilir. A_n ve B_n katsayıları da âşikâr olarak

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v}\int_0^a G(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

dir.

3-2 DİK FONKSİYONLARA AÇILIM

Bir Fourier serisi keyfî bir fonksiyonun bilinen dik fonksiyonların bir serisine açılımına özel bir misâl teşkil eder. Biz şimdi bu türlü açılımların genel özelliklerini incelemeği ve faydalı bir notasyonu geliştirmeği arzu etmekteyiz.

Târifler

1. *(a,b) aralığında açılım:* Reel x değişkeni $a \leqq x \leqq b$ aralığında değerler alabilir.

2. *İç çarpım:* (a,b) aralığında târif edilmiş $f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki fonksiyon verildiğinde, (f,g) ile gösterilen f ve g nin iç çarpımı

$$(f,g) = \int_a^b f^*(x)\,g(x)\,dx \tag{8}$$

olup yıldız işâreti burada kompleks eşleniği almaya delâlet etmektedir. Sıranın önemine ve $(f,g) = (g,f)^*$ olduğuna dikkat ediniz.

3. *Diklik:* Eğer $(f,g) = 0$ ise $f(x)$ ile $g(x)$ in biribirlerine dik oldukları söylenir.

4. *Normalizasyon:* $f(x)$ gibi bir fonksiyonun N normu f nin kendisiyle iç çarpımının değeri olarak târif edilmiştir:

$$N = (f,f) \equiv \int_a^b |f(x)|^2\,dx \tag{9}$$

Eğer N normu sonlu ise $f(x)$ fonksiyonuna *kare integrali alınabilir* denir. Eğer bir fonksiyonun normu bire eşitse buna (a,b) aralığında *normalize edilmiştir* denir. Âşikâr olarak, $N \neq 0$ olmak üzere, kare integrali alınabilen her fonksiyonu uygun sonlu bir sâbitle çarpmak sûretiyle normalize etmek mümkündür.

5. *Ortonormâl takımı:* (a,b) aralığında tarif edilmiş sonlu veyâ sayılabilir sonsuz sayıda bir $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$,... fonksiyon takımı verildiğinde eğer bütün (i,j) değer çiftleri için

$$(\varphi_i, \varphi_j) \equiv \int_a^b \varphi_i^*(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \delta_{ij} \tag{10}$$

bağıntıları cârî ise $\varphi_j(x)$ fonksiyon takımına ortonormâl fonksiyon takımı adı verilir.

Şimdi (a,b) aralığında ortonormâl bir $\varphi_j(x)$ takımı verildiğini farzedelim. Kare integrali alınabilen keyfî bir $f(x)$ fonksiyonunu bu aralıkta $\varphi_j(x)$ ler cinsinden bir seriye açılımla temsil etmek istiyoruz. Önce serinin sonlu (n) adet terimi olduğunu farzedelim. Buna göre

$$f(x) \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x) \tag{11}$$

tekabüliyetiyle ilgileniyoruz demektir. Bu takdirde ortaya şu mesele çıkar: a_j katsayılarının ne tarzda bir seçimi $f(x)$ fonksiyonunun «en iyi» bir şekilde temsil edilmesini sağlayacaktır? «En iyi» tâbirinin anlamı âşikâr olarak bu seçime tesir edecektir. «En iyi» tarzda temsil tâbirinin standart anlamı M_n ile gösterilen

$$M_n = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x) \right|^2 dx \tag{12}$$

ortalama kuvadratik hatâyı minimum kılan temsildir. (12) de M_n, $(j=1, 2, \ldots, n$ olmak üzere) n adet a_j kompleks parametresinin fonksiyonu olarak kabul edilecektir. Hâli hâzırda $(j=1, 2, \ldots, n$ olmak üzere) a_j ve a_j^* cinsinden $2n$ adet parametre vardır.

a_j ve a_j^* lerin fonksiyonu olarak M_n yi minimum kılmak işi M_n nin a_j ve a_j^* lere göre kısmî türevlerini alıp bunları sıfıra eşit kılmakla icrâ edilir. Eğer (12) iç çarpım notasyonuyla yazılırsa

$$M_n = (f, f) - \sum_{j=1}^{n} [(f, \varphi_j)\, a_j + (\varphi_j, f)\, a_j^*] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\varphi_i, \varphi_j)\, a_i^* a_j \tag{13}$$

olur. (10) ortonormâllik şartıyla çift toplam tek bir toplama müncer olur:

$$M_n = (f, f) - \sum_{j=1}^{n} [(f, \varphi_j)\, a_j + (\varphi_j, f)\, a_j^* - a_j^* a_j] \tag{14}$$

Buna göre ekstremum [1] da, katsayılar

$$a_j = (\varphi_j, f) \equiv \int_a^b \varphi_j^*(x)\, f(x)\, dx \tag{15}$$

şeklinde seçilirlerse vuku bulur. (15) denklemi ortonormâl bir açılımdaki katsayılar için standart ifâdedir. φ_j fonksiyonları eğer normalize edilmemişlerse

$$a_j = \frac{(\varphi_j, f)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \tag{16}$$

almak lâzımdır. (15) ifâdesi şeklinde bir seçim yapılırsa M_n ortalama hatâ karesi

$$M_n = (f, f) - \sum_{j=1}^{n} |\, a_j\, |^2 \tag{17}$$

olur. Târifi mûcibince M_n negatif olmadığından (17) bağıntısı *Bessel eşitsizliğini* verir:

$$\sum_{j=1}^{n} |\, a_j\, |^2 \leqq (f, f) \equiv \int_a^b |\, f(x)\, |^2\, dx \tag{18}$$

---

(1) Bu ekstremumun hakikaten bir minimum olduğunu nasıl biliyoruz?

$\varphi_j(x)$ fonksiyon takımı sonsuzsa bu takdirde (11) deki (n) sayısını gitgide büyülterek $f(x)$ fonksiyonunun seri hâlinde gitgide daha iyi bir gösterilişini elde edeceğimizi ümidedebiliriz. Bu hadsî ümid ortonormâl fonksiyon takımının *tam* olması hâlinde doğrudur. *Tamlık*, bütün $n>n_0$ değerleri için M_n ortalama kuvadratik hatâ keyfî olarak seçilmiş herhangi pozitif küçük bir sayıdan daha küçük kılınabilecek şekilde sonlu bir n_0 tamsayısının mevcut olması şartıyla târif edilmektedir. Bu takdirde

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x) \tag{19}$$

seri gösterilişi (15) katsayılarını haiz olarak (a,b) aralığında *ortalama olarak* $f(x)$ e gider. (19) eşitliği, sağ yandaki serinin (a,b) aralığında *aşağı yukarı her yerde* $f(x)$ e eşit olduğunu ifâde ederek tefsir edilmelidir.

Ortonormâl bir fonksiyon takımının tam olduğunu ispatlama problemi genel olarak basit değildir. Bazan, Fourier serilerinin sinüs ve kosinüs açılımları için veyâ Legendre polinomları gibi ortonormâl polinomlar için olduğu gibi, tamlık, bir Laurent açılımındaki z^n kuvvetlerinin tamlığının bir neticesi olarak tefsir olunabilir. Özfonksiyonların ortonormâl takımlarının tam olduklarını göstermek de kabildir (Courant and Hilbert, s. 368; Margenau and Murphy, s. 277; Morse and Feshbach, s. 738). Fizikî uygulamalarda karşımıza çıkacak olan fonksiyon takımlarının tamlıklarının garanti edilmiş olduğunu farzedeceğiz.

Problem: (a) e^{imx} fonksiyonlarının, $m = (\ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ olmak üzere, $(0, 2\pi)$ aralığında bir $\varphi_m(x)$ ortonormâl fonksiyon takımı inşâ etmek için kullanılabileceklerini gösteriniz. (b) a_m açılım katsayılarını açık olarak tâyin edip bunlarla (1) ve (3) Fourier serileri arasında münasebet tesis ediniz.

3-3 DİRAC'ın DELTA FONKSİYONU VE KAPANIŞ BAĞINTISI

Matematik fizikte büyük önemi haiz özel bir «fonksiyon» da Dirac'ın $\delta(x-a)$ delta «fonksiyon»'udur. Bu ifâdede fonksiyon kelimesi tırnak içine alınmış bulunmaktadır, çünkü Dirac'ın delta fonksiyonu matematik anlamda hiç de iyi davranışlı bir fonksiyon değildir. Bu, şu özelliklerle târif olunmaktadır:

(1) $x \neq a$ için $\delta(x-a) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(2) } a \text{ eğer } (b, c) \text{ aralığı içinde ise:} & \displaystyle\int_b^c \delta(x-a)\,dx = 1 \\[2ex] \quad a \text{ eğer } (b, c) \text{ aralığı içinde değilse:} & \displaystyle\int_b^c \delta(x-a)\,dx = 0 \end{array}\right\} \qquad (20)$$

(Eğer a göz önüne alınan (b,c) aralığının uç noktalarından biriyse, bu takdirde integrâl $\frac{1}{2}$ ye eşit olmak üzere târif olunur.) Dirac fonksiyonu, âşikâr olarak, kendisiyle x ler ekseni arasındaki alan sâbit kalacak şekilde gitgide daha yüksek fakat gitgide daha dar olan sivri tepeli bir eğrinin limit şekli olarak târif edilebilir. Meselâ bir Gauss eğrisi kullanılabilir. Buna göre

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x-a)^2/\varepsilon^2}$$

olacaktır.

Delta fonksiyonunu ihtivâ eden integrallerin şu özellikleri kolaylıkla tesis edilirler:

$f(x)$, $x=a$ civarında târif edilmiş keyfî bir fonksiyon olsun. İntegrasyon aralığı da $x=a$ yı ihtivâ etsin.

$$(1) \quad \int f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \qquad (21)$$

(2) Eğer $\delta^n(x-a)$ ile $\delta(x-a)$ nın n-inci türevini gösterirsek, x_i noktaları da $y(x)=0$ ın integrasyon aralığı içindeki reel kökleri olmak üzere

$$\int f(x)\,\delta^n(x-a)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(a) \qquad (22)$$

$$\int f(x)\,\delta[y(x)]\,dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|y'(x_i)|} \qquad (23)$$

dir. (23) denklemi

$$\delta[y(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{| y'(x_i) |} \tag{24}$$

ifâdesine eşdeğer olup $\delta(y)\, dy = \delta(x)\, dx$ bağıntısından elde edilmektedir.

Delta fonksiyonu birden fazla boyutta da târif olunabilir. Meselâ üç boyutta eğer mevkîler bileşenleri x_1, x_2, x_3 olan $\vec{x}$ vektörleri ile tasvir olunuyorlarsa, buna binâen

$$\delta(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x_1 - a_1)\, \delta(x_2 - a_2)\, \delta(x_3 - a_3) \tag{25}$$

olur. (20), (21), (22) ve (23) integralleri de artık âşikâr bir şekilde üç boyutlu olurlar.

Üç boyutta bazan dik koordinatlardan başka (ξ_1, ξ_2, ξ_3) koordinatlarını kullanmak uygun olur. Buna binâen (25) delta fonksiyonu da

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}')\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \delta(\xi_1 - \xi_1')\, \delta(\xi_2 - \xi_2')\, \delta(\xi_3 - \xi_3')\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

kaidesine uygun olarak dönüştürülmelidir. $J(x_i, \xi_i)$ ile koordinat dönüşümünün jakobyenini gösterirsek bu

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{| J(x_i, \xi_i) |}\, \delta(\xi_1 - \xi_1')\, \delta(\xi_2 - \xi_2')\, \delta(\xi_3 - \xi_3') \tag{26}$$

demektir. Meselâ küresel koordinatlarda

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2}\, \delta(r - r')\, \delta(\cos\theta - \cos\theta')\, \delta(\varphi - \varphi') \tag{27}$$

buluruz.

Şimdi gene ortonormâl açılımların münakaşasına dönelim. (19) ifâdesini (15) katsayılarını açıkça ortaya koyarak yazalım:

$$f(x) = \sum_j (\varphi_j, f)\, \varphi_j(x)$$

veyâ

$$f(x) = \int_a^b \left\{ \sum_j \varphi_j(x)\varphi_j^*(x') \right\} f(x')\, dx'. \tag{28}$$

(28) i yazarken toplam ve integrâl işâretlerini mübâdele etmiş bulunuyoruz. Eğer (28) ifâdesi keyfî bir $f(x)$ fonksiyonu için cârî olacaksa integrâl altında büyük parantezler içindeki ifâdenin acaip bir özelliği haiz olması lâzımdır. Bu öyle olmalıdır ki $f(x')$ ile çarpılıp da $(a \leqq x' \leqq b)$ aralığı üzerinden integre edildi miydi, f nin x deki değeri elde edilmiş olsun. (28) in (21) ile mukayesesi parantez içindeki ifâdenin bir delta fonksiyonu olması lâzım geldiğini göstermektedir:

$$\sum_j \varphi_j(x)\varphi_j^*(x') = \delta(x - x') \tag{29}$$

Bu bağıntıya *kapanış veyâ tamlık bağıntısı* adı verilir ve bu ortonormâl fonksiyonların herhangi bir tam takımı için cârîdir. (29) un, x ve x' nün ancak ve ancak $\varphi_j(x)$ fonksiyon takımının dik olduğu (a, b) aralığında bulunmaları hâlinde cârî olacağına dikkat ediniz.

Kapanış bağıntısına bâzan açılım teoremi de denirse de bu isim lineer vektör uzayları bahsi için daha uygundur (Bk. Bölüm 5-3). «Açılım Teoremi» ismi şu teoremden ileri gelmektedir:

f ile g keyfî fonksiyonlar ve φ_j ler de bir tam fonksiyon takımı ise, bunlara binâen

$$(f, g) = \sum_j (f, \varphi_j)(\varphi_j, g) \tag{30}$$

dir.

Bu teorem iç çarpımın târifi ve (29) tamlık bağıntısı veyâ (19) bağıntısı vâsıtasıyla kolayca ispatlanır. Bu, özel bir anlamda

$$\sum_j \varphi_j\varphi_j^* = 1 \tag{31}$$

yazabileceğimize delâlet eder. (31) ifâdesinin tefsiri, (30) un sol tarafındaki iç çarpımda f ile g arasına 1 in sıkıştırılabileceği şeklindedir. Buna göre (31) den faydalanarak (f, g) iç çarpımını (30) un yanındaki toplama çevirebiliriz. Kuvantum teorisinde (31) bağıntısını kullanarak (30) bağıntısını elde etmeye «tam bir hâl takımının araya sıkıştırılması» adı verilir. Bu, pratikte (φ_j, g) veyâ (φ_j, f) iç çarpımları (f, g) çarpımından daha kolaylıkla hesaplanabildikleri zaman çok faydalıdır.

3-4 (0,1) ARALIĞINDA ORTONORMÂL BİR FONKSİYON TAKIMI OLARAK BESSEL FONKSİYONLARI

Ortonormâl açılımlara basit olmayan müşahhas bir misâl olarak (0,1) aralığında Bessel fonksiyonlarını göz önüne alıyoruz. Bölüm: 2-2 de fizikî bir problemi çözerken ortaya Bessel fonksiyonları cinsinden bir seriye açılımın çıktığını bulmuştuk. Buna binâen Bessel fonksiyonlarının sonlu bir aralıkta ortonormâl bir takım teşkil edeceklerini bekliyoruz. Dairesel bir zarın $u(\rho, \varphi, t)$ yer değiştirmeleri için seri şeklindeki çözüm [Bölüm 2, denk. (22)], biri m ye göre $(m\varphi)$ nin sinüs ve kosinüsleri, diğeri ise n ye göre ve parametre olarak alınan $J_m(x)$ in kökleri üzerinden olmak üzere bir çifte toplam ihtivâ etmektedir. 30. sayfadaki problemi göz önünde tutarak tek bir z değişkenini haiz ve m tesbit edilmiş olmak ve $n = 1, 2, 3, \ldots$ değerlerini almak üzere

$$J_m(x_{mn} z) \tag{32}$$

fonksiyon takımının, m nin ayrı ayrı her $m = 0, 1, 2, \ldots$ şeklindeki değeri için $(0 \leqq z \leqq 1)$ aralığında dik bir fonksiyon takımı teşkil edeceğini beklemekteyiz.

Hangi anlamda Bessel fonksiyonlarının hakikaten dik olduklarını göstermek için Bessel fonksiyonları tarafından tahkik olunan diferansiyel denklem ile sınır şartlarına bakmak lâzımdır. Bunun için bütün lûzumlu sonuçlar Ek A da bulunmaktadır. Ek A nın (16) numaralı denkleminde $\nu = \mu$, $Z = \xi = J$ vazedelim. Buna göre

$$(p^2 - q^2) \int^{z} z' J_\mu(pz') J_\mu(qz')\, dz' =$$

$$= z\,[q\, J_\mu(pz)\, J_\mu'(qz) - p J_\mu'(pz)\, J_\mu(qz)] \tag{33}$$

belirsiz integralini elde ederiz. Eğer p ve q parametreleri $J'_\mu(x) = 0$ ın $p = x_{\mu n}$ ve $q = x_{\mu n'}$ kökleri olacak şekilde seçilmişlerse $z = 1$ de (33) ün sağ yanı sıfır olacaktır. Az bir güçlükle $\mu > -1$ için (33) ün sağ yanının $z = 0$ da da sıfır olduğu gösterilebilir. Buna binâen diklik bağıntısı olan

$$(x^2_{\mu_n} - x^2_{\mu_{n'}}) \int_0^1 z J_\mu(x_{\mu_n} z) J_\mu(x_{\mu_{n'}} z)\, dz = 0 \tag{34}$$

ifâdesi tesis edilmiş olur. Bu ise $n' \neq n$ olmak şartıyla

$$\sqrt{z}\, J_\mu(x_{\mu_n} z) \quad \text{ve} \quad \sqrt{z}\, J_\mu(x_{\mu_{n'}} z) \tag{35}$$

fonksiyonlarının (0,1) aralığında dik olduklarını gösterir. [Bazan bu başka türlü ifâde edilir: ya Bessel fonksiyonlarının (0,1) aralığında bir z *ağırlık katsayısını* haiz olarak dik oldukları veyâhut da $J_\mu(x_{\mu_n} z^{1/2})$ fonksiyonlarının (0,1) aralığında dik olduklarından bahsolunur.]

$n' = n$ için (34) denklemi, integralin değerinden müstakil olarak $(n^2_{\mu_n} - x^2_{\mu_{n'}})$ nin sıfır olmasıyla tahkik olunmuş olur. (35) fonksiyonlarının normunun değerini bulmak için Ek A nın (18) numaralı bağıntısını kullanalım. Buna göre

$$\int_0^1 z J^2_\mu(x_{\mu_n} z)\, dz = \frac{1}{2} J^2_{\mu+1}(x_{\mu_n}) \tag{36}$$

olur.

Bölüm: 2-2 nin notasyonu muvacehesinde φ_j ortonormâl Bessel fonksiyonları, $n=1, 2, 3, \ldots$ ve sâbit bir $\mu > 1$ için

$$\varphi_n^{(\mu)}(z) = \frac{\sqrt{2z}}{|J_{\mu+1}(x_{\mu_n})|} J_\mu(x_{\mu_n} z) \tag{37}$$

şeklindedirler. μ nün herhangi bir değeri için bu normalize edilmiş Bessel fonksiyonları (15) ile verilmiş katsayıları haiz olarak (19) açılımında açılım fonksiyonları olarak kullanılabilirler.

(37) ile verilmiş olan normalize edilmiş fonksiyonlar çok kere açık olarak kullanılmazlar. Keyfî bir $f(z)$ fonksiyonu için (0,1) aralığındaki seriye açılım daha ziyâde

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\mu_n} J_\mu(x_{\mu_n} z) \tag{38}$$

şeklinde yazılır. (15) ve (37) ye dayanarak A_{μ_n} katsayılarının

$$A_{\mu_n} = \frac{2}{J^2_{\mu+1}(x_{\mu_n})} \int_0^1 z f(z)\, J_\mu(x_{\mu_n} z)\, dz \qquad (39)$$

ile verildiğini göstermek kolaydır. (38) ve (39) şekilleri *Fourier - Bessel serisi* diye tanınmaktadır.

Problem: (a) x'_{μ_n} lerin $J'_\mu(x)=0$ ın kökleri olması hâlinde $\sqrt{z}\, J_\mu(x'_{\mu_n} z)$ fonksiyonlarının (0,1) aralığında dik olduklarını gösteriniz. (b) Bu dik fonksiyonların normunu bulup (38) ve (39) a eşdeğer olan tâdil edilmiş Fourier-Bessel serisini açıkça yazınız. (c) (38) ve (39) la belirlenen seriye nisbetle, göz önüne alınan seri bakımından, çok daha çabuk yakınsaklaşan açılımları haiz olacak olan $f(z)$ fonksiyonunun tiplerini münakaşa ediniz.

Tıpkı Bölüm: 3-1 in sonunda, titreşen telin ilk değer problemini çözmek için Fourier açılımının kullanılması gibi (38) Fourier-Bessel açılımı da titreşen zarın ilk değer problemini çözmek için kullanılabilir.

Problem: (0,1) aralığında

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x_{1n} J_2(x_{1n})} J_1(x_{1n} z)$$

olduğunu ispatlayınız. Nümerik cetvellerden faydalanarak bunun sıfırdan farklı ilk üç katsayısının değerlerini bulunuz.

3-5 SCHMIDT DİKLEŞTİRME METODU

Bundan önceki bölümlerde φ_j dik fonksiyonlarının verilmiş oldukları farzedilmişti. Esasında, bir fonksiyon takımını açılım fonksiyonları olarak kullanmak için bunların sâdece lineer bağımsız olmaları lâzımdır. Fakat eğer bu fonksiyon takımı hakikatte ortonormâl ise bu çok uygun ve zarif olur. Buna binâen biz de şimdi şu problemle ilgilenmekteyiz: $\alpha=1, 2,\ldots, n$ olmak üzere (a, b) aralığında karesi integre edilebilen lineer müstakil (*) n adet $f_\alpha(x)$ fonksiyonundan müteşekkil bir takım verildi-

(*) Lineer müstakillik, $c_\alpha=0$ olduğu âşikâr hâli hariç, bütün x ler için câri $\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha f_\alpha(x)$ şeklinde hiçbir bağıntısının mevcûd olmamasını derpiş eder.

ğinde acaba bunlardan ortonormâl bir $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ takımını nasıl inşâ edebiliriz?

Lineer bağımsız fonksiyonlar takımından hareketle ortonormâl bir fonksiyon takımının sistematik inşâına *Schmidt dikleştirme ameliyesi* adı verilir. Eğer Bölüm: 3-2 deki iç çarpım notasyonunu kullanacak olursak bu ameliye pek o kadar girift değildir. $f_\alpha(x)$ takımı muayyen bir tarzda sıralanmış olsun. İlk $\varphi_1(x)$ ortonormâl fonksiyonunu keyfî olarak $f_1(x)$ ile orantılı olarak seçiyoruz. Buna göre $f_1(x)$ in normunu $N_1=(f_1, f_1)$ ile gösterecek olursak âşikâr olarak

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{N_1}} f_1(x) \tag{40}$$

olacaktır. İkinci ortonormâl fonksiyon $f_2(x)$ ile $\varphi_1(x)$ in, $\varphi_1(x)$ e dik olan lineer kombinezonunu alarak inşâ edilir. Buna göre

$$\varphi_2(x) \backsim f_2(x) + a_{12}\varphi_1(x)$$

almamız ve a_{12} katsayısını $(\varphi_1, \varphi_2)=0$ olacak şekilde, yâni

$$(\varphi_1, f_2) + a_{12}(\varphi_1, \varphi_1) = 0 \qquad \text{veyâhut} \qquad a_{12} = -(\varphi_1, f_2) \tag{41}$$

olarak seçmemiz lâzımdır. Buna binâen ikinci ortonormâl fonksiyon da

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{N_2}} [f_2(x) - (\varphi_1, f_2)\varphi_1(x)] \tag{42}$$

olur. Buradaki N_2 de köşeli parantez içindeki fonksiyonun normudur, yâni

$$N_2 = (f_2, f_2) - |(\varphi_1, f_2)|^2$$

Üçüncü ortonormâl fonksiyon f_3, φ_1 ve φ_2 nin lineer kombinezonu φ_1 ile φ_2 ye dik olacak şekilde inşâ edilir. Genel olarak, k-ıncı ortonormâl fonksiyon f_k ile $j=1, 2, \ldots, k-1$ olmak üzere bütün φ_j lerin bütün evvelki φ_j lere dik olacak şekildeki lineer kombinezonudur. Netice olarak

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N_k}} \left[f_k(x) - \sum_{j=1}^{k-1} (\varphi_j, f_k)\, \varphi_j(x) \right] \tag{43}$$

olup buradaki normalizasyon katsayısı da

$$N_k = (f_k, f_k) - \sum_{j=1}^{k-1} |(\varphi_j, f_k)|^2 \tag{44}$$

ile verilmiştir. (43) ve (44) vâsıtasıyla elde edilmiş olan $\varphi_k(x)$ fonksiyonlarının takımı ortonormâl bir fonksiyon takımıdır. $f_\alpha(x)$ takımının sıralanma tarzı ve normalizasyon sâbitlerinin faz katsayıları keyfî olduklarından bu takım yegâne mümkün takım değildir.

3-6 LEGENDRE POLİNOMLARI

Schmidt dikleştirme ameliyesinin en basit ve en meşhur misâlini $(-1,1)$ aralığında x in negatif olmayan tam üslerinden müteşekkil lineer bağımsız fonksiyonların takımı arzeder. Uygunluğu sağlamak için α veyâ j üstünden toplamı $\alpha=0$ ve $j=0$ dan başlatıyoruz. Buna göre $f(x)$ fonksiyonları

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots) \tag{45}$$

olurlar. İlk ortonormâl fonksiyon âşikâr olarak

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{46}$$

dir. İkincisi, $a = \int_{-1}^{1} x\varphi_0(x)\,dx = 0$ olmak üzere

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{N_1}}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

yazılabilir. Buna binâen ikinci ortonormâl fonksiyon

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \tag{47}$$

şeklindedir. Üçüncüsü, önceden

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{N_2}}\left(x^2 - a\sqrt{\frac{3}{2}}x - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bunun

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \tag{48}$$

olduğu kolaylıkla gösterilir.

(46) dan (48) e kadar olan denklemler yardımıyla muayyen bir yapının ortaya çıkmakta olduğu görülebilir. Ortonormâl fonksiyonlar âşikâr olarak

$$\left.\begin{array}{l}(j \text{ çift sayı olduğunda})\\(j \text{ tek sayı olduğunda})\end{array}\right\}\ \varphi_j(x) = \text{sâbit} \times \left\{\begin{array}{l}\alpha x^j + \beta x^{j-2} + \ldots + 1\\ \alpha' x^j + \beta' x^{j-2} + \ldots + x\end{array}\right.$$

şeklindedirler. Dördüncü ve beşinci ortonormâl fonksiyonun

$$\varphi_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) \tag{49}$$

$$\varphi_4(x) = \sqrt{\frac{9}{2}}\left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}\right) \tag{50}$$

şeklinde olduğunu göstermek bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

(46) ilâ (50) formülleriyle belirlenen polinomlar ve bunları sırasıyla takibedenler, normalizasyondan sarf-ı nazar, $P_j(x)$ *Legendre polinomları*'dır. Legendre polinomları $x = +1$ için bire eşit olacak şekilde normalize edilmişlerdir. Bunlar (46) ilâ (50) ye kadar olan ifâdelerde parantez içindeki polinomlardır. Normalizasyon katsayılarının $[2j+1)/2]^{1/2}$ oldukları görülmektedir. Buna binâen, $(-1,1)$ aralığı içinde x in kuvvetleriyle meydana getirilen ortonormâl polinomlar

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{2}}\,P_j(x) \tag{51}$$

dirler.

Dolayısıyla keyfî bir $f(x)$ fonksiyonunun $(-1,1)$ aralığında

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx \tag{52}$$

katsayılarını haiz olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{53}$$

şeklinde bir Legendre polinomları serisine açılabilir.

$P_n(x)$ ile gösterilen Legendre polinomları, Legendre diferansiyel denkleminin çözümleri olarak ortaya çıkan $P_\nu(z)$ Legendre fonksiyonlarının özel bir alt cümlesidirler. Legendre fonksiyonlarının bu vechesi Ek: B de münakaşa edilmiştir.

3-7 DİĞER POLİNOMLAR

Legendre polinomları lineer bağımsız x^n kuvvetlerinden elde edilmişlerdi. Basit bir teşmille başka dik polinom takımları da üretilebilir. $\rho(x)$, bütün $n=0, 1, 2,\ldots$ değerleri için

$$\int_a^b \rho(x) x^{2n}\, dx$$

integrali sonlu ve sıfırdan farklı olacak şekilde (a, b) aralığında iyi davranan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\sqrt{\rho(x)}\cdot x^n$ fonksiyonları sonlu ve sıfırdan farklı normları haiz, karelerinin integrali alınabilen lineer bağımsız bir fonksiyon takımı teşkil ederler. Bu fonksiyonlar Böl. 3-5 deki $f(x)$ ler olabilirler ve bunlardan da $\varphi_j(x) = \sqrt{\rho(x)} \times$ (polinom) şeklinde bir ortonormâl fonksiyon takımı üretilebilir. Cetvel: 3-1 de buna misâller verilmiştir. Bu polinomlardan bazılarının Schrödinger dalga denklemini muhtelif koordinat sistemleri için çözerken ortaya çıktıklarını göreceğiz.

Problem: Schmidt dikleştirme metoduyla hesap yaparak (a) x in en yüksek kuvvetinin katsayısı bire eşit, (2) $\varphi_n = \sqrt{\rho(x)}\cdot H_n(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında normalize edilmiş olmak üzere tâyin edilmiş ilk dört Hermite polinomunu inşâ ediniz.

Cetvel: 3-1

Aralık	$\rho(x)$	Polinomun tipi	
$(-1,1)$	1	$P_n(x)$	Legendre
$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$T_n(x)$	Çebişef
$(-1,1)$	$(1-x^2)^{\nu-1/2}$	$C_n^{\nu}(x)$	Gegenbauer
$(0,\infty)$	$\exp(-x)$	$L_n(x)$	Laguerre
$(-\infty,\infty)$	$\exp(-x^2)$	$H_n(x)$	Hermite

3-8 FOURİER İNTEGRALLERİ

Yukarıda göz önüne alınan ortonormâl açılım örnekleri, tam değerler alan bir j indisi ve çok kere sonlu bir aralıkta değişen sürekli bir x değişkeni vâsıtasıyla tasvir olunan $\varphi_j(x)$ şeklinde ortonormâl fonksiyonların sayılabilir bir takımını işin içine sokuyorlardı. Bölüm: 3-2 deki genel münakaşa da bu şartlar altında yapılmıştı. Göz önüne alınan aralık sonsuz olursa tam değerler alan j indisi, bazan, sürekli (veyâ hem münferit ve hem de sürekli değerler alan) bir k indisine dönüşür. Tam değerler alan bir sıralama indisini haiz sonlu bir aralıktan sürekli bir parametreyi haiz sonsuz bir aralığa matematik bakımından tam geçiş genellikle hiç de âşikâr değildir. Fakat biz burada herhangi bir tamlık iddiasında değiliz ve önemli bir örnek olan Fourier integralleri için formel adımları kabataslak göstermekle yetineceğiz. Bunun matematik bakımından tahditlerini bilmeyi arzulayanlar meselâ *E. C. Titchmarsh: "Introduction to the Theory of Fourier Integrals", 2. baskı, Oxford University Press, 1949,* gibi bir kitaba baş vurabilirler.

Bölüm: 3-1 de $f(x)$ gibi bir fonksiyonun $(-\pi, \pi)$ aralığındaki Fourier serisine açılımı sinüsler ve kosinüsler yerine kompleks üstel fonksiyonlarla ifâde edilebilir ve bu $(-d, d)$ aralığına aktarılabilir. Bunun neticesinde seriye açılım

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\, e^{i(m\pi x/d)} \tag{54}$$

şeklini alır ve bu açılımın katsayıları da

$$a_m = \frac{1}{2d}\int_{-d}^{d} e^{-i(m\pi x/d)} f(x)\,dx \tag{55}$$

olurlar. Eğer $f(x)$ diye verilmiş bir fonksiyon $d \to \infty$ için gitgide büyüyen bir aralıkta (54) açılımıyla gösterilmişse bellibaşlı terimlerin sayısının da gitgide artması lâzımdır. Bunun böyle oluşunun sebebi açılım fonksiyonlarının değişim mikdarına işâret eden ilgili âmilin, $(m\pi x/d)$ üstü olması ve d büyüdükçe x in değerindeki muayyen bir değişim için m nin de aynı değişimi muhafaza etmek zorunda bulunmasıdır. Buna binâen $d \to \infty$ için (54) serisi gitgide daha fazla terime sâhip olur ve limitte bir integrale müncer olur. Şimdi

$$\frac{m\pi}{d} \to k$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, d\, a_m \to \mathrm{F}(k)$$

tekabüliyetlerini göz önünde tutarsak (54) ve (55) denklemleri

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k)\, e^{ikx}\, dk \tag{56}$$

$$\mathrm{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \tag{57}$$

ile gösterilen *mütekâbil Fourier integralleri* veya *dönüşmüşlerine* müncer olurlar. $\mathrm{F}(k)$ nın $f(x)$ in Fourier dönüşmüşü ve mütekâbilen $f(x)$ in $\mathrm{F}(k)$ nın Fourier dönüşmüşü olduğu söylenir. Bu formüllerde sürekli k ve x değişkenleri eşit rol oynamaktadırlar. Bundan önceki münakaşamızla teması temin etmek için (56) nın (19) seriye açılımına denk olduğuna ve (57) nin de, $\varphi_j(x)$ ortonormâl fonksiyonu yerine

$$\varphi(k, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx} \tag{58}$$

vazederek (15) ile verilen katsayı olduğuna işâret edelim.

Sonlu $(-d, d)$ aralığı için diklik integrali

$$\int_{-d}^{d} \bar{e}^{i(m'\pi x/d)} e^{i(m\pi x/d)} dx = 2d\delta_{m,m'}$$

dür. $d \to \infty$ limitinde bunun sağ yanı $k = k'$ civarındaki sonsuz küçük bir aralık içinde sonsuz olur. (58) fonksiyonlarının diklik şartının buna binâen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x - x') \tag{59}$$

şeklinde olduğunu tahkik etmek kolaydır. (56) ile (57) nin benzer bir kombinezonu da

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x - x') \tag{60}$$

kapanış veyâ *tamlık bağıntısını* verir. $\varphi_j(x)$ fonksiyonları için (10) ile (60) arasındaki farka mukabil (59) ve (60) da k ile x arasındaki tam bir simetriye şahit olmaktayız. (Fakat her iki misâl biribirlerinden hakikaten çok mu farklıdırlar?)

Fourier dönüşümüyle ilgili mühim bir teorem *Parseval teoremi*'dir. Teorem, (57) şeklindeki Fourier dönüşmüşleri $F(k)$ ve $G(k)$ olan $f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki fonksiyon varsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(k)\, G(k)\, dk \tag{61}$$

olduğunu ifâde eder. Bu teorem, tam kesin olmayan bir yoldan, (56) şeklindeki integralleri (61) in sol yanına vazetmekle ispatlanır. Buna göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk'\, F^*(k')\, G(k)\, e^{i(k-k')x}$$

olur. Eğer önce x e göre integrâl alınacak olursa (59) diklik bağıntısı $\delta(k-k')$ elde edilmek üzere kullanılabilir. Bundan sonra da k' üzerinden integrasyon sûretiyle teorem ispatlanmış olur. Parseval teoremde $f=g$ alınırsa netice olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} | F(k) |^2 dk \tag{62}$$

bulunur. Buna binâen x cinsinden sonsuz aralıkta $f(x)$ in normu k cinsinden sonsuz aralıktaki $F(k)$ nın normuna eşit olmaktadır. $F(k) \longleftrightarrow a_j$ tekabüliyetinden dolayı Parseval teoreminin bu (62) özel şekli, (bir tam takım için bir eşitlik hâlini alan), (18) Bessel eşit(siz)liğinin Fourier integrâli bakımından muadildir.

Klâsik fizikte Parseval teoremi sık sık fizikî büyüklüklerin zaman ve frekansı (veyâ uzay ve dalgasayısını) biribirlerine bağlamakta kullanılır. Meselâ x zaman, k da frekans ise ve $|f(x)|^2$ de zamanın bir fonksiyonu olarak bir antene çarpan gücü gösteriyorsa, buna göre $|F(k)|^2$ antene çarpan gücün spektrum frekansı olarak tefsir edilebilir. Kuvantum mekaniğinde x ile k uzay koordinatıyla momentuma (veyâ zaman ile enerjiye) bağlı olup Parseval teoremi de bir parçacığın veyâ bir sistemin uzaya bağlı davranışıyla momentumuna bağlı davranışı arasında bir irtibat kurmaktadır.

Problem : 1. (a) Aşağıdaki $f(k)$ fonksiyonlarının $F(k)$ Fourier dönüşmüşlerini bulunuz:

(i) $-a < x < a$ için $f_1(x) = 1$

$| x | > a$ için $f_1(x) = 0$

(ii) $x > 0$ için $f_2(x) = e^{-\alpha x}$

$x < 0$ için $f_2(x) = e^{\alpha x}$

(iii) $f_3(x) = e^{-\alpha^2 x^2}$

(b) Yukarıdaki fonksiyonlar için açıkça hesabederek Parseval teoreminin $f=g$ vazedilerek elde edilmiş olan (62) şeklini tahkik ediniz. Parseval teoreminin (61) şeklini $f=f_1$ ve $g=f_2$ alarak açıkça tahkik ediniz.

Problem : 2. (37) normalize Bessel fonksiyonları (0,1) aralığında ortonormâl bir dizi meydana getirirler. (a) Bir aralık değişimi ve uygun bir limite geçme işlemiyle (38) ve (39) Fourier-Bessel serilerinin

$$f(z) = \int_0^\infty A(k)\sqrt{kz}\, J_\mu(kz)\, dk \tag{63}$$

$$A(k) = \int_0^\infty f(z')\sqrt{kz'}\, J_\mu(kz')\, dz' \tag{64}$$

ile belirlenen mütekâbil μ *nüncü mertebeden Hankel dönüşümlerine* tahvil olacaklarını gösteriniz. (b) $(0,\infty)$ sonsuz aralığında Bessel fonksiyonlarının diklik bağıntısının

$$\int_0^\infty z J_\mu(k'z)\, J_\mu(kz)\, dz = \frac{1}{k}\,\delta(k-k')$$

olduğunu gösteriniz.

4
STURM - LİOUVİLLE TEORİSİ ve LİNEER OPERATÖRLER

Bölüm 2 de özdeğer problemlerinin lineer diferansiyel denklemlere sınır şartlarının tatbik edildiği zaman ortaya çıktıklarını gördük. Bölüm 3 de de (titreşen tel ve zar gibi) bazı özel özdeğer problemleriyle ortonormâl açılımlar arasındaki bağlantı tesis edilmişti. Bu bölümde de sürekli sistemler için özdeğer problemleri fikrini genelleştirmek ve bunun formel yapısını incelemek istiyoruz. Başlangıçta tek bir serbest değişkene bağlı diferansiyel denklemlerle meşgûl olacak, fakat daha sonra bunları genelleştirerek, lineer vektör uzayları ve Hilbert uzayı ile mukayese zemini tesis etmek üzere münakaşayı daha mücerret bir şekilde yapacağız.

4-1 STURM-LİOUVİLLE ÖZDEĞER PROBLEMİ

Fiziğin birçok özdeğer problemi

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) + g(x)\varphi + \lambda h(x)\varphi = 0 \tag{1}$$

şeklindeki Sturm-Liouville diferansiyel denklemi vâsıtasıyla tasvir olunurlar. Burada $\varphi(x)$ aranan fizikî büyüklüğü; f, g, h ibâreleri x in verilmiş reel fonksiyonlarını ve λ da (a, b) aralığının uç noktalarında $\varphi(x)$ in tâbî olduğu sınır şartlarından tâyin edilecek olan bir parametreyi (veyâ değişkenlerin ayrışımında ortaya çıkan bir ayrışım sâbitini) göstermektedir. $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında normâl olarak pozitiftir.

Problem : Bessel denklemini [Ek: A nın (1) numaralı denklemi] ve Legendre denklemini [Ek: B nin (1) numaralı denklemi] Sturm-Liouville şeklinde yazıp f, g, h fonksiyonlarını sıralayınız.

Kolaylık olmak üzere münakaşayı $h(x) = 1$ olduğu ve sınır şartlarının da

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{2}$$

ilé ifâde edildiği hâllere inhisar ettireceğiz. Burada biz, genel hâlden ziyâde mefhumlarla ilgilenmekteyiz. Meselenin bütün özü bizim bu basitleştirilmiş problem sınıfında ortaya çıkmaktadır.

(1) in sâdece λ nın mahdut muayyen değerleri için (2) sınır şartını tahkik eden çözümleri haiz olduğu keyfiyeti Bölüm: 2-1 ve 2-2 de özel hâller için tesis olunmuştu. Sınır şartlarını haiz (1) genel denklemi bakımından λ için münferid özdeğerlerin mevcûdiyeti varyasyonlar hesabına dayanarak [Bk. Margenau and Murphy, s. 270; Morse and Feshbach, s. 736] veyâ diferansiyel denklemin bizzat açık olarak incelenmesiyle tesis edilebilir. [Bk. Morse and Feshbach, s. 720-724; bilhassa Şek. 6-8 e dikkat ediniz; kezâ bir sürü nümerik misâl için de C. W. Sherwin'in «*Introduction to Quantum Mechanics*» Holt, New York, 1959, eserinin 3. ve 4. Bölümlerine bakınız.] Neticeyi şöyle ifâde edeceğiz:

Eğer $f(x)$ ve $h(x)$ sonlu (a, b) aralığında pozitif iseler, (1) ve (2) den müteşekkil sistem ancak, λ_0 gibi negatif olmayan ve en küçük bir elemanı haiz sayılabilir sonsuz sayıda λ_j gibi münferid reel özdeğerler dizisi tarafından tahkik olunur. Bundan başka $j \to \infty$ için λ_j özdeğerleri limit noktası veyâ üst sınırı haiz olmaksızın artan değerler alırlar.

Bu teoremin koroleri olarak, eğer λ_j özdeğerleri, artan değerlerine göre sıralanmışsa bunlara tekâbül eden $\varphi_j(x)$ fonksiyonlarının da a ile b arasında gitgide artan sayıda düğüm noktasını haiz oldukları söylenebilir. En küçük λ_0 özdeğeri için $\varphi_0(x)$ in hiçbir düğüm noktası yoktur; λ_1 için $\varphi_1(x)$ fonksiyonu a ile b arasında bir kere sıfır olur; ve bu, bu şekilde gider. Okuyucu bu ifâdelerin doğruluğunu titreşen tel, Fourier-Bessel açılım fonksiyonları v.s. misâlleri için kolaylıkla tahkik edebilir.

$j=0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $\varphi_j(x)$ özfonksiyonları

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{d\varphi_j}{dx}\right) + (g(x) + \lambda_j)\,\varphi_j(x) = 0 \tag{3}$$

özdeğer denklemini ve $\varphi_j(a) = \varphi_j(b) = 0$ sınır şartlarını tahkik etsinler. Şimdi λ_j özdeğerlerinin reel olduklarını ve $\varphi_j(x)$ dizisinin de muhtelif λ_j lere göre dik olduğunu ispatlayacağız. Eğer (3) $\varphi_i{}^*(x)$ ile çarpılır da x üzerinden a dan b ye kadar integre edilirse

$$\int_a^b \left[\varphi_i{}^* \frac{d}{dx}\left(f(x)\,\frac{d\varphi_j}{dx}\right) + (g(x) + \lambda_j)\,\varphi_i{}^*\varphi_j\right] dx = 0$$

olur. Şimdi i ile j yi bu denklemde aralarında değiş tokuş eder, sonra bu denklemin kompleks eşleniğini alır ve böylece elde edilen denklemi bir evvelkinden çıkartırsak

$$\int_a^b \left[\varphi_i^* \frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{d\varphi_j}{dx}\right) - \varphi_j \frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{d\varphi_i^*}{dx}\right)\right] dx + \\ + (\lambda_j - \lambda_i^*)\int_a^b \varphi_i^*\varphi_j \, dx = 0$$

elde edilir. Birinci terimin kısmî integrasyonla hesabı neticesinde

$$\left[f(x)\left(\varphi_i^* \frac{d\varphi_j}{dx} - \varphi_j \frac{d\varphi_i^*}{dx}\right)\right]_{x=a}^{x=b} + (\lambda_j - \lambda_i^*)\int_a^b \varphi_i^*\varphi_j \, dx = 0$$

bulunur. (2) sınır şartları dolayısıyla köşeli parantezli terimin sıfır olduğu âşikârdır. Buna binâen

$$(\lambda_j - \lambda_i^*)\int_a^b \varphi_i^*(x)\, \varphi_j(x)\, dx = 0 \tag{4}$$

diklik integrali elde edilmiş olur. $i=j$ olduğunda (4) denklemi $\lambda_i = \lambda_j$ olmasını yâni özdeğerlerin reel olmasını derpiş eder.

$\varphi_j(x)$ özfonksiyonunun normu, uygun bir sâbitle çarpılmak sûretiyle bire eşit kılınabilir. Buna göre (1) in özfonksiyon dizisi bir ortonormâl dizi teşkil edebilir.* Sturm-Liouville denkleminin bir özfonksiyonlar dizisinin tamlığı direkt metotlarla ispatlanabilir (Bk. Morse and Feshbach, s. 738). Bölüm: 3-2 de teferruatıyla arzedildiği vechile keyfî bir $f(x)$ fonksiyonu φ_j dizisi cinsinden seriye açılabilir.

---

* Şimdiye kadar özdeğerlerin soysuzlaşmaları imkânını yâni muayyen bir $i \neq j$ için $\lambda_i = \lambda_j$ olması imkânını nazar-ı itibâra almadık. Bu takdirde (4), mütekâbil özfonksiyonların otomatik olarak dik olmadıklarını göstermektedir. Bununla beraber soysuzlaşmış özdeğerleri haiz özfonksiyonlar dik olacak şekilde lineeı kombinezonlar teşkil etmek mümkündür. Biz bunun daima, meselâ Schmidt dikleştirme ameliyesiyle, yapılmış olduğunu kabul edeceğiz.

4-2 LİNEER OPERATÖRLER

Sturm-Liouville özdeğer problemi *lineer operatörlerin* genel özdeğer problemlerinin özel bir misâlinden başka bir şey değildir. Şimdi bu genel fikirleri takdim edip notasyonumuzu da daha sâdeleştireceğiz.

Operatör kavramı matematik fizikteki en esaslı kavramlardan biridir. Önce, (a, b) aralığında tek bir bağımsız x değişkeninin uslu davranışlı fonksiyonları üzerine tesir ederek aynı değişkenin başka fonksiyonlarını veren operatörleri münakaşa edeceğiz.

$$g(x) = \mathrm{K}f(x) \tag{5}$$

denklemi: «$f(x)$ üzerine tesir eden K operatörü $g(x)$ verir» şeklinde okunur. Bu operatörler denklemine birkaç misâl şunlardır:

$$g = 5f, \quad g = f^3, \quad g = \frac{df}{dx}, \quad g = \int_0^x x' \frac{d}{dx'}(x'f(x'))\,dx', \quad g = x\frac{d^2f}{dx^2} + f^2.$$

Kuvantum mekaniğinde *lineer operatörler* fevkalâde önemlidirler. Bir lineer operatör, α ve β sâbitler olmak üzere

$$\mathrm{K}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \mathrm{K}f(x) + \beta \mathrm{K}g(x) \tag{6}$$

şartını tahkik bir operatördür. Yukarıda misâl olarak verilen operatörlerden birincisi ,üçüncüsü ve dördüncüsünün lineer olmasına mukâbil ikincisi ve beşincisi lineerlik vasfını haiz değillerdir.

Meşgûl olacağımız mevzular için genel K lineer operatörü açık olarak

$$g = \mathrm{K}f \longrightarrow g(x) = \int_a^b k(x, x')\, f(x')\, dx' \tag{7}$$

şeklinde yazılabilir. $k(x, x')$ fonksiyonuna K *operatörünün çekirdeği* adı verilir. Her ne kadar bu (7) ifâdesi diferansiyel operatör ihtivâ etmiyor gibi görünüyorsa da Dirac'ın delta fonksiyonu yardımıyla diferansiyel operatörlerin elde edilebileceğini görmek kolaydır. Meselâ $\mathrm{K} = (d^2/dx^2) + \alpha^2$ ise $k(x, x') = [(d^2/dx^2) + \alpha^2]\,\delta(x - x')$ alınacaktır. Genel olarak, meselâ (1) veyâ (3) ifâdesindeki Sturm-Liouville operatörü gibi herhangi bir $D(x)$ diferansiyel operatörü için çekirdek

$$k(x, x') = D(x)\ \delta(x-x')$$

ile verilecektir.

K ya *ek* K† operatörü bütün f ve g fonksiyonları için (belki bazı sınır şartlarına bağlı olarak) iç çarpım bağıntısıyla

$$(g, Kf) = (K^\dagger g, f) \tag{8}$$

olarak târif edilir. Burada f ile g nin keyfî fonksiyonlar olduklarını ve aralarında (5) gibi bir bağıntı olmadığına işâret edelim. (7) den faydalanarak hesap yapıldığı takdirde $k^\dagger(x,x')$ *ek çekirdeğinin*

$$k^\dagger(x,x') = [k(x,x')]^* \tag{9}$$

ile verildiğini buluruz.

Eğer $K^\dagger = K$ ise K operatörünün *hermitsel* veyâ *kendi kendine ek* olduğu söylenir. Bu takdirde Kf nin f ile iç çarpımı reel olur:

$$(\text{K hermitsel ise}) \qquad (f, Kf) = (f, Kf)^* \tag{10}$$

Kuvantum mekaniğinde, bütün gözlenebilir büyüklüklerin veyâ ölçüm neticelerinin (10) şeklinde ifâde olunabilecekleri temel bir kabul olduğundan hermitsel operatörlerin bu özellikleri onların kuvantum mekaniğinde müstesnâ bir mevki işgâl etmelerini sağlamaktadır. Gözlenebilen büyüklükler reel olduklarından bunlara tekâbül eden operatörlerin de hermitsel olmaları zarurîdir.

Eğer $K^\dagger = -K$ ise K operatörünün antihermitsel olduğu söylenir. (a,b) aralığının uç noktalarında sıfır olan fonksiyonlara nisbetle d/dx antihermitseldir. Aynı şey iki hermitsel operatörün komütatörleri için de vâriddir. (Bk. Bölüm: 4-4, Problem: 2).

4-3 LİNEER HERMİTSEL BİR OPERATÖR İÇİN ÖZDEĞER PROBLEMİ

(a,b) aralığının uçlarında $\varphi(x)$ uygun bazı sınır şartlarını haiz olmak üzere, lineer bir K operatörünün özdeğer problemi

$$K\varphi = \lambda\varphi \tag{11}$$

şeklinde ifâde olunabilir. (11) bağıntısı λ nın λ_i ile gösterilen ancak bazı özel değerleri ve bunlara tekâbül eden $\varphi_i(x)$ fonksiyonları tarafından tahkik edilir. Bu özdeğerler ve özfonksiyonlar için

$$K\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \tag{12}$$

olur. Şimdi, K hermitsel olduğu takdirde özdeğerlerin de reel olacağı özelliğini ispatlayabiliriz. Bunun için sâdece (12) nin her iki yanının φ_i ile iç çarpımını teşkil etmek kâfidir. Buna göre

$$\lambda_i = \frac{(\varphi_i, K\varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$$

bulunur. (10) bağıntısına binâen λ_i nin reel iki sayının oranı olduğu ve dolayısıyla da reel olduğu görülür.

Hermitsel bir operatörün özdeğerlerinin reelliğini tesis ettikten sonra farklı özdeğerlere tekâbül eden özfonksiyonların dikliğini ispatlayabiliriz. Şimdi (12) ifâdesini farklı iki λ_i ve λ_j özdeğerleri için yazalım:

$$K\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$$

$$K\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$$

Bundan sonra birinci denklemin soldan φ_j ile iç çarpımını teşkil edelim ve bundan ikinci denklemin sağdan φ_i ile iç çarpımını çıkartalım. Bu

$$(K\varphi_j, \varphi_i) - (\varphi_j, K\varphi_i) = (\lambda_i - \lambda_j^*)(\varphi_j, \varphi_i) \tag{13}$$

verir. K eğer hermitsel ise (8) e binâen bu son ifâdenin sol tarafı sıfıra eşittir. Buna binâen ve artık λ_j reel olmak üzere diklik şartları olarak

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\varphi_j, \varphi_i) = 0 \tag{14}$$

bulunmuş olur. Bu denklem Sturm-Liouville problemi için cârî olan (4) denkleminin aynıdır. Burada da soysuzlaşmış özdeğerler ve mütekâbil özfonksiyonların dikliği hakkındaki aynı mütâlea cârîdir.

Problem: (3) den faydalanarak Sturm-Liouville denkleminin lineer bir hermitsel operatörlü bir özdeğer problemi târif etmesi için $f(x)$.

$g(x)$ ve $\varphi(x)$ üzerindeki şartların ne olmaları lâzım geldiğini tâyin ediniz.

4-4 OPERATÖRLERİN DİĞER ÖZELLİKLERİ

Tek bir K lineer operatörünün özelliklerini gözden geçirdikten sonra şimdi operatör fonksiyonlarına ve iki veyâ daha fazla operatöre bağlı özelliklere dönüyoruz. Önce bir K *operatörünün kuvveti* ile

$$K^n f = K(K \ldots K(Kf)) \tag{15}$$

kastedildiğine işâret edelim. Buna göre $K^{n+m} = K^n K^m$ olacaktır.

Ters K^{-1} operatörü, $g = Kf$ denkleminin f ye göre çözülebilir olması şartı tahtında

$$f = K^{-1} g \tag{16}$$

denklemiyle târif olunmaktadır. Buna binâen

$$\left.\begin{aligned} K^{-1}Kf &= K^{-1}g = f \quad \text{veya} \quad K^{-1}K = 1 \\ \text{ve} \qquad KK^{-1}g &= Kf = g \quad \text{veya} \quad KK^{-1} = 1. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

(17) bağıntılarını tesis ederken f üzerine tesir eden iki operatörün AB çarpımının

$$ABf = A(Bf) \tag{18}$$

ile târif edildiği özelliğinden faydalandık.

Müteakip iki operatörü tatbik ederken tatbik sırası önemlidir. Şu hâlde, genel olarak, keyfî bir f fonksiyonu için

$$ABf \neq BAf \tag{19}$$

dir. Eğer $ABf = BAf$ olursa A ile B nin komütatif oldukları söylenir. Aksi hâlde bunlar biribirleriyle değiş tokuş edilemezler. A ve B diye iki operatörün *komütatörü* [A,B] ile gösterilir ve

$$[A,B] = AB - BA \tag{20}$$

diye târif olunur. (20) yazarken, bunun bir denklem anlamını haiz olabilmesi için, her iki yanın da aynı bir $f(x)$ fonksiyonu üzerine tatbik olunduğu anlaşılmalıdır. Komütatördeki operatörlerin sırası da önemlidir ($[A,B] = -[B,A]$).

Problem: 1. $A = d/dx$ ve $B = x$ operatörlerinin mübâdele edilemediklerini açıkça gösteriniz ve bunların komütatörünü de hesaplayınız.

Problem: 2. İki hermitsel operatörün komütatörünün antihermitsel olduğunu gösteriniz.

Bir operatörün fonksiyonları formel olarak bir Taylor serisine açılımla târif edilebilir. Eğer $F(z)$ sıfır civarında analitik bir fonksiyon ve K da lineer bir operatörse F(K) operatörü

$$F(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n F(z)}{dz^n} \right)_{z=0} K^n \tag{21}$$

şeklinde târif olunur. Bu târifi tatbik ederken çok dikkatli olmak lâzımdır, fakat genel olarak aklı selîm daimâ yolu işâret eder.

Problem: Eğer $K = d/dx$ ise (21) yardımıyla ve a bir sâbit olmak üzere

$$e^{aK} f(x) = f(x+a)$$

olduğunu gösteriniz.

5
LİNEER VEKTÖR UZAYLARI

3. ve 4. Bölümlerde (muselâ x, ρ, φ, z v.s... gibi) sürekli değişkenler ve bunların fonksiyonlarıyla meşgûl olduk. Bunlar, (meselâ titreşen tel, katı bir cisim içindeki elâstik dalgalar, elektromagnetik alanlar v.s... gibi) süreklilik arzeden fizikî sistemlerle ilgiliydiler. Diğer taraftan 2. Bölümde de sonlu sayıda serbestlik derecesini haiz sistemlerle simültane lineer denklemler ve matrislerin kâbil-i telif olduklarını gördük. Şimdi ise çok daha mücerret bir inceleme tarzının görünüşte biribirlerinden ayrı teknikleri birleştirebileceğini göstermek istiyoruz. Kolaylığı temin amacıyla münakaşamız sonlu sayıda boyutu haiz bir uzaya atfen takdim olunacaktır. Sonsuz boyutlu bir uzaya geçiş bir limit işlemine müracaatla mâkûl kılınabilirse de matematik kesinlik arzu edildiği takdirde teferruatlı bir şekilde göz önüne alınması icâbeden bir sürü mesele ortaya çıkmaktadır. Biz kesin ve kat'î bir münakaşaya girişecek değiliz. Sonlu boyutlu uzayda elde edilen sonuçların âşikâr bir genelleştirmede sonsuz boyutlu uzayda da cârî oldukları kabul edilecektir. Bölüm: 5-10 un başında bu hususta bazı ihtiyatî ikazlar yapılmış bulunmaktadır.

5-1 HAL VEKTÖRLERİ VE TEMSİLCİLER

Kuvantum mekaniğinde *bir sistemin hâli* kavramı matematik formalizm bakımından merkezî bir mevkii haizdir. Kezâ klâsik fizikte de, her ne kadar tâbirleri elemanter kademede kullanılmıyorsa da, bir *hâl* veyâ *hâl vektörü* fikri tatbik olunabilir. Hâl vektörü fizikî bir sistemin davranışını tamamen tasvir etmektedir. Bir hâl vektörü fikrini tesis etmek üzere bazı klâsik misâller göz önüne alalım.

Bölüm: 2-3 deki, denge durumu civarında küçük salınımlara tâbî mekanik sistem için N adet yer değiştirme ile N adet hızdan müteşekkil $(q_1, q_2, \ldots, q_N\,;\, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N)$ takımı hareketi tamamen tasvir ederler ve bu bakımdan da bir hâl vektörü olarak düşünülebilirler. «Vektör» kelimesini geometrik bir anlamı haiz kılmak için 2N boyutlu bir uzayda 2N eksen üzerine izdüşümleri $q_i(t)$ ve $\dot{q}_i(t)$ ler olan bir $Q(t)$ hâl vektörü düşünebiliriz. Buna göre, $Q(t)$ vektörünün ucunun bu matematik uzaydaki hareketi mekanik sistemin hâl-i hâzırdaki hareketini tâyin edecektir. Bu matematik uzay, tabiî, klâsik fiziğin faz uzayından başka bir şey değildir.

Titreşen tel gibi sürekli bir sistem için hâl vektörünü, tel üzerindeki her noktanın zamanın bir fonksiyonu olarak yer değiştirmesi ve hızıyla veyâhut da buna eşdeğer başka bir şeyle özdeş kılmak zarurîdir.

Hâl vektörü muhtelif matematik ifâdelere büründürülebilen mücerret bir büyüklüktür. Hâl vektörünü tasvir etmek için seçilen özel matematik formalizme *temsil* (veyâ *röprezantasyon*) adı verilir ve hâl vektörü de bu formalizmde *temsilcileri* haiz olur. Meselâ küçük salınımlar problemi, hâl vektörünün temsilcisi olarak 2. Bölümün (31) numaralı denklemindeki gibi bir sütûn vektörüyle bir matris temsili içinde münakaşa edilebilir. Titreşen tel için hâl vektörü, $u(x,t)$ ve $\partial u(x,t)/\partial t$ temsilcileri yardımıyla *koordinat temsili* muvâcehesinde veyâhut da ($m=0,1,2,\ldots$ olmak üzere) A_m ve B_m Fourier katsayılarının takımı, temsilcilerini göstermek şartıyla *Fourier temsili* muvâcehesinde münakaşa edilebilir. Her iki temsil arasındaki bağlantı 2. Bölümün (7) numaralı denklemi vasıtasıyla sağlanmaktadır. A_m ve B_m lerin sayılabilir sonsuz takımının sonsuz uzunlukta bir sütûn vektörü şeklinde sıralanabileceğini ve titreşen tel için bir matris temsili olarak düşünülebileceğini de kaydediniz.

Temsilin seçimi eldeki fizikî probleme bağlıdır.

5-2 n BOYUTLU BİR ÖKLİT UZAYINDAKİ KOMPLEKS VEKTÖRLER

Temel vektörleri kompleks vektörler olan n boyutlu bir Öklit uzayının özelliklerini münakaşa etmek istiyoruz. Hâl vektörleri

$$\xi \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) \tag{1}$$

şeklinde sıralanmış n kompleks sayıya delâlet eden tek bir grek harfiyle gösterileceklerdir. Bu n kompleks sayı, bir bakıma, uzaydaki bir noktanın «koordinatları» olarak düşünülebilirler.

İki hâl vektörünün toplamı

$$\xi + \eta \rightarrow (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n) \tag{2}$$

kaidesine göre yapılacaktır.

Bir vektörün (lâtin harfiyle gösterilen) bir skalerle çarpımı da

$$a\xi \rightarrow (a\xi_1, a\xi_2, \ldots, a\xi_n) \tag{3}$$

kaidesine riâyet edecektir.

Bir ξ vektörünün *norm*'u $|\xi|^2$ veyâ N_ξ ile gösterilir ve bu

$$N_\xi \equiv |\xi|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_n|^2 \tag{4}$$

ile târif olunmaktadır. Koordinatların karelerinin toplamı yerine, bunların mutlak değerlerinin kareleri *norm* olarak seçilmiş bulunmakta ve böylece bütün vektörler negatiften farklı olmaktadırlar. Bu durum fizikî tatbikat için en uygunudur. Bir vektörün $|\xi|$ ile gösterilen *uzunluğu* normunun pozitif kareköküdür. Eğer vektörün normu bire eşitse buna *normlanmış* vektör denir.

Normun târifine, ξ ve η diye iki vektörün *skalar çarpım*ının târifi eşlik etmektedir. Skaler çarpım (ξ, η) ile gösterilmekte olup

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i \tag{5}$$

ile târif edilmiştir. Buradan ξ nin normunun $N_\xi = (\xi, \xi)$ şeklinde yazılabileceğini ve vektörün uzunluğunun da $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ olduğunu görmekteyiz.

Problem: $|(\xi, \eta)| \leqq |\xi| \times |\eta|$ ile verilen Schwartz eşitsizliğini ispatlayınız. Hangi şartlar altında bu eşitsizlik bir eşitlik olur?

Eğer skaler çarpımları sıfırsa $[(\xi, \eta) = 0]$, ξ ve η gibi iki hâl vektörüne *dik* (veyâ *ortogonâl*) denir.

Okuyucu, şüphesiz ki, bu bölümdeki tâbirlerin ve notasyonun (a,b) sürekli aralığındaki ortonormâl fonksiyonların münakaşa edilmiş olduğu Bölüm: 3-2 dekilere dikkate şâyân bir şekilde benzemekte olduğunu farketmiştir. Burada skaler çarpımı göstermek için bir iç çarpımı göstermek üzere kullanılmış olan sembollerin aynısı kullanılmıştır; diklik şartı da sembolik olarak aynıdır ve bu benzerlik böylece devam edegitmektedir. Şekil bakımından bu benzerlik açıktır. Bölüm: 3-2 nin matematiği sonsuz boyutlu bir lineer vektör uzayınınkine eşdeğerdir. Sonlu veyâ sonsuz aralıklarda karelerinin integrali alınabilen, ve, kompleks skaler veyâ iç çarpımları haiz fonksiyonlarla belirlenen böyle bir uzaya *Hilbert uzayı* adı verilir. Kuvantum teorisinde kullanılan uzay hemen hemen her zaman Hilbert uzayıdır.

Bölüm: 3-2 deki formalizmle buradakinin arasındaki bağlantıyı $n \to \infty$ için daha da âşikâr kılmak üzere (5) skaler çarpımını göz önüne alalım. Eğer $\Delta = 1/n$ diye bir artış târif eder de ξ ve η nın bileşenlerini $f_i = \sqrt{n}\,\xi_i$, $g_i = \sqrt{n}\,\eta_i$ şeklinde tekrar normlarsak artık (5)

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} (f_i^* g_i)\Delta$$

yazılabilir. $n \to \infty$ limitinde bu toplam bir integrale gider ve skaler çarpımın târifi de Bölüm: 3-2 nin (8) numaralı denklemine müncer olur. Diğer işlemler de, (1 den n ye kadar) münferit değerler alan i indisini (a,b) aralığında sürekli değerler alan x değişkeniyle ikâme edip, toplamlar yerine de integraller koymak sûretiyle benzer şekilde dönüşürler. (Bk. Bölüm: 5-10).

Bundan sonraki münakaşalarda, genel olarak, n yi sonlu olarak muhafaza edeceğiz. Bununla beraber münferit değişkenli (n sonlu)) ve sürekli değişkenli (n sonsuz) büyüklüklerinin ve işlemlerin temel olan ayrılıkları zımnen göz önünde bulundurulacaktır.

5-3 KAİDELER VE KAİDE VEKTÖRLERİ

Bir vektör uzayının boyut sayısı lineer bağımsız vektörlerinin maksimum sayısıyla tâyin edilir. Bir *n boyutlu uzay* için *n adet lineer bağımsız vektör* olabilir, fakat aslâ $(n+1)$ adet olamaz. Uzaydaki herhangi bir ξ vektörü seçilmiş bir n adet η_α lineer bağımsız vektör takımı cinsinden ifâde olunabilir. Bu, lineer bağımlılığın

$$a_0\xi + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_n\eta_n = 0$$

ile verilen târifinden görülebilir. Bunu ξ için çözersek, $A_\alpha = -a_\alpha / a_0$ olmak üzere

$$\xi = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \eta_\alpha \tag{6}$$

buluruz.

(6) ifâdesindeki açılım vektörleri takımı olarak her ne kadar herhangi n adet lineer bağımsız vektör grubunu kullanabilirsek de ortonormâl bir vektör takımına mâlik olmak daha uygundur. Adî uzayda $\vec{i} \to (1,0,0)$, $\vec{j} \to (0,1,0)$, $\vec{k} \to (0,0,1)$ birim vektörleriyle ünsiyetimiz vardır. n boyutlu uzayımızdaki n adet lineer bağımsız vektöründen müteşekkil ortonormâl bir vektör takımını ($\alpha = 1,2,\ldots, n$ olmak üzere) φ_α ile göstereceğiz. Diklik şartı

$$(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{7}$$

ile ifâde olunur. Buradaki α indisinin farklı n boyutlu vektörlere delâlet ettiğine ve bir vektörün (1) ile verilmiş olan târifindeki n kompleks sayı takımındaki indislerle alâkası olmadığına dikkat ediniz. Filhakika, φ_α vektörlerinden birinin (1) târifine benzeyen açık şekli çift indis ihtivâ etmek zorundadır

$$\varphi_\alpha \to (\varphi_{\alpha 1}, \varphi_{\alpha 2}, \ldots, \varphi_{\alpha n}) \tag{8}$$

φ_α vektörlerinin ortonormâl takımına bir *taban* adı verilir ve φ_α vektörlerine de *taban vektörleri* denir. Farklı pekçok taban vektörleri takımları vardır. Meselâ âdî uzayda $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ veyâ $(\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi)$ veyâhut da daha başkalarını kullanabiliriz. Lineer bağımsız bir vektör takımından, Schmidt dikleştirme metodu (Bk. Bölüm: 3-5) vâsıtasıyla daima bir taban elde edilebilir.

Problem: Adî uzayda lineer bağımsız üç vektör (1,1,1), (0,−1,0), (−2,0,1) koordinatlarıyla târif edilmiş olsunlar. (Uygun bir şekilde normalize ederek) birinci vektörü bir tabanın ilk âzâsı olarak seçip Schmidt usûlüyle tabanın geri kalan kısmını elde ediniz. (7) ortonormâllik şartını da açık olarak tahkik ediniz.

(6) açılımı φ tabanı cinsinden yazılırsa

$$\xi = \sum_\alpha a_\alpha \varphi_\alpha \tag{9}$$

olur. a_α katsayıları, (9) un her iki yanının, φ_α takımının tipik bir âzâsıyla skaler çarpımını alarak tâyin edilebilir. Sonuç

$$a_\alpha = (\varphi_\alpha, \xi) \tag{10}$$

dir, ve böylece açılım

$$\xi = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha (\varphi_\alpha, \xi) \tag{11}$$

şeklinde yazılabilir.

Bölüm: 3-3 ün tamlık bağıntısının bir benzeri de burada bulunur. Notasyonumuzu biraz daha âşikâr kılmak sûretiyle bu (11) den elde edilebilir. Eğer ξ vektörünün bileşenlerinden birini, meselâ ξ_i yi yâni (1) takımındaki kompleks sayılardan birini tebârüz ettirir ve (11) deki skaler çarpımını (5) e binâen yazarsak

$$\xi_i = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha i} \sum_{j} \varphi_{\alpha j}{}^{*} \xi_j \tag{12}$$

elde ederiz. Toplam sıraları aralarında değiş tokuş edilirse (12)

$$\xi_i = \sum_{j} \left(\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}{}^{*} \right) \xi_j \tag{13}$$

olur. Parantezler içindeki büyüklük iki (i,j) indisine bağlı olup bu bir matris düzeni olarak düşünülebilir. Eğer (11), ve dolayısıyla (13), keyfî vektörler için cârî ise (13) deki j üzerinden yapılan toplam $j=i$ olan tek bir terime müncer olmak zorundadır. Buradan

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}{}^{*} = \delta_{ij} \tag{14}$$

şartını elde ederiz. Bu, Bölüm: 3-3 ün tamlık bağıntısının benzeri olup *açılış teoremi* adını taşımaktadır.

Bizim (11) den (14) e varıncaya kadar yapmış olduğumuz şekilde bütün indisleri ve toplamaları yazmak biraz sıkıcıdır. Buna binâen sık sık daha kısa bir notasyon kullanılır. Skaler veyâ iç çarpım, (5) de olduğu gibi ξ nin elemanlarının kompleks eşleniklerini almayı bir haç işâretiyle göstererek,

$$(\xi, \eta) = \xi^{+} \eta \tag{15}$$

şeklinde yazılır. (14) de ortaya çıkan çarpım, bir dış çarpım olup

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha i}\varphi_{\alpha j}^{*} = \delta_{ij} \longrightarrow \varphi_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{+} = 1 \tag{16}$$

şeklinde yazılır. (16) denklemi $(n\times n)$ lik bir sayılar düzeni olarak tefsir edilmelidir. Bu diyadik veyâ âdî vektör cebrinin benzeridir. (15) ve (16) daki çarpanların sırasının önemli olduğuna dikkat ediniz. $\xi^{\dagger}\eta$ nın tek bir kompleks sayı olmasına karşılık $\eta\xi^{\dagger}$ bu cins sayıların bir düzenidir.

5-4 TABAN DEĞİŞİMİ

Yukarıda taban vektörleri takımının tek olmadığına işâret edilmişti. Şimdi ortaya iki *taban vektörleri takımının*, veyâ *tabanın*, biribirlerine nasıl bağlı oldukları meselesi çıkmaktadır. Bir takımdan diğerine dönüşüm taban değişimi adını alır. İki tabanın φ_α $(\alpha=1,2,\ldots,n)$ ve ψ_β $(\beta=1,2,\ldots,n)$ ortonormâl vektör takımları olduklarını farzedelim. Buna göre, ikinci takımın her âzâsı (9) a binâen birinci takım cinsinden açılabilecektir.

$$\psi_\beta = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha b_{\alpha\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

$b_{\alpha\beta}$ lar burada açılım katsayılarını göstermektedirler. Şimdi derhâl görüleceği üzere (17) deki çarpanların sırası ve $b_{\alpha\beta}$ nın indisleri uygun olacak şekilde seçilmişlerdir. Benzer şekilde de herhangi bir φ_α da ψ_β tabanı cinsinden açılabilir

$$\varphi_\alpha = \sum_{\beta'} \psi_{\beta'} c_{\beta'\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

Açılım katsayıları olan $b_{\alpha\beta}$ lar (veyâ $c_{\alpha\beta}$ lar) B (veyâ C) ile göstereceğimiz bir kare matrisin elemanlarını teşkil etmek üzere düzenlenebilirler.

Eğer (18) i (17) ye ikâme edersek

$$\psi_\beta = \sum_{\alpha} b_{\alpha\beta} \sum_{\beta'} \psi_{\beta'} c_{\beta'\alpha}$$

veyâ

$$\psi_\beta = \sum_{\beta'} \psi_{\beta'} \sum_\alpha c_{\beta'\alpha} b_{\alpha\beta} \tag{19}$$

bağıntısını elde ederiz. (19) un ψ_β tabanındaki bütün vektörler için doğru olmasını teminen β' üzerindeki toplamın tek bir $\beta'=\beta$ terimine müncer olması gerekir. Bu ise $c_{\beta\alpha}$ ve $b_{\alpha\beta}$ açılım katsayılarının

$$\sum_\alpha c_{\beta'\alpha} b_{\alpha\beta} = \delta_{\beta'\beta} \tag{20}$$

bağıntılarını gerçeklemeleri lâzım geldiğini göstermektedir. (20) nin sol yanı matris çarpımının târifidir. Buna göre B ve C matrisleri cinsinden (20), I ile $(n \times n)$ lik birim matrisi göstermek üzere,

$$\mathrm{CB} = \mathrm{I} \tag{21}$$

şeklinde yazılır. Bu ise

$$\mathrm{C} = \mathrm{B}^{-1} \quad \text{veyâ} \quad \mathrm{B} = \mathrm{C}^{-1} \tag{22}$$

demektir.

Hâli hâzırda (17) ilâ (22) sonuçları sâdece biribirlerinden lineer bağımsız olan φ_α ve ψ_β takımlarına bağlıdırlar. Eğer *tabanlar* (yâni ortanormâl takımlar) mevcutsa B ve C matrisleri *üniter matrisler* denilen özel bir matris sınıfına müncer olurlar. (17) açılımını kullanarak ψ_β taban vektörlerinin ortonormâlliğini göz önüne alalım:

$$\delta_{\beta'\beta} = (\psi_{\beta'}, \psi_\beta) = \sum_\alpha \sum_\alpha b_{\alpha'\beta'}{}^* \, b_{\alpha\beta} (\varphi_{\alpha'}, \varphi_\alpha) \tag{23}$$

Eğer φ tabanı da ortonormâl ise, bu takdirde (23) sistemi

$$\delta_{\beta\beta'} = \sum_\alpha b_{\alpha\beta'}{}^* \, b_{\alpha\beta} \tag{24}$$

ya müncer olur. Birinci çarpandaki indislerin yanlış sırada bulunmalarından sarfı nazar, bu aşağı yukarı matris çarpımının târifidir. *Ek matris* târifiyle buna da çâre bulunur. Eğer B matrisinin elemanları $b_{\alpha\beta}$ iseler B ye ek olan matris B† ile gösterilir ve elemanları da

$$(B^{+})_{\alpha\beta} \equiv b_{\alpha\beta}{}^{+} = b_{\beta\alpha}{}^{*} \tag{25}$$

dır. (Buna göre ek matris B nin transpoze matrisinin kompleks eşleniğidir: B†=B*). Matris diliyle (24)

$$B^{\dagger} B = I \tag{26}$$

şeklinde yazılır. (26) şartına uyan her matrise *üniter matris* denir. Bir *üniter matrisin* tersinin bu matrise *ek matris* olduğunu görmekteyiz.

Okuyucu herhâlde Bölüm: 2-4 de eksenlerin rotasyonunu ve dik dönüşümleri münakaşa etmiş olduğumuzu hatırlayacaktır. Buradaki matematik sâdece reel sayılar ve matrisleri göz önüne almak şartıyla bir taban değişiminin matematiğine özdeştir. *Reel, üniter* bir matrise *dik* matris adı verilir. (26) ve (21) in ışığında C=B† olduğunu ve dolayısıyla (17) ve (18) taban değişimi denklemlerinin de

$$\begin{aligned} \psi_\beta &= \sum_\alpha \varphi_\alpha b_{\alpha\beta} \\ \varphi_\alpha &= \sum_\beta \psi_\beta b_{\beta\alpha}{}^{+} \end{aligned} \tag{27}$$

olduklarını görmekteyiz.

Problem: Adî uzaydaki $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dikdörtgen tabanını $(\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi)$ küresel tabanına dönüştüren dik matrisi açık bir şekilde tâyin ediniz.

Bu fikirler Bölüm: 5-9 daki özdeğer probleminde önemi haiz olacaklardır. Kezâ, keyfî bir ξ vektörünün bir φ tabanı cinsinden ve başka bir ψ tabanı cinsinden açılım katsayıları arasındaki bağlantı da ilgi çekicidir. İki açılım da

$$\xi = \sum_\alpha a_\alpha \varphi_\alpha = \sum_\beta a_\beta{}' \psi_\beta \tag{28}$$

ile verilmişlerdir. Eğer ikinci açılımdaki ψ_β yı temsil etmek üzere (27) kullanılacak olursa

$$\xi = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} b_{\alpha\beta}\, a_{\beta}'\, \varphi_{\alpha} \tag{29}$$

elde ederiz. (28) deki ilk toplamla mukayese a ve a' katsayılarının

$$a_{\alpha} = \sum_{\beta} b_{\alpha\beta}\, a_{\beta}' \tag{30}$$

ile biribirlerine bağlı olduklarını göstermektedir. Benzer şekilde

$$a_{\beta}' = \sum_{\alpha} b_{\beta\alpha}^{+}\, a_{\alpha} \tag{30'}$$

dır.

5-5 LİNEER OPERATÖRLER VE BUNLARIN MATRİS TEMSİLLERİ

n boyutlu bir vektör uzayındaki bir A operatörü, keyfî bir ξ vektörüne tatbik olunduğunda onu başka bir η vektörüne dönüştüren bir nesnedir. Bu dönüşümü

$$\eta = A\xi \tag{31}$$

şeklinde yazıyoruz. Biz burada sâdece, c ile skaler bir sayıyı göstermek üzere,

$$\begin{aligned} A(c\xi) &= cA\xi \\ A(\xi + \eta) &= A\xi + A\eta \end{aligned} \tag{32}$$

şartlarını gerçekleyen *lineer operatörleri* göz önünde bulunduracağız.

n boyutlu uzaydaki bir operatör, eğer her vektör üzerindeki etkisi biliniyorsa tâyin edilmiş olur. Keyfî bir vektör bir φ_{α} tabanına göre açıldığına göre bir operatörün de, n taban vektörü üzerindeki etkisi bilindiği takdirde belirlenmiş olacağı âşikârdır. φ_{α} üzerine tatbik olunan A operatörü genellikle φ_{α} yı bütün taban vektörlerinin lineer bir kombinezonuna dönüştürür. Buna göre

$$A\varphi_\alpha = \sum_\beta \varphi_\beta a_{\beta\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

olur. $a_{\beta\alpha}$ açılım katsayılarındaki ilk indis toplama değişkenidir; ikinci indis ise A nın etkilediği özel taban vektörüne delâlet etmektedir.

(31) deki η yı tâyin etmek için ξ nin verilmiş olması hâlinde (33) ün kâfî olduğunu göstermek üzere ξ ve η nın φ_α tabanı cinsinden açılımlarını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_\alpha \varphi_\alpha c_\alpha \\ \eta &= \sum_\beta \varphi_\beta b_\beta \end{aligned} \tag{34}$$

b_β nın c_α ve $a_{\beta\alpha}$ nın bilinmesi neticesinde belirlendiğini göstermek istiyoruz. ξ nin açılımındaki her taban vektörüne A yı tatbik ederek

$$\eta = A\xi = \sum_\alpha \sum_\beta \varphi_\beta a_{\beta\alpha} c_\alpha \tag{35}$$

elde ederiz. (35) in, η nın açılımını veren (34) ile karşılaştırılması

$$b_\beta = \sum_\alpha a_{\beta\alpha} c_\alpha \tag{36}$$

olduğunu gösterir. Bu da b_β katsayılarının $a_{\beta\alpha}$ ve c_α dan itibâren tâyin olunduklarını gösterir. Bu ise A operatörünün (33) deki $a_{\beta\alpha}$ sayılarının takımıyla temâyüz ettiği anlamına gelir.

$a_{\beta\alpha}$ açılım katsayılarına ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere) bir A kare matrisinin elemanları gözüyle bakılabilir. ξ ve η vektörlerini, elemanları (34) deki açılım katsayıları olan sütun vektörlerle

$$\xi \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \eta \rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{37}$$

ve lineer A_{op} operatörünü de

$$A_{op} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots . & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots . & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{37'}$$

matrisiyle göstermek şartıyla (36) denklemine de bir matris denkleminin elemanları gözüyle bakılabilir. Sarahati sağlamak gâyesiyle lineer A operatörü buradaki matris temsilinden bir «op» altindisiyle tefrik edilmiştir. Operatörün kendisinden mi yoksa matris temsilinden mi bahsolunduğunu lâfın gelişi açıkça ortaya koyar. (33) e binâen, A nın matris elemanlarının φ_β ile $A\varphi_\beta$ nın

$$a_{\beta\alpha} = (\varphi_\beta, A\varphi_\alpha) = \varphi_\beta{}^{+} A\varphi_\alpha \tag{38}$$

skaler çarpımlarıyla verilmiş olduklarına dikkat ediniz.

Operatörleri ifâde etmek için matrislerin ve sütûn vektörlerinin kullanılması sâdece elimizdeki özel probleme münhasır değildir. (15) skaler çarpımına da bir matris çarpımı gözüyle bakılabilir. Sâdece $\xi\dagger$ vektörünü ξ sütun matrisine ek

$$\xi^{+} \longrightarrow (c_1{}^{*}\, c_2{}^{*}\, c_3{}^{*} \ldots . c_n{}^{*}) \tag{39}$$

satır matrisiyle özdeş tutuyoruz. Buna binâen (15) skaler çarpımı η sütun vektörü veyâ matrisiyle $\xi\dagger$ satır matrisinin *soldan* çarpımından ibâret olur. (14) ve (16) açılım teoremi için bir sütûn vektörü bir satır vektörüyle *sağdan* çarpar ve böylece (birim matris olduğu görülen) bir kare matris elde ederiz. (15) ve (16) daki haç işâreti tabiî (37) nin matris temsilini hatırda tutarak seçilmiş bulunmaktadır.

Yukarıdaki ikazlardan kare matrislerle sütûn vektörlerin n boyutlu uzayımızdaki lineer operatörlerin ve vektörlerin *temsilcileri*ni teşkil ettikleri âşikârdır. (37) deki matrislerin sütûn ve satırlarının durumları tabanın seçimine bağlıdır. *Her taban* için bir *farklı temsil* vardır. Fizikî bir problemde, göreceğimiz gibi, temsilin seçimi bir uygunluk meselesinden ibâret ise de bazan doğru tabanın tâyini problemin bizâtihi çözümünü teşkil eder (Bk. Bölüm: 5-9 ve 2-5 deki esas eksenlere dönüşümler).

Lineer bir A operatörü, biri bir φ_α tabanına diğeri de bir ψ_β tabanına göre olmak üzere farklı iki matris temsilini haiz olabilir. Bu eşdeğer iki temsil arasındaki bağlantı şu şekilde tâyin olunabilir: L lineer operatörü φ tabanına nazaran, $a_{\beta\alpha}$ elemanlarını haiz A_φ matrisiyle ve ψ tabanına nazaran da, $a_{\beta\alpha}'$ elemanlarını haiz A_ψ matrisiyle temsil edilmiş olsun. Buna göre, (38) e binâen

$$a_{\beta'\beta}' = (\psi_{\beta'}, A\psi_\beta)$$

olur. ψ tabanıyla φ tabanı arasındaki bağlantı (27) ile verilmiştir. (27) deki ilk denklemi kullanarak

$$a_{\beta'\beta}' = \sum_\alpha \sum_{\alpha'} b_{\alpha\beta}\, b_{\alpha'\beta'}^{*}\, (\varphi_{\alpha'}, A\varphi_\alpha)$$

buluruz. Bu, (25) ve (38) in ışığı altında

$$a_{\beta'\beta}' = \sum_\alpha \sum_\alpha b_{\beta'\alpha'}^{+}\, a_{\alpha'\alpha}\, b_{\alpha\beta} \tag{40}$$

yazılabilir. (40) denklemi, B ile φ ve ψ tabanlarını bağlayan üniter matrisi göstererek *

$$A_\psi = B^+ A_\varphi B \tag{41}$$

şeklindeki bir matris denkleminin (β', β) elemanıdır.

Uygunluğu temin gâyesiyle bir taban değişiminin vektörler ve lineer operatörler üzerindeki etkisini matris temsilcileri cinsinden özetliyoruz. Eğer $\varphi(\psi)$ tabanına nazaran vektörlerin sütûn matris temsilcileri $\xi_\varphi\ (\xi_\psi)$ ile ve operatörlerin bunlara tekabül eden kare matris temsilcileri de $A_\varphi (A_\psi)$ ile gösterilirlerse tabanın değişimi temsilcileri şu türlü dönüştürür:

$$\begin{aligned} \xi_\psi &= B^+ \xi_\varphi & \text{veyâ} \quad \xi_\varphi &= B\xi_\psi \\ A_\psi &= B^+ A_\varphi B & \text{veyâ} \quad A_\varphi &= BA_\psi B^+ \end{aligned} \tag{42}$$

Burada B üniter bir matristir $(B^\dagger B = BB^\dagger = I)$.

---

* B üniter matrisinin, n boyutlu mücerret uzaydaki bir B_{op} üniter operatörünü temsilcisi olarak düşünülebileceğine dikkat ediniz.

Problem: İki boyutlu Öklit uzayındaki bir taban φ_1, φ_2 olsun ve diğer bir taban da

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2) \qquad \psi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - i\varphi_2)$$

ile verilmiş olsun.

(*a*) φ tabanına nazaran olan temsilcileri ψ tabanına nazaran olanlara dönüştüren üniter B matrisini tâyin ediniz. (*b*) Muayyen bir A lineer operatörü eğer φ tabanında

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

matris temsilini haiz ise bunun ψ tabanına nazaran eşdeğer temsilini bulunuz.

5-6 LİNEER OPERATÖRLERİN BAŞKA TÂRİF VE ÖZELLİKLERİ

Lineer operatörlerin fizikî tatbikat bakımından önemli bazı özellikleri vardır. Bunların çoğu matrisler teorisinden âşinâdır. Bunların mücerret vektör uzayındaki operatörlere tatbikinin operatörlerle operatörlerin matris temsilleri arasındaki tekâbülün neticesi olarak ortaya çıktığı düşünülebilir. Bununla beraber özellikler matrislere müracaat edilmeden de ifâde olunabilirler.

Operatörlerin Çarpımı : Komütatör

İki operatörün çarpımı, âşikâr bir şekilde, en sağdaki operatör ilk tesir eden olmak üzere

$$AB\xi = A(B\xi) \tag{43}$$

diye târif edilir. Genel olarak sıra önemli olup A ile B biribirleriyle komütatif olmadıkları takdirde

$$AB\xi \neq BA\xi$$

dir. Bölüm: 4-4 de olduğu gibi, iki A ve B operatörünün [A, B] ile gösterilen *komütatörü*

$$[A, B] = AB - BA \tag{44}$$

diye târif edilmiştir.

Ters Operatör

Eğer A lineer operatörü $\eta = A\xi$ olacak şekildeyse, A nın tersi olan A^{-1} operatörü

$$\xi = A^{-1}\eta \tag{45}$$

ile târif olunur. (33) ifâdesi A operatörünü $a_{\beta\alpha}$ matrisi cinsinden nasıl tasrih etmeğe yararsa bunun tersini de tasrih etmeğe yarar:

$$A^{-1}\varphi_\alpha = \sum_{\beta'} \varphi_{\beta'}\, a_{\beta'\beta}{}^{-1} \tag{46}$$

$AA^{-1} = 1$ ve $A^{-1}A = 1$ olduğundan (33) ve (46) dan

$$\sum_{\beta'} a_{\beta\beta'} a_{\beta'\alpha}{}^{-1} = \sum_{\beta'} a_{\beta\beta'}{}^{-1}\, a_{\beta'\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \tag{47}$$

olduğunu buluruz. (47) denklemi A ve A^{-1} in matris temsillerinin

$$AA^{-1} = 1 \quad \text{ve} \quad A^{-1}A = 1 \tag{48}$$

matris denklemlerini tahkik ettiklerini göstermektedir. A operatörünün tersinin mevcûd olabilmesi için bunun bir tabana göre matris temsilinin sıfır olmayan bir determinantı haiz olması lâzım ve kâfîdir.

İzdüşüm Operatörleri

n boyutlu uzayda keyfî bir ξ vektörü verildiğinde çok kere ξ nin seçilmiş (ve kolaylık sağlamak için normalize edilmiş) bir ε vektörü boyunca ***izdüşümünü*** bilmek ilgi çekicidir. İzdüşürme,

$$P_\varepsilon \xi = \varepsilon(\varepsilon, \xi) \tag{49}$$

ile târif olunan bir P_ε *izdüşüm operatörüyle* icrâ edilir. Târif mûcibince izdüşüm operatörü *idempotent* bir operatördür, yâni

$$P^2_\varepsilon = P_\varepsilon \tag{50}$$

bağıntısı câridir. (50) denklemi $P_\varepsilon (P_\varepsilon - 1) = 0$ yazılabilir ki bu da bir bakıma bir izdüşüm operatörünün sıfır veyâ birim *değerini* haiz olduğunu göstermektedir. Buradaki *değerin* tam anlamı bu operatörün matris temsilinin 0 ve 1 özdeğerlerini haiz olmasıdır (Bk. Bölüm: 5-8).

φ_α tabanının izdüşüm operatörleri olan P_α lar özel bir önemi haizdirler :

$$P_\alpha \xi = \varphi_\alpha(\varphi_\alpha, \xi) \tag{51}$$

Âşikâr olarak, aynı tabana göre târif edilmiş fakat farklı iki izdüşüm operatörünün çarpımı sıfır operatörüne eşittir. Buna göre herhangi bir ξ vektörü için, $\alpha \neq \beta$ olmak üzere

$$P_\alpha P_\beta \xi = 0 \tag{52}$$

dır. Verilmiş olan bir tabanın bütün P_α izdüşüm operatörlerinin toplamı birim operatörüne eşittir:

$$\left(\sum_\alpha P_\alpha\right)\xi = \sum_\alpha \varphi_\alpha (\varphi_\alpha, \xi) = \xi \tag{53}$$

Vektörlerin ve operatörlerin matris temsilcileri cinsinden

$$P_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha \varphi_\alpha{}^+$$

ve $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (54)

$$\sum_\alpha P_\alpha \longrightarrow \sum_\alpha \varphi_\alpha \varphi_\alpha{}^+ = I$$

yazabiliriz. Son bağıntı (16) tamlık bağıntısından başka bir şey değildir.

Ek Operatörler

A operatörüne ek A† operatörü keyfî ξ ve η vektörleri için

$$(\eta, A^+\xi) = (A\eta, \xi) = (\xi, A\eta)^* \tag{55}$$

skaler çarpım bağıntıları cinsinden târif olunur. A† ın temsilinin matris elemanlarını târif eden (38) bağıntısını göz önünde tutarak

$$a_{\beta\alpha}{}^{+} = a_{\alpha\beta}{}^{*} \tag{56}$$

bulunur. Bu ise A ya ek olan matrisin mûtad târifinden başka bir şey değildir ($A\dagger = \widetilde{A^*}$).

İki operatörün çarpımının ekinin (55) bağıntısına göre

$$(AB)^{+} = B^{+}A^{+} \tag{57}$$

târifini haiz olduğu görülmektedir.

Hermitsel Operatörler

Eğer bir operatör $(\eta, A\xi) = (A\eta, \xi)$ bağıntısını sağlıyorsa böyle bir operatöre [büyük Fransız matematikçisi Charles Hermite (1822 - 1901)'in isminden kinâye olarak] *hermitsel* operatör denir. Matris temsili cinsinden bu

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}{}^{*} \tag{58}$$

demektir. Hermitsel bir matrisin diyagonâl elemanlarının reel olduklarına dikkat ediniz. (58) e binâen hermitsel bir operatörün matris temsilinin *reel bir determinantı* haiz olacağını ispatlamak kolaydır. Bundan başka özellikler meyânında hermitsel bir A operatörünün A^{-1} gibi bir hermitsel tersi olduğunu ve eğer A nın tersi varsa ve kezâ $F(x)$ de x in iyi davranışlı reel bir fonksiyonu ise $F(A)$ nın da hermitsel bir operatör olduğu zikredilebilir.

Problem: Hermitsel operatörlerin bu son iki özelliği ve kezâ iki hermitsel operatörün çarpımının ancak bunlar biribirleriyle komütatifseler hermitsel olacağını ispatlayınız.

Bir Operatörün İzi

Bir A operatörünün İz A ile gösterilen izi

$$\text{İz } A = \sum_{\alpha} (\varphi_{\alpha}, A\,\varphi_{\alpha}) \tag{59}$$

ile târif olunur. (38) ifâdesinden bir operatörün izinin bunun matris temsilcisinin *diyagonâl elemanlarının toplamı* olduğunu görmekteyiz. Bu, seçilen tabana bağlı olmayan bir özelliktir.

İz şu özellikleri haizdir:

$$\begin{aligned} \text{İz}\, A^\dagger &= (\text{İz}\, A)^* \\ \text{İz}(aA) &= a\, \text{İz}\, A \\ \text{İz}(A+B) &= \text{İz}\, A + \text{İz}\, B \\ \text{İz}(AB) &= \text{İz}(BA) \end{aligned} \tag{60}$$

Bundan başka, eğer A ile B hermitsel iseler İz(AB) reeldir.

Problem: (*a*) Tabanları (27) ifâdelerine dayanarak değiştirerek İz A nın, (59) vâsıtasıyla verilen ifâdesinde onu hesaplamak için kullanılmış olan tabana bağlı olmadığını açık bir şekilde ispatlayınız. (*b*) İz'in (60) da verilmiş olan bütün özelliklerini ispatlayınız.

5-7 ÜNİTER OPERATÖRLER VE HAREKET DENKLEMLERİ

Bir U operatörüne, eğer tersi ekine eşitse *üniter* adı verilir:

$$U^{-1} = U^\dagger$$

Bu şart başka bir şekilde

$$U^\dagger U = 1 \quad \text{ve} \quad UU^\dagger = 1 \tag{61}$$

şeklinde de yazılabilir. Üniter operatörlerin önemli bir özellikleri, bunların vektörlerin normlarını muhafaza etmeleridir. Buna binâen (55) ve (61) den keyfî bir ξ vektörü için

$$(U\xi, U\xi) = (\xi, \xi) \tag{62}$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu özellik, kuvantum mekaniğinde normun muhafazası ihtimâlin muhafazasına denk olduğu için mühimdir.

A ve B ile komütatif hermitsel operatörleri göstermek üzere, üniter bir U operatörü daimâ

$$U = A + iB \tag{63}$$

şeklinde yazılabilir. Açık olarak

$$A = \frac{1}{2}(U + U^+) \qquad B = \frac{1}{2i}(U - U^+)$$

tır. Üniter bir U operatörünü hermitsel bir K operatörü cinsinden ifâde eden şekiller

$$U = \frac{1+iK}{1-iK} \qquad \text{ve} \qquad U = e^{iK} \tag{64}$$

dır. Birinci bağıntıdaki $1/(1-iK)$ operatörü $(1-iK)$ nın tersi olup $(1+iK)$ ya ister sağından, ister solundan tatbik edilmiş olduğu düşünülebilir.

Problem: (a) Şu bağıntının cârî olduğunu ispatlayınız

$$\frac{1}{1-iK}(1+iK) = (1+iK)\frac{1}{1-iK}$$

(b) K nın hermitsel olması hâlinde (64) deki operatörlerin üniter olduklarını açık olarak gösteriniz.

(64) deki eksponansiyel şekil kuvantum mekaniğinde özel bir önemi haizdir. Bölüm: 5-1 de münakaşa edilmiş olduğu vechile hâl vektörleri fizikî sistemlerin matematik tasvirleridir. Hâl vektörünün zaman içindeki tekâmülü fizikî sistemin zamana göre inkişâfını verir. Buna göre hâl vektörlerinin bir parametreye (meselâ zamana) bağlılıkları ilgi çekicidir. Birazdan göreceğimiz gibi, kuvantum mekaniğindeki hâl vektörleri sâbit normları haizdirler. Buna binâen, bir sistemin hâlinin bir veyâ daha fazla parametreye bağlılığı parametrelerle belirlenen bir üniter operatörler grubu tarafından doğurulan hâl vektörlerine bağlanabilir. Bir misâl olarak, s reel bir parametre ve K da s ye bağlı olmayan hermitsel bir operatör olmak üzere

$$U(s) = e^{-isK} \tag{65}$$

eksponansiyel ifâdesiyle belirlenen $U(s)$ üniter operatörlerinin grubunu göz önüne alalım. Buna göre $\xi(s)$ vektörü bir $\xi(0)$ «başlangıç» vektörü cinsinden

$$\xi(s) = U(s)\xi(0) \tag{66}$$

operatör bağıntısıyla târif olunur. (62) den dolayı $\xi(s)$ nin normu $\xi(0)$ ın normuna eşittir

$\xi(s)$ nin s parametresine olan diferansiyel bağlılığı, yâni bir *hareket denklemi* (65) ve (66) dan elde edilebilir. $\xi(s)$ nin değişim mikdarı olan

$$\frac{\partial \xi(s)}{\partial s} = \frac{\partial U(s)}{\partial s} \xi(0) \tag{67}$$

ı göz önüne alalım. U(s) nin s ye göre değişimi (65) in kuvvet serisine açılımıyla târif olunabilir. Âşikâr olarak n-inci türev $(-iK)^n$ kere U(s) den ibârettir. Binâenaleyh $\xi(s)$ *vektörü için hareket denklemi*

$$i \frac{\partial \xi(s)}{\partial s} = K\xi(s) \tag{68}$$

şeklindedir. (68) denklemine ya mücerret bir operatör-vektör bağıntısı veyâhut da mütekâbil matris temsilcileri için bir denklem gözüyle bakılabilir.

Önceki paragraflarda bilhassa (65) üniter dönüşümleri altında hâl vektörlerinin tekâmülü üzerinde durulmuştu. (66) ya binâen bir $\varphi_\alpha(0)$ başlangıç tabanından türetilen bir $\varphi_\alpha(s)$ tabanı ve bir de A operatörü nazar-ı itibâra alalım. A nın $\varphi_\alpha(s)$ tabanına göre temsilcileri

$$a_{\beta\alpha}(s) = (\varphi_\beta(s),\ A\varphi_\alpha(s)) = (\varphi_\beta(0),\ U^+AU\varphi_\alpha(0)) \tag{69}$$

dır. Bu denklem, dönüştürülmüş olan $\varphi_\alpha(s)$ tabanına göre A nın temsilcisinin, $U^\dagger AU$ operatörünü teşkil edip bunun temsilcisini başlangıç tabanına göre hesaplamakla elde edilebileceğini ifâde etmektedir. Bu keyfiyet U(s) nin tesirleri hakkında başka bir görüş şeklini intaceder. Bu görüş şekline göre hâl vektörleri sâbit kalmakta fakat operatörler

$$A(s) = U^\dagger(s)\ A(0)\ U(s) \tag{70}$$

kaidesine göre dönüşmektedirler. Bu görüş tarzı, hareketin

$$\frac{dA(s)}{ds} = \frac{\partial A}{\partial s} + i[K, A(s)] \tag{71}$$

şeklindeki *operatör denklemini* intaceder. Burada A nın s ye açık olarak bağlı olması imkânı da nazarı itibara alınmıştır. (71) ile verilen hareketin operatör denklemine bazan Heisenberg hareket denklemi adı verilir. Kuvantum mekaniğinde operatörlerin zamana bağlı olarak değişmelerine karşılık hâl vektörlerinin sâbit kalmaları nokta-i nazarına *Heisenberg görüşü* adı verilmektedir. Operatörlerin sâdece açık olarak zamana bağlılığı haiz olmalarına karşılık hâl vektörlerinin (68) e uygun olarak değiştiği şeklindeki görüş tarzına da *Schrödinger görüşü* adı verilmektedir.

Problem: Tek boyutlu basit bir harmonik osilâtör $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ denklemini tahkik etmekte olan bir $x(t)$ yer değişimini haizdir. (a) Sistemin hâl vektörünü

$$\xi(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{1}{\omega}\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde seçerek, σ_2 Pauli'nin,

$$\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

temsilini haiz, spin operatörü olmak üzere, hareket denkleminin $K=-\omega\sigma_2$ hermitsel operatörüyle (68) ifâdesi şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

(b) $U(t)$ üniter operatörünün

$$U(t)=\cos\omega t+i\sigma_2\sin\omega t$$

şekline sokulabileceğini gösteriniz. $\xi(t)$ için açık çözümü $x(0)$ ve $\dot{x}(0)$ başlangıç değerleri cinsinden yazınız. (c) Bu problemde hâl vektörünün normunun korunmasının fizikî mânâsı nedir? Bu formalizm muvacehesinde $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega x=0$ ile verilen sönümlü osilâtörü tasvir edebilir misiniz ?

5-8 ÖZVEKTÖRLER, ÖZDEĞERLER, VE SPEKTREL TEMSİL

Keyfî bir ξ vektörüne tatbik edilmiş olan lineer bir K operatörü genel olarak bunu, muayyen bir tabanda farklı izdüşümleri haiz başka bir vektöre dönüştürür. Fakat K vâsıtasıyla kendilerine, veyâ kendilerinin bir katına dönüşen özel bir vektör dizisi vardır. Bu vektörlere K nın ***özvektörleri*** denir. Bunlar, λ ***özdeğer*** adı verilen muayyen bir sayı ve Ψ de bir özvektör olmak üzere

$$K\Psi=\lambda\Psi \tag{72}$$

cperatör denklemini tahkik ederler.

Eğer K operatörü bir normâl operatörse ($KK^\dagger = K^\dagger K$ ise), bu takdirde muhakkak biribirlerinden farklı olması icâbetmeyen (Böl. 4-1 deki Schmidt dikleştirme işlemini ve özdeğerlerin soysuzlaşmasını hatırlayınız) n özdeğere tekabül eden farklı n özvektörün mevcûd olduğu ve özvektörlerin ortonormâl bir taban teşkil edebildikleri ispatlanabilir (ispat için bk. Geortzel and Tiralli, sayfa 61-63). Bizim meşgûl olduğumuz bütün operatörler (hermitsel, üniter v.s...) normâl operatörlerdir.

Özvektörleri Ψ_α ile ve mütekâbil özdeğerleri de λ_α ile gösterirsek (72) özvektör denklemi

$$K\Psi_\alpha = \lambda_\alpha \Psi_\alpha \tag{73}$$

şekline girer. K operatörü λ_α özdeğer dizisiyle tamamen belirlenmektedir. Özvektör tabanına göre K nın matris temsilcisi

$$K \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{74}$$

şeklinde diyagonâl bir matristir. P_α ile Ψ_α tabanına göre (51) ile belirtilmiş olan izdüşüm operatörlerini göstermek sûretiyle operatör lisanında bu

$$K = \sum_\alpha \lambda_\alpha \Psi_\alpha \Psi_\alpha^{+} = \sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha \tag{75}$$

olarak yazılır.

Eğer K hermitsel bir operatörse Böl. 4-3 deki gibi *özdeğerlerin reel olduklarını* ve özvektörlerin de dik olduklarını ispatlayabiliriz. Bu ispatın sembolik kademeleri o bölümdekilerle özdeştir. Buna binâen biz de bunu burada bir kere daha tekrarlamayacağız.

Eğer K=U ise ve U da üniter bir operatörse özdeğer denklemi

$$U\Psi_\alpha = \lambda_\alpha \Psi_\alpha \tag{76}$$

dır. Buna sol taraftan $U^\dagger$ ı tatbik edecek olursak

$$U^+U\Psi_\alpha = \Psi_\alpha = \lambda_\alpha U^+\Psi_\alpha$$

veyâ

$$U^+\Psi_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha}\Psi_\alpha \tag{77}$$

buluruz. Böylece, eğer Ψ_α, U nun λ_α özdeğerine tekâbül eden bir özvektörüyse bunun kezâ U† ın $1/\lambda_\alpha$ özdeğerine tekâbül eden özvektörü olduğunu da görmekteyiz. (76) nın sağdan Ψ_α ile ve (77) nin de gene Ψ_α ile fakat soldan skaler çarpımını teşkil etmek sûretiyle

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha{}^*} \tag{78}$$

olduğunu gösterebiliriz. Bu, *U nun özdeğerlerinin modülleri bire eşit olan kompleks sayılar olduklarını* göstermektedir. [Bunun, U yu hermitsel bir operatör cinsinden vermekte olan (64) şekilleri dolayısıyla âşikâr olduğuna dikkat ediniz.]

Üniter bir operatörün özvektörlerinin dikliği kolaylıkla tesis edilebilir. Önce (76) nın Ψ_β ile soldan skaler çarpımını alıp bunu α yerine β koyduğumuz (77) nin Ψ_α ile sağından aldığımız skaler çarpımından çıkartalım. Bu bize

$$(U^+\Psi_\beta, \Psi_\alpha) - (\Psi_\beta, U\Psi_\alpha) = \left(\frac{1}{\lambda_\beta{}^*} - \lambda_\alpha\right)(\Psi_\beta, \Psi_\alpha)$$

verir. Bunun sol tarafı özdeş olarak sıfırdır ve (78) in ışığı altında sağ tarafı da

$$(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)(\Psi_\beta, \Psi_\alpha) = 0 \tag{79}$$

olur.Bu ise diklik bağıntısının standart şeklidir.

5-9 ÖZDEĞERLERİN VE ÖZVEKTÖRLERİN TAYİNİ

Böl. 5-8 de lineer bir operatörün özvektörleri ve özdeğerleri fikrinin münakaşasını yaptık ve bazı genel özellikler tesis ettik. Fakat eğer bize bir K operatörü verilmişse ve elimizde de muayyen bir φ_α taban vektörleri dizisi varsa esas itibariyle özdeğerler ve özvektörler hakkında herhangi bir bilgimiz yoktur. Bütün bildiğimiz şey K operatörünün φ_α tabanına göre

$$K \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \ldots\ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} \ldots\ldots & k_{2n} \\ \vdots & & \\ k_{n1} & k_{n2} \ldots\ldots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{80}$$

şeklinde bir matris temsilini haiz olduğudur. Buradaki biçimsizlik φ_α tabanının Ψ_α özvektör tabanı olmamasıdır. İzin bir taban dönüşümünde invaryant kalması hasebiyle K nın özdeğerlerinin toplamının [(74) e binâen] (80) deki diyagonâl elemanların toplamına eşit olduğunu ve determinantın invaryantlığı dolayısıyla da (74) deki özdeğerlerin çarpımının (80) matrisinin determinantına eşit olduğunu filvâki bilmekteyiz ama, uzayın sâdece iki boyutlu olması hâli hâriç, bu bilgi özdeğerlerle özvektörler hakkında daha fazla bir şeyler söyleyebilmemiz için kifâyetkâr değildir.

Bu problemin formel çözümü Böl. 5-4 deki taban değişiminin münakaşasında bulunmaktadır. K operatörünün (74) ve (80) temsilleri, biri Ψ_α tabanına ve diğeri de φ_α tabanına göre olduğundan eşdeğer temsillerdir. Bu her iki taban biribirlerine $\xi_\varphi = U\xi_\psi$ mûcibince bir U üniter operatörü vâsıtasıyla bağlıdırlar. (42) dolayısıyla bu, K operatörünün (74) ve (80) temsillerinin

$$U^+ K_\varphi U = K_\psi \tag{81}$$

vâsıtasıyla biribirlerine bağlanmış olduklarına delâlet etmektedir. Burada tabanı tebârüz ettirmek üzere bir indis kullanmış bulunuyoruz. (81) denklemi, K nın özvektörlerini bulma problemini K nın matris temsilcisini diyagonalleştirecek bir U üniter matrisi tâyini problemi olarak yeniden vazetmiş olduğumuzu ifâde etmektedir.

(81) de vaz edilmiş olan bu matris probleminin çözümü zor değildir. Önce (81) in her iki yanına soldan U operatörünü tatbik edelim:

$$K_\varphi U = UK_\psi \tag{82}$$

Eğer U nun elemanları $u_{\alpha\beta}$ ise K_ψ ve K_φ için de (74) ve (80) i kullanırsak (82) nin tipik matris elemanları

$$\sum_{\alpha'} k_{\alpha\alpha'} u_{\alpha'\beta} = \lambda_\beta u_{\alpha\beta} \tag{83}$$

denklemiyle verilirler. β nın tesbit edilmiş değerleri yâni tesbit edilmiş λ_β özdeğerleri için, $\alpha=1, 2,\ldots, n$ için elde edilen (83) denklemleri n bilinmeyenli n adet simültane cebrik denklemden müteşekkil bir sistem teşkil ederler. Bu denklem sistemi ancak $u_{\alpha\beta}$ katsayılarının determinantı sıfırsa bir çözümü haizdir. Bu *seküler denklemi* verir:

$$| k_{\alpha\alpha'} - \lambda\,\delta_{\alpha\alpha'} | = 0 \tag{84}$$

(84) denklemi, hepsi K nın özdeğerleri olan n kökü haiz λ cinsinden n-inci dereceden cebrik bir denklem olduğundan burada özdeğerdeki indisini artık kaldırmış bulunuyoruz.

λ_β özdeğerleri bir kere (84) den elde edildiler miydi, artık (83) sistemi her λ_β değeri için ve $\alpha=1, 2,\ldots, n$ olmak üzere n adet $u_{\alpha\beta}$ elemanının izâfî değerleri için çözülebilir. Bu, U matrisinin her sütununun bir çarpan yaklaşıklığıyla tâyin olunduğuna delâlet eder. Herbiri bir sütûn için olan bu n çarpanı bulmak için U nun üniterliğini göz önüne almamız lâzımdır. Matris elemanları cinsinden

$$(\mathrm{U})_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta} \qquad (\mathrm{U}^+)_{\alpha\beta} = u_{\beta\alpha}{}^*$$

dır. Buna göre üniterlik şartı

$$\delta_{\gamma\beta} = (\mathrm{U}^+\mathrm{U})_{\gamma\beta} = \sum_\alpha u_{\alpha\gamma}{}^* u_{\alpha\beta}$$

dır. $\gamma=\beta$ için

$$\sum_\alpha | u_{\alpha\beta} |^2 = 1 \tag{85}$$

buluruz. Bu, U nun vektörlerin temsilcileri nazarıyla bakılan sütûnlarının normalize olmaları icâbettiğini göstermektedir. Bunun bir neticesi olarak $u_{\alpha\beta}$ elemanlarının büyüklükleri ve fazları, her sütûn için önemi haiz olmayan bir faz çarpanından sarf-ı nazar, tâyin olunurlar.

İlk tabana nazaran Ψ_α özvektörlerinin temsilcileri keyfî bir ξ vektörünün φ ve Ψ tabanlarına göre temsilcileri arasındaki $\xi_\varphi = \mathrm{U}\xi_\psi$ bağlantısını nazarı itibara alarak bulunabilirler. Ψ_α özvektörünün kendi tabanına göre olan $(\Psi_\alpha)_\psi$ temsilcileri âşikâr olarak

$$(\Psi_\alpha)_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada sıfırdan farklı yegâne eleman, sütûnun α-nıncı satırındadır. Âşikâr olarak Ψ_α nın φ tabanına göre temsilcisi

$$(\Psi_\alpha)_\varphi = U(\Psi_\alpha)_\psi = \begin{bmatrix} u_{1\alpha} \\ u_{2\alpha} \\ \vdots \\ u_{n\alpha} \end{bmatrix}$$

dır. Şu hâlde U nun sütûnları, özvektörlerin ilk φ tabanına göre temsilcileridir. U†U nun diyagonâl dışı elemanlarının sıfır olmasına, farklı özvektörlerin dikliğinin matris eşdeğeri nazarıyla bakıldığından (85) normalizasyon şartının mânâsı artık tamamen anlaşılabilmektedir.

Problem 1: Eğer soysuzlaşmış özdeğerler mevcutsa $u_{\alpha\beta}$ ların tâyini nasıl olur?

Problem 2: Âdî uzaydaki kartezyen vektörler tabanına göre K matrisinin

$$K \longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & -3 & -\sqrt{2} \\ -3 & 7 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}$$

temsilcisini haiz olduğunu göz önünde tutarak K nın özdeğerlerini, üniter U matrisini ve (sütûn vektörler şeklinde) özvektörlerini tâyin ediniz. Hesabınızı (81) bağıntısını ve $\xi_\varphi = U\xi_\psi$ bağıntısını açıkça tahkik ederek kontrol ediniz.

Kuvantum mekaniğindeki önemli bir özdeğer problemi de komütatif A ve B gibi iki hermitsel operatörle ilgili olandır. Şimdi A nın özdeğerlerinin aynı zamanda B nin de özdeğerleri olduğunu göstereceğiz. Matris cebri bakımından bu keyfiyet, iki hermitsel matrisin ancak ve ancak komütatif olmaları hâlinde aynı bir üniter dönüşüm vâsıtasıyla diyagonalleştirilebileceği teoremiyle ifâde olunur.

A nın özvektörleri Ψ_α, özdeğerleri de a_α olsunlar. Buna göre

$$A\Psi_\alpha = a_\alpha \Psi_\alpha \tag{86}$$

dır. Şimdi B yi (86) nın her iki yanına tatbik edecek olursak

$$BA\Psi_\alpha = a_\alpha B\Psi_\alpha$$

elde ederiz. Eğer A ile B komütatif iseler bu

$$A(B\Psi_\alpha) = a_\alpha(B\Psi_\alpha) \tag{87}$$

şeklinde de yazılabilir. (87) denklemi, eğer Φ_α vektörü A nın a_α özdeğerine tekâbül eden bir özvektörüyse $(B\Psi_\alpha)$ nın da aynı özdeğere tekâbül eden bir özvektör olduğunu göstermektedir. Eğer a_α özdeğeri soysuzlaşmamışsa bu, $(B\Psi_\alpha)$ nın Ψ_α nın herhangi bir katı olduğuna delâlet eder, yâni

$$B\Psi_\alpha = b_\alpha \Psi_\alpha \tag{88}$$

dır. Hâlbuki bu da Ψ_α nın B nin b_α özdeğerine tekâbül eden bir özvektörü olduğu ifâdesinden başka bir şey değildir.

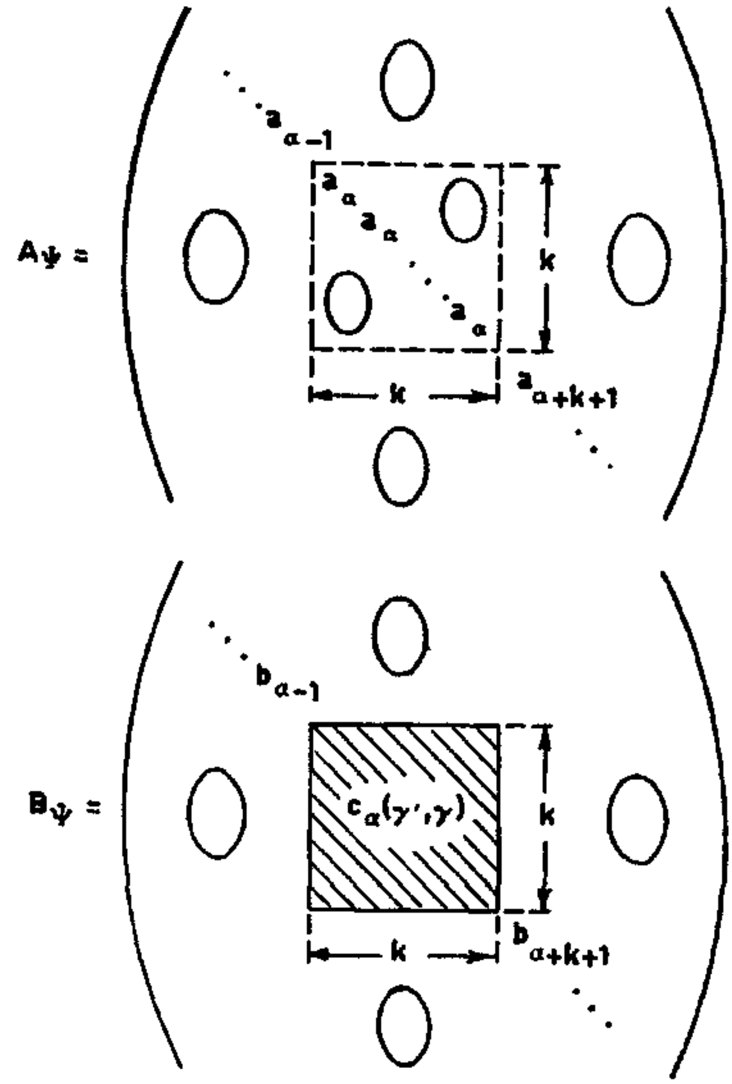
Eğer a_α özdeğeri soysuzlaşmışsa biraz daha etraflıca düşünmek zarurîdir. Önce bir özdeğere ait özvektörleri

$$A\Psi_\alpha(\gamma) = a_\alpha \Psi_\alpha(\gamma) \qquad (\gamma = 1, 2, \dots, k) \tag{89}$$

şeklinde, başka bir γ indisi ile gösterelim. Burada a_α özdeğerinin soysuzlaşmasının k katlı olduğu kabul edilmiş bulunmaktadır. Buna göre (87) den, $B\Psi_\alpha(\gamma)$ nın olsa olsa k tâne $\Psi_\alpha(\gamma)$ özvektörünün

$$B\Psi_\alpha(\gamma) = \sum^{k} \Psi_\alpha(\gamma')c_\alpha(\gamma', \gamma).$$

şeklinde lineer bir kombinezonu olduğu neticesine varırız. $c_\alpha(\gamma', \gamma)$ katsayıları $k \times k$ şeklinde bir matris düzeni teşkil etmekte olup bu da B nin, A nın soysuzlaşmış a_α özdeğerine tekâbül eden (alt) temsili olarak düşünülebilir. Şekil: 5-1, A ve B operatörlerinin Ψ tabanına göre matris temsilcilerini şematik olarak göstermektedir. A matrisi, târif gereğince ,diyagonâl bir matristir; B matrisi de A nın soysuzlaştığı yer hâriç diyagonâldir. Burada sâdece tek bir soysuzlaşmış özdeğer gösterilmiş bulunmaktadır, fakat şekli uygun bir tarzda genelleştirmek mümkündür.



Şekil: 5-1

B nin, k katlı soysuzlaşmış özdeğerine refâkat eden k adet özdeğerinin bulunması meselesi, taban değişimi ve diyagonâlleştirmenin k boyutlu bir altuzayda vuku bulmasından sarf-ı nazar ,aynen bu bölümün daha önceki paragraflarındaki metotlarla çözülür. Yeni k adet $\Psi_\alpha'(\gamma)$ özvektörler takımı gene A nın a_α özdeğerine tekâbül eden dik özvektörleridir; fakat kezâ bunlar şimdi bir de B nin, (88) in uygun bir teşmilini tahkik eden özvektörleridir.

Problem: Yukarıda, komütatif hermitsel operatörlerin müşterek özdeğerleri hakkındaki münakaşa bir «yeterlilik» delili teşkil etmekteydi. (75) spektrel temsili vâsıtasıyla «gereklilik» şartını da yâni eğer Ψ takımı hem A nın ve hem de B nin özvektörler takımı ise A ile B nin komütatif olmaları lâzım geldiğini gösteriniz.

5-10 HİLBERT UZAYINA GEÇİŞ; DİRAC NOTASYONU

Buraya kadarki incelememiz sonlu sayıda boyutu haiz lineer vektör uzayları cinsinden oldu. Kuvantum mekaniğinde problemlerin çoğu sonsuz sayıda boyutu haiz bir vektör uzayına ihtiyaç gösterirler. Evvelce de söylenmiş olduğu vechile, (5) ifâdesinin teşmili olan bir skaler çarpımın târif olunduğu böyle bir uzaya *Hilbert uzayı* adı verilir. Elimizde mevcût neticelerimizi Hilbert uzayları için de yeni baştan çıkarmağa kalkışacak değiliz; bununla beraber $n \to \infty$ için vukua gelen değişikliklerin bazılarına nazar-ı dikkati çekeceğiz. Bundan sonra da Dirac'ın o kısa, ekonomik ve berrak notasyonunu ithâl edeceğiz.

$n \to \infty$ limitinde $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ şeklindeki münferit bir sıralama indisi genel olarak (sayılabilen veyâ sayılamayan) münferit ve (sayılamayan) sürekli değişim aralığını haiz bir değişken olur. Burada önemli ve sıkıntı verici bir nokta bulunmaktadır. Sonlu sayıda boyutu haiz bir uzay için bütün büyüklükler üzerindeki sıralama indisleri $(1, 2, \ldots, n)$ gibi tam değerler alırlar. Fakat Hilbert uzayında buna eşdeğer bir indis veyâ değişken taban vektörlerinin bir takımı için sayılabilir sonsuz bir indis ve başka biri için de sürekli bir değişken olabilir. [Buna bir misâl $(-\infty < x < \infty)$ aralığındaki sayılabilir Hermite polinomları takımı ve gene aynı aralıktaki Fourier integrallerinin integrantlarıdır.] Hilbert uzayı n boyutlu uzaydan çok daha muğlâktır. Önemli bir özellik de Hilbert uzaylarının *ayrılabilen* veya *ayrılamıyan* olabilmeleridir. *Ayrılabilen* bir Hilbert uzayı diye içinde sayılabilen bir taban vektörleri takımı bulmanın mümkün olduğu ve bu takımın da, verilmiş herhangi bir vektörün bu taban vektörlerinin lineer bir kombinezonuyla (Bölüm: 3-2 deki en küçük kareler anlamında) istenildiği kadar yaklaşık bir şekilde temsil edilebilmesi bakımından tam olduğu bir uzaya denir. *Ayrılamıyan* bir Hilbert uzayında böyle bir sayılabilen taban vektörleri takımı bulmak mümkün değildir. Ayrılamayan bir uzaydaki tam bir taban, bu uzayda bir vektör *kontinuumunu haiz olmak zorundadır.*

Ayrılabilen bir Hilbert uzayında dahi sayılabilen bir takım kullanmanın *elzem olmadığını* belirtmek lâzımdır. Böyle sayılabilen en az bir tam takımın mevcûdiyeti ayrılabilen bir uzayın târifi demektir. Fizikî tatbikatta Hilbert uzayı daimâ ayrılabilen bir uzaydır. Fakat taban vektörlerinin seçimi sık sık, muayyen bir lineer operatör için bir özdeğer probleminin belirtilmesiyle yapılmaktadır. Buna göre özvektör tabanının sayılabilir olup olmadığı operatörün özdeğer spektrumuna bağlıdır.

Eğer seçilmiş olan taban sayılabilen bir takım teşkil ediyorsa, (matematik bakımından yakınsaklık, v.s... meselelerinden sarf-ı nazar) formalizm, n nin sonlu hâline tekâbül eden formalizme fevkalâde yakındır. Fark, sâdece, temsilcilerin sonlu olmaktan ziyâde sonsuz matrisler olmasından ileri gelmektedir. Eğer taban sayılamayan bir tabansa bazı âşikâr değişiklikler icrâ etmek zarurîdir. Meselâ φ_α taban vektörleri (7) de olduğu gibi Kroenecker normalizasyonunu haiz olacakları yerde

$$(\varphi_{\alpha''}, \varphi_{\alpha'}) = \delta(\alpha'' - \alpha') \tag{90}$$

şeklinde *delta fonksiyonu normalizasyonunu* haizdirler. α' üzerinden toplamlar integrallerle yer değiştirmişlerdir, ve ilh... Buna göre bir ξ vektörünün φ_α tabanı cinsinden açılımı

$$\xi = \int d\alpha' \, \varphi_{\alpha'}(\varphi_{\alpha'}, \xi) \tag{91}$$

dir. α' değişkeninin hem münferit ve hem de sürekli değişim aralıklarını haiz olması hâlinde (91) bağıntısı âşikâr bir teşmili haizdir.

3. ve 4. Bölümlerdeki dik fonksiyonlar ve özdeğer problemleriyle teması tesis etmeden önce Dirac'a borçlu olduğumuz çok faydalı bir notasyon takdim etmek istiyoruz. Kompleks çarpımlı vektörlerle uğraşırken çarpanların sırasına, kompleks eşlenikliğine dikkat etmemiz lâzım gelmişti [meselâ $(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) \to \varphi_\alpha{}^+ \varphi_\alpha$ skaler çarpımında ve (16) tamlık bağıntısında olduğu gibi]. Bu farkı tebârüz ettirmek için Dirac bir vektör uzayında (temsilcileri sütûn matrisler olan) bütün mümkün ξ vektörlerini göz önüne almakta ve tipik bir vektörü $|>$ veyâ $|\xi>$ sembolüyle göstermektedir. Bu vektörlerle temsil olunan uzaya (temsilcileri satır matrisler olan) düal vektörlerin temsil ettiği bir *düal uzay* tekâbül etmekte ve Dirac bunları $<|$ veyâ $<\xi|$ ile göstermekteyiz. Dirac'ın bir «ket» veyâ bir «ket vektörü» dediği her $|\xi>$ vektörü için gene Dirac'ın bir «bra» veyâ bir «bra vektörü» dediği bir $<\xi|$ düal vektörü mevcut olup bunun tersi de doğrudur. Biribirlerine bağlı bu iki cins vektörün süperpozisyonu

$$|\xi\rangle + |\eta\rangle \longleftrightarrow \langle\xi| + \langle\eta| \tag{92}$$

kaidesine, buna mukabil kompleks bir skalerle çarpımı da

$$a|\xi\rangle \longleftrightarrow a^*\langle\xi| \tag{93}$$

kaidesine uyar. Operatörlerin ket vektörleri üzerilerine tatbikatı, evvelce Bölüm: 5-5 ve 5-6 da da görmüş olduğumuz vechile, bunların düal uzayla mütekâbiliyetleriyle beraber, şu şekildedir:

$$\begin{array}{lcl} |\eta\rangle = A|\xi\rangle & \longleftrightarrow & \langle\eta| = \langle\xi|A^+ \\ \left.\begin{array}{l} A(|\xi_1\rangle + |\xi_2\rangle) \\ = A|\xi_1\rangle + A|\xi_2\rangle \end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} (\langle\xi_1| + \langle\xi_2|)A^+ \\ = \langle\xi_1|A^+ + \langle\xi_2|A^+ \end{array}\right. \\ A(a|\xi\rangle) = aA|\xi\rangle & \longleftrightarrow & (\langle\xi|a^*)A^+ = a^*\langle\xi|A^+ \end{array} \tag{94}$$

Dirac notasyonunda skaler çarpım

$$(\xi, \eta) = \langle\xi|\eta\rangle \tag{95}$$

olmaktadır; âşikâr olarak $\langle\xi|\eta\rangle = \langle\eta|\xi\rangle^*$ şartı da câridir. Başka bir misâl olmak üzere hermitsel bir operatörün de artık

$$\langle\xi|A|\eta\rangle = \langle\eta|A|\xi\rangle^* \tag{96}$$

bağıntısıyla belirlendiğine işâret edelim.

Problem: $\langle\xi|K|\eta\rangle$ skaler çarpımında operatörün ister sağa, $|\eta\rangle$ ket vektörüne, ister sola $\langle\xi|$ bra vektörüne tatbik edilmiş gibi kabul edilebileceğini açıkça gösteriniz.

Başka bir faydalı notasyon da operatörlerin yunan veyâ lâtin harfleriyle ve bunların özdeğerlerinin de aynı sembollerin bir veyâ daha fazla üslüsü olarak belirtilmesidir. Özel özdeğerler üs yerine bir altindisi de haiz olabilirler. Bu notasyon hakkında bir misâl vermek için (73) özdeğer denklemini Dirac notasyonuna göre yazıyoruz:

$$K|K'\rangle = K'|K'\rangle \tag{97}$$

Bu denklemde K operatörünün özdeğeri K' olup buna tekâbül eden özvektör de özdeğeri içine yazılmış bir ket vektörü olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunu Ψ_α özvektör sembolüyle mukayese edecek olursak üslerin α sıralama indisinin yerini tuttuklarını ve ketin içindeki K′ özdeğer sembolünün de K nın özvektörlerini herhangi başka bir vektör takımından (meselâ φ_α tabanından) tefrik ettiren Ψ sembolünün yerini tuttuğunu görürüz. Dirac notasyonunun iktisadî oluşu ve berraklığı kolaylıkla görülmelidir. Bu kısmın bundan önceki bölümlerinin bütün materyali doğrudan doğruya Dirac notasyonu vâsıtasıyla yazılabilir.

Dirac notasyonunun bilhassa örnek mâhiyetindeki birkaç misâli olarak

$$\sum_{\alpha'} |\alpha'\rangle\langle\alpha'| = 1 \tag{98}$$

şeklinde ifâde olunan (16) tamlık bağıntısını, keyfî bir $|\xi\rangle$ ket vektörünün bir $|\alpha'\rangle$ tabanına göre

$$|\xi\rangle = \sum_{\alpha'} |\alpha'\rangle\langle\alpha'|\xi\rangle \tag{99}$$

(11) açılımını ve (47) ile târif edilmiş olan P_ε izdüşürme operatörünü

$$P_\varepsilon = |\varepsilon\rangle\langle\varepsilon| \tag{100}$$

gösterebiliriz. (98) ve (100) denklemlerinde büyüklüklerin operatör tabiatları bra ve ketlerle ters bir sırada ve bir vektörle skaler çarpım yapmağa müsait bir tarzda gösterilmiş bulunmaktadırlar.

5-11 HÂL VEKTÖRLERİ VE DALGA FONKSİYONLARI

Şimdiye kadar hep mücerret vektörler ve matrislerle veyâ bunların matris temsilcileriyle uğraştık. Kuvantum mekaniği ile ancak Schrödinger denklemi vâsıtasıyla biraz ünsiyeti olan okuyucu, bu notların açıkça beyân edilmiş gâyesinin kuvantum mekaniğinin matematiğini takdim etmek olduğuna göre niçin bir *dalga fonksiyonun*dan bahsedilmemiş olmasına şaşabilir. Bunun sebebi sonlu boyutu haiz bir uzayda hâl vektörlerinin temsilcilerinin (sürekli değişkenli) fonksiyonlar değil, (münferit elemanlı) sütûn matrisler olmasıdır. Bu sütûn vektörler doğan dalga fonksiyonlarıdır.

Hilbert uzayında bir dalga fonksiyonunun nasıl zuhura geldiğini göstermek üzere muayyen bir aralıkta bir reel q' özdeğerler kontinuumunu haiz bir q hermitsel operatörünü göz önüne alalım. Buna binâen ket özvektörleri

$$q|q'\rangle = q'|q'\rangle \tag{101}$$

operatör denklemini gerçeklerler ve burada

$$\langle q''|q'\rangle = \delta(q'-q'') \tag{102}$$

ortonormâllik şartı mevcuttur. Şimdi keyfî bir $|\xi\rangle$ ket vektörü tasavvur edelim. Bu, q tabanı (yâni q operatörünün özketleri) cinsinden açılabilir:

$$|\xi\rangle = \int dq'|q'\rangle\langle q'|\xi\rangle \tag{103}$$

$\langle q'|\xi\rangle$ skaler çarpımı q' sürekli değişkenine ve ilk $|\xi\rangle$ ketine bağlı kompleks bir sayıdır. Buna binâen bu, $|q'\rangle$ tabanında $|\xi\rangle$ ket vektörünün temsilcisi olan, q' nün kompleks bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Böyle bir temsile bir *dalga fonksiyonu* diyeceğiz ve bunu

$$\Psi_\xi(q') = \langle q'|\xi\rangle \tag{104}$$

şeklinde yazacağız.

Bölüm: 3 ve 4 ün fonksiyonlarıyla bağlantı artık tesis edilebilir. Bir misâl olarak $\langle\xi|\rangle$ skaler çarpımıyla Bölüm: 3-2 nin iç çarpımı arasındaki bağlantıyı gösterelim. Sâdece skaler çarpımı (103) açılımı cinsinden yazıyoruz:

$$\langle\xi|\eta\rangle = \int dq' \int dq'' \langle\xi|q'\rangle\langle q'|q''\rangle\langle q''|\eta\rangle$$

Dalga fonksiyonunun (104) ile verilmiş olan târifinden ve (102) ortonormâllik şartından faydalanarak

$$\langle\xi|\eta\rangle = \int dq' \, \Psi_\xi^*(q')\Psi_\eta(q') \tag{105}$$

buluruz. Bu ise tamamı tamamına Bölüm: 3-2 nin iç çarpımıdır.

Problem: q tabanında q operatörünün

$$\langle q''|q|q'\rangle = q'\,\delta(q' - q'')$$

diyagonâl matrisiyle temsil edildiğini ve $F(q)$ gibi herhangi bir fonksiyonun da

$$\langle q''|F(q)|q'\rangle = F(q')\,\delta(q' - q'')$$

temsilini haiz olduğunu gösteriniz.

Dalga fonksiyonunun bir operatör denkleminde zuhurunu ve Bölüm: 1-2 deki fonksiyonlara tatbik edilmiş olan lineer operatörlerle bağlantısını göstermek üzere (68) «hareket denklemi» ni göz önüne alalım:

$$i\,\frac{\partial}{\partial s}\,|\xi, s\rangle = K|\xi, s\rangle \tag{106}$$

$|q'\rangle$ özketler takımının s parametresine bağlı olmadığı kabul edilmiştir. Buna göre (106) nın her iki tarafının da $\langle q'|$ bra vektörüne göre skaler çarpımını alarak

$$i\,\frac{\partial}{\partial s}\,\langle q'|\xi, s\rangle = \langle q'|K|\xi, s\rangle$$

elde ederiz. Şimdi, K operatörünün sağına «tam bir hâl takımı» nı sokmak için (98) ve (99) la ifâde edilen açılım teoremlerini kullanalım. Bu

$$i\,\frac{\partial}{\partial s}\,\langle q'|\xi, s\rangle = \int dq''\,\langle q'|K|q''\rangle\,\langle q''|\xi, s\rangle \tag{107}$$

verir. $\langle q'|K|q''\rangle$ matris elemanı sürekli iki değişkenin bir fonksiyonu olup

$$\langle q'|K|q''\rangle = k(q', q'') \tag{108}$$

yazılabilir. $\langle q'|\xi, s\rangle$ skaler çarpımı q ve s diye sürekli iki değişkene bağlı, (104) şeklinde bir dalga fonksiyonudur. Buna göre (107)

$$i\,\frac{\partial}{\partial s}\,\Psi_\xi(q', s) = \int dq''\,k(q', q'')\,\Psi_\xi(q'', s) \tag{109}$$

yazılabilir. Operatör denkleminin bu şekli Bölüm: 4-2 deki lineer bir diferansiyel veyâ integrâl operatörün temsilinin tamamen benzeridir [Bk. (7) numaralı denklem ve sonrası].

Problem 1: $\langle\xi|K|\eta\rangle$ matris elemanını, (105) e benzer şekilde, dalga fonksiyonunun q tabanındaki temsilcileri cinsinden ifâde ediniz. Eğer K operatörü q tabanına göre diyagonâl ise (yâni diyagonâl bir temsilcisi varsa), dalga fonksiyonları cinsinden $\langle\xi|K|\eta\rangle$ nın şekli ne olur?

Problem 2: Sayılabilen $|n'\rangle$ Fourier tabanının q tabanıyla

$$\langle q'|n'\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(\frac{n'\pi q'}{a}\right)$$

ile verilen skaler çarpımları vardır. Dirac notasyonunu kullanarak açık hesaplarla, q tabanına göre bir $|\xi\rangle$ vektörünün $\Psi_\xi(q')$ dalga fonksiyonunun Fourier tabanına göre bir seriye açılımı şeklinde ifâde olunabileceğini gösteriniz.

Dalga fonksiyonları hakkındaki münakaşamızı tamamlamak üzere dalga fonksiyonlarının üniter bir dönüşüm matrisinin elemanları olarak tefsir olunabileceğini göstereceğiz. (97) özdeğer problemini (101) sürekli q tabanına göre temsilciler cinsinden göz önüne alalım. (106) dan (109) a kadar olanlara sıkı sıkıya benzeyen kademelerle (97) nin q ya göre temsilcisinin

$$\int dq'\, k(q', q'')\Psi_{K'}(q'') = K'\Psi_{K'}(q') \tag{110}$$

olduğunu buluruz. Burada $k(q', q'')$ nün ifâdesi (108) ile verilmiş olup $\Psi_{K'}(q') = \langle q'|K'\rangle$ dalga fonksiyonu da $|K'\rangle$ özvektörünün q ya göre temsilcisidir.

Bölüm: 5-9 da $K\Psi_\alpha = \lambda_\alpha \Psi_\alpha$ özdeğer problemi, (83) ile verilen şu

$$\sum_{\alpha'} k_{\alpha\alpha'} u_{\alpha'\beta} = \lambda_\beta u_{\alpha\beta} \tag{83}$$

lineer denklem sisteminden hareketle özdeğerlerin ve U üniter matrisinin tâyini şeklini almıştı. U nun sütûnlarının (yâni β tesbit edilmiş m ve $\alpha=1, 2,\ldots, n$ olmak üzere $u_{\alpha\beta}$ nın) ilk φ tabanına göre Ψ_β özvektörlerinin temsilcileri oldukları bulunmuştu.

(110) ile (83) ün mukayesesi, sürekli integralin münferit toplamın yerini tuttuğu da göz önünde bulundurulmak sûretiyle,

$$u_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \Psi_{K'}(q') = \langle q' \mid K' \rangle \tag{111}$$

şeklinde bir eşdeğerliliğin mevcûd olduğunu göstermektedir. Buna göre dalga fonksiyonu

$$U = \underset{q'\downarrow}{\overset{K'\rightarrow}{(\langle q' \mid K' \rangle)}}$$

şeklindeki bir U üniter operatörünün temsilcisi olarak tefsir edilebilmektedir. Lineer bir diferansiyel veyâ integrâl denkleme bağlı bir özdeğer problemini çözmek ve dalga fonksiyonlarını elde etmek, operatörü diyagonâlleştiren üniter U dönüşümünü tesbit etmeğe muâdildir (ve esasında da bundan ibârettir).

EK A
BESSEL SİLİNDİR FONKSİYONLARI

Aksi söylenmediği takdirde yunan indisleri ve z değişkeni keyfî kompleks sayılara, lâtin indisleri negatif olmayan tamsayılara ve x de reel değerler alan değişkene delâlet edecektir. Bessel fonksiyonları hakkındaki standart, ansiklopedik müracaat kitabı G. N. Watson'un 1944 de New York, Cambridge University Press'de 2. baskısı yapılmış olan «Theory of Bessel Functions» isimli eseridir.

A-1 TARİFLER

Bessel diferansiyel denklemi

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu(z) = 0 \tag{1}$$

ile verilmiş olup Laplace operatörünün silindirik ve küresel koordinatlardaki ayrışımında ortaya çıkmaktadır. Bessel denklemini tahkik eden $Z_\nu(z)$ fonksiyonlarına ν-üncü mertebeden silindirik fonksiyonlar adı verilmektedir.

Orijin cıvarında kuvvet serisi şeklindeki çözümler

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \\ J_{-\nu}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \end{aligned} \tag{2}$$

dir. $\Gamma(z)$ fonksiyonu gamma fonksiyonudur. (Bk. MO, s. 1). $\nu \neq m$ için J_ν ve $J_{-\nu}$ fonksiyonları (1) in lineer müstakil çözümleridir. Fakat eğer ν bir tamsayı ise, (2) den

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z) \tag{3}$$

olduğu gösterilebilir.

J_ν ve $J_{-\nu}$ için ν nün bir tamsayı olması veyâ olmaması arasındaki fark dolayısıyla $J_\nu(z)$ yi (Bessel fonksiyonu veyâ birinci cins Bessel fonksiyonu denen) müstakil bir çözüm olarak kullanmak ve Neuman fonksiyonu (veyâ ikinci cins Bessel fonksiyonu) adı verilen

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{4}$$

ile verilmiş $N_\nu(z)$ fonksiyonunu târif etmek uygundur. ν nün tamsayı olmaması hâlinde N_ν âşikâr olarak J_ν den lineer müstakildir. $\nu \to m$ için N_m in hâlâ J_m den lineer müstakil olduğu gösterilebilir. L'Hôpital kaidesini kullanarak (4) den N_m

$$N_m(z) = \lim_{\nu\to m} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right] \tag{5}$$

olarak târif edilebilir. (2) serilerinden, kökleri bir tam sayı farkeden indis denklemini haiz bir diferansiyel denklem için beklendiği vechile $N_m(z)$ fonksiyonunun $\ln z$ yi ihtivâ etmesi âşikârdır. Bunun genel şekli MO' da sayfa: 17 de verilmiştir. $N_{-m}(z)$ fonksiyonu (3) bağıntısını tahkik eder.

Çok kere, Hankel fonksiyonları denen ve

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iN_\nu(z) \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iN_\nu(z) \end{aligned} \tag{6}$$

ile târif olunan $H_\nu^{(1)}$ ve $H_\nu^{(2)}$ ile gösterilen başka bir silindirik fonksiyon çiftini ithâl etmek uygundur. Hankel fonksiyonları Bessel diferansiyel denklemi için lineer müstakil bir çözüm çifti teşkil ederler.

A-2 REKÜRANS FORMÜLLERİ

J_ν, N_ν, $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ fonksiyonlarının hepsi

$$\begin{aligned} Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Z_\nu(z) \\ Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}'z) &= 2\frac{dZ_\nu(z)}{dz} \end{aligned} \tag{7}$$

rekürans bağıntılarını tahkik edecek şekilde normalize edilmişlerdir. Bunlardan

$$\frac{d}{dz}[z^\nu Z_\nu(z)] = z^\nu Z_{\nu-1}(z)$$
$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu} Z_\nu(z)] = -z^{-\nu} Z_{1+1}(z) \qquad (8)$$

gibi daha başkaları da çıkartılabilir.

A-3 ASİMTOTİK ŞEKİLLER

Bessel fonksiyonlarının argümentlerinin küçük ve büyük limitleri faydalıdır. Basitliği temin gâyesiyle ν mertebesini reel ve negatif olmayan bir sayı olarak alacağız.

$|z|$ nin 1 den ve ν den çok küçük değerleri için

$$J_\nu(z) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$$
$$N_0(z) \to \frac{2}{\pi}\left[ln\left(\frac{z}{2}\right) + 0{,}5772 \ldots\right] \qquad (9)$$
$$N_\nu(z) \to -\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu \qquad \nu \neq 0$$
$$H_\nu^{(1,2)}(z) \simeq \pm iN_\nu(z)$$

$|z|$ nin 1 e ve ν ye nisbetle çok büyük değerleri için

$$J_\nu(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$N_\nu(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (10)$$
$$H_\nu^{(1,2)} \to (\mp i)^{\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\pm iz}$$

A-4 BESSEL FONKSİYONLARININ KÖKLERİ

(10) dan J_ν ve N_ν nün sonsuz sayıda kökü haiz oldukları âşikârdır. Aşağıdaki A-1 ve A-2 cetvelleri $\nu = 0, 1, 2$ için en küçük birkaç kökün listesini vermektedirler. Çok daha teferruatlı cetvelleri «Watson'un «Bessel Functions» isimli eserinin 748. sayfasından itibâren bulmak mümkündür.

Bazan da $J_\nu(z)$ nin köklerinden ziyâde maksimum ve minimumları aranır. Cetvel A-3 de $J_m'(x)=0$ denkleminin birkaç kökünü göstermektedir.

Cetvel A-1
$J_m(x_{mn})=0$ ın kökleri

m	n = 1	2	3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.173
2	5.136	8.417	11.620

Cetvel A-2
$N_m(y_{mn})=0$ ın kökleri

m	n = 1	2	3
0	0.8936	3.958	7.086
1	2.197	5.430	8.596
2	3.384	6.794	10.023

Cetvel A-3
$J_m'(x'_{mn})=0$ ın kökleri

m	n = 1	2	3
0	0	3.832	7.016
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

Bessel fonksiyonlarının gâyet teferruatlı nümerik cetvelleri mevcuttur. Jahnke ve Emde'de ve Watson'da vasat talebe için oldukça teferruatlı cetveller vardır. Morse ve Feshbach da sayfa 1565 de ve Ek'de kısa cetveller vermektedirler.

A-5 TADİL EDİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARI

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}-1-\frac{\nu^2}{z^2}\right]\Omega_\nu(z)=0 \tag{11}$$

diferansiyel denkleminin çözümlerine **tâdil edilmiş** Bessel fonksiyonları adı verilir. (1) ile mukayese bunların z yerine iz argümentli Bessel fonksiyonlarına bağlı olduklarını gösterir. Lineer müstakil tâdil edilmiş iki Bessel fonksiyonunu (biri birinci, diğeri ikinci cins olmak üzere) $I_\nu(z)$ ve $K_\nu(z)$ ile göstermek ve

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= i^{-\nu} J_\nu(iz) \\ K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) \end{aligned} \tag{12}$$

şeklinde târif etmek âdet hâline gelmiştir. $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ olduğu gösterilebilir. Eğer ν ile z reel iseler $I_\nu(z)$ ile $K_\nu(z)$ de reel olurlar; bunlar z nin salınımlı değil, fakat monoton fonksiyonlarıdır.

I_ν ve K_ν nün tahkik ettikleri rekürans bağıntıları da şunlardır:

$$\begin{aligned} I_{\nu-1} - I_{\nu+1} &= \frac{2\nu}{z} I_\nu \qquad & I_{\nu-1} + I_{\nu+1} &= 2I_\nu' \\ K_{\nu-1} - K_{\nu+1} &= -\frac{2\nu}{z} K_\nu \qquad & K_{\nu-1} + K_{\nu+1} &= -2K_\nu' \end{aligned} \tag{13}$$

ν reelse ve negatif değilse argümentin küçük ve büyük değerleri için asimtotik ifâdeler de şu şekildedir:

$|z|$ nin 1 e ve ν ye nisbetle çok küçük değerleri için

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &\to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \\ K_0(z) &\to -\left[ln\left(\frac{z}{2}\right) + 0{,}5772...\right] \\ K_2(z) &\to \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu \qquad \nu \neq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

$|z|$ nin 1 e ve ν ye nisbetle çok büyük değerleri için

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^x \\ K_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \end{aligned} \tag{15}$$

A-6 BELİRSİZ İNTEGRALLER

(1) diferansiyel denkleminden J_ν, N_ν, $H_\nu^{(1,2)}$ âdî silindirik fonksiyonlarından herhangi ikisinin şu belirsiz integralleri elde edilebilir:

$$\int\left[(p^2-q^2)z-\frac{\mu^2-\nu^2}{z}\right]Z_\mu(pz)\xi_\nu(qz)dz$$

$$= z[qZ_\mu(pz)\xi_\nu'(qz)-p\xi_\nu(qz)Z_\mu'(pz)] \quad (16)$$

Buradaki üsler argümente göre türevleri göstermektedir.

Tâdil edilmiş Bessel fonksiyonları için mütekâbil integral de

$$\int\left[(p^2-q^2)z+\frac{\mu^2-\nu^2}{z}\right]Z_\mu(pz)\xi_\nu(qz)dz$$

$$= -\ z[qZ_\mu(pz)\xi_\nu'(qz)-p\xi_\nu(qz)Z_\mu'(pz)] \quad (17)$$

şeklindedir.

Eğer argümentlerle mertebeler aynı ise şu belirsiz integrâl *âdî* silindir fonksiyonları için cârî olur:

$$\int zZ_\nu(z)\xi_\nu(z)dz = \frac{z^2}{2}\left[Z_\nu'\xi_\nu'+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)Z_\nu\xi_\nu\right]$$

$$= \frac{z^2}{2}\left[Z_\nu\xi_\nu+Z_{\nu\pm1}\xi_{\nu\pm1}-\frac{\nu}{z}\left(Z_\nu\xi_{\nu\pm1}+Z_{\nu\pm1}\xi_\nu\right)\right] \quad (18)$$

Tâdil edilmiş Bessel fonksiyonlarına tekâbül eden integrâl de

$$\int zZ_\nu(z)\xi_\nu(z)dz = \frac{z^2}{2}\left[\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)Z_\nu\xi_\nu-Z_\nu'\xi_\nu'\right] \quad (19)$$

dür.

A-7 KÜRESEL BESSEL FONKSİYONLARI

$(\nabla^2+k^2)\Psi=0$ dalga denkleminin küresel koordinatlarda ayrışımında radyal kısmı veren denklem

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]f_l(r)=0 \quad (20)$$

şeklini alır. Bunun çözümü

$$f_l(r) = A \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} + B \frac{N_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \tag{21}$$

şeklindedir. Bu fonksiyonların önemi dolayısıyla $j_l(z)$, $n_l(z)$, $h_l^{(1,2)}(z)$ ile gösterilen *küresel Bessel ve Hankel fonksiyonlarını* şu şekilde târif etmek âdet olmuştur:

$$\begin{aligned} j_l(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(z) \\ n_l(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(z) \\ h_l^{(1,2)}(z) &= j_l(z) \pm i\, n_l(z) \end{aligned} \tag{22}$$

Reel z için $h_l^{(2)}(x)$ fonksiyonu $h_l^{(1)}(x)$ in kompleks eşleniğidir.

(2) seriye açılımlarından

$$\begin{aligned} j_l(z) &= (-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{\sin z}{z}\right) \\ n_l(z) &= -(-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{\cos z}{z}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

olduğunu göstermek kâbildir. l nin ilk birkaç değeri için bu fonksiyonların açık şekilleri şöyledir:

$\underline{l = 0}$: $\quad j_0(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; $n_0(z) = -\dfrac{\cos z}{z}$; $h_0^{(1)}(z) = \dfrac{e^{iz}}{iz}$

$\underline{l = 1}$: $\quad j_1(z) = \dfrac{\sin z}{z^2} - \dfrac{\cos z}{z^2}$; $n_1(z) = -\dfrac{\cos z}{z^2} - \dfrac{\sin z}{z}$;

$$h_1^{(1)}(z) = -\frac{e^{iz}}{z}\left(1 + \frac{i}{z}\right)$$

$\underline{l = 2}$: $\quad j_2(z) = \left(\dfrac{3}{z^3} - \dfrac{1}{z}\right)\sin z - \dfrac{3\cos z}{z^2}$ (24)

$$n_2(z) = -\left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right)\cos z - \frac{3\sin z}{z^2}$$

$$h_2^{(1)}(z) = i\,\frac{e^{iz}}{z}\left(1 + \frac{3i}{z} - \frac{3}{z^2}\right)$$

(9) ve (10) genel asimtotik şekillerinden küresel Bessel fonksiyonlarının asimtotik şekillerinin aşağıdaki gibi olduğu bulunabilir.

$|z|$ nin l ye ve 1 e göre çok küçük değerleri için

$$j_l(z) \to \frac{z^l}{(2l+1)!!}$$

$$n_l(z) \to -\frac{(2l-1)!!}{z^{l+1}} \qquad (25)$$

burada $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\ldots\times5\times3\times1$ dir.

$|z|$ nin l den çok büyük değerleri için

$$j_l(z) \to \frac{1}{z}\sin\left(z - \frac{l\pi}{2}\right)$$

$$n_l(z) \to -\frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{l\pi}{2}\right) \qquad (26)$$

$$h^{(1)}{}_l(z) \to (-i)^{l+1}\frac{e^{iz}}{z}$$

Küresel Bessel fonksiyonlarının muhtelif çiftlerinin wronskiyenleri de

$$W(j_l, n_l) = \frac{1}{i}\,W(j_l, h_l^{(1)}) = -\,W(n_l, h_l^{(1)}) = \frac{1}{z^2} \qquad (27)$$

şeklindedir. ξ_l ile j_l, n_l, $h_l^{(1)}$, $h_l^{(2)}$ nin herhangi lineer kombinezonunu göstererek, küresel Bessel fonksiyonları için bazı rekürans bağıntıları da aşağıda sıralanmış bulunmaktadır:

$$\frac{2l+1}{z}\,\xi_l(z) = \xi_{l-1}(z) + \xi_{l+1}(z)$$

$$\xi_l'(z) = \frac{1}{2l+1}\,[l\xi_{l-1}(z) - (l+1)\xi_{l+1}(z)]$$

$$\frac{d}{dz}\,[z^{l+1}\xi_l(z)] = z^{l+1}\xi_{l-1}(z) \qquad (28)$$

$$\frac{d}{dz}[z^{-l}\,\xi_l(z)] = -z^{-l}\,\xi_{l+1}(z)$$

Küresel Bessel fonksiyonlarının âdî Bessel fonksiyonlarına sıkı sıkıya bağlı olmaları hasebiyle muhtelif *belirli ve belirsiz integraller*, (19) vâsıtasıyla (16) dan türetilebilirler. ξ_l ve Z_l ile küresel Bessel fonksiyonlarının herhangi lineer kombinezonlarını göstermek sûretiyle, faydalı bir misâl olmak üzere şu belirsiz integrâl elde edilebilr:

$$\int z^2\xi_l(z)Z_l(z)dz = \frac{z^3}{2}\left[\xi_l Z_l - \frac{1}{2}\,(\xi_{l-1}\,Z_{l+1} + \xi_{l+1}\,Z_{l-1})\right] \qquad (29)$$

$l=0$ için ξ_{-1} ve Z_{-1} fonksiyonları (28) deki üçüncü rekürans bağıntısından elde edilen şu

$$j_{-1} = -n_0 \qquad n_{-1} = j_0 \qquad h^{(1)}{}_{-1} = ih_0 \qquad (30)$$

kaidesine göre dönüştürülmelidirler.

$j_l(kx)$ düzgün küresel Bessel fonksiyonlarının $(0 \leqslant x < \infty)$ sonsuz aralığındaki normalizasyonu bir delta fonksiyonu normalizasyonudur; yâni

$$\int_0^\infty x^2\, j_l(kx)\, j_l(k'x)\, dx = \frac{\pi}{2k^2}\,\delta(k-k') \qquad (31)$$

dür. Cetvel: A-4 de $j_l(x)$ in köklerinin kısa bir listesi verilmiştir. $j_l(x)$ in nümerik cetvelleri: (Mathematical Tables Project, Natl. Bur. Standards, «Tables of Spherical Bessel Functions», 2 cild, Columbia University Press, New York, 1947) de vardır.

Cetvel: A-4

$j_l(x) = 0$ ın x_{lm} kökleri

l	m			
	1	2	3	4
0	3.142	6.283	9.425	12.566
1	4.493	7.725	10.904	14.066
2	5.763	9.095	12.323	15.515
3	6.988	10.417	13.698	16.924

EK B
LEGENDRE FONKSİYONLARI ve KÜRESEL HARMONİKLER

Ek A nın başlangıcında vaz edilen genel notasyon burada da tatbik olunacaktır. Bu bahis hakkında daha teferruatlı bilgi MO dan ve 1. Bölümde zikredilen matematik müracaat kitaplarından temin edilebilr.

B-1 TARİFLER

Legendre diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dZ_\nu^\mu(z)}{dz}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]Z_\nu^\mu(z)=0 \qquad (1)$$

ile verilmiş olup bu Laplace operatörünün küresel koordinatlardaki ayrışımı esnâsında ortaya çıkar. Bu metinde z değişkeni $\cos\theta$ ya eşit alınmıştır. Genel hâlde μ ve ν keyfî kompleks sayılardır. Fakat en umumî fizikî tatbikatta μ ve ν nün her ikisi de tamsayıdırlar. (1) in çözümlerine Legendre fonksiyonları veyâ daha doğrusu eğer $\mu=0$ ise Legendre fonksiyonları ve $\mu\neq0$ ise de asosye Legendre fonksiyonları adı verilmektedir.

Legendre diferansiyel denklemi ikinci mertebeden olduğundan $P_\nu^\mu(z)$ ve $Q_\nu^\mu(z)$ ile gösterilen ve sırasıyla birinci ve ikinci cins Legendre fonksiyonları denilen lineer müstakil iki çözümü haizdir. Eğer $\mu=0$ ise çözümler $P_\nu(z)$ ve $Q_\nu(z)$ ile gösterilirler.

B-2 LEGENDRE POLİNOMLARI

Eğer $\mu=0$ ve $l=0, 1, 2,\ldots$ olmak üzere $\nu=l$ ise Legendre denkleminin bir çözümü sonlu, tek değerli ve $-1\leqslant x\leqslant1$ aralığında sürekli olur. $P_l(x)$ ile gösterilen ve $x=1$ de bire eşit olacak şekilde normalize edilmiş olan bu çözüme l-ninci mertebeden bir Legendre polinomu adı verilir. (1) in bir kuvvet serisi şeklindeki çözümü, l nin ilk birkaç değeri için bu Legendre polinomlarının

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

olduklarını gösterir. $P_l(x)$ için genel bir formül *Rodrigues formülü*dür.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l\,!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \tag{3}$$

Bu fonksiyonlar için bazı özel değerler de

$$
\begin{aligned}
&P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l \qquad P_{2l+1}(0) = 0 \\
&P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{(2l-1)\,!!}{2^l\, l\,!}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

olup burada da $(2l-1)\,!! = (2l-1)(2l-3)(2l-5)\ldots(5)(3)(1)$ târif edilmiş bulunmaktadır.

B-3 $P_l(x)$ İÇİN REKÜRANS FORMÜLLERİ

$$\frac{dP_{l+1}}{dx} - \frac{dP_{l-1}}{dx} - (2l+1)P_l = 0 \tag{5}$$

$$(l+1)\,P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{dP_{l+1}}{dx} - x\frac{dP_l}{dx} - (l+1)P_l = 0 \tag{7}$$

$$(x^2-1)\frac{dP_l}{dx} - lxP_l + lP_{l-1} = 0 \tag{8}$$

B-4 $P_l(\cos\theta)$ İÇİN ASİMTOTİK ŞEKİLLER

$l \gg 1$ olmak üzere büyük mertebeler için limit hâlinde bazan asimtotik formüller kullanmak uygun düşer. Bu takdirde

$$P_l(\cos\theta) \rightarrow J_0\left((2l+1)\sin\frac{\theta}{2}\right) \qquad (0 \leq \theta \ll 1) \tag{9}$$

ve

$$P_l(\cos\theta) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi l \sin\theta}} \cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] \qquad \left(\theta \gg \frac{1}{l}\right) \tag{10}$$

B-5 İKİNCİ CİNS $Q_l(x)$ LEGENDRE FONKSİYONLARI

$\nu = l$ ve $\mu = 0$ için $(-1, 1)$ aralığındaki diğer lineer müstakil $Q_l(x)$ çözümü logaritmalar ihtivâ etmekte ve $x = \pm 1$ için ıraksaklaşmaktadır. İkinci çözümün genel şekli wronksiyen metoduyla bulunabilir (Bk. MO, sayfa: 160). $Q_l(x)$ in standard târifi

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} P_l(x)\, ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{m=1}^{l} \frac{1}{m} P_{m-1}(x) P_{l-m}(x) \tag{11}$$

ile verilmiştir. $l = 0$ için toplamalı terim sıfır olarak târif edilmiştir. İlk birkaç $Q_l(x)$ ler şunlardır:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ Q_1(x) &= \frac{x}{2}\, ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1 \\ Q_2(x) &= \frac{1}{4}(3x^2-1)\, ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3}{2}x \end{aligned} \tag{12}$$

B-6 $P_l^m(x)$ ASOSYE LEGENDRE POLİNOMLARI

$l = 0, 1, 2, \ldots$ ve m de bir tamsayı olmak üzere $\nu = l$ ve $\mu = m$ olduğu zaman (1) in çözümleri büyük önemi haizdirler. Eğer çözüm $-1 \leqslant x \leqslant 1$ aralığında sonlu, tek değerli ve sürekli olacaksa m nin $-l \leqslant m \leqslant l$ sınırları arasında kalması zarurîdir. Buna göre tesbit edilmiş l değerleri için $(2l+1)$ adet **iyi davranışlı** $P_l^m(x)$ fonksiyonu vardır. Pozitif m ler için asosye Legendre fonksiyonu

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \tag{13}$$

ile târif edilmiştir. $Q_l^m(x)$ asosye fonksiyonu da $Q_l(x)$ vâsıtasıyla tıpatıp aynı şekilde târif edilir. Negatif m ler için $P_l^{-m}(x)$ çözümü $P_l^m(x)$ e

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \tag{14}$$

mûcibince bağlıdır. $-l \leqslant m \leqslant l$ olmak üzere m nin bütün değerleri için, (13) e (3) ü ikâme etmek sûretiyle elde edilen genelleştirilmiş Rodrigues formülü cârîdir:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l. \tag{15}$$

m pozitif olmak şartıyla l ve m nin ilk birkaç değeri için $P_l^m(x)$ asosye Legendre fonksiyonları şöyledir:

$$\begin{aligned}
&P_1^1(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\
&P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad P_2^2(x) = 3(1-x^2) \\
&P_3^1(x) = -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad P_3^2(x) = 15x(1-x^2) \\
&P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Asosye Legendre polinomları için rekürans formülleri MO'da sayfa: 54 de verilmiştir. Bu rekürans bağıntıları aynı l fakat komşu m değerleri için veyâ aynı m fakat komşu l değerleri için fonksiyonlar arasındaki bağlantıyı temin etmektedirler.

B-7 BELİRSİZ İNTEGRALLER VE DİKLİK; NORMALİZASYON İNTEGRALLERİ

(1) diferansiyel denkleminden, $Z_\nu^\mu(z)$ ve $\xi_{\nu'}^{\mu'}(z)$ gibi iki çözüm için şu belirsiz integrâl tesis edilebilir:

$$\int \left[\nu(\nu+1) - \nu'(\nu'+1) - \frac{\mu^2-\mu'^2}{1-z^2}\right] Z_\nu^\mu(z)\xi_{\nu'}^{\mu'}(z)dz$$

$$= (1-z^2)\left[Z_\nu^\mu(z)\frac{d\xi_{\nu'}^{\mu'}(z)}{dz} - \xi_{\nu'}^{\mu'}(z)\frac{dZ_\nu^\mu(z)}{dz}\right] \tag{17}$$

(17) integrali $P_l^m(x)$ in $(-1, 1)$ aralığında dikliğini ve normlarını tesis etmek için kullanılabilir. $P_l^m(x)$ fonksiyonu sonlu olduğundan ve uç noktaları da dâhil olmak üzere $(-1, 1)$ aralığının her yerinde sonlu kalan bir eğimi haiz olduğundan (17) nin sağ yanı $x = \pm 1$ de sıfır olur. Buna binâen $\mu = \mu' = m$ ve $\nu = l$, $\nu' = l'$ olmak üzere (17) ifâdesi $P_l^m(x)$ in *aynı* m fakat *farklı* l ler için diklik şartını verir:

$$[l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0 \tag{18}$$

$P_l^m(x)$ fonksiyonunun $(-1, 1)$ aralığındaki normu da (15) vâsıtasıyla tesis edilebilir. Netice

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \tag{19}$$

şeklinde bir ortonormâllik integrâli olarak ifâde edilebilir. $m = 0$ için (19) ifâdesi Bölüm: 3-6 da (51) numaralı denklemle işâret olunan normu verir.

B-8 LEGENDRE FONKSİYONLARI SERİSİNE AÇILIM; TAMLIK BAĞINTISI

m tesbit edilmiş olmak ve $l = m, m+1, m+2, \ldots$ olmak şartıyla $P_l^m(x)$ fonksiyonlarının takımı $(-1, 1)$ aralığında tam bir dik fonksiyon takımı meydana getirir. Keyfî bir $f(x)$ fonksiyonu, tıpkı Bölüm: 3-2 de olduğu gibi, açılım katsayıları [(19) a binâen]

$$a_l^m = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{1} P_l^m(x) f(x) dx \tag{20}$$

ile verilmiş olan

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} a_l^m P_l^m(x) \tag{21}$$

serisine açılabilir. $P^m(x)$ için tamlık bağıntısı da

$$\sum_{l=m}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) P_l^m(x') = \delta(x-x') \tag{22}$$

ile verilmiştir.

3-9 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ KÜRESEL HARMONİKLERİ

Küresel koordinatlarda, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ve $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ şartlarına uygun değerler alan (θ, φ) açısal değişkenleri cinsinden [1] ortonormâl bir fonksiyon takımı bulunması faydalıdır. Böyle bir fonksiyon takımı birim küre üzerinde ortonormâl bir fonksiyon takımı olacaktır.

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ olmak üzere $e^{im\varphi}$ şeklindeki Fourier serileri fonksiyonları φ değişkenine göre tam bir dik fonksiyon takımı teşkil ederler. m sâbit ve $l = m, m+1, \ldots$ olmak şartıyla $P_l^m(\cos\theta)$ asosye Legendre polinomları da $\cos\theta$ değişkenine göre $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ aralığında tam bir dik fonksiyon takımı teşkil etmektedirler. Buna binâen $P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$ çarpımı birim küre üzerinde dik bir tam fonksiyon takımı teşkil edecektir. $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ile gösterilen ve küresel harmonikler denen ortonormâl fonksiyonlar da

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \tag{23}$$

ile verilmişlerdir. l ve m indislerinin aldıkları değerler $l = 0, 1, 2, \ldots$ ve $m = -l, -(l-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (l-1), l$ dir. m nin negatif değerleri için küresel harmonikler pozitif m ye tekâbül edenlerin kompleks eşleniklerine

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m\, Y^*_{l,m}(\theta, \varphi) \tag{24}$$

mûcibince bağlıdırlar. Ortonormâllik şartı

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{25}$$

ile ve tamlık bağıntısı da

1) Aslında, değişkenler $(\cos\theta, \varphi)$ dir; zirâ küresel koordinatlardaki hacım elemanının ifadesi, $d\Omega = d(\cos\theta)\, d\varphi$ olmak üzere $d^3x = r^2\, dr\, d\Omega$ ile verilmiştir.

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos\theta - \cos\theta') \qquad (26)$$

ile verilmektedir.

l ve m nin en küçük değerleri için küresel harmoniklerin açık ifâdeleri aşağıda verilmiştir. m nin negatif değerleri için (24) kullanılabilir.

$\underline{l = 0:}$ $\quad Y_{00} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$\underline{l = 1:}$ $\quad Y_{10} = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \cos\theta$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$\underline{l = 2:}$ $\quad Y_{20} = \sqrt{\dfrac{5}{4\pi}} \left(\dfrac{3}{2}\cos^2\theta - \dfrac{1}{2}\right)$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta\, e^{2i\varphi}$$

$\underline{l = 3:}$ $\quad Y_{30} = \sqrt{\dfrac{7}{4\pi}} \left(\dfrac{5}{2}\cos^3\theta - \dfrac{3}{2}\cos\theta\right)$

$$Y_{31} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\, e^{i\varphi}$$

$$Y_{32} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2\theta \cos\theta\, e^{2i\varphi}$$

$$Y_{33} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3\theta\, e^{3i\varphi}$$

$\underline{l = 4:}$ $\quad Y_{40} = \sqrt{\dfrac{9}{4\pi}} \left(\dfrac{35}{8}\cos^4\theta - \dfrac{15}{4}\cos^2\theta + \dfrac{3}{8}\right)$

$$Y_{41} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \sin\theta\,(7\cos^3\theta - \cos\theta)\, e^{i\varphi}$$

$$Y_{42} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{8\pi}}\sin^2\theta\,(7\cos^2\theta - 1)\,e^{2i\varphi}$$

$$Y_{43} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{35}{8\pi}}\sin^3\theta\cos\theta\,e^{3i\varphi}$$

$$Y_{44} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{8\pi}}\sin^4\theta\,e^{4i\varphi}$$

B-10 KÜRESEL HARMONİKLERİN TOPLAM TEOREMİ

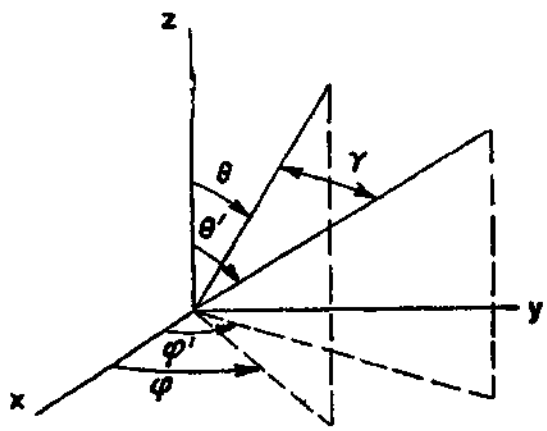
Açısal durumları Şekil: B-1 de gösterildiği gibi (θ, φ) ve (θ', φ') açılarıyla belirtilmiş olan iki vektör arasındaki açıya γ dersek

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

olmak üzere $P_l(\cos\gamma)$ Legendre polinomu l-ninci mertebeden küresel harmoniklerin

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \varphi')Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{28}$$

şeklinde bilineer bir açılımı olarak yazılabilir. Buna küresel harmoniklerin *toplam teoremi* adı verilmektedir. (28) denklemi kesin olmayan bir



Şekil: B-1

yoldan da, (26) tamlık bağıntısının sağındaki delta fonksiyonlarının çarpımının

$$\delta(\varphi - \varphi')\,\delta(\cos\theta - \cos\theta') = \frac{1}{2\pi}\,\delta(\cos\gamma)$$

şeklinde yazılabileceğine dikkat etmek sûretiyle de çıkartılabilir. Buna binâen $\delta(\cos\gamma)$, P_l lerin (22) ile verilmiş tamlık bağıntısından faydalanarak (26) nın sağ yanına açık olarak yazılır ve her iki yandaki terimlerin mukayesesi (28) ifâdesini verir.

Eğer γ sıfıra giderse (28) denklemi küresel harmoniklerin mecmû toplamları hakkında

$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \tag{29}$$

kaidesini verir. Bunu, $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ lerin mutlak karelerinin m üzerinden ortalamasının, küresel olarak simetrik ve Y_{00} ın mutlak karesine eşit olmasına delâlet ettiği şeklinde tefsir etmek kâbildir.

B-11 KÜRESEL HARMONİKLER İÇİN FAYDALI REKÜRANS BAĞINTISI

İki küresel harmoniğin çarpımının tek küresel harmonikler serisine açılımının genel ifâdesi

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \sum_{L}\sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2L+1)}}\,(ll'00\,|\,ll'L0)\times$$
$$\times\,(ll'mm'\,|\,ll'LM)Y_{LM}(\theta,\varphi) \tag{30}$$

ile verilmektedir. Buradaki $(ll'mm'|ll'LM)$ katsayılarına Clebsch-Gordan veyâ Wigner veyâhut da vektörel toplam katsayıları adı verilmektedir. Bunlar, E. U. Condon ve G. H. Shortley: «Theory of Atomic Spectra», Cambridge University Press New York, sayfa: 73-78 de veyâ A. R. Edmonds: «Angular Momentum in Quantum Mechanics», Princeton University Press, Princeton, A. J., 1957, sayfa: 52 de târif edilmişlerdir.

Açık olarak yazarak, iki faydalı özel hâl şunlardır:

$$\cos\theta\, Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\left[\sqrt{\frac{l^2-m^2}{2l-1}}\,Y_{l-1,m} + \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{2l+3}}\,Y_{l+1,m}\right]$$

$$\sin\theta\, e^{\pm i\varphi} Y_{lm} = \pm\frac{1}{\sqrt{2l+1}}\left[\sqrt{\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{2l-1}}\,Y_{l-1,m\pm1}\right. \tag{31}$$
$$\left. - \sqrt{\frac{(l\pm m+2)(l\pm m+1)}{2l+3}}\,Y_{l+1,m\pm1}\right]$$