# KLÂSİK ELEKTRODİNAMİK
# ÇÖZÜMLÜ PROBLEM KİTABI

Ahmed Yüksel ÖZEMRE
Hâşim MUTUŞ

İST. ÜNİV. FEN FAKÜLTESİ – 1979

PROBLEM: 1 — $\vec{B}$ keyfi bir vektör olmak üzere

$$\iiint_V (\vec{\nabla}\times\vec{B})\, d^3\vec{r} = -\iint_S \vec{B}\times d\vec{S}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM — GAUSS teoreminin

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

şeklindeki ifadesinde, $\vec{C}$ ile keyfi bir sabit vektörü göstermek üzere $\vec{A}=\vec{B}\times\vec{C}$ alalım. Buna göre

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{A}\cdot d\vec{S} = (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{n}\, dS = [\vec{B},\vec{C},\vec{n}]\, dS = -[\vec{C},\vec{B},\vec{n}]\, dS =$$

$$= -\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{n})dS = -\vec{C}\cdot(\vec{B}\times d\vec{S})$$

olur; ve dolayısıyla GAUSS teoreminin ifadesi, $\vec{C}$ nin sabit bir vektör olduğu göz önünde tutularak,

$$\iiint_V \vec{C}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\, dV = -\iint_S \vec{C}\cdot(\vec{B}\times d\vec{S})$$

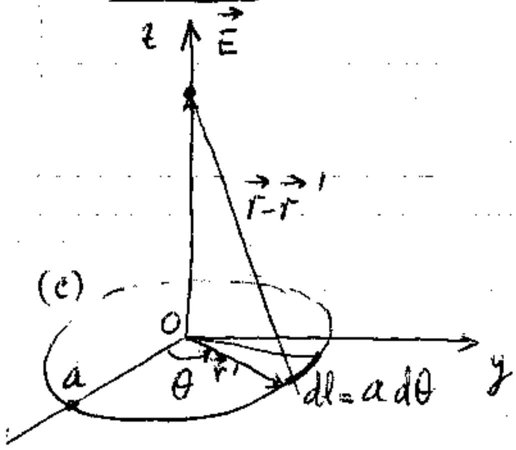
yani

$$\iiint_V \vec{\nabla}\times\vec{B}\, dV = -\iint_S \vec{B}\times d\vec{S}$$

şekline girmiş olur.

PROBLEM: 2 — $a$ yarıçapını ve $\lambda$ birbiçim çizgisel yük yoğunluğunu haiz bir çemberin ekseni üzerindeki bir noktada skaler potansiyelini ve elektrik alanının ifadelerini tayin ediniz.

ÇÖZÜM —




Tanımı gereği $\Phi$ skaler potansiyeli

$$\Phi = \int \frac{\lambda\, dl}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (1)$$

şeklindedir. $\vec{r} = z\vec{e}_3$, $\vec{r}' = a(\cos\theta\,\vec{e}_1+\sin\theta\,\vec{e}_2)$, $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{a^2+z^2}$, $dl = a\,d\theta$, $(0\le\theta\le 2\pi)$ olduğundan bu bilgilerin ışığı altında (1) kolayca hesaplanır, ve

(2)

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a\, d\theta}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{2\pi a \lambda}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

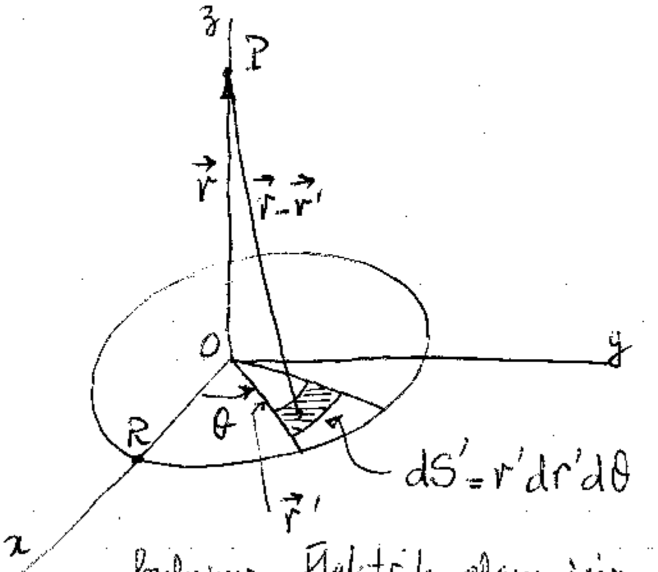
bulunur. Elektrik alanı ise

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -2\pi a\lambda \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{e}_3 = \frac{2\pi a \lambda z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{e}_3$$

olur.

PROBLEM: 3 _ $R$ yarıçaplı bir levha üzerinde $\sigma = q r'^2$ şeklinde yüzeysel bir yük dağılımının mevcud olması halinde levhanın merkezinden geçen ve kendisine dik olan bir doğru üzerindeki bir noktada skaler potansiyelin ve elektrik alanının ifadelerini bulunuz.

ÇÖZÜM.




Silindirik koordinatlarda

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{z^2+r'^2}\ , \quad dS' = r'\,dr'\,d\theta$$

ve

$$\Phi = \iint \frac{\sigma\, dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{q\, r'^3\, dr'\, d\theta}{\sqrt{z^2+r'^2}}$$

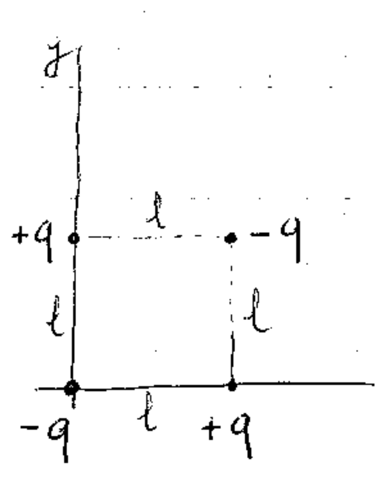
$$= 2\pi q \left\{ \frac{(z^2+R^2)^{3/2}}{3} - z^2(z^2+R^2)^{1/2} + \frac{2}{3}z^3 \right\}$$

bulunur. Elektrik alanı için ise

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = 2\pi q\left[z(z^2+R^2)^{1/2} + z^3(z^2+R^2)^{-1/2} - 2z^2\right]\vec{e}_3$$

bulunur.

PROBLEM: 4 _ Herbiri, $l$ kenarlı bir karenin köşesine yerleştirilmiş olan $|q|$ değerindeki noktasal yükler göz önüne alınıyor. Birbirini takip eden yüklerin farklı işaretlere sahip oldukları varsayımı altında ve ~~[illegible]~~ kare düzleminin $|\vec{r}| \gg l$ şartını gerçekleyen bir noktasındaki skaler potansiyeli, potansiyelin kuvadrupol açılımı yaklaşımı çerçevesi içinde hesaplayınız.




ÇÖZÜM _ Noktasal yüklerin şekilde gösterildiği gibi $(x, y)$ düzlemine yerleştirilmiş olduklarını fark edelim. Potansiyel fonksiyonunun kuvadrupol açılımı, bilindiği üzere,

(3)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots$$

şeklindedir. Öte yandan toplam yük : $Q = \sum_{\alpha=1}^{4} q_\alpha = 0$ dır. $\vec{p}$ dipol momentine gelince, bunun

$$\vec{p} = \sum_{\alpha=1}^{4} \vec{r}\,'_\alpha q_\alpha = 0.(-q) + lq\vec{e}_1 + (l\vec{e}_1 + l\vec{e}_2)(-q) + l\vec{e}_2 q = 0$$

olduğu görülmektedir. Kuvadrupol momenti, tanımına binâen,

$$Q_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{4} q_\alpha\left(3x'_{i\alpha}x'_{j\alpha} - r'^2_\alpha\delta_{ij}\right)$$

olduğuna göre

$$Q_{11} = \sum_\alpha q_\alpha\left(3x'_{1\alpha}x'_{1\alpha} - r'^2_\alpha\right) = q_1\left(3x'^2_1 - r'^2_1\right) + q_2\left(3x'^2_2 - r'^2_2\right) + q_3\left(3x'^2_3 - r'^2_3\right)$$
$$+ q_4\left(3x'^2_4 - r'^2_4\right) = -q\,(0-0) + q\,(3l^2 - l^2) - q\left(3l^2 - 2l^2\right) + q\left(0 - l^2\right)$$
$$= 2l^2q - l^2q - l^2q = 0$$

$$Q_{22} = \sum_\alpha q_\alpha\left(3x'_{2\alpha}x'_{2\alpha} - r'^2_\alpha\right) = q_1\left(3y^2_1 - r'^2_1\right) + q_2\left(3y^2_2 - r'^2_2\right) + q_3\left(3y^2_3 - r'^2_3\right) +$$
$$+ q_4\left(3y^2_4 - r'^2_4\right) = -q(0-0) + q(0-l^2) - q\left(3l^2 - 2l^2\right) + q\left(3l^2 - l^2\right)$$
$$= -l^2q - l^2q + 2l^2q = 0$$

$$Q_{33} = \sum_\alpha q_\alpha\left(3x'_{3\alpha}x'_{3\alpha} - r'^2_\alpha\right) = q_1\left(3z^2_1 - r'^2_1\right) + q_2\left(3z^2_2 - r'^2_2\right) + q_3\left(3z^2_3 - r'^2_3\right)$$
$$+ q_4\left(3z^2_4 - r'^2_4\right) = -q(0-0) + q(0-l^2) - q\left(0 - 2l^2\right) + q\left(0 - l^2\right) = 0$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_\alpha q_\alpha\, 3x'_{1\alpha}x'_{2\alpha} = q_1 3x_1y_1 + q_2 3x_2y_2 + q_3 3x_3y_3 + q_4 3x_4y_4$$
$$= 0 + 0 - 3l^2q + 0 = -3l^2q$$

ve benzer şekilde : $Q_{13} = Q_{31} = 0$ , $Q_{23} = Q_{32} = 0$ bulunur. $Q = 0$ ve $\vec{p} = 0$ olduğuna göre, bu sonuçlardan

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5} + \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_{12}x_1x_2 + Q_{21}x_2x_1}{r^5}\right)$$

$$= -3l^2q\frac{xy}{r^5}$$

bulunur.

(4)

PROBLEM: 5 - R yarıçaplı bir çemberin üzerindeki çizgisel yük dağılımı

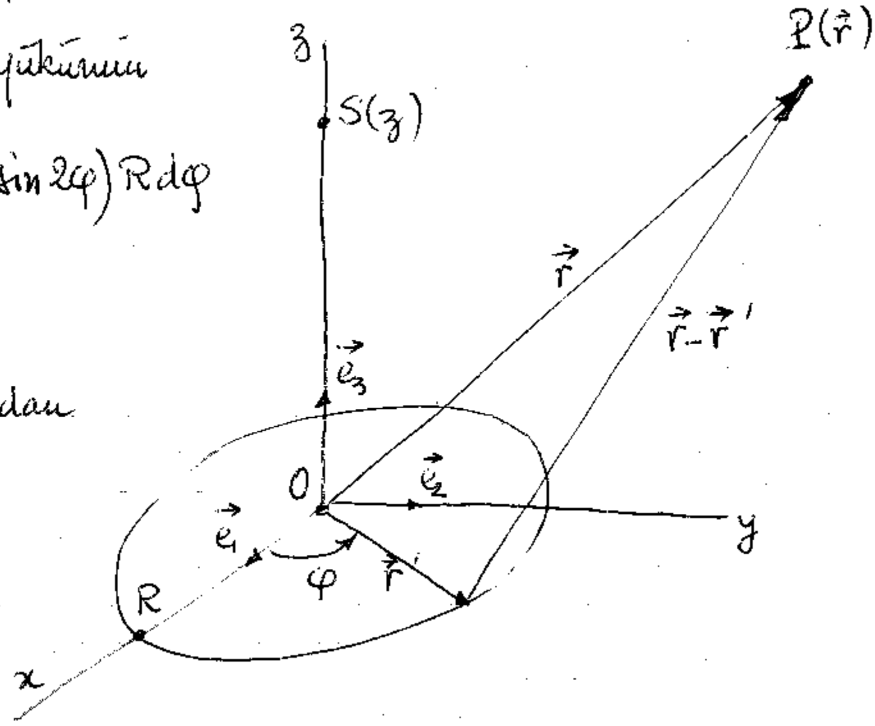
$$\rho(\vec{r}\,') = \frac{q}{R}(\cos\varphi - \sin 2\varphi)$$

ile verilmektedir.

1) Çemberin toplam yükünü, çiftkutup (dipol) momentini ve dörtkutup (kuvadrupol) momentini hesaplayınız. ($|\vec{r}| \gg$

2) Çemberin uzayın herhangi bir $\vec{r}$ noktasında hâsıl ettiği skaler potansiyeli ve elektrik alanını tayin ediniz.

3) Çemberin düzlemine dik simetri ekseni üzerinde $|z| \gg R$ şartını gerçekleyen bir noktadaki potansiyeli ve elektrik alanını hesaplayınız.




ÇÖZÜM - 1) Çemberin toplam yükünün

$$Q = \int \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' = \int_0^{2\pi} \frac{q}{R}(\cos\varphi - \sin 2\varphi)\, R\, d\varphi$$

$$= 0$$

olduğu görülmektedir. Öte yandan çiftkutup momenti de

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'$$

ile verildiğinden

$$\vec{r}\,' = R(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2) \quad \text{ve}$$

$$\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3 = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2)\frac{q}{R}(\cos\varphi - \sin 2\varphi)\, R\, d\varphi$$

ifâdelerinden

$$p_1 = qR\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi - \cos\varphi \sin 2\varphi)\, d\varphi = qR\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi - 2qR\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi\, d$$

$$= qR\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} + 2qR\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = \pi q R$$

$$p_2 = qR\int_0^{2\pi}(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi \sin 2\varphi)\, d\varphi = qR\left[-\frac{\cos 2\varphi}{4} - \frac{2}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{2\pi} = 0$$

$p_3 = 0$ ve dolayısıyla $\vec{p} = \pi q R\, \vec{e}_1$ olduğu anlaşılmış olur. Dörtkutup momentini de hesaplayarak

(5) $$Q_{ij}=\int \rho(\vec{r}')\left(3x_i'x_j'-\delta_{ij}r'^2\right)d^3\vec{r}'\quad , \text{ ve}$$

$r'^2=R^2$ , $x'=R\cos\varphi$ , $y'=R\sin\varphi$ olmasından yararlanarak

$$Q_{11}=\int_0^{2\pi}\frac{q}{R}(\cos\varphi-\sin 2\varphi)\left(3R^2\cos^2\varphi-R^2\right)R\,d\varphi=0$$

$$Q_{22}=\int_0^{2\pi}\frac{q}{R}(\cos\varphi-\sin 2\varphi)\left(3R^2\sin^2\varphi-R^2\right)R\,d\varphi=0$$

$$Q_{33}=\int_0^{2\pi}\frac{q}{R}(\cos\varphi-\sin 2\varphi)\left(-R^2\right)R\,d\varphi=0$$

$$Q_{12}=Q_{21}=\int_0^{2\pi}\frac{q}{R}(\cos\varphi-\sin 2\varphi)\,3R^2\cos\varphi\sin\varphi\;R\,d\varphi$$

$$=3qR^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi\sin\varphi-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right)d\varphi=-\frac{3\pi qR^2}{2}$$

$$Q_{13}=Q_{31}=Q_{23}=Q_{32}=0$$

bulunur.

2) Şimdi, $\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$ ve $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ olduğunu da göz önünde tutarak uzaydaki bir $P(\vec{r})$ noktasındaki potansiyelin açılım yaklaşımındaki ifadesi; $Q=0$ , $\vec{p}=\pi qR\vec{e}_1$ ve $Q_{12}=Q_{21}=-3\pi qR^2/2$ , $Q_{ij}=0$ $(i\neq 1, j\neq 2)$ olduğunu da göz önünde tutarak,

$$\Phi(\vec{r})=\frac{Q}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j Q_{ij}\frac{x_ix_j}{r^5}+\cdots$$

$$=\frac{\pi qRx}{r^3}-\frac{3\pi qR^2}{2}\frac{xy}{r^5}\quad . \qquad (1)$$

olur.

Küresel koordinatlarda $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ ve

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad (2)$$

dir. Buna göre $xy=r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$ ve

$$\Phi(\vec{r})=\Phi(r,\theta,\varphi)=\pi qR\frac{\cos\varphi\sin\theta}{r^2}-\frac{3}{4}\pi qR^2\frac{\sin^2\theta\sin 2\varphi}{r^3} \qquad (3)$$

olur. Bu duruma göre elektrik alanının (2) ile verilmiş olan ifadesindeki $\Phi$ nin türevlerini (3) ifadesi aracılığıyla hesaplamak $\vec{E}$ nin nihai ifadesinin tesbiti için yeterli olacaktır:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2\pi q R \,\frac{\sin\theta \cos\varphi}{r^3} + \frac{9}{4}\pi q R^2 \,\frac{\sin^2\theta \sin 2\varphi}{r^4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \pi q R \,\frac{\cos\theta \cos\varphi}{r^2} - \frac{3}{8}\pi q R^2 \,\frac{\sin 2\theta \sin 2\varphi}{r^3}$$

4

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\pi q R \,\frac{\sin\theta \sin\varphi}{r^2} - \frac{3}{2}\pi q R^2 \,\frac{\sin^2\theta \cos 2\varphi}{r^3}$$

3) Çemberin düzlemine dik simetri ekseni z-ekseni olarak seçilmiş olduğundan önce $x=0$ ve $y=0$ için $\Phi(x,y,z)$ yi belirlememiz gereklidir. (1) ifadesi de göz önünde bulundurularak

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{e}_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{e}_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e}_3$$

$$E_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \pi q R \,\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3\pi q R^2}{2}\,\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right\}$$

$$= -\pi q R\left\{ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right\} + \frac{3\pi q R^2}{2}\left\{ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{5yx^2}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}} \right\}$$

$$\Big[E_1\Big]_{\substack{x=0\\ y=0}} = \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}} = -\frac{\pi q R}{z^3}$$ ve benzer şekilde

$$\Big[E_2\Big]_{\substack{x=0\\ y=0}} = \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0\,, \quad \Big[E_3\Big]_{\substack{x=0\\ y=0}} = \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0$$

bulunur. Buna göre

$$\vec{E} = -\frac{\pi q R}{z^3}\,\vec{e}_1$$

olur.

PROBLEM: 6 – $R_1$ ve $R_2$ yarıçaplı eşmerkezli iki küre sırasıyla sâbit $\Phi_1$ ve $\Phi_2$ potansiyellerinde bulunduklarında: 1) kürelerin arasındaki bir noktada, ve 2) kürelerin tamamen dışındaki bir noktadaki potansiyel alanın değerini tesbit ediniz.

ÇÖZÜM – 1) Kürelerin arasında kalan bölgede herhangi bir yük dağılımı mevcud olmadığından $\Phi$ potansiyeli bu bölgede $\nabla^2\Phi=0$ LAPLACE denkleminin gerçekler. Problem küresel simetriyi haiz olduğundan $\Phi=\Phi(r)$ şeklinde olacaktır. Buna binâen LAPLACE denklemi de küresel koordinatlarda

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr}=0$$

a râci olur. Bunun genel çözümü ise

$$\Phi(r)=A+\frac{B}{r}$$

dir. Sınır şartları: $\Phi(R_1)=\Phi_1$, $\Phi(R_2)=\Phi_2$ şeklinde olduğundan

$$\left.\begin{aligned}\Phi(R_1)=\Phi_1=A+\frac{B}{R_1}\\ \Phi(R_2)=\Phi_2=A+\frac{B}{R_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad A=\frac{R_2\Phi_2-R_1\Phi_1}{R_2-R_1}, \quad B=\frac{R_1R_2(\Phi_1-\Phi_2)}{R_2-R_1}$$

ve dolayısıyla, $R_1\leq r\leq R_2$ için

$$\boxed{\Phi(r)=\frac{1}{R_2-R_1}\left[R_2\Phi_2-\Phi_1R_1+(\Phi_1-\Phi_2)\frac{R_1R_2}{r}\right]}, \quad (R_1\leq r\leq R_2)$$

bulunur.

2) $r\geq R_2$ söz konusu olduğunda sınır şartları

$$\lim_{r\to\infty}\Phi(r)=0, \quad \Phi(R_2)=\Phi_2$$

şeklinde olacaktır. Buna göre

$$\lim_{r\to\infty}\Phi(r)=A=0, \quad \Phi(R_2)=\Phi_2=\frac{B}{R_2}$$

ve nihâyet

$$\boxed{\Phi(r)=\Phi_2\frac{R_2}{r}}, \quad (r\geq R_2)$$

bulunur.

(8)

PROBLEM: 7 - $R_2 > R_1$ olmak üzere $R_1$ ve $R_2$ yarıçaplı eşeksenli iki sonsuz silindirin yüzeylerinin sırasıyla $\Phi_1$ ve $\Phi_2$ sabit potansiyelinde bulunmaları hâlinde: 1) $r \leq R_1$, 2) $R_1 \leq r \leq R_2$ ve 3) $r \geq R_2$ için potansiyel alanlarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM - 1) Söz konusu bölgelerde herhangi bir yük dağılımı olmadığından $\Phi$ potansiyeli hep $\nabla^2\Phi = 0$ LAPLACE denklemini sağlayacaktır. Problem silindirik simetriyi haiz olduğundan $\Phi = \Phi(r)$ şeklinde olup

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \Phi(r) = A\ln r + B$$

dir. $r < R_1$ için $\Phi$ sonlu kalmalıdır; bu $r = 0$ için de geçerlidir. Şu hâlde $A = 0$ ve $B = \Phi_1$ dir, yani

$$\boxed{\Phi(r) = \Phi_1 = \text{sâbit}} \quad , (r \leq R_1).$$

olur.

2) $\Phi(R_1) = A\ln R_1 + B$ , $\Phi(R_2) = A\ln R_2 + B$

Sınır şartlarından

$$A = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \quad \text{ve} \quad B = \frac{\Phi_2 \ln R_1 - \Phi_1 \ln R_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$$

bulunur. Buna göre

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ln r + \frac{\Phi_2 \ln R_1 - \Phi_1 \ln R_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}} \quad , (R_1 \leq r \leq R_2)$$

olur.

3) $r \geq R_2$ hâlinde $\Phi(R_2) = \Phi_2$ ve $\lim_{r\to\infty}\Phi(r) = \cancel{0}$ sonlu olacağından

$$\lim_{r\to\infty}\Phi(r) = \cancel{0}\ \text{sonlu} \Rightarrow A = 0 \ ; \ \Phi(R_2) = B = \Phi_2$$

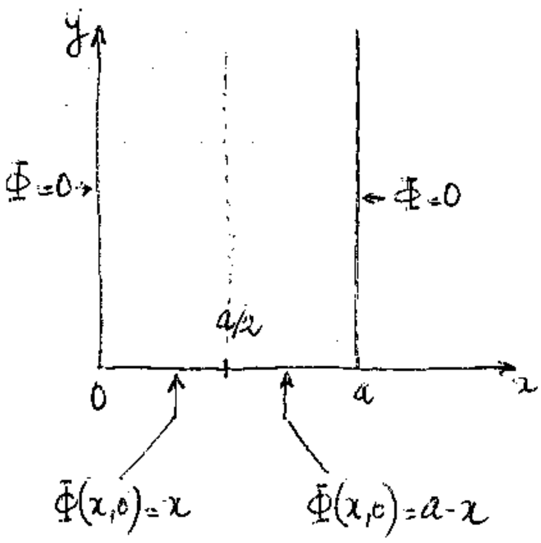
ve dolayısıyla

$$\boxed{\Phi(r) = \Phi_2 = \text{sâbit}} \quad , (r \geq R_2)$$

olur.

(9)

**PROBLEM : 8 -**




$x=0$ ve $x=a$ da $x$-eksenine dik iki yarı sonsuz plâka üzerindeki potansiyellerin sıfır olması ve $y=0$ düzleminde de

$$\Phi(x,0)=x \qquad 0\leq x\leq a/2$$
$$\Phi(x,0)=a-x \qquad a/2\leq x\leq a$$

olması şartları altında her iki plâka arasında $\Phi=\Phi(x,y)$ potansiyel alanını tâyin ediniz.

ÇÖZÜM - Problem aslında

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 & (0\leq x\leq a \;,\; 0\leq y<\infty) \\ \Phi(0,y)=\Phi(a,y)=0 & \\ \Phi(x,0)=\begin{cases} x & ,\; 0\leq x\leq a/2 \\ a-x & ,\; a/2\leq x\leq a \end{cases} & ,\quad \Phi(0,\infty)=0 \end{cases}$$

şeklinde bir sınır değer problemine denktir. Değişkenlere ayrışım yöntemi aracılığıyla, ve $-k^2$ ile ayrışım parametresini göstererek,

$$\Phi(x,y)=X(x)\,Y(y) \;\Rightarrow\; \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k^2$$

yâni

$$X''+k^2X=0 \qquad , \qquad Y''-k^2Y=0$$
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$
$$X(x)=A\cos kx+B\sin kx \qquad\qquad Y(y)=Ce^{ky}+De^{-ky}$$

olur. Sınır şartlarının $X(x)$ yazılması da

$$\Phi(0,y)=X(0)\,Y(y)=0 \;\Rightarrow\; X(0)=0 \quad , \quad Y(y)\neq 0$$
$$\Phi(a,y)=X(a)\,Y(y)=0 \;\Rightarrow\; X(a)=0 \quad , \quad Y(y)\neq 0$$

şeklinde olacaktır. Buna göre

$$X(0)=A=0 \quad ; \quad \text{ve} \quad X(a)=B\sin ka=0 \Rightarrow ka=n\pi \quad (n=0,1,2,\ldots$$

olur. Şu hâlde

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

dır.

(10) Diğer taraftan $\lim_{y\to\infty} \Phi(x,y) = \lim_{y\to\infty} X(x)Y(y) = 0 \Rightarrow \lim_{y\to\infty} Y(y) = 0$ olacaktır. Buna göre de

$$\lim_{y\to\infty} Y_n(y) = \lim_{y\to\infty}\left(C_n e^{k_n y} + D_n e^{-k_n y}\right) = 0 \Rightarrow C = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

Şu halde: $\Phi_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \gamma_n e^{-k_n y} \sin\frac{n\pi x}{a}$, $(\gamma_n = B_n D_n$

olur. LAPLACE denkleminin genel çözümü ise bütün farklı özel çözümlerin lineer bir kombinezonu olacağından

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Phi_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

olur.

$$0 \le x \le \frac{a}{2} \text{ için}: \Phi(x,0) = x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{2} \le x \le a \text{ için}: \Phi(x,0) = a - x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (2)$$

olduğundan ~~[illegible]~~ her iki yanı $\sin\frac{m\pi x}{a}$ ile çarpıp $(m=0,1,$ $[0,a]$ arasında integre edersek

$$\int_0^a \Phi(x,0)\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{a/2} x\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx + \int_{a/2}^{a}(a-x)\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\alpha_m$$

olur. Bu integraller kısmi integrasyon yöntemiyle değerlendirildiğinde

$$I_1 = \int_0^{a/2} x\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} (-1)^{m/2}\left(-\frac{a^2}{2m\pi}\right) & , m \text{ eğer çift ise} \\ (-1)^{m+2}\frac{a^2}{m^2\pi^2} & , m \text{ eğer tek ise} \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{a/2}^{a}(a-x)\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} (-1)^{m/2}\frac{a^2}{2m\pi} & , m \text{ eğer çift ise} \\ (-1)^{m+2}\frac{a^2}{m^2\pi^2} & , m \text{ eğer } \cancel{\text{çift}}\ \text{tek ise,} \end{cases}$$

Buna göre

$$\alpha_m = \frac{2}{a}\left(I_1+I_2\right) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } m \text{ çift ise} \\ \dfrac{2a(-1)^{m+2}}{m^2\pi^2} & \text{eğer } m \text{ tek ise} \end{cases}$$

yani

$$\alpha_{2n+1} = \frac{2a(-1)^{2n+3}}{\pi^2(2n+1)^2} \quad , \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

bulunur. Buna binaen

$$\Phi(x,y) = \frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}\, e^{-\frac{(2n+1)\pi y}{a}} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}$$

olur.

<u>PROBLEM: 9</u> – $a$ yarıçaplı sonsuz bir dik silindirin simetri eksenini ihtiva eden bir düzlem silindirin yüzeyini iki eşit parçaya ayırmaktadır. Bunlardan biri $\Phi = \Phi_0/2 =$ <u>sâbit</u>, diğeri ise $\Phi = -\Phi_0/2 =$ <u>sâbit</u> potansiyelindedir. Bu takdirde: 1) silindirin içindeki bir noktada, ve 2) silindirin dışındaki bir noktada potansiyelin ifâdesini tesis ediniz.

<u>ÇÖZÜM</u> – Problem, vaz'ı gereği, silindirik bir simetri arz etmektedir. Silindirin sonsuz uzunlukta olması dolayısıyla potansiyel $z$ ye bağlı olmayacaktır. Silindirik koordinatlar cinsinden problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (1) \\ \lim\limits_{r\to\infty}\Phi(r,\theta) = 0 \quad , \quad \Phi(0,\theta) : \text{sonlu} \\ \Phi(a,\theta) = \begin{cases} \Phi_0/2 & , \ 0\le\theta\le\pi \\ -\Phi_0/2 & , \ \pi\le\theta\le 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

sınır-değer problemine denktir. (1) i çözebilmek üzere $\Phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ vaz edip (1) i $R\Theta$ ile bölelim. $n^2$ ile ayrışım parametresini gösterirsek

$$\Theta\frac{d^2R}{dr^2} + \Theta\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^2\dfrac{d^2R}{dr^2} + r\dfrac{dR}{dr} - n^2R = 0 \\ \dfrac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0 \end{cases}$$

olur. Buna göre

(12) $\Theta(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta$ ve $R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$ (1)

olduğu kolayca tahkik edilir.

1) Silindirin içi göz önüne alındığında, özellikle $\Phi(0,\theta)$ nın sonlu kalması şartı (1) de $D \equiv 0$ olmasını zorunlu kılmaktadır. Öte yandan $\Theta(\theta)$ nın ve dolayısıyla $\Phi(r,\theta)$ nın tek değerli bir fonksiyon olabilmesi için yani aynı bir $(r,\theta)$ noktasına birden fazla ve farklı $\Phi$ potansiyeli değeri tekaabül etmemesi için $n$ nin $0,1,2,3,\ldots$ gibi tamsayı değerler alması zorunludur. Şu halde $n$ nin her tamsayı değerine, LAPLACE denklemini gerçekleyen bir

$$\Phi_n(r,\theta) = (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)\, r^n$$

fonksiyonu tekaabül edecektir. Diğer taraftan

$$\Phi_n(a,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\Phi_0}{2} = (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)\, a^n\,, & 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ -\dfrac{\Phi_0}{2} = (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)\, a^n\,, & \pi \leqq \theta \leqq \pi \end{cases}$$

olması gerektiğinden bu bağıntıların ancak $A_n \equiv 0$ ise tutarlı ve geçerli olabileceği görülmektedir. Şu halde

$$\Phi_n(r,\theta) = B_n r^n \sin n\theta\,, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ve LAPLACE denkleminin genel çözümü de bütün $\Phi_n$ özel çözümlerinin lineer bir kombinezonu olacağından

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \sin n\theta \qquad (2)$$

olur. Şu halde

$$\Phi(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a^n \sin n\theta \qquad (3)$$

olur. Bu ifadeyi her iki yanından $\sin m\theta$ ($m$: tamsayı) ile çarpıp $[0,2\pi]$ aralığı üzerinden integre edersek.

$$\int_0^{\pi} \frac{\Phi_0}{2}\sin m\theta\, d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\Phi_0}{2}\sin m\theta\, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a^n \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta\, d\theta$$

ve buradan da

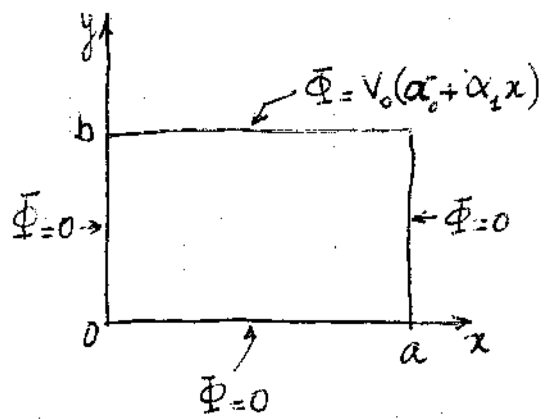
$$b_{2n+1} = \frac{2\Phi_0}{\pi(2n+1)\, a^{2n+1}}$$

(13) bulunur; yani (3) açılımında yalnızca tekşayı terimlerin mevcud olduğu anlaşılmış olur. Buna göre problemin nihaî çözümünün de

$$\boxed{\Phi(r,\theta)=\frac{2\Phi_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}\frac{\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)}}$$

ile verileceği tesbit edilmiş olur.

PROBLEM 10 - Dik kesiti $a\times b$ boyutlarında bir dikdörtgen olan sonsuz bir borunun yüzeylerinden peşpeşe üçü üzerindeki elektrostatik potansiyelin $\Phi=0$ da tutulmasına karşılık son yüzey üzerindeki potansiyel, şekilde de gösterilmiş olduğu gibi, $\Phi=V_0(\alpha_0+\alpha_1 x)$ şeklindedir. Buna göre sonsuz borunun içindeki potansiyel alanını tayin ediniz.




ÇÖZÜM - Problemin $z$ koordinatından bağımsız olacağı ve

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad 0\le x\le a \ , \ 0\le y\le b\\ \Phi(0,y)=\Phi(a,y)=\Phi(x,0)=0\\ \Phi(x,b)=V_0(\alpha_0+\alpha_1 x)\end{cases}$$

sınır-değer problemine denk olduğu âşikârdır. $-k^2$ ile ayrışım parametresini göstererek iki boyutlu LAPLACE denklemi, değişkenlere ayrışım yöntemi aracılığıyla, ve $\Phi(x,y)=X(x)\,Y(y)$ vaz ederek,

$$X''(x)+k^2X(x)=0 \quad , \quad Y''(y)-k^2Y(y)=0$$

denklemlerine ayrışır. Buradan

$$X(x)=A\cos kx+B\sin kx \quad , \quad Y(y)=C\cosh ky+D\sinh ky$$

ya da sınır şartlarının $X(x)$ ve $Y(y)$ ye

$$\Phi(0,y)=X(0)\,Y(y)=0 \;\Rightarrow\; X(0)=0 \quad ,\ (Y(y)\neq 0)$$
$$\Phi(a,y)=X(a)\,Y(y)=0 \;\Rightarrow\; X(a)=0$$
$$\Phi(x,0)=X(x)\,Y(0)=0 \;\Rightarrow\; Y(0)=0 \quad ,\ (X(x)\neq 0)$$
$$\Phi(x,b)=X(x)\,Y(b)=V_0(\alpha_0+\alpha_1 x)$$

şeklinde yansımalarından ötürü, ve kolayca görülebileceği üzere,

$A = C = 0$ ve $X(a) = B \sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \quad (n=0,1,2,\ldots$

yâni

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad Y_n(y) = D_n \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

ve dolayısıyla, $\beta_n = B_n D_n$ vaz ederek

$$\Phi_n(x,y) = X_n(x)\, Y_n(y) = \beta_n \sinh\frac{n\pi y}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

bulunur. $\Phi_n(x,y)$, $n = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere LAPLACE denkleminin özel bir çözümü olup bunun genel çözümü, diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere, bütün farklı özel çözümlerin lineer bir kombinezonu olacaktır:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \Phi_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a} \quad (1)$$

Şimdiye kadar kullanmadığımız son sınır şartından da, bu duruma göre,

$$\Phi(x,b) = V_0(\alpha_0 + \alpha_1 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\gamma_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a}$$

olması gerektiği bulunur. Bu ifadenin her iki yanını da, $m$ bir tamsayı olmak üzere, $\sin\frac{m\pi x}{a}$ ile çarpıp $[0,a]$ üzerinden integre ederek ve $\{\sin\frac{n\pi x}{a}\}$ fonksiyon ailesinin de diklik bağıntılarından faydalanarak

$$\int_0^a V_0(\alpha_0 + \alpha_1 x) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\gamma_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right) \underbrace{\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx}_{\left(\frac{a}{2}\delta_{mn}\right)}$$

$$= \frac{a}{2} \gamma_m \sinh\frac{m\pi b}{a},$$

olur. Diğer taraftan kısmi integrasyonla

$$I = \int_0^a V_0(\alpha_0 + \alpha_1 x) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx = \frac{aV_0\alpha_0}{m\pi}\left[-\cos\frac{m\pi x}{a}\right]_0^a - \frac{aV_0\alpha_1}{m\pi}\left[x \cos\frac{m\pi x}{a}\right]_0^a$$

$$+ \frac{a^2 V_0 \alpha_1}{m^2\pi^2}\left[\sin\frac{m\pi x}{a}\right]_0^a$$

ve nihâyet

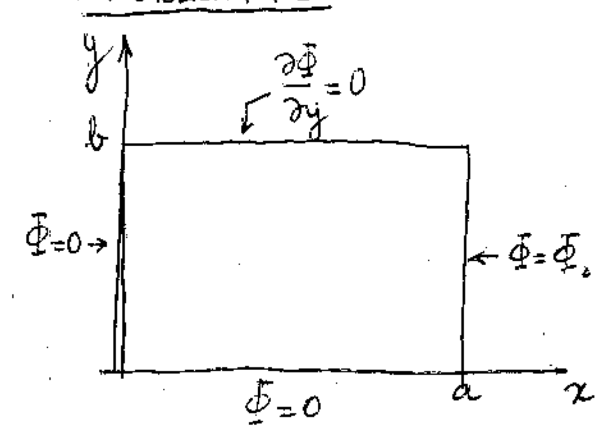
$$I = \begin{cases} \frac{aV_0}{m\pi}(2\alpha_0 + a\alpha_1), & \text{eğer } m \text{ tek ise} \\ -\frac{a^2 V_0 \alpha_1}{m\pi}, & \text{eğer } m \text{ çift ise} \end{cases}$$

bulunur. Buna göre de

$$\gamma_m = \begin{cases} \dfrac{2V_0(2\alpha_0 + a\alpha_1)}{m\pi \sinh \frac{m\pi b}{a}} & \text{eğer } m \text{ tek ise} \\[2ex] -\dfrac{2aV_0\alpha_1}{m\pi \sinh \frac{m\pi b}{a}} & \text{eğer } m \text{ çift ise} \end{cases} \qquad (2)$$

olur. (2) değerleri, (1) aracılığıyla problemin çözümünü teşkil ederler.

PROBLEM : 11 -




Yüzeyleri üzerindeki potansiyel değerleri şekilde gösterilmiş olduğu gibi olan, dik kesiti $a\times b$ boyutlarını haiz dikdörtge şeklindeki bir sonsuz boru içindeki elektrostatik potansiyel alanını tayin ediniz.

ÇÖZÜM - Problemin $z$ koordinatından bağımsız olacağı ve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq a \ , \ 0 \leq y \leq b \\ \Phi(0,y) = \Phi(x,0) = 0 \\ \Phi(a,y) = \Phi_0 = \text{sabit} \\ \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=b} = 0 \end{cases}$$

sınır-değer problemine denk olduğu aşikârdır. LAPLACE denkleminin ayrıştırılması sonucu

$$\frac{1}{X}X'' = -\frac{1}{Y}Y'' = \lambda$$

olur. $\lambda$ ile ayrışım parametresi gösterilmektedir. $\lambda = k^2$ alacağız. ($\lambda$ nın negatif bir büyüklük (yani $-k^2$ şeklinde) seçilmesi hâlinde sınır şartlarının $k$ yı belirtemeye kâfi gelmediğinin gösterilmesi bir alıştırma olarak öğrenciye bırakılmıştır). Buna göre

$$X(x) = A\cosh kx + B\sinh kx \ ; \ Y(y) = C\cos ky + D\sin ky$$

olur. Sınır şartlarından

$$\Phi(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \ , \ Y(y) \neq 0 \Rightarrow A = 0$$

(16) $\Phi(x,0)=X(x)Y(0)=0 \Rightarrow Y(y)=0\ ,\ X(x)\not\equiv 0 \Rightarrow C=0$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=b}=X(x)\left(\frac{dY}{dy}\right)_{y=b}=X(x).Dk\cos kb=0 \Rightarrow kb=(2n+1)\frac{\pi}{2}\ ,$$

yani

$$k_n=\frac{(2n+1)\pi}{2b} \Rightarrow X_n(x)=B_n\sinh\frac{(2n+1)\pi x}{2b}\ ,\ Y_n(y)=D_n\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

$$\Phi_n(x,y)=X_n(x)Y_n(y) \Rightarrow \Phi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2b}\sinh\frac{(2n+1)\pi x}{2b}$$

olur. Ayrıca, son sınır şartı olarak da

$$\Phi(a,y)=\Phi_0=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\alpha_n\sinh\frac{(2n+1)\pi a}{2b}\right\}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2b}$$

ifadesinden, her iki yanı $\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2b}$ ile çarpıp $[0,2b]$ aralığında integre ederek,

$$\alpha_n=\frac{4\Phi_0}{(2n+1)\pi}\ \frac{1}{\sinh\frac{(2n+1)\pi a}{2b}}$$

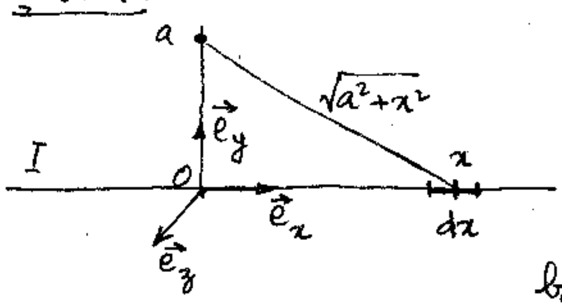
ve dolayısıyla da problemin çözümü olarak da

$$\boxed{\Phi(x,y)=\frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2b}\ \sinh\frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{(2n+1)\sinh\frac{(2n+1)\pi a}{2b}}}$$

ifadesi elde edilmiş olur.

PROBLEM: 12 - İçinden sâbit bir I akımı geçen sonsuz bir telden a uzaklığında ki bir noktada hâsıl olan $\vec{B}$ magnetik indüksiyon vektörünü tâyin ediniz.

ÇÖZÜM:




BIOT-SAVART kanununa göre $\vec{B}$ vektörü

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{I \, . \, d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad (1)$$

bağıntısı aracılığıyla tanımlanır. Burada, şekilden de kolayca görüldüğü vechile,

$$d\vec{l}' = dx\,\vec{e}_x \;, \quad \vec{r} = a\vec{e}_y \;, \quad \vec{r}\,' = x\vec{e}_x \;, \quad \vec{r}-\vec{r}\,' = a\vec{e}_y - x\vec{e}_x \quad \text{ve}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{a^2+x^2}$$

olduğundan (1) ifâdesinden

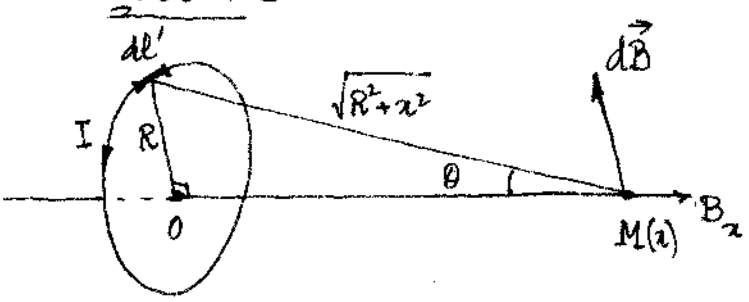
$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I \, . \, [dx\,\vec{e}_x \times (a\vec{e}_y - x\vec{e}_x)]}{(a^2+x^2)^{3/2}} = Ia \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\vec{e}_z$$

$$= Ia\vec{e}_z \left[ \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2I}{a}\,\vec{e}_z$$

olduğu sonucu çıkar.

PROBLEM: 13 - İçinden sâbit bir I akımı geçen R yarıçaplı dairesel bir telin düzlemine dik, simetri ekseni üzerindeki bir M noktasında hâsıl olan $\vec{B}$ magnetik indüksiyon vektörünü BIOT-SAVART kanunu aracılığıyla tâyin ediniz.

ÇÖZÜM -




BIOT-SAVART kanununu

$$d\vec{B} = I\,\frac{d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

şeklinde de ifâde etmek mümkündür.

$$d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}\,') = dl' \, . \, |\vec{r}-\vec{r}\,'| \, . \, \sin\{dl', (\vec{r}-\vec{r}\,')\} = dl' \, . \, |\vec{r}-\vec{r}\,'| \, . \, \sin\frac{\pi}{2} = dl' \, . \, |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

olduğundan

$$dB = \frac{I\,dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}$$

olur. Öte yandan

$$dB_x = dB\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = dB\sin\theta = dB\,\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

olduğundan

$$B_x=\int_0^{2\pi R}\frac{IR\,dl'}{\left(\sqrt{R^2+x^2}\right)^3}=\frac{2\pi R^2 I}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}} \qquad (1)$$

veya $\sin\theta = R/\sqrt{R^2+x^2}$ olduğundan

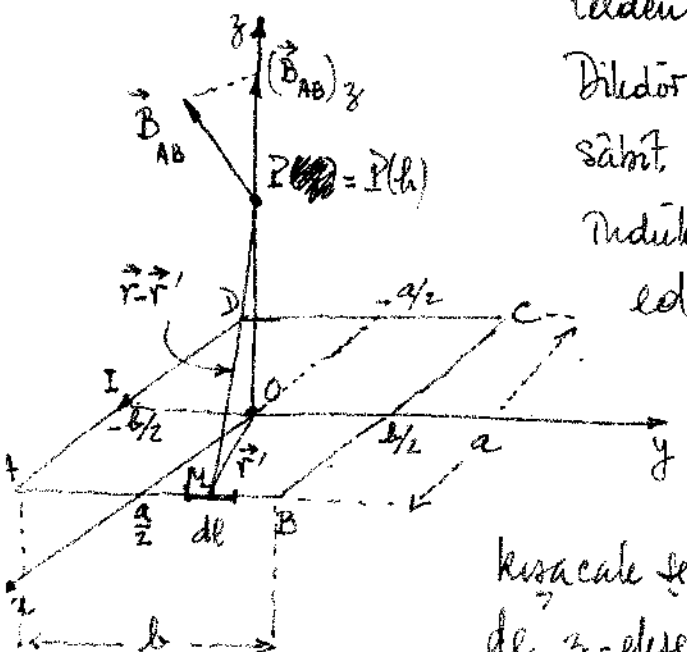
$$B_x=\frac{2\pi I\sin^3\theta}{R}= \qquad (2)$$

bulunur. Eğer dairenin merkezi söz konusuysa, yani $M=0$ ise

$$B_x(0)=\frac{2\pi I}{R}$$

bulunur.

PROBLEM: 14 – Boyutları a ve b olan dikdörtgen şeklindeki bir telden sâbit bir I elektrik akımı geçmektedir. Dikdörtgenin düzlemine dik simetri ekseni üzerindeki sâbit bir P noktasında hâsıl olan $\vec{B}$ magnetik indüksiyon vektörünün z-bileşenini tâyin ediniz.




ÇÖZÜM – Dikdörtgen elektrik devresini (x,y) düzlemine ve simetri merkezi orijinle çakışacak şekilde yerleştirelim. Buna göre simetri ekseni de z-ekseni olur. z üzerindeki P noktasının kotu h olsun. Dikdörtgenin her bir kenarından geçen akımın P de hâsıl edeceği magnetik indüksiyonu sırasıyla $\vec{B}_{AB}$, $\vec{B}_{BC}$, $\vec{B}_{CD}$, $\vec{B}_{DA}$ ile gösterelim. Buna göre P deki toplam magnetik indüksiyon

$$\vec{B}=\vec{B}_{AB}+\vec{B}_{BC}+\vec{B}_{CD}+\vec{B}_{DA}$$

ve bunun z-bileşeni de

$$B_z=\vec{B}\cdot\vec{e}_z=\left\{(\vec{B}_{AB})_z+(\vec{B}_{BC})_z+(\vec{B}_{CD})_z+(\vec{B}_{DA})_z\right\}$$

olacaktır.

$\vec{B}_{AB}$ yi hesaplamak üzere: $d\vec{l}'=dy\,\vec{e}_y$, $\vec{r}-\vec{r}'=\vec{OP}-\vec{OM}=h\vec{e}_z-\left(\frac{a}{2}\vec{e}_x+y\vec{e}_y\right)$ ve $|\vec{r}-\vec{r}'|=\left(h^2+\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{1/2}$ olduğunu göz önünde tutalım; buna göre BIOT-SAVART kanunundan

(19) $\vec{B} = \int I \dfrac{d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \Rightarrow \vec{B}_{AB} = I \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \dfrac{dy\,\vec{e}_y \times [h\vec{e}_z - (\frac{a}{2}\vec{e}_x + y\vec{e}_y)]}{(h^2+\frac{a^2}{4}+y^2)^{3/2}}$

ve buradan da

$$\vec{B}_{AB}\cdot\vec{e}_z = (\vec{B}_{AB})_z = \frac{Ia}{2}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{dy}{(h^2+\frac{a^2}{4}+y^2)^{3/2}} = Ia \int_0^{b/2} \frac{dy}{(h^2+\frac{a^2}{4}+y^2)^{3/2}}$$

olur. Bu son integrali hesaplamak üzere

$$y = \sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\ tg\,\theta \Rightarrow dy = \sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\ (1+tg^2\theta)\,d\theta$$

değişken dönüşümünü yapalım. Buna göre integralin alt limiti olan $y=0$ a $\theta=0$ ve üst limiti olan $y=b$ ye de $\theta = arctg\left(b/2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)$ tekabül eder. Şu hâlde

$$(\vec{B}_{AB})_z = Ia \int_0^{arctg\{b/2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\}} \frac{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\ (1+tg^2\theta)\,d\theta}{(h^2+\frac{a^2}{4})^{3/2}(1+tg^2\theta)^{3/2}} = \frac{Ia}{h^2+\frac{a^2}{4}}\left\{\sin\theta\right\}_0^{arctg...}$$

olur. Bu integralin üst limitinin, integralin değerinin hesaplanmasında büyük zorluk çıkaracağı âşikârdır. Bunun için bu sefer tekrar eski $y$ integral değişkenine dönelim:

$$y = \sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\ tg\,\theta = \frac{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}{cotg\,\theta} \Rightarrow cotg^2\theta = \frac{1}{y^2}(a^2/4+h^2)$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{1+cotg^2\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2+h^2+\frac{a^2}{4}}}$$

olacağından

$$(\vec{B}_{AB})_z = \frac{Ia}{h^2+\frac{a^2}{4}}\left\{\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2+\frac{a^2}{4}}}\right\}_0^{b/2} = \frac{Ia}{2(h^2+\frac{a^2}{4})\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}+h^2}}$$

ifâdesi elde edilir.

Benzer şekilde yapılan hesap sonucu

$$(\vec{B}_{CD})_z = (\vec{B}_{AB})_z$$

olduğu kolaylıkla görülür. Öte yandan

$$\left(\vec{B}_{BC}\right)_z = \frac{Ib}{2}\int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx}{\left(h^2+\frac{b^2}{4}+x^2\right)^{3/2}} = Ib\int_{0}^{a/2} \frac{dx}{\left(h^2+\frac{b^2}{4}+x^2\right)^{3/2}}$$

olduğu tesbit edilir ve $\left(\vec{B}_{AB}\right)_z$ nin hesaplanmasındaki değişken dönüşümüne benzer bir dönüşümle

$$\left(\vec{B}_{BC}\right)_z = \left(\vec{B}_{DA}\right)_z = \frac{Ib}{2\left(h^2+\frac{b^2}{4}\right)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}+h^2}}$$

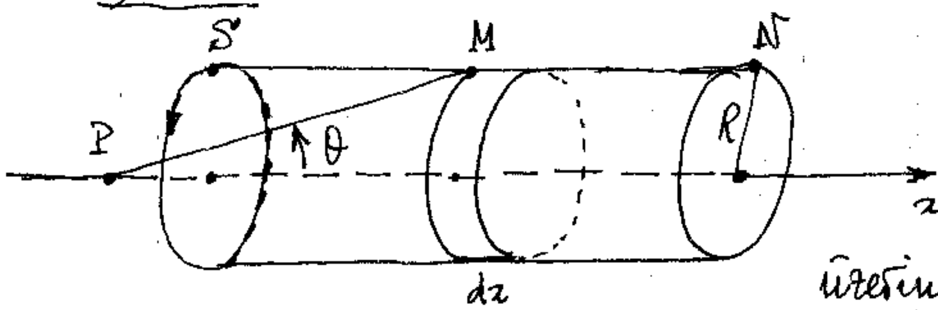
bulunur. Buna göre, sonuç olarak,

$$\vec{B}.\vec{e}_z = B_z = \frac{Ib}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}+h^2}}\left(\frac{1}{h^2+\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{h^2+\frac{b^2}{4}}\right)$$

bulunur.

PROBLEM: 15 – Birim uzunluk başına $n$ adet sarım ihtivâ eden $R$ yarıçaplı bir solenoidin telinden sâbit bir $I$ elektrik akımı geçtiği vakit solenoidin simetri ekseni üzerindeki bir noktada $B$ indüksiyonunun değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM –




Solenoidin üzerinde $x$ apsisli $dx$ kalınlıklı bir dilimini göz önüne alalım. Bu dilim, simetri ekseni üzerindeki bir $P$ noktasından $\theta$ açısı altında görülüyor olsun: $\theta = (\vec{Px}, \vec{PM})$, . Bu dilim $n.dx$ kadar sarım ihtivâ edecektir. Problem: 13 ün (1) numaralı sonucuna göre her bir sarımın magnetik indüksiyona katkısı $(2\pi I \sin^3\theta)/R$ olduğuna göre $dx$ kalınlığındaki dilimin tümünün katkısı $n\,dx$ misli daha fazla olacaktır. Buna göre

$$dB = \frac{2\pi n I}{R}\sin^3\theta\, dx$$

olacaktır. $\theta$ yı integrasyon değişkeni olarak alırsak

$x = R\cot g\,\theta$ ; $dx = -R\,d\theta/\sin^2\theta$ ve $dB = -2\pi n I \sin\theta\, d\theta$

olur. $\theta$ ise $\theta_1 = (\vec{Px}, \vec{PS})$ ilâ $\theta_2 = (\vec{Px}, \vec{PN})$ arasında değişecektir. Buna göre

$$B = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi n I \sin\theta \, d\theta = 2\pi n I \left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$$

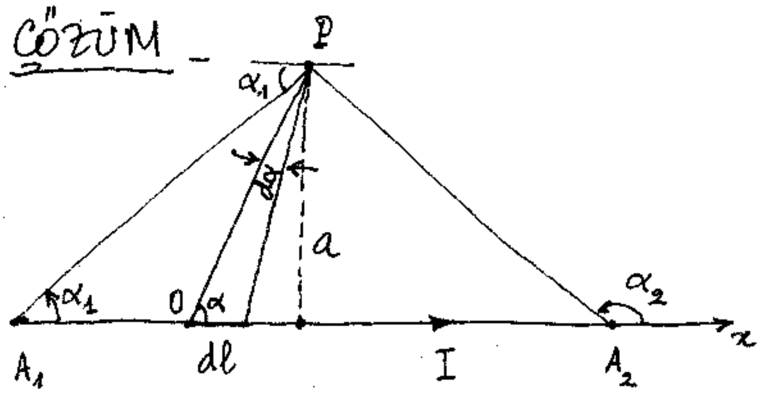
olur. Bu tamamen genel bir bağıntıdır. Eğer P, solenoidin içindeki bir nokta ise bu takdirde

$$B = 2\pi n I \left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) \qquad (1)$$

olacağı kolaylıkla görülür.

PROBLEM: 16 – $A_1A_2$ ile gösterilen bir telden geçen elektrik akımının telden, oldukça uzak, bir P noktasında hâsıl ettiği magnetik indüksiyon büyüklüğünü ve yönünü tâyin ediniz.

ÇÖZÜM –




dl uzunluğundaki bir akım elemanının P noktasındaki magnetik indüksiyon vektörüne katkısı, şekle göre,

$$d\vec{B} = I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (\vec{OP} = \vec{r})$$

dir. Hâlbuki: $d\vec{l} \times \vec{r} = dl.r.\sin\alpha \cong r.r\,d\alpha$ yazılabilir. Buna göre

$$dB \cong I \frac{d\alpha}{r}$$

olur. Diğer taraftan ise $r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ dır; buna göre de

$$dB \cong \frac{I}{a} \sin\alpha \, d\alpha$$

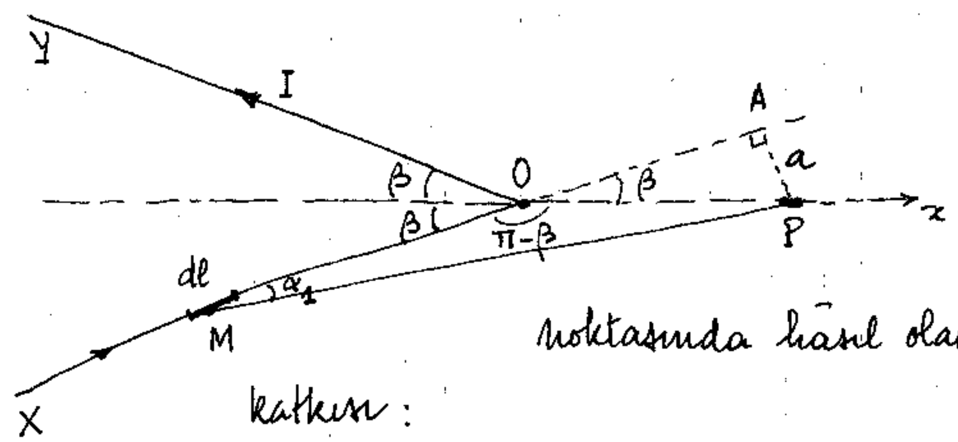
ya da

$$B = \frac{I}{a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{I}{a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

bulunur. $\vec{B}$ nin yönü, sağ el kuralı uyarınca, kâğıt düzlemine dik ve aşağıdan yukarıya doğrudur.

PROBLEM: 17 – İçindeki sâbit bir I elektrik akımı geçen bir tel aralarında $2\beta$ açısı yapan iki yarım doğru şeklindedir. Bu açının açıortayı üzerinde ve açının tepesinden $x$ uzaklığındaki bir P noktasında hâsıl olan magnetik indüksiyonun değerini tâyin ediniz.

(22) ÇÖZÜM -




PROBLEM: 16 nın sonucuna binaen devrenin XO bölümünün P noktasında hâsıl olan magnetik indüksiyona katkısı:

$$B_1 = \frac{I}{a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\beta\right)$$

şeklindedir. Ancak XO, bir yarı doğru olduğundan $\alpha_1 = \pi$ alınmalıdır. Buna göre

$$B_1 = \frac{I}{a}\left(1 - \cos\beta\right)$$

olur. Simetri mülâhazasıyla YO nun P deki katkısının da

$$B_2 = \frac{I}{a}\left(1 - \cos\beta\right)$$

olacağı âşikârdır. Buna binaen toplam katkının

$$B = B_1 + B_2 = \frac{2I}{a}\left(1 - \cos\beta\right) \qquad (1)$$

olacağı âşikârdır. Öte yandan: $a = OP.\sin\beta = x\sin\beta = 2x\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ ve $1 - \cos\beta = 2\sin^2\frac{\beta}{2}$ olduğundan (1) den

$$B = \frac{I}{x}\,tg\frac{\beta}{2} \qquad (2)$$

bulunur. Özel hâl olarak $\beta = \frac{\pi}{2}$, yâni sâbit bir I akımının geçtiği sonsuz bir doğru hâli alınacak olursa

$$B = \frac{I}{x}$$

olur.

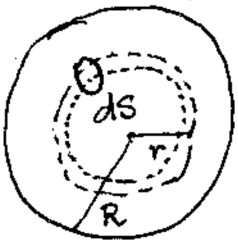
Eğer P noktası açıortayın üzerinde fakat O nun solunda ise bu sefer (2) yerine

$$B = \frac{I}{x}\,cotg\frac{\beta}{2}$$

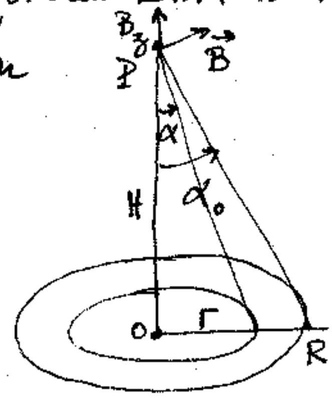
ifadesi bulunur.

PROBLEM: 18 – $\sigma$ yüzeysel yük yoğunluğunu haiz $R$ yarıçaplı bir disk merkezinden geçen dik bir eksen etrafında sabit bir $\omega$ açısal hızı ile dönmektedir. Eksen üzerinde, merkezden $H$ uzaklığındaki bir $P$ noktasında hâsıl olan $\vec{B}$ magnetik indüksiyon vektörünün eksen boyunca olan bileşenini tâyin ediniz.

ÇÖZÜM – Eğer disk saniyede $\nu$ devir yapıyorsa merkezinden $r$ uzaklıktaki sonsuz küçük bir $dS$ sanal yüzey elemanını saniyede toplam ~~[illegible]~~ $dI = \nu\, dq = \nu.(\sigma.2\pi r dr) = \sigma\omega\, r dr$




kadar bir elektrik yükü katediyor demektir. Buna binâen $P$ noktasında hâsıl olan $\vec{B}$ magnetik indüksiyon bütün bu $r$ yarıçaplı "sarım"ların hâsıl ettikleri




$$dB_z = \frac{2\pi}{r} dI \sin^3\alpha = \frac{2\pi\sigma\omega}{\cancel{r}} \cancel{r} \sin^3\alpha\, dr$$

kısmî değerlerin bileşkesi olacaktır (bk. PROBLEM: 13, formül: (2)). Bu ifadeyi integre etmek için

$$r = H \operatorname{tg}\alpha \quad \rightarrow \quad dr = H\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

değişken dönüşümünü yapalım. $\alpha$ da $0$ dan $\alpha_0$ a kadar değişecektir. Şu hâlde

$$B_z = 2\pi H\sigma\omega \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} d\alpha = 2\pi H\sigma\omega\left(\cos\alpha_0 + \frac{1}{\cos\alpha_0} - 2\right)$$

bulunur. Ancak,

$$\cos\alpha_0 = \frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}}$$

olduğundan

$$B = 2\pi\sigma\omega\left(\frac{R^2+2H^2}{\sqrt{R^2+H^2}} - 2H\right)$$

~~[illegible]~~

bulunur.

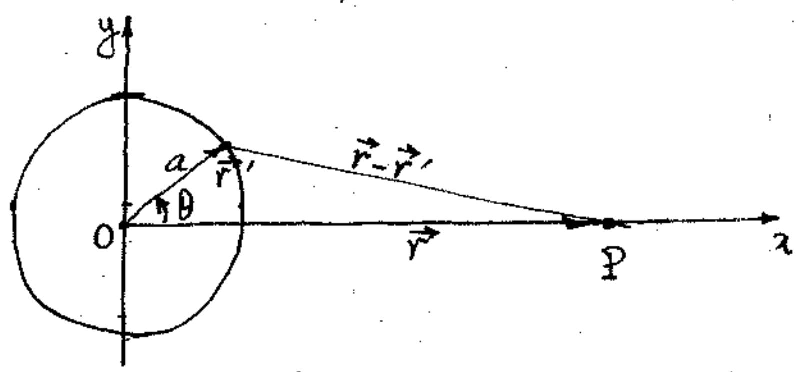
PROBLEM: 19 – $a$ yarıçaplı dairesel bir telden $I = I_0 \cos\omega t$ şeklinde bir elektrik akımı geçmektedir. Telin bulunduğu düzlemde, telin merkezinden $r$ uzaklığındaki bir noktada, $r \gg a$ ve $\omega a/c \ll 1$ şartları altında,

(24) 1) $\vec{A}$ vektörel potansiyelini, ve

2) $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alan vektörlerini

tayin ediniz.

ÇÖZÜM – 1) Şekilden : $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}$ dır. Ayrıca




$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{I\left(\vec{r}\,';t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{l}$$

şeklinde olacaktır. Burada

$$d\vec{l}\,' = d\vec{r}\,' = d\left(a\cos\theta\,\vec{e}_x + a\sin\theta\,\vec{e}_y\right) = \left(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y\right) a\,d\theta$$

dır. Eğer şimdilik, akımın $I = I_0 \exp(i\omega t)$ nin reel kısmı olduğunu hatırda tutarak $I = I_0 e^{i\omega t}$ vaz edilecek olursa

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi} \frac{I_0 \exp\left\{i\omega\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}\right)\right\}}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\left(-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y\right) a\,d\theta$$

$$= \frac{aI_0 e^{i\omega t}}{c}\int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-\frac{i\omega}{c}\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}\right)}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\left(-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y\right) d\theta$$

olur. $r \gg a$ olduğundan $a^2/r^2$ li terimler ihmal edilebilirler; buna göre

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{aI_0 e^{i\omega t}}{rc}\int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-\frac{i\omega r}{c}\sqrt{1-\frac{2a}{r}\cos\theta}\right)}{\sqrt{1-\frac{2a}{r}\cos\theta}}\left(-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y\right)$$

yazılır. Öte yandan

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2a}{r}\cos\theta}} \cong 1+\frac{a}{r}\cos\theta \quad , \text{ ve dolayısıyla}$$

$$e^{-\frac{i\omega r}{c}\sqrt{1-\frac{2a}{r}\cos\theta}} \cong e^{-\frac{i\omega r}{c}\left(1-\frac{a}{r}\cos\theta\right)} = e^{-\frac{i\omega r}{c}}\cdot e^{\frac{i\omega a}{c}\cos\theta}$$

olur. $\omega a/c \ll 1$ için $\omega^2a^2/c^2$ mertebesindeki terimlerin ihmal edilebileceğini göz önünde tutarak ve üstel fonksiyonun, bu yüzden, yalnız ilk iki terimiyle yetinerek seriye açılımındaki

(25) $$e^{-\frac{i\omega r}{c}\sqrt{1-\frac{2a}{r}\cos\theta}} \cong 1+i\frac{\omega a}{c}\cos\theta$$

olur. Bu verilere göre $\vec{A}(\vec{r},t)$ nin ifadesi

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{cr}\,aI_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\int_0^{2\pi}\left(1+i\frac{\omega a}{c}\cos\theta\right)\left(1+\frac{a}{r}\cos\theta\right)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi a I_0}{cr}\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\left(\frac{a}{r}+i\frac{\omega a}{c}\right)\vec{e}_y=A_y\cdot\vec{e}_y$$

şekline girer. $I=I_0\cos\omega t$ olarak verildiğinden bu son ifadenin reel kısmı

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\pi a^2 I_0}{cr}\left[\frac{1}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\omega}{c}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_y \qquad (1)$$

dır.

2) Elektrik alanı, yükler olmaması sebebiyle,

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

ve dolayısıyla da, (1) aracılığıyla,

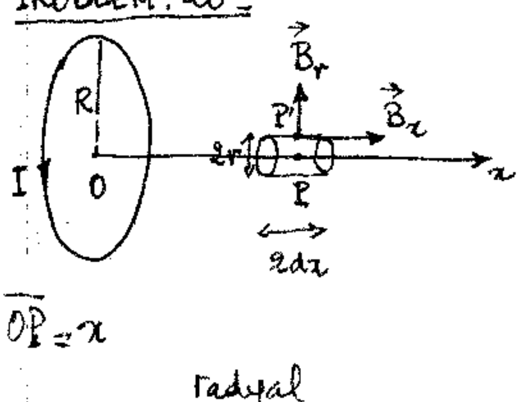
$$\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\pi a^2 I_0}{c^2 r}\left[-\frac{\omega}{r}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\omega^2}{c}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_y$$

elektrik alanı ve

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

bağıntısından da $\vec{B}$ magnetik indüksiyon vektörü kolayca elde edilir.

PROBLEM: 20 –




$\overline{OP}=x$

R yarıçaplı kapalı bir devrenin içinden sabit bir I elektrik akımı geçmektedir. P ile devre düzlemine dik Ox simetri ekseni üzerinde bir nokta ve P' ile de P den ve Ox den küçük bir r uzaklığındaki bir başka nokta gösterilmiş olsun. Bu devre P' noktasında x boyunca bileşeni $\vec{B}_x$ ve buna dik radyal bileşeni de $\vec{B}_r$ olan bir $\vec{B}$ magnetik indüksiyon alanı hâsıl edecektir. Bu takdirde $|\vec{B}_r|$ yi hesaplayınız. (İpucu: bu hesabı yapmak üzere şekildeki gibi, merkezi P de bulunan r yarıçaplı küçük bir silindirden çıkan toplam magnetik akıyı göz önüne alınız).

ÇÖZÜM – Söz konusu küçük silindirin her iki tabanının apsisleri $x+dx$ ve $x-dx$ olup, $|\vec{B}_x|=B(x)$ olmak üzere, magnetik indüksiyon alanının

(26) bu tabanlardaki değerleri de, sırasıyla, $B(x+dx)$ ve $B(x-dx)$ dir. Bu tabanlardan çıkan magnetik indüksiyon akıları da

$$\pi r^2 . B(x+dx) \quad \text{ve} \quad -\pi r^2 . B(x-dx)$$

olacaktır. $|\vec{B}_r|$ nin söz konusu silindirin yan yüzeyi üzerinde her noktada aynı değere sahip olacağını kabul ederek, bu yan yüzeyden çıkan akının da : $4\pi r\, dx |\vec{B}_r|$ olacağı âşikârdır. Magnetik indüksiyonun akısı sakinimli (konservatif) olduğundan silindirden dışarı çıkan toplam akı sıfır olmalıdır:

$$\pi r^2 \left[ B(x+dx) - B(x-dx) \right] + 4\pi r |\vec{B}_r| dx = 0 . \qquad (1)$$

Parantez içindeki büyüklükleri TAYLOR serisine açar 2. mertebeden sonsuz küçüklerin de ihmâl edilebilir olduklarını kabul edersek

$$B(x+dx) = B(x) + B'(x)\, dx + \dots$$
$$B(x-dx) = B(x) - B'(x)\, dx + \dots$$

ifâdeleri aracılığıyla (1) den

$$|\vec{B}_r| = -\frac{r}{2} B'(x) \qquad (2)$$

olur. Hâlbuki PROBLEM: 13 ün (1) numaralı formülüne göre

$$B_x = B(x) = \frac{2\pi I}{R} \sin^3\theta = \frac{2\pi I R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

dir. Şu hâlde

$$B'(x) = \frac{-3x}{(R^2+x^2)^{5/2}}\, 2\pi I R^2 \qquad (3)$$

olur ve (2) ile (3) den de sonuç olarak

$$|\vec{B}_r| = \frac{3\pi x r I R^2}{(R^2+x^2)^{5/2}}$$

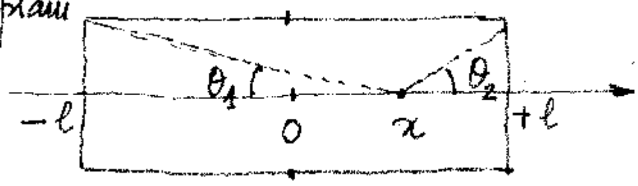
bulunur. Buna binâen, P' noktasında $\vec{B}$ ile x-ekseni doğrultusu arasındaki $\alpha$ açısının da

$$tg\,\alpha = \frac{|\vec{B}_r|}{|\vec{B}_x|} = \frac{3}{2} \frac{xr}{(R^2+x^2)}$$

bağıntısıyla verileceği görülmektedir.

PROBLEM: 21 – R yarıçapını ve $2l$ uzunluğunu haiz bir solenoit üzerinde toplam N adet sarım bulunmaktadır. Solenoidin sarımlarından sâbit bir I elektrik akımı geçtiği vakit solenoidin içinde, simetri ekseni üzerindeki bir $x$ noktasında hâsıl olan magnetik indüksiyon alanının değerini ve solenoidi kateden $\Phi_B$ magnetik indüksiyon akısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM – Solenoidin uzunluğu $2l$ ve toplam sarım adedi de N olduğuna göre uzunluk birimi başına sarım adedinin $n = N/2l$ olduğu anlaşılmaktadır. Bunu ve PROBLEM: 15 deki (1) formülünü göz önünde tutarak




$$B(x) = \frac{\pi N I}{l}\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) =$$

$$= \frac{\pi N I}{l}\left[\frac{l+x}{\{(l+x)^2 + R^2\}^{1/2}} + \frac{l-x}{\{(l-x)^2+R^2\}^{1/2}}\right] \qquad (1)$$

bulunur. Şimdi $x$ apsisli $dx$ kalınlıklı sonsuz yassı bir bobin elemanı içinden geçen $d\Phi_B$ magnetik indüksiyon akısını hesaplayalım:

$$S = \pi R^2 \text{ olmak üzere } \quad d\Phi_B = S\frac{N}{2l}dx\, B(x) \qquad (2)$$

olacaktır. Toplam akı ise $x=-l$ den $x=+l$ ye kadar (2) yi integre etmek suretiyle bulunacaktır; buna göre ve (1) ile (2) den

$$\Phi_B = \frac{\pi N^2 R^2}{4l^2}\left\{\int_{-l}^{+l}\frac{l+x}{[(l+x)^2+R^2]^{1/2}}dx + \int_{-l}^{+l}\frac{l-x}{[(l-x)^2+R^2]^{1/2}}dx\right\}$$

olur. Bu integraller önce $l-x=y$, sonra $y^2=u$ ve nihayet $u+R^2=v$ değişken dönüşümleri yapılarak kolayca hesaplanırlar; buna göre birinci integralin değerinin

$$\sqrt{R^2+4l^2} - R$$

ve ikinci integralin değerinin de

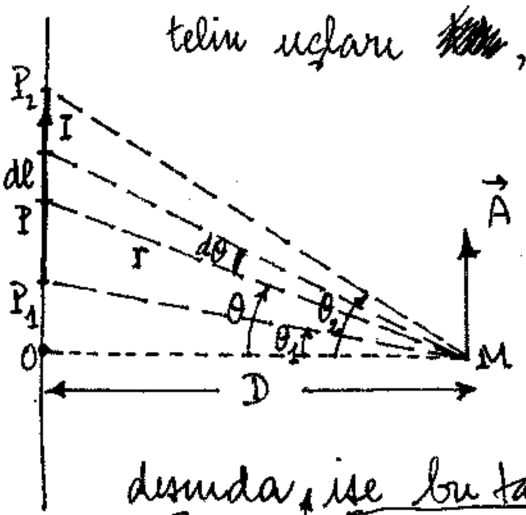
$$-R + \sqrt{R^2+4l^2}$$

olduğu bulunur. Sonuç olarak solenoidi kateden toplam $\Phi_B$ akısı için

$$\Phi_B = \frac{\pi N^2 R^2}{2l^2}\left(\sqrt{R^2+4l^2} - R\right)$$

ifadesi bulunur.

PROBLEM: 22 - a) İçinden sabit bir I elektrik akımı geçen doğrusal bir telin uçları, şekilde görüldüğü üzere, bir M noktasından $\theta_1$ ve $\theta_2$ açıları altında görülmektedirler. M noktasındaki $\vec{A}$ vektörel potansiyelini hesaplayınız.




b) M noktası L ve l kenar uzunluklu bir dikdörtgenin düzleminde ve dikdörtgenin dışında, ise bu takdirde M deki $\vec{A}$ ne olur?
simetri ekseni üzerinde

ÇÖZÜM - a) I.dl akım elemanının kendisinden r uzaklıktaki bir noktada hasıl ettiği $d\vec{A}$ vektörel potansiyel alanı

$$d\vec{A} = \frac{I}{c}\frac{d\vec{l}}{r}$$

dır. Göz önüne alınan misalde $\vec{A}$ nın $\overrightarrow{P_1P_2}$ ye paralel olacağı ve

$$\vec{A} = \frac{I}{c}\int_{P_1}^{P_2}\frac{dl}{r}$$

olacağı görülmektedir. $\theta = (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MO})$ vazederek eğer

$$OP = D\,tg\,\theta \;\rightarrow\; d(OP) = D\,d(tg\,\theta)$$

yani

$$dl = \frac{D}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

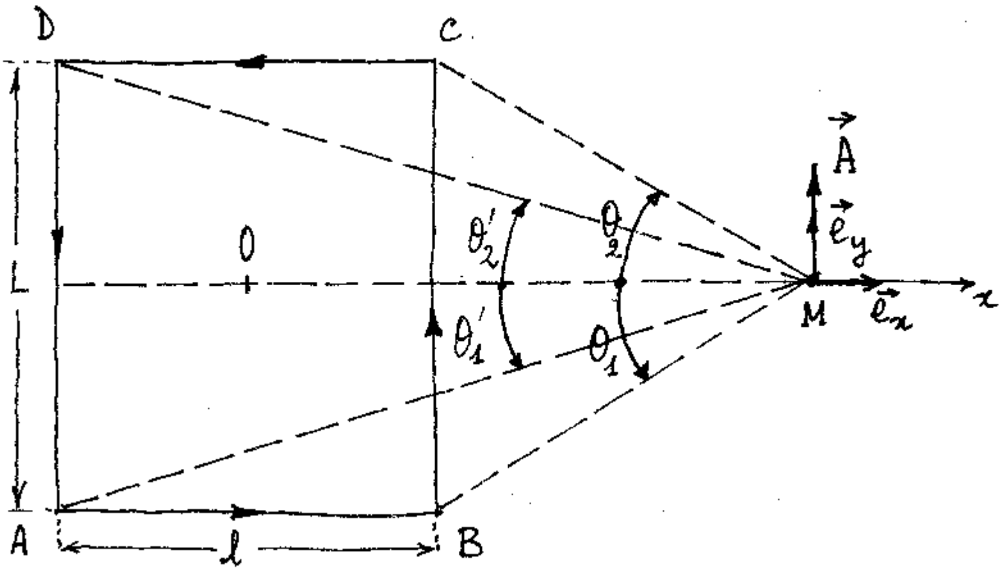
şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa, ayrıca $r = D/\cos\theta$ olduğu da göz önünde tutularak,

$$A = \frac{I}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{I}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{I}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d(\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{I}{2c}\ln\frac{(1+\sin\theta_2)(1-\sin\theta_1)}{(1+\sin\theta_1)(1-\sin\theta_2)} \qquad (1)$$

bulunur. Görüldüğü gibi sonuç M nin tele olan uzaklığından bağımsızdır.

(24) b) Şimdi, şekildeki gibi, $L \times l$ boyutlarında dikdörtgen bir ABCD devresi ve bunun Ox simetri ekseni üzerindeki bir M noktası göz önüne alınacak olursa M de AB den geçen akım dolayısıyla hâsıl




olan $\vec{A}_{AB}$ vektörel potansiyeli $\vec{Ox}$ yönünde olup (1) e binaen

$$\vec{A}_{AB} = \frac{I}{2c}\,\frac{(1+\sin\theta_1)(1-\sin\theta_1')}{(1+\sin\theta_1')(1-\sin\theta_1)}\,\vec{e}_x \;,$$

ve M de CD den geçen akım dolayısıyla hâsıl olan $\vec{A}_{CD}$ vektörel potansiyeli de $-\vec{Ox}$ yönünde olup, ayrıca simetri dolayısıyla

$$\theta_2 = -\theta_1 \qquad \text{ve} \qquad \theta_2' = -\theta_1'$$

olduğuna dikkat ederek,

$$\vec{A}_{CD} = -\frac{I}{2c}\ln\frac{(1+\sin\theta_2')(1-\sin\theta_2)}{(1+\sin\theta_2)(1-\sin\theta_2')}\vec{e}_x = -\frac{I}{2c}\ln\frac{(1-\sin\theta_1')(1+\sin\theta_1)}{(1-\sin\theta_1)(1+\sin\theta_1')}\vec{e}_x$$

$$= -\vec{A}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}_{AB} + \vec{A}_{CD} = 0$$

olduğu anlaşılır. Şu hâlde M noktasındaki vektörel potansiyel yalnızca uzun kenarların katkısıyla hâsıl olacaktır. Nitekim, $\theta_2 = -\theta_1 = \theta$ ve $\theta_2' = -\theta_1' = \theta'$ vaz ederek, sonunda

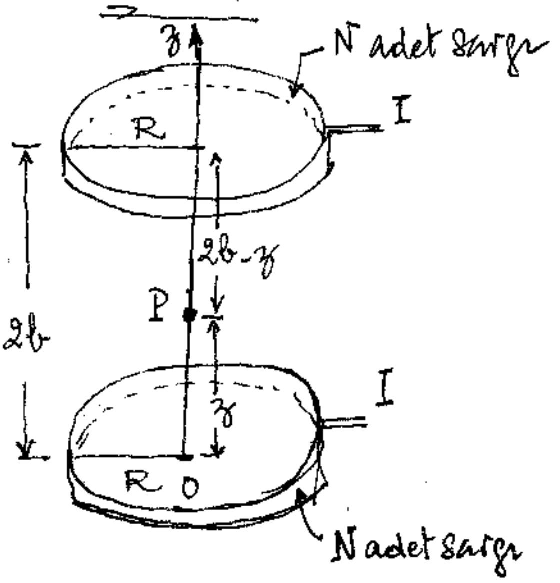
$$\vec{A} = \frac{I}{c}\ln\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta')}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta')}\,\vec{e}_y$$

olduğu tesbit edilmiş olur.

(30)

PROBLEM: 22 - Her biri N sargı ihtivâ eden R yarıçaplı, aynı simetri eksenli iki bobin verilmektedir. Bunların birbirlerinden 2b uzaklığında bulunduklarını varsayarak, ikisinin arasında ve ortak eksenleri üzerinde öyle bir P noktası bulunuz ki P deki magnetik indüksiyon vektörünün eksen boyunca bileşeninin birinci türevi sıfır olsun. Aynı noktada ~~…~~ aynı bileşenin ikinci türevinin de sıfır olması için hangi şart tahakkuk etmelidir? Bu şartın tahakkuk etmiş olması hâlinde P de magnetik indüksiyon vektörünün bobinlerin ekseni doğrultusundaki bileşeninin değerini hesaplayınız. (Bobinlerin içinden aynı bir sâbit I akımının geçtiği varsayılmaktadır).

ÇÖZÜM -




Şekildeki notasyon çerçevesi içinde ve PROBLEM: 13 ün (1) numaralı sonucunu da göz önünde tutarak, her iki bobinin ortak simetri ekseni olarak seçilen z-ekseni üzerinde ~~…~~ z konumundaki bir P noktasında $\vec{B}$ magnetik indüksiyon vektörünün $B_z$ bileşeninin ifâdesi

$$B_z(z) = 2\pi N R^2 I \left\{ \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} + \frac{1}{[R^2+(2b-z)^2]^{3/2}} \right\} \qquad (1)$$

ve bunun da z ye göre birinci türevi de

$$\frac{dB_z(z)}{dz} = 2\pi N R^2 I \left\{ -\frac{3}{2}\frac{2z}{(R^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3}{2}\frac{2(z-2b)}{[R^2+(2b-z)^2]^{5/2}} \right\}$$

şeklindedir. Bu türev kolayca görüleceği üzere $z=b$ de sıfır olmaktadır. Şu hâlde $dB_z/\partial z = 0$ olması için gerekli şartın P noktasının iki bobin arasındaki uzaklığın tam ortasında bulunması olduğu anlaşılmaktadır. Bu şart altında yani P nin $z=b$ de bulunması hâlinde, $d^2B_z/dz^2$ yi hesaplayalım:

$$\frac{d^2B_z}{dz^2} = -6\pi R^2 N I \left\{ \frac{1}{(R^2+z^2)^{5/2}} - \frac{5}{2}\,\frac{2z^2}{(R^2+z^2)^{7/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left[R^2+(2b-z)^2\right]^{5/2}} - \frac{5}{2}\,\frac{2(z-2b)^2}{\left[R^2+(2b-z)^2\right]^{7/2}} \right\},$$

$$\left(\frac{d^2B_z}{dz^2}\right)_{z=b} = -6\pi R^2 N I \left\{ \frac{b^2+R^2-5b^2+b^2+R^2-5b^2}{(R^2+b^2)^{7/2}} \right\}$$

$$= -6\pi R^2 N I \; \frac{2\left(R^2-4b^2\right)}{\left(R^2+b^2\right)^{7/2}}$$

olur. Buradan $\left[d^2B_z/dz^2\right]_{z=b} = 0$ olması için $R^2-4b^2=0$ ya

$$2b = R$$

olmak gerektiği görülmektedir; yani her iki bobinin birbirlerinden, yarıçaplarına eşit bir uzaklıkta bulunmaları gereklidir. Bu takdirde $z=b$ ve $R=2b$ şartları altında P deki magnetik indüksiyon vektörünün $B_z$ bileşeni olarak

$$B_z(b) = B_z\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{32}{5^{3/2}}\,\frac{\pi N I}{R} = \text{sâbit}$$

bulunur. Bunu gerçekleştiren düzene HELMHOLTZ bobinleri adı verilir. Bu, küçük bir hacımda oldukça birbiçim bir magnetik alanın hâsıl edilmesi için başvurulan bir düzendir. Bunu görmek üzere $\left[d^3B_z/dz^3\right]_{z=b} = 0$ olduğu önce tahkik olunur ve sonra da $B_z(z)$ fonksiyonu $z=b=R/2$ civarında TAYLOR serisine açılırsa

$$B_z(z) = B_z\left(\frac{R}{2}\right) + \frac{1}{24}\left(z-\frac{R}{2}\right)^4 \left(\frac{d^4B_z}{dz^4}\right)_{z=\frac{R}{2}} + \cdots$$

$$\cong B_z\left(\frac{R}{2}\right)\left[1 - \frac{144}{125}\left(\frac{z-\frac{R}{2}}{R}\right)^4\right]$$

olur. Buna göre $\left|z-\frac{R}{2}\right| < \frac{R}{10}$ olan bölgede $B_z(z)$ nin $B_z\left(\frac{R}{2}\right)$ de ancak 0,00015 kadar sapacağı kolayca tesbit edilir.

(32) PROBLEM: 23 – $(xOy)$ düzlemiyle sınırlandırılmış, yarı sonsuz, birbiçim bir iletken göz önüne alınıyor. Bu iletkende $(xOy)$ düzlemine paralel her düzlemde $Ox$ doğrultusuna paralel ve $\omega$ açısal frekanslı sinüsoidal bir elektrik akımının teessüs etmiş olduğu, bu akımın genliğinin de yalnızca $z$ nin fonksiyonu olduğu kabûl edilmektedir. İletkendeki yerdeğiştirme akımının iletim akımı yanında ihmâl edilecek kadar küçük olduğu varsayımı altında akım yoğunluğunun $z$ ye bağlılığının şeklini tesis ediniz.

<u>ÇÖZÜM</u> – Problemin verilerine göre

$$\vec{J}(\vec{r},t) = J_x(z,t)\,\vec{e}_x = J(z)\,e^{-i\omega t}\,\vec{e}_x$$

şeklindedir. OHM kaanununa göre $\vec{E}$ elektrik alanı da aynı doğrultuda olacaktır. Buna binâen

$$E_x(z,t) = \frac{1}{\sigma} J(z)\,.\,e^{-i\omega t}$$

dir. Öte yandan indüksiyon kaanunundan ve $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$ varsayarak

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow B_y \frac{i\omega}{c} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{J'(z)}{\sigma} e^{-i\omega t} \quad ; \quad J'(z) = \frac{dJ(z)}{\partial z}$$

ya da : $$B_y(z,t) = -i\,\frac{J'(z)}{\sigma\omega}\,e^{-i\omega t} \qquad (1)$$

bulunur. Yerdeğiştirme akımının $\vec{J}$ akımı önüne ihmâl edilecek kadar küçük olması dolayısıyla ve (1) bağıntısından ötürü

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \cong \frac{4\pi}{c}\vec{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{c} J(z)\,e^{-i\omega t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z} = i\,\frac{J''(z)}{\sigma\omega}\,e^{-i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{J''(z) + i\left(\frac{4\pi\sigma\omega}{c}\right) J(z) = 0}$$

denklemi elde edilmiş olur. Bu 2. mertebeden sâbit katsayılı, sağ yansız, lineer bir âdi diferansiyel denklemdir. $i$ nin kare köklerinin $\pm(1+i)\sqrt{2}/2$ olduğunu hatırlayarak bunun genel çözümü, hemen,

$$J(z) = A e^{(1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c}}\cdot z} + B e^{-(1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c}}\cdot z} \qquad (2)$$

şeklinde yazılır. $\alpha = \pm\sqrt{2\pi\sigma\omega/c}\,.z$ vaz edilirse

$$e^{(1+i)\alpha} = e^{\alpha} e^{i\alpha} = e^{\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

olur. Buna göre bu ifâdenin reel kısmı $\alpha$ nın işaretine tâbi olarak sönen ya da artan bir sinüsoid verir:

$$e^{\alpha}\cos\alpha = e^{\pm\sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c}}\cdot z} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c}}\cdot z\right).$$

Eğer göz önüne alınan ortam $z<0$ bölgesinde ise, üstel olara artan elektromagnetik alanların çözümden elenmesi için $B=0$ almak gerekecektir. Buna göre (2) den, $\delta = \sqrt{c/2\pi\sigma\omega}$ vazederek

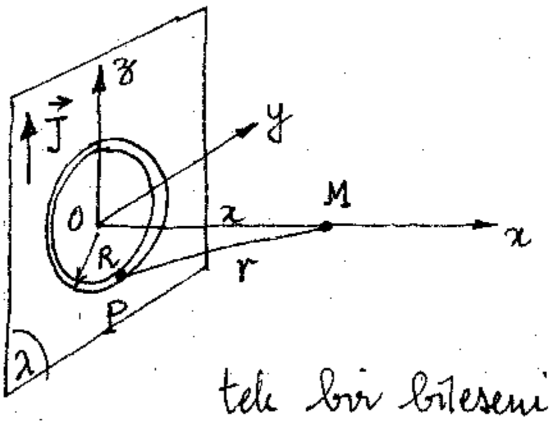
$$J(z) \sim e^{(1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c}}\cdot z} = e^{-|z|/\delta} \cdot e^{iz/\delta}$$

olur. Buradaki $\delta$ büyüklüğüne "deri kalınlığı" adı verilmektedir. Bu formül akımın genliğinin yüzeyden içeri inildikçe azaldığını, akımın daha çok yüzeye yakın bölgede toplandığını (deri ola ve $z=\delta$ için $J(x)$ in, ilk değerinin $1/e$ sine indirgeneceğini ve, doğru akımdakinin tersine, sinüsoidal bir akım söz konusu olduğund iletkenin kalınlığını $\delta$ mertebesindeki değerlerden öteye arttırmakl iletkenin direncinin de arttırılmış olmayacağını göstermektedir.

PROBLEM: 24 – İhmâl edilebilecek kadar küçük bir $\delta$ kalınlığına sâhi sonsuz yaygınlıktaki düzlemsel bir iletken $\lambda$ levhası yük ihtivâ etmemekte fakat $J_z(y,z,t) = J_0 e^{-i\omega t}$ şeklinde tek bir bileşeni olan bir elektrik akımı tarafından $z$ doğrultusunca katedilmektedi. Levhaya dik bir $Ox$ ekseni üzerinde $x$ apsisli bir M noktasın daki gecikmiş potansiyelleri hesaplayınız ve bunların yalnızca $x$ ve $t$ nin fonksiyonları olduklarını gösteriniz. Bu misâlde, akımların uzayda kapalı bir bölgede hapsedilmiş olmamaları se bebiyle bu potansiyellerin sonsuzda sıfır olmaları beklenmez. Bu itibarla bunların sonsuzdaki değerlerinden ziyâde $x$ in fonksiyonu olarak nasıl değişecekleri önemlidir; çünkü meselâ $\vec{A}$ zâ ancak bir sâbit farkıyla belirlenebilmektedir.

$\vec{E}$ ile $\vec{B}$ nin ~~...~~ bileşenlerini de tâyin ediniz.

(34) <u>ÇÖZÜM</u>_ Söz konusu levha üzerinde yük olmadığına göre skaler potansiyel fonksiyonu da yok demektir. Bu takdirde iş, yalnızca,




$$\vec{A}(\vec{OM},t)=\frac{1}{c}\iiint \frac{\vec{J}\left(\vec{OP},\, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\, dV \;, \quad (r=\vec{PM}$$

vektörel potansiyelini tayin etmeğe kalmaktadır. Problemin verilerine göre $\vec{J}$ nin tek bir bileşeni vardır: $J_z$. Vektörel potansiyelin yukarıdaki tanım bağıntısı, bu takdirde, $\vec{A}$ nın da tek bir bileşeni olacağını göstermektedir: $A_z$. Vektörel potansiyelin tanım bağıntısında $dV$ hacım elemanına sabit ve çok küçük $\delta$ kalınlığındaki $dS$ yüzey elemanı tekaabül ettirilecektir. $\delta$ çok küçük olduğundan $P$ nin levhanın kalınlığını tasvir ettiği zaman gerek $\vec{J}$ nin gerekse paydadaki $r$ nin değişimlerinin de ihmal edilecek kadar küçük olduklarını kabul edeceğiz. Böylelikle $dV=\delta . dS$ olmakla

$$A_z(\vec{OM},t)=A_z(x,t)=\frac{J_0 . \delta}{c}\iint_{(\lambda)} \frac{e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\, dS \qquad (1)$$

yazılacaktır.

Öte yandan $O$ merkezli, $R$ ve $R+dR$ yarıçaplı daireler arasında kalan dairesel halkadaki bütün $P$ noktalarının da $M$ den aynı bir $r=\sqrt{R^2+x^2}$ uzaklığında oldukları ve dolayısıyla aynı bir gecikmeyi doğurdukları aşikârdır. Böyle bir halkanın (1) deki integrale katkısı ise $2\pi R dR . \exp\left[-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$ olacaktır. Buna göre

$$A_z(x,t)=\frac{2\pi J_0 . \delta}{c} e^{-i\omega t} \int_{R=0}^{R=\infty} dR . \frac{R}{r} . e^{i\frac{\omega}{c} r}$$

ya da sabit bir $x$ için $R dR = r dr$ olacağından

$$A_z(x,t)=\frac{2\pi}{c} J_0 \delta . e^{-i\omega t}\int_x^{\infty} e^{i\omega r/c}\, dr = -i\, \frac{2\pi J_0 \delta . e^{-i\omega t}}{\omega}\left[e^{\frac{i\omega}{c} r}\right]_x^{\infty}$$

bulunur. İntegre edilen bu ifade üst sınırı için tanımlanmış değildir. Ancak problemin vaz'ında da belirtilmiş olduğu gibi bunu kaale almayıp yalnızca alanın $x$ e bağlı olarak nasıl değiştiğini incelemek üzere alt sınırı göz önünde tutacağız. Buna göre, bir sabit yaklaşıklığıyla,

$$A_z(x,t) = i\,\frac{2\pi J_0\cdot\delta}{\omega}\, e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})}$$

bulunur. Buradan ve $\Phi$ skaler potansiyelinin özdeş olarak sıfır olması dolayısıyla

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

ye münceer olan bağıntıdan

$$E_y = -\frac{2\pi J_0\cdot\delta}{c}\, e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})} \qquad (2)$$

ve

$$\cancel{-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

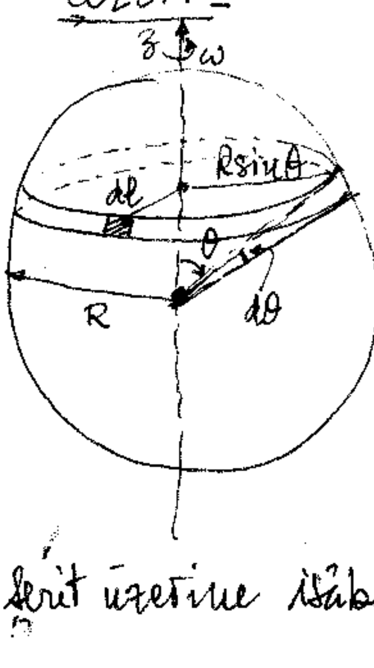
bağıntısı dolayısıyla da

$$B_z = -2\pi J_0\cdot\delta\, e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})} \qquad (3)$$

bulunur. (2) ve (3) ile özetlenen olayın bir elektromagnetik düzlem dalgayı temsil ettiği aşikârdır.

PROBLEM: 25 - Çaplarından birinin etrafında $\omega$ açısal hızıyla dönen $R$ yarıçaplı ve $\sigma$ yüzeysel birbiçim yük yoğunluğunu haiz bir kürenin magnetik momentini hesaplayınız.

ÇÖZÜM -




Önce kürenin yüzeyi üzerinde $dl$ ve $Rd\theta$ uzunluk ve kalınlığında bir yüzey elemanı göz önüne alalım. Küre $\omega$ açısal hızıyla döndüğü zaman bu yüzey elemanı da kalınlığı $Rd\theta$ ve yüzeyi de $2\pi R\sin\theta \times Rd\theta$ olan bir şerit oluşturacaktır. Bu şeridin çizgisel hızı ise $v = \omega/2\pi$ dir. Küre üzerindeki yük dağılımı birbiçim olduğuna göre bu şerit üzerine isabet eden toplam $dq_{şer}$ yükü de $dq_{şer} = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta$ dır. Bu $dI = v\, dq_{şer} = \sigma\omega R^2 \sin\theta\, d\theta$ değerinde bir elektrik akımına bedeldir. Bu kapalı akımın yüzeyi $\pi R^2 \sin^2\theta$ olduğundan buna tekabül eden $d\vec{m}$ magnetik momenti de dönme eksenine (z-ekse nine paralel olacak ve değeri de

$$d\vec{m} = \frac{dI}{c} S \vec{e}_z = \frac{\pi \sigma \omega}{c} R^4 \sin^3\theta \, d\theta \, \vec{e}_z$$

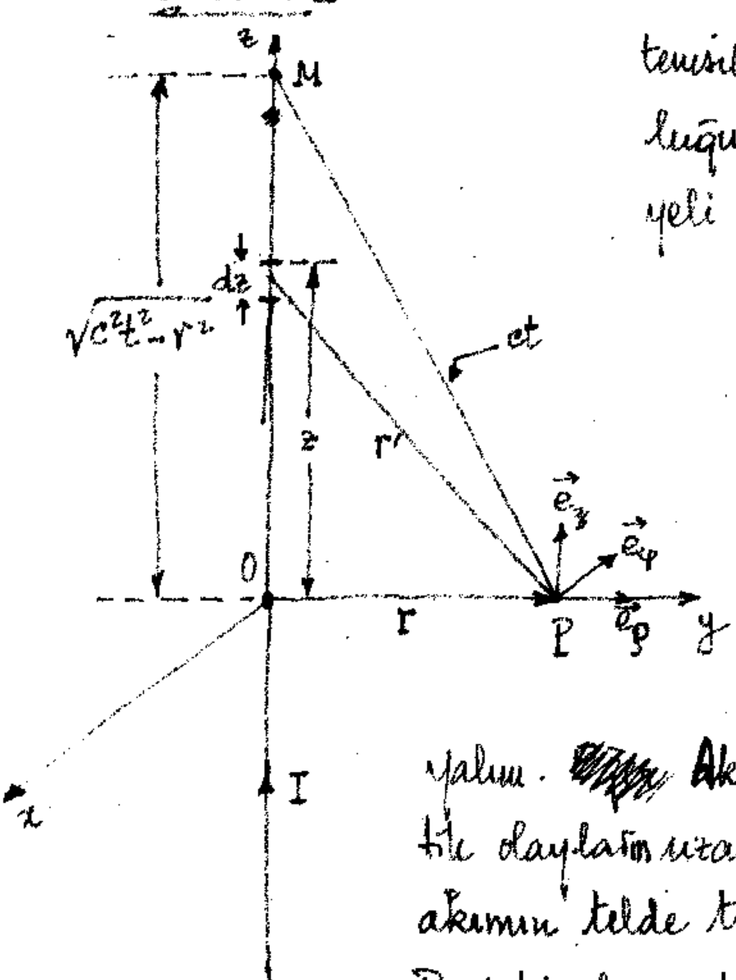
olacaktır. Buna göre aynı yönde olacak olan bileşke moment de

$$\vec{m} = \frac{\pi\sigma\omega}{c} \vec{e}_z R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{(4\pi R^2 \sigma)\vec{e}_z R^2 \omega}{3c} = \frac{Q R^2 \omega}{3c} \vec{e}_z$$

olur. $Q = 4\pi R^2 \sigma$, küre yüzeyindeki toplam yükü göstermektedir.

PROBLEM: 26 _ Sonsuz bir telden $t>0$ anlarında sabit bir $I$ sabit akımı geçmektedir. Tele bir $r$ uzaklığında bulunan $P$ noktasındaki $\vec{A}$ vektörel potansiyelini, $\vec{E}$ elektrik alanını, $\vec{B}$ magnetik indüksiyon alanını, ve, $P$ den geçen ve telle eşeksenli olan $r$ yarıçaplı bir silindirin birim yüzeyinden birim zamanda akan elektromagnetik enerji akısını bulunuz.

ÇÖZÜM _




Bilindiği gibi bir $d^3\vec{r}\,'$ hacım elemanının temsil ettiği bir $V$ hacmındaki $\vec{J}$ akım yoğunluğundan ileri gelen $\vec{A}(\vec{r},t)$ vektörel potansiyeli

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \quad (1$$

ifadesiyle verilir.

Şimdi sabit $I$ elektrik akımının z-ekseni boyunca ilerlediğini ve $P$ nin de y-ekseni üzerinde olduğunu varsayalım. ~~[illegible]~~ Akım elemanının hasıl ettiği elektromagnetik olayların uzayda $c$ hızıyla yayılmaları sebebiyle akımın telde tesisi etmesinden $t$ zamanı sonra $P$ deki alana katkısı olabilecek en uzak $M$ noktasının $P$ ye uzaklığının $ct$ olacağı aşikardır. Buna göre şekilden

$$|\vec{OM}| = \sqrt{c^2t^2 - r^2}$$

olacağı görülmektedir. Bu geometrik düzen (1) deki hacım integralini $z$ boyunca alınan basit bir integrale dönüştürecektir:

$$\cancel{\vec{A} = \frac{1}{c} I \int^{\sqrt{c^2t^2-r^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2I}{c}\left\{\ln\left(\sqrt{z^2+r^2}+z\right)\right\}^{\sqrt{c^2t^2-r^2}}} \Rightarrow$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int_{-\sqrt{c^2t^2-r^2}}^{+\sqrt{c^2t^2-r^2}} \frac{I\,dz}{\sqrt{z^2+r^2}}\,\vec{e}_z = \frac{2I}{c}\int_0^{\sqrt{c^2t^2-r^2}} \frac{dz}{\sqrt{z^2+r^2}}\,\vec{e}_z$$

$$= \frac{2I}{c}\,\vec{e}_z\left[\ln\left\{\sqrt{z^2+r^2}+z\right\}\right]_0^{\sqrt{c^2t^2-r^2}} = \frac{2I}{c}\left\{\ln\frac{\sqrt{c^2t^2-r^2}+ct}{r}\right\}\vec{e}_z$$

bulunur. Bu sonuç $t > \frac{r}{c}$ için geçerlidir. $t < \frac{r}{c}$ için ise $\vec{A} = 0$ dır.

Öte yandan $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ dır ve silindirik koordinatlar göz önüne alındığında da, $\vec{A}$ nın $\vec{e}_z$ doğrultusunda tek bir bileşeni olması dolayısıyla bu,

$$\vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial r}\,\vec{e}_\varphi$$

ye indirgenmiş olur. Buna göre

$$\vec{B} = \frac{2It}{r\sqrt{c^2t^2-r^2}}\,\vec{e}_\varphi \qquad (2)$$

bulunur. Diğer taraftan da

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{2Ic}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\,\vec{e}_z \qquad (3)$$

olduğu kolaylıkla tesbit edilir. $t\to\infty$ için (2) ve (3) den

$$\lim_{t\to\infty}\vec{E}\to 0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty}\vec{B}\to\frac{2I}{cr}\,\vec{e}_\varphi$$

olacağı görülmektedir.

Enerjinin P de, r yarıçaplı bir silindirin birim dış yüzeyinden geçen akısını tayin etmek üzere POYNTING teoreminden yararlanacağız:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{H} = \frac{c}{4\pi\mu}\,\vec{E}\times\vec{B} = -\frac{I^2c^2t}{\mu\pi r(c^2t^2-r^2)}\left(-\vec{e}_\rho\right) = \frac{I^2c^2t}{\pi\mu r(c^2t^2-r^2)}\,\vec{e}_\rho$$

bulunur.

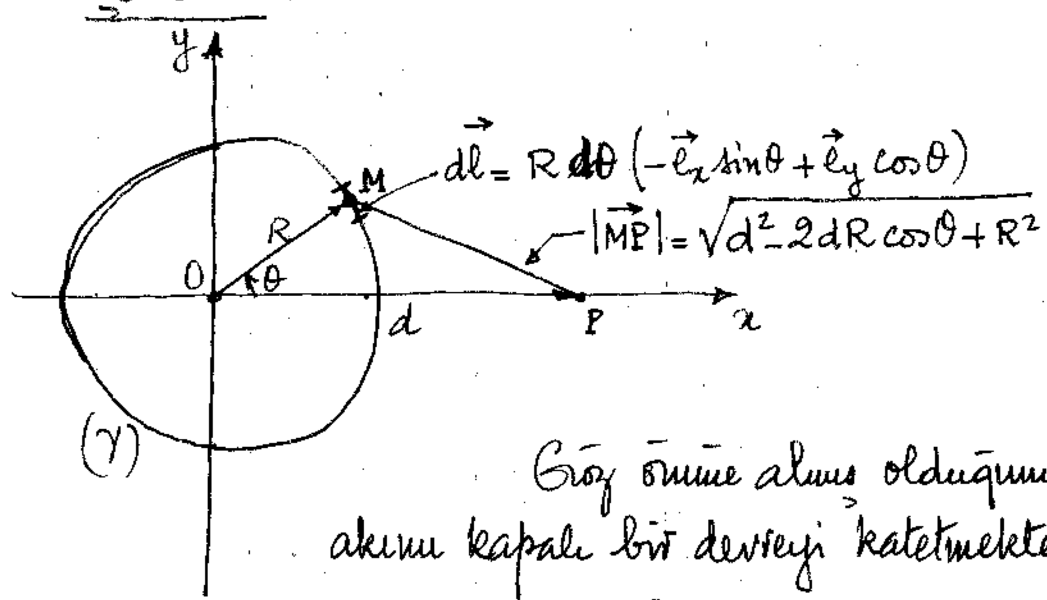
PROBLEM: 27 – $I = I_0\cos\omega t$ şeklinde bir elektrik akımı ~~[illegible]~~ R yarıçaplı dairesel bir devreden geçmektedir. $R\omega/c \ll 1$ olması halinde, dairesel devrenin düzleminde merkeze olan d uzaklıkları R ye nisbetle büyük olan noktalarda $\vec{A}$ vektörel potansiyelinin bu noktaların yervektörlerine dik bileşeninin yaklaşık olarak

(38)

$$\frac{\pi R^2 I_0}{cd}\left\{\frac{1}{d}\cos\omega\left(t-\frac{d}{c}\right)-\frac{\omega}{c}\sin\omega\left(t-\frac{d}{c}\right)\right\}$$

şeklinde olacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM –




Göz önüne alınış olduğumuz problemde elektrik akımı kapalı bir devreyi katetmekte olduğundan

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\oint_{(\gamma)}\frac{[I]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\vec{l} \qquad (1)$$

şeklinde olacaktır. $\vec{A}$ yı hesaplayacağımız P noktasını x-ekseni üzerinde seçelim: $\vec{OP}=d\,\vec{e}_x$ olsun. $|\vec{OM}|=R$ vaz edelim. Buna göre $|\vec{MP}|=\sqrt{d^2-2dR\cos\theta+R^2}$ ve $d\vec{l}=(-\vec{e}_x\sin\theta+\vec{e}_y\cos\theta)\,R\,d\theta$ olur. Şu hâlde

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\frac{I_0 e^{i\omega\left(t-\frac{|\vec{MP}|}{c}\right)}(-\vec{e}_x\sin\theta+\vec{e}_y\cos\theta)\,R\,d\theta}{\sqrt{d^2-2dR\cos\theta+R^2}}$$

ve dolayısıyla

$$A_y(\vec{r},t)=\frac{R I_0 e^{i\omega t}}{c}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{d^2-2dR\cos\theta+R^2}}\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{d^2-2dR\cos\theta+R^2}}$$

olur. Bu ifadede $(R/d)^2$ li terimleri ihmâl ederek

$$A_y(\vec{r},t)=\frac{I_0 R e^{i\omega t}}{cd}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i(\omega d/c)\sqrt{1-(2R/d)\cos\theta}}\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\frac{2R}{d}\cos\theta}}$$

olur. İntegrantı binom serisine açıp, $R\omega/c \ll 1$ olması dolayısıyla d yalnızca ilk terimlerle yetinerek,

$$A_y(\vec{r},t)=\frac{RI_0e^{i\omega(t-\frac{d}{c})}}{cd}\int_0^{2\pi}\left(1+i\frac{\omega R}{c}\cos\theta\right)\left(1+\frac{R}{d}\cos\theta\right)\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{RI_0e^{i\omega(t-\frac{d}{c})}}{cd}\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta+\left(\frac{R}{d}+i\frac{\omega R}{c}\right)\cos^2\theta+i\frac{\omega R^2}{cd}\cos^3\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{\pi RI_0e^{i\omega[t-(d/c)]}}{cd}\left(\frac{R}{d}+i\frac{\omega R}{c}\right)$$

bulunur. Şu hâlde, $I=I_0\cos\omega t$ şeklindeki bir akım için

$$A_y=\frac{\pi R^2I_0}{cd}\left\{\frac{1}{d}\cos\omega\left(t-\frac{d}{c}\right)-\frac{\omega}{c}\sin\omega\left(t-\frac{d}{c}\right)\right\}$$

ifâdesi elde edilir.

<u>PROBLEM: 28</u> – Elektromagnetik bir alanın alan vektörleri olan $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ nin skaler $\Phi$ potansiyeli ile vektörel $\vec{A}$ potansiyeli aracılığıyla

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\quad(1)\quad,\quad\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\quad(2)\quad,\quad\vec{\nabla}\vec{A}=0\quad(3)$$

şeklinde belirlenmektedir. Bu takdirde birbiçimli bir dielektrik içinde $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}'$ olacak şekilde ve, $f=f(x,y,z,t)$ ile koordinatların ve zamanın keyfî fakat sürekli bir fonksiyonunu göstererek,

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}f\qquad(4)$$

bağıntısını gerçekleyen bir $\vec{A}'$ vektörel alanı göz önüne alınmaktadır.

1) $\vec{A}'$ vektörel alanına tekaabul ettirilecek olan $\Phi'$ skaler potansiyelinin $\Phi$ ve $f$ nin fonksiyonu olarak ifâdesini tesis ediniz.

2) $\Phi'$ ve $\vec{A}'$ nün LORENTZ şartını gerçeklemeleri hâlinde $f$ nin $\Phi$ nin fonksiyonu olarak ne gibi bir şartı gerçeklemesi gerektiğini tesbit ediniz.

3) Bu şarte $f$ ve $\Phi$ nin zamanın sinüsvari birer fonksiyonu olarak değiştikleri hâl için yeniden yazınız. (Bundan sonraki şıklarda hep bu hâl göz önünde bulundurulacaktır).

(40) 4) $(x,y,z)$ noktasındaki âni skaler potansiyel, $r$ uzaklığındaki $(x',y',z')$ noktasına tesir eden $\rho$ yük yoğunluğunun fonksiyonu olarak

$$\Phi(x,y,z)=\Phi(\vec r)=\int_V \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}d^3\vec r\,'=\int_V \frac{\rho(x',y',z')}{r}dV' \qquad (5)$$

verildiğine göre, bir önceki şıkta bulunmuş olan diferansiyel denklemi

$$\nabla^2 g+K^2 g=\frac{K^2 c}{i\omega}\frac{1}{r}$$

şekline irca edilebileceğini gösteriniz.

5) Ortamın sonsuz olması hâlinde ve noktasal bir yük için bu denklemi integre ediniz.

6) Elde edilen sonuçtan, yüklerin daha genel bir dağılımı için $\Phi'$ potansiyelinin ifâdesini tesis ediniz.

ÇÖZÜM.- 1) (4) tanımı göz önünde tutulursa (1) denklemi

$$\vec E=-\vec\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A'}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla f)$$

şekline girer. $\vec A'$ için hem (1) ve hem de (2) ye benzer ifâdelerin geçerli olması için yani özellikle,

$$\vec E=-\vec\nabla\Phi'-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A'}{\partial t}$$

olması için

$$\Phi'=\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \qquad (6)$$

alınması gerektiği kolayca ~~görülebilir~~ görülmektedir.

2) $\Phi'$ ve $\vec A'$ nün LORENTZ şartını gerçeklemeleri demek, ikisi arasında

$$\vec\nabla\cdot\vec A'+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=0$$

bağıntısının bulunması demektir. (4), (6) ve (3) göz önünde bulundurulursa bu bağıntıdan kolaylıkla $f$ nin gerçeklemesi gereken şart olarak

$$\nabla^2 f-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad (7)$$

ya da

$$\Box^2 f=-\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad (7')$$

diferansiyel denklemi bulunur.

(41) 3) $f(x,y,z,t)=f_0(x,y,z)\,e^{i\omega t}$ ve $\Phi(x,y,z,t)=\Phi_0(x,y,z)\,e^{i\omega t}$ şeklinde oldukları takdirde (7) den

$$\nabla^2 f_0+\frac{\omega^2}{c^2}f_0=-i\frac{\omega}{c}\Phi_0 \qquad (8)$$

bulunur.

4) $\Phi$ nin (5) ile verilmiş olan ifâdesi göz önünde tutulursa (8) ifâdesi

$$\nabla^2 f_0+\frac{\omega^2}{c^2}f_0=-\frac{i\omega}{c}\int_V\frac{\rho_0(x',y',z')}{r}\,dV' \qquad (9)$$

şekline girer. Burada LAPLACE operatörü $x$, $y$ ve $z$ değişkenlerine etkimektedir. Denklemin sağ yanında ise bu değişkenler kapalı bir şekilde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ile ortaya çıkmakta olduklarından

$$f_0(x,y,z)=\int_V\rho_0(x',y',z')\,g_0(r)\,dV' \qquad (10)$$

şeklindedir. (10) u (9) a vaz etmekle

$$\int_V\rho_0(x',y',z')\left[\nabla^2 g_0+\frac{\omega^2}{c^2}g_0+\frac{i\omega}{cr}\right]dV'=0$$

bulunur. $\rho_0(x',y',z')$ yük yoğunluğu dağılımı ne olursa olsun bu bağıntının gerçekleşebilmesi için

$$\nabla^2 g_0+\frac{\omega^2}{c^2}g_0=\frac{\omega^2}{i\omega c}\,\frac{1}{r} \qquad (11)$$

olması gerektiği âşikârdır.

5) (11) denklemini integre etmek için önce, sağ yanı ortadan kaldırmak amacıyla, $h=h(x,y,z)$ olmak üzere,

$$g_0=\frac{c}{i\omega}\left(\frac{1}{r}+h\right) \qquad (12)$$

vaz edelim. Bunu (11) e yerleştirir ve $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\equiv 0$ olduğunu da göz önünde bulundurursak

$$\nabla^2 h+\frac{\omega^2}{c^2}h=0 \qquad (13)$$

sonucu elde edilir. Göz önüne alınan yük noktasal olduğundan bunun civarında küresel bir simetri mevcud olacaktır. Bu itibarla $h=h(r$ yazıp LAPLACE operatörünü de küresel simetrinin varlığı şartı altında küresel koordinatlarda ifâde etmek gereklidir:

$$\nabla^2 h = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rh)}{\partial r^2}\,.$$

Buna binâen (13) denklemi

$$\frac{\partial^2 (rh)}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(rh) = 0$$

şekline girer ki buradan da, A ve B ile iki integrasyon parametresini göstererek

$$h = A\,\frac{\cos\frac{\omega r}{c}}{r} + B\,\frac{\sin\frac{\omega r}{c}}{r}$$

bulunur. Ya da $a$ ve $r_0$ diye yeni iki integrasyon parametresi tanımlayar

$$h = \frac{a\,e^{-\frac{i\omega}{c}(r-r_0)}}{r}$$

olur. Buna göre ve (12) den de $g_0$ için

$$g_0 = \frac{c}{i\omega r}\left[1 + a\,e^{-\frac{i\omega}{c}(r-r_0)}\right] \qquad (13)$$

ifâdesi elde edilir.

6) Buna binâen (10) da $f_0(x,y,z)$ için

$$f_0(x,y,z) = \frac{c}{i\omega}\int_V \rho_0(x',y',z')\left[\frac{1 + a\,e^{-\frac{i\omega}{c}(r-r_0)}}{r}\right] dV' \qquad (14)$$

bulunur.

Yapılan kabûle göre bütün alan büyüklükleri sinüsvârî değişiklerinden $\Phi' = \Phi'_0 e^{i\omega t}$, $\Phi = \Phi_0 e^{i\omega t}$, $f = f_0 e^{i\omega t}$ dir; ve böylece (

$$\Phi'_0 = \Phi_0 - \frac{i\omega}{c} f_0 \qquad (15)$$

olur. (5), (14) ve (15) den ise $\Phi'_0$ nın

$$\Phi'_0(x,y,z) = -\,a\int_V \frac{\rho_0(x',y',z')\,e^{-\frac{i\omega}{c}(r-r_0)}}{r}\,dV'$$

şeklinde olacağı kolayca hesaplanır. Statik rejimde yâni $\omega = 0$ için $\Phi'_0$ ı ifâdesi (5) ile verilmiş olan ifâdenin benzeri olmalıdır. Bu ise $a = -1$ olması nı gerektirir. $r - r_0$ ise yalnızca bir koordinat orijini kaymasına tekabül etmektedir. Uygun bir dönüşümle koordinat orijini her zaman O a getirilebilir. Buna göre

$$\Phi'_0(x,y,z) = \int_V \frac{\rho_0(x',y',z')\,e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r}\,dV' \Rightarrow \Phi'(x,y,z) = \int_V \frac{\rho_0(x',y',z')\,e^{i\omega\left(t-\frac{\omega r}{c}\right)}}{r}\,dV'$$

ya da

$$\Phi'(x,y,z) = \int_V \frac{\rho\left(x',y',z';\,t-\frac{\omega r}{c}\right)}{r}\,dV' \quad \text{olur.}$$

PROBLEM: 29 – A ve B ile göstereceğimiz ve aralarında d=50 cm uzaklıklı bulunan özdeş iletken iki küre sırasıyla Q ve $q = Q/4$ yükünü haizdirler. Bunlarla özdeş bir üçüncü C küresi A ve B yi birleştiren doğru üzerinde sürtünmesiz hareket etmektedir. Başlangıçta yüksüz olan C önce A ile temas ettikten sonra kendi hâline bırakılmaktadır. C nin denge durumunu tâyin ediniz. Bu denge kararlı bir denge midir?

ÇÖZÜM – A ve C küreleri özdeş olduklarından, birbirleriyle temastan sonra aynı bir $q'$ yüküne sâhip olacaklardır. Bunun $q' = Q/2$ olacağı âşikârdır. C küresi A dan $l$ kadar uzaklıkta denge hâlinde olduğu zaman C ile A arasındaki itme kuvveti C ile B arasındaki itme kuvvetini dengelemiş olduğu zamandır, yâni:

$$\frac{\frac{Q}{2}\cdot\frac{Q}{2}}{l^2} = \frac{\frac{Q}{2}\cdot\frac{Q}{4}}{(d-l)^2}.$$

Buradan

$$l = \left(2-\sqrt{2}\right) d = (2-1,414).50 = 29,3 \text{ cm}$$

bulunur.

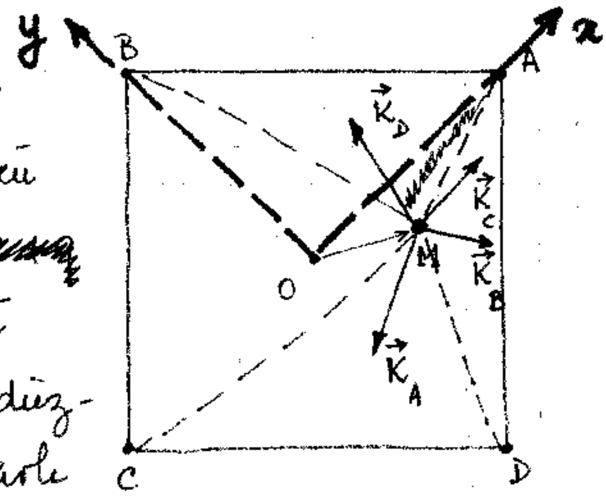
Bir mekanik sistem eğer denge durumundan biraz uzaklaştırıldığı takdirde onu gene denge durumuna rücû ettirecek bir kuvvetin zuhûruna yol açarsa bu takdirde bu sistemin kararlı bir denge durumuna sâhip olduğu söylenir. Göz önüne alınan ve üç küreden oluşan bu sistemin denge durumunun kararlılığını incelemek üzere, önce, A yı B ye birleştiren doğru parçasını A dan B ye doğru yönlendirelim. Bu takdirde C üzerine tesir eden kuvvetin bileşkesinin cebirsel değeri

$$f(l) = \frac{\frac{Q}{2}\cdot\frac{Q}{2}}{l^2} - \frac{\frac{Q}{2}\cdot\frac{Q}{4}}{(d-l)^2} = \frac{Q^2}{32}\left[\frac{2}{l^2} - \frac{1}{(d-l)^2}\right]$$

dır. Diğer taraftan ise

$$\left(\frac{df}{dl}\right)_{l=l_0} = \frac{Q^2}{16d^3}\left[-\frac{2}{(2-\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^3}\right] < 0$$

olduğundan bu söz konusu dengenin kararlı olduğuna delâlet eder.




PROBLEM : 30 – Her bir kenarı $a\sqrt{2}$ olan bir karenin her bir köşesine sâbit birer $+q$ yükü yerleştirilmiştir. Karenin ortasına ~~[illegible]~~ ve hareket edebilen, $m$ kütleli bir $+q$ yükü yerleştirildiğinde bu beşinci yükün kare düzlemindeki herhangi bir öteleme için kararlı bir dengede bulunduğunu gösteriniz ve bu denge durumu etrafındaki salınım peryodunu hesaplayınız.

Dengenin kararlılığını herhangi başka ötelemeler için de tartışınız.

ÇÖZÜM – $m$ kütleli, $+q$ yüklü M noktası üzerine tesir eden bileşke kuvvet sâbit A, B, C ve D yüklerinin M üzerinde icrâ ettikleri $\vec{K}_A$, $\vec{K}_B$, $\vec{K}_C$ ve $\vec{K}_D$ COULOMB kuvvetlerinin geometrik bileşkesidir.

Bu COULOMB kuvvetlerini hesaplamak üzere koordinat eksenleri olarak OAx ve OBy köşegenlerini alalım. Eğer $\vec{e}_x$ ve $\vec{e}_y$ ile bu eksenlerin üzerindeki birim vektörlerini gösterirsek $\vec{K}_A$, $\vec{K}_B$, $\vec{K}_C$ ve $\vec{K}_D$ kuvvetleri, hareket yükün $\vec{OM}$ yervektörünün $x$ ve $y$ koordinatları cinsinden

$$\vec{K}_A = q^2\frac{\vec{AM}}{|\vec{AM}|^3} = q^2\left\{\frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}\vec{e}_x + \frac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}\vec{e}_y\right\}$$

$$\vec{K}_B = q^2\frac{\vec{BM}}{|\vec{BM}|^3} = q^2\left\{\frac{x}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}}\vec{e}_x + \frac{y-a}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}}\vec{e}_y\right\}$$

$$\vec{K}_C = q^2\frac{\vec{CM}}{|\vec{CM}|^3} = q^2\left\{\frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\vec{e}_x + \frac{y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\vec{e}_y\right\}$$

$$\vec{K}_D = q^2\frac{\vec{DM}}{|\vec{DM}|^3} = q^2\left\{\frac{x}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\vec{e}_x + \frac{y+a}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\vec{e}_y\right\}$$

şeklinde ifâde olunurlar. Aslında M nin karenin merkezindeki dengesine ilgi duyduğumuzdan küçük, hattâ sonsuz küçük $\vec{OM}$ ötelemelerini göz önüne almamız yeterlidir. Bu takdirde

$$\vec{K} = \vec{K}_A + \vec{K}_B + \vec{K}_C + \vec{K}_D$$

nin sonsuz küçük $x$ ve $y$ değerlerine göre sınırlı bir açılımını kullanmak uygun olacaktır. Bu takdirde, 2. mertebeden terimlerde ~~açılım~~ yetinerek:

$$[(x-a)^2+y^2]^{-3/2} = \frac{1}{a^3}\left[1+3\frac{x}{a}+\frac{3}{2a^2}(4x^2-y^2)\right]$$

$$[(x+a)^2+y^2]^{-3/2} = \frac{1}{a^3}\left[1-3\frac{x}{a}+\frac{3}{2a^2}(4x^2-y^2)\right]$$

$$[x^2+(y-a)^2]^{-3/2} = \frac{1}{a^3}\left[1+3\frac{y}{a}+\frac{3}{2a^2}(4y^2-x^2)\right]$$

$$[x^2+(y+a)^2]^{-3/2} = \frac{1}{a^3}\left[1-3\frac{y}{a}+\frac{3}{2a^2}(4y^2-x^2)\right]$$

olur. Buna göre $\vec{K}$ nın bileşen kuvvetlerinin 3. mertebeden terimlere kadarki sınırlı açılımları

$$\vec{K}_A = \frac{q^2}{a^3}\left\{\left[-a-2x+\frac{3}{2a}(y^2-2x^2)\right]\vec{e}_x+\left(y+3\frac{xy}{a}\right)\vec{e}_y\right\}$$

$$\vec{K}_B = \frac{q^2}{a^3}\left\{\left(x+3\frac{xy}{a}\right)\vec{e}_x+\left[-a-2y+\frac{3}{2a}(x^2-2y^2)\right]\vec{e}_y\right\}$$

$$\vec{K}_C = \frac{q^2}{a^3}\left\{\left[a-2x+\frac{3}{2a}(2x^2-y^2)\right]\vec{e}_x+\left(y-3\frac{xy}{a}\right)\vec{e}_y\right\}$$

$$\vec{K}_D = \frac{q^2}{a^3}\left\{\left(x-3\frac{xy}{a}\right)\vec{e}_x+\left[a-2y+\frac{3}{2a}(2y^2-x^2)\right]\vec{e}_y\right\}$$

şeklinde olacaktır. Buradan da $\vec{K}$ için

$$\vec{K} = \vec{K}_A+\vec{K}_B+\vec{K}_C+\vec{K}_D = \frac{q^2}{a^3}\left(-2x\vec{e}_x-2y\vec{e}_y\right) = -\frac{2q^2}{a^3}\,\overrightarrow{OM}$$

bulunur. Şu hâlde denge durumundan (hafifçe) saptırılan M yükü üzerinde uzaklıkla orantılı bir kuvvet tesir edecektir. Buna binaen hareketli yükün ~~de~~ hareket denklemi

$$m\frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2} = -\frac{2q^2}{a^3}(\overrightarrow{OM}) \Rightarrow \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2}+\frac{2q^2}{ma^3}(\overrightarrow{OM}) = 0$$

dir. Bu, bir harmonik osilâtör denklemi olup M yükünün

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{2q^2}}$$

periyoduyla (küçük) salınımlar yapacağına delâlet etmesidir.

Bu sonucun özelliği periyodun değerinin bulunmuş olmasında değil fakat bu değerin M nin tâbi tutulduğu ~~[illegible]~~ ve kendisini denge durumundan saptıran ötelemenin seçilen doğrultuya bağlı olmamasıdır. Yâni karenin merkezindeki M yükünün dengesi, üçüncü mertebeden terimler yaklaşıklığıyl eşyönlü (izotrop) bir dengedir.

Hareketli M yükünün karenin merkezindeki dengesi eğer M nin 4 sâbit yükün düzlemi dışında öteleme yapmasına müsaade edilirse kararsız bir dengeye dönüşür; zîra eğer M, $xOy$ düzleminde değilse, $\vec{K}_A$, $\vec{K}_B$, $\vec{K}_C$ ve $\vec{K}_D$ kuvvetlerinin 3. bir $Oz$ ekseni doğrultusundaki bileşenleri aynı yönde olacaklarından birbirlerini artık kompanse edemezler.

<u>PROBLEM</u>: ~~30~~ 31 – Bir O noktasından r uzaklığında, belirli bir yük dağılımının hâsıl ettiği elektrostatik potansiyel

$$\Phi = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}} \qquad \text{(YUKAWA potansiyeli)}$$

ifadesiyle temsil edilmektedir. Burada a ile uzunluk boyutunu haiz bir sâbit ve q ile de yük boyutunu haiz bir başka sâbit gösterilmektedir.

1) O dan r uzaklığındaki $\vec{E}$ elektrik alanı ile bu alanın O merkezli ve r yarıçaplı bir küreyi kateden $\Psi$ akısını hesaplayınız.

2) O dan r uzaklığında $\rho$ hacımsal yük yoğunluğunu hesaplayınız. O merkezli ve r yarıçaplı kürenin içindeki negatif yüklerin $q'$ toplamını hesaplayınız. $r \to \infty$ için bu büyüklük hangi değere gider?

3) $z = 4\pi\rho r^2$ şeklinde tanımlanan radyal yük yoğunluğunun r nin fonksiyonu olarak değişimini inceleyiniz.

4) İncelenen elektrostatik alanın bir hidrojen atomununki olduğunu varsayarak bu sonuçları yorumlayınız.

<u>ÇÖZÜM</u> – 1) Elektrostatik alan potansiyelin eksi işaretli gradyentine eşit olduğu cihetle ve göz önüne alınan hâl için de $\Phi = \Phi(r)$ şeklinde olduğundan

$$E(r) = -\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{q}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

bulunur. Buna binaen r yarıçaplı O merkezli küreyi kateden $\Psi$ akısı da

$$\Psi = 4\pi r^2 . E(r) = 4\pi q\, e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

olur. $\lim\limits_{r \to 0} E(r) \sim \frac{q}{r^2}$ gibi sonsuza gider. Şu hâlde $\lim\limits_{r \to 0} \Psi = 4\pi q$ olur

(47) ki bu da incelenen yüklerin dağılımı meyanında O noktasında $+q$ yükünün mevcud olduğuna delâlet etmektedir (GAUSS teoremi).

2) Eğer $\rho(l)$ ile O dan $l$ uzaklığındaki hacımsal yük yoğunluğu ve $Q(r)$ ile de $r$ yarıçaplı küre içindeki ister noktasal ister yüzeysel bütün yoğunlaşmış yüklerin toplamı gösterilirse

$$\Psi = 4\pi q e^{-\frac{r}{a}}\left(1+\frac{r}{a}\right) = 4\pi \int_0^r \rho(l) . 4\pi l^2 dl + 4\pi Q(r) \qquad (1)$$

yazabiliriz. Ne potansiyel ve ne de alan $r \neq 0$ için süreksizlik arz ettiğinden $Q(r)$ de O daki tek $+q$ yüküne müncer olur. (1) i $r$ ye göre türetirsek

$$\frac{d\Psi(r)}{dr} = 4\pi q e^{-\frac{r}{a}}\left(-\frac{1}{a}-\frac{r}{a^2}+\frac{1}{r}\right) = \cancel{8}\,\pi^2 r^2 . \rho(r)$$

olur ve buradan da

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2}\,\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

bulunur.

O merkezli ve $r$ yarıçaplı küredeki negatif yüklerin toplamı

$$q'(r) = \iiint_{l \leq r} \rho(l)\, dV = \int_0^r \rho(l) . 4\pi l^2 dl$$

dir. Buna ve (1) e binaen

$$4\pi q' = \Psi - 4\pi q$$

olur. Buradan da

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r\to\infty} q' = -q$$

bulunur.

3) $\mathfrak{z} = 4\pi\rho r^2$ radyal yük yoğunluğu

$\boxed{0 < r < a \text{ için}}$

$$\mathfrak{z} = -\frac{q}{a^2}\, r\, e^{-\frac{r}{a}}$$

ya eşit olup $r$ nin, O dan $-q/ea$ ya kadar ~~[illegible]~~ azalan bir fonksiyonudur; $r=a$ için bir minimum arz eder sonra da $r$ nin $a$ ile $\infty$ arasındaki değerleri için de $-q/ea$ dan O a kadar artan bir fonksiyonudur.

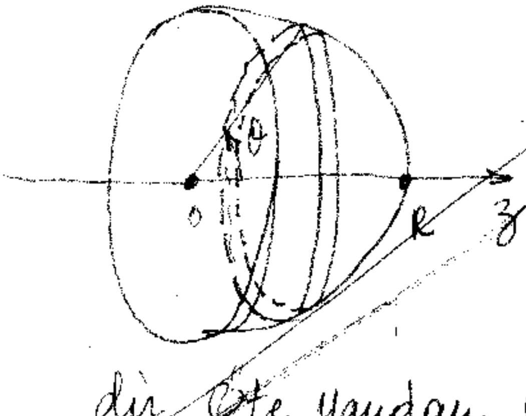
4) Eğer incelenen elektrostatik alanın bir hidrojen atomunuki olduğu varsayılacak olursa yukarıdaki sonuçlar bize bu atomun merkez

de (çekirdekte) bulunan $+q$ değerindeki noktasal bir yükün civarında bütün uzayda eşyönlü (izotrop) bir şekilde dağılmış toplam bir $-q$ negatif yükünden oluşmuş gibi yansıtmaktadırlar. Bu negatif yük dağılımı kuvantum mekaniği açısından elektron bulutunu temsil etmektedir. Aslında bir atomun içindeki yük dağılımı hem zamana ve hem de uzay koordinatlarına bağlı olan bir elektrostatik alan doğurur; zamandan bağımsız olan YUKAWA potansiyeli ise ortalama bir istatistiksel değerdir. Belirli bir anda bir elektronun bir $M$ noktasını çevreleyen bir $dV$ hacim elemanı içinde bulunması ihtimâlini $p(M).dV$ ile gösterelim. Eğer atom stasyoner (durağan) bir hâlde bulunuyorsa $p(M)$ zamana bağlı olmaz. $\rho$ hacımsal yük yoğunluğu ise bu, $p(M)$ ile gösterilen, elektronun $M$ de bulunma ihtimâli yoğunluğunun $-q$ ile çarpımından ibarettir.

Dikkat edilecek olursa elektronun bulunma ihtimali yoğunluğu $r=0$ için yani atomun merkezinde bir maksimum arz etmektedir. Bu ise şaşırtıcı bir sonuçtur. İşte bunun içindir ki $r=a$ için bir maksimum arz eden radyal yük yoğunluğu ilgi çekicidir. Kuvantum mekaniğinde $a$ nın birinci BOHR yörüngesine tekabül ettiği gösterilir.

~~PROBLEM: 32 - Diğer bütün cisimlerden sonsuz uzakta bulunan küresel~~ bir iletken $\Phi$ potansiyelinde bulunmaktadır. Bu kürenin çaplarından birini ihtiva eden bir düzlemle kesildiğinde elde edilen iki yarıküre yine de birbirleriyle temas hâlinde tutulurlarsa aralarındaki itme kuvvetinin büyüklüğü ne olur?

ÇÖZÜM: Bütün diğer cisimlerden sonsuz uzakta bulunmasından ötürü birbiçim olarak yüklü olacak olan $R$ yarıçaplı küre üzerindeki yüzeysel yük yoğunluğu, $Q$ ile toplam yükü gösterecek

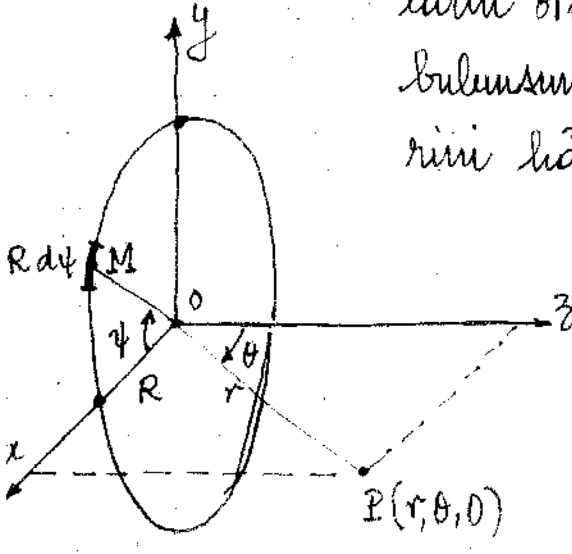



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

dir. Öte yandan $Q = C\Phi$ dir. $C$ ile kürenin sığası gösterilmekte olup $C=R$ dir. Şu halde elektrostatik basınç

PROBLEM: 32 Kalınlığı ihmal edilebilen R yarıçaplı bir çemberin toplam elektrostatik yükünün q olması hâlinde, çemberin düzlemine dik ve çaplarından birini ihtivâ eden bir düzlemde herhangi bir P noktasındaki elektrostatik potansiyelin ifâdesini hesaplayınız.

ÇÖZÜM - Göz önüne alınan çemberin merkezini küresel koordinatların orijini olarak seçelim; çember $(x,y)$ düzleminde bulunsun. Buna göre çembere dik ve çaplarından birini hâvî düzlem $(x,z)$ düzlemi olacaktır. Bu düzlemdeki bir P noktasının koordinatları ise $r$, $\theta$ ve $\psi = 0$ dır. Çemberin bir yay elemanı $R\,d\psi$ ile temsil olunacaktır. Bu yay elemanına tekaabül eden yük ise $dq = qR\,d\psi/2\pi R = q\,d\psi/2\pi$ den ibarettir.




Buna göre $ds = R\,d\psi$ yay elemanının $P(r,\theta,0)$ da hâsıl ettiği $d\Phi$ elektrostatik potansiyeli de, $|\overrightarrow{MP}|$ nin

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OM}|^2 - 2|\overrightarrow{OP}|.|\overrightarrow{OM}|\sin\theta\cos\psi}$$

$$= \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos\psi}$$

olduğunu da göz önünde bulundurarak,

$$d\Phi = \frac{dq}{|\overrightarrow{MP}|} = \frac{q}{2\pi}\,\frac{d\psi}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\sin\theta\cos\psi}} \qquad (1)$$

olur. Şu hâlde çemberin tümünün P de hâsıl edeceği elektrostatik potansiyel alanının değeri de, (1) i bütün çember boyunca integre ederek,

$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\sin\theta\cos\psi}} \qquad (2)$$

olacaktır. Buradan

$$p = \frac{2rR\sin\theta}{r^2+R^2} \quad , \left(|p| < 1\right) \qquad (3)$$

kısaltmasıyla (2)

$$\Phi = \frac{q}{2\pi\sqrt{r^2+R^2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-p\cos\psi}} = \frac{q}{2\pi\sqrt{r^2+R^2}}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1+p\cos\psi}} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\sqrt{r^2+R^2}}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{(1+p)-2p\sin^2\frac{\psi}{2}}}$$

şekline sokulur. Eğer

$$\chi = \frac{\psi}{2} \quad \text{ve} \quad k = \sqrt{\frac{2p}{1+p}}$$

vaz edilirse, ~~(3) ifadesindeki integral için~~

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}} = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\cdots\right)$$

ifadesinin 1. cins eliptik integral olduğunu kaydederek,

$$\Phi = \frac{q}{2\pi\sqrt{r^2+R^2}}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{(1+p)-2p\sin^2\frac{\psi}{2}}} = \frac{2q}{\pi\sqrt{(r^2+R^2)(1+p)}}\,K\left(\sqrt{\frac{2p}{1+p}}\right) =$$

$$= \frac{q}{\sqrt{r^2+R^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+p}}\left[1+\frac{1}{4}\,\frac{2p}{1+p}+\frac{9}{64}\left(\frac{2p}{1+p}\right)^2+\cdots\right] \qquad (4)$$

ifadesi elde edilmiş olur. P noktasının z ekseni üzerinde olması hâlinde $p=0$ olacağından (4) de

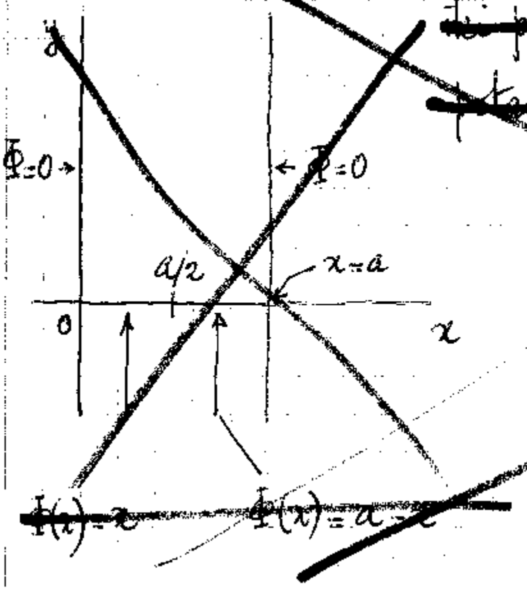
$$\Phi = \frac{q}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

ifadesine indirgenmiş olur. (4) de, $|p| \ll 1$ olması hâlinde yani P noktasının z-eksenine çok yakın olduğu hallerde, p ye göre ~~açınım~~ açınım yapıp 3. mertebeden terimler yaklaşıklığıyla iktifâ olunursa, (3) vaz'ı da göz önünde tutularak,

$$\Phi = \frac{q}{\sqrt{r^2+R^2}}\left(1+\frac{3}{16}p^2+\cdots\right) = \frac{q}{\sqrt{r^2+R^2}}\left[1+\frac{3}{4}\,\frac{r^2R^2}{(r^2+R^2)^2}\sin^2\theta+\cdots\right]$$

bulunur. Bu ifâdenin θ açısının işaretinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir. İkinci bir ilginç limit hâlin de çember düzleminden çok uzaktaki yani $r \gg R$ bağıntısını gerçekleyen noktalar

~~PROBLEM: 8 — x=0 ve x=a da x-eksenine dik yerleştirilmiş sonsuz iki plaka Φ=0 potansiyelindedir. Plakalar arasındaki potansiyel dağılımı~~




$$\cancel{\Phi(x)=\begin{cases} x, & \left(0\leq x\leq \frac{a}{2}\right) \\ a-x, & \left(\frac{a}{2}\leq x\leq a\right)\end{cases}}$$

göz önüne alınması hâli olduğuna dikkati çekmek istiyoruz. Bu takdirde (5) ifâdesi $R/r \ll 1$ için açındırılır ve gene yalnızca 2. mertebeden terimlerle yetinilirse (gene küçük $\theta$ açıları için)

$$\Phi = \frac{q}{r}\left[1-\frac{R^2}{4r^2}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\right] = q\left[\frac{1}{r}-\frac{R^2}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\cdots\right]$$

bulunur. Bu ifâdede ilk terim çemberin büyüklüğünden bağımsız bir terimdir. İkinci terim ise $1/r^3$ ve $P_2(\cos\theta)$ küresel fonksiyonuyla orantılı bir terimdir. Bu türlü bir terime genellikle <u>kuvadrupol terimi</u> adı verilir. $\frac{q}{2r^3}P_2(\cos\theta)$ nın katsayısına da sistemin kuvadrupol momenti adı verilir. Göz önüne almış olduğumuz hâl için kuvadrupol momentin $-R^2$ ye eşit olan, tümüyle geometrik bir büyüklük olduğu görülmektedir.

<u>PROBLEM: 33</u> _ R yarıçaplı küresel bir yüzeyin üzerinde yalnızca $\theta$ zenit açısına bağlı bir yük dağılımı bulunması hâlinde, küre yüzeyin içindeki ve dışındaki noktalarda elektrostatik potansiyelin ifâdesini tâyin ediniz. Yüzeyin üzerindeki potansiyel ne olur?

<u>ÇÖZÜM</u> _ Söz konusu elektrostatik potansiyel alanının denklemi, bilindiği gibi, $\nabla^2\Phi=0$ şeklindeki LAPLACE denklemidir. Ancak problemin arz ettiği küresel simetri dolayısıyla $\nabla^2$ yi küresel koordinatlarda ifâde etmek gerekir. Öte yandan yük dağılımının $\varphi$ açısına bağlı olmaması hasebiyle $\nabla^2$ nin $\varphi$ ye bağlı olmaması da gerekmektedir. Sınır

şartlarıyla birlikte problemimizin çözümü

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\dfrac{\cot g\,\theta}{r^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0 & (1)\\ \Phi(R,\theta)=f(\theta) & (2)\\ \lim\limits_{r\to\infty}\Phi(r,\theta)=0 & (3)\end{cases}$$

sınır-değer probleminin çözümüne indirgenir. Değişkenlere ayrışım yöntemi uyarınca

$$\Phi(r,\theta)=R(r)\,\Theta(\theta) \qquad (4)$$

vaz edince (1) denklemi

$$\frac{r^2R''+2rR'}{R}=-\frac{\Theta''+(\cot g\,\theta)\,\Theta'}{\Theta}=k \qquad (5)$$

şeklinde ayrışır. $k$ ile ayrışım parametresi gösterilmektedir. Buradan önce

$$r^2R''+2rR'-kR=0 \qquad (6)$$

bulunur. Bunun denkleminin genel çözümünün $k=n(n+1)$ ve $n$: tamsayı olması şartı altında

$$R(r)=C_1r^n+\frac{C_2}{r^{n+1}} \qquad (7)$$

şeklinde oldukça kolaylıkla gösterilir. Buna göre $\Theta$ nın gerçekleyeceği denklemin de

$$\Theta''+(\cot g\,\theta)\,\Theta'+n(n+1)\,\Theta=0 \qquad (8)$$

şeklinde olacağı görülmektedir. (8) de $x=\cos\theta$ vaz edilirse bu denklem

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+n(n+1)\Theta=0 \qquad (9)$$

şeklindeki LEGENDRE diferansiyel denklemine dönüşür. $n$ nin sıfır ya da pozitif bir tamsayı olması hâlinde (9) un çözümleri

$$\Theta=P_n(x)=P_n(\cos\theta) \qquad (10)$$

şeklinde gösterilen LEGENDRE polinomlarıdır.

$0\leqq r\leqq R$ yâni küresel yüzey içinde kalan noktalarda (7) çözümünü herhangi bir tekil nokta arz edip de $\Phi$ nin sonsuz olmasına sebep olmasını önlemek üzere $C_2=0$ olacağı âşikârdır. Buna binâen ve (4), (7) ve (10) a göre $0\leqq r\leqq R$ için

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\,r^n\,P_n(\cos\theta) \qquad (11)$$

olur. (2) ile verilmiş olan sınır şartından

$$\Phi(R,\theta)=f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(B_n R^n)P_n(\cos\theta) \qquad , \quad 0<\theta<\pi$$

olur. Buradan, LEGENDRE ~~...~~ polinomlarının $[0,\pi]$ aralığında

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \qquad (12)$$

şeklinde, $\sin\theta$ ağırlık fonksiyonuna göre, diklik bağıntıları gerçeklemelerinden de yararlanarak kolayca

$$B_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta \qquad (13)$$

olduğu bulunur. Şu hâlde (11) ve (13) e binâen $0\leqq r\leqq R$ için

$$\Phi(r,\theta)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)\cdot\int_0^{\pi} f(\theta')\, P_n(\cos\theta')\, \sin\theta'\, d\theta' \qquad (14)$$

olduğu tesbit edilmiş olur. Eğer küresel yüzey üzerindeki yük dağılımı birbiçim ise $\Phi(R,\theta)=\Phi_0=$ sâbit olur. Buna göre ve $P_0(\cos\theta)=1$ olması sebebiyle

$$\int_0^{\pi}\Phi_0\, P_0(\cos\theta')\, \sin\theta'\, d\theta' = \Phi_0\int_0^{\pi}\sin\theta'\, d\theta' = 2\Phi_0$$

ve $n=1,2,3,\ldots$ için $P_n(\cos\theta)=P_n(x)$ in $x$ in bir çift fonksiyonu olması hasebiyle de

$$\int_0^{\pi}\Phi_0\, P_n(\cos\theta')\, \sin\theta'\, d\theta = \Phi_0\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, dx = 0 \quad , (n=1,2,3,\ldots)$$

olduğundan (14) ifâdesi de

$$\Phi(r,\theta)=\Phi_0 \qquad , \qquad 0\leqq r\leqq R \qquad (15)$$

olur; yâni küresel yüzeyin üzerindeki yük dağılımı birbiçim ve sâbit ise küre içindeki herhangi bir noktadaki potansiyelin değeri sâbittir.

Eğer göz önüne alınan alan noktası küresel yüzeyin dışında ise (yâni $r\geqq R$ için) (7) de, (3) şartının gerçeklenebilmesi için $C_1=0$ almak zorunludur. Buna göre

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) \qquad (16)$$

ve sınır şartından dolayı da

$$\Phi(R,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

olur. Bu son ifadeden ve gene (12) özelliğinden yararlanarak

$$C_n = \frac{(2n+1)R^{n+1}}{2} \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

olduğu kolayca tesbit edilir. Buna göre $r \geqq R$ için

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \cdot \int_0^{\pi} f(\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta' \, d\theta' \qquad (17)$$

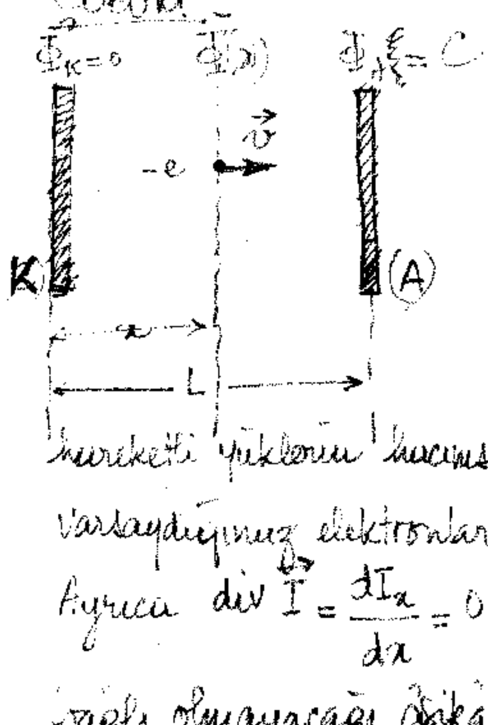
bulunur. $f(\theta) = \Phi_0$ için (17) yalnızca

$$\Phi(r,\theta) = \frac{\Phi_0 R}{r} \qquad , \quad r \geqq R \qquad (18)$$

olur. $r = R$ için, beklenceği üzere, (15) ve (16) nın özdeş olduğu görülmektedir.

PROBLEM: 34 _ Birbirlerinden $L$ uzaklığında paralel iki metal levha sırasıyla $\Phi_K = 0$ ve $\Phi_A = \Phi_0$ potansiyelinde bulunmaktadır. K katodu tarafından ilk hızsız yayınlanıp da her iki levha arasındaki elektrostatik alan aracılığıyla hızlandırılan ve nihayet A anodu tarafından toplanan elektronlar $I$ akım yoğunluğunu haiz bir elektrik akımı hasıl etmektedirler. Sürekli rejim hâline erişildiğinde bu $I$ akım yoğunluğunu ~~da~~ hesaplayınız.

ÇÖZÜM:




Kenarlardaki perturbasyonlar ihmal edilirse elektronların hareketinin yalnızca levhalara dik bir şekilde olduğu kabul edilebilir. K katodundan $x$ uzaklığında ($0 \leq x \leq L$) bir P noktasında elektrostatik potansiyeli $\Phi(x)$ ile gösterelim. Akım yoğunluğu da, $\rho$ ile hareketli yüklerin hacımsal yoğunluğunu ve $\vec{v}$ ile de eşhızlı olduklarını varsaydığımız elektronların P deki ortalama hızını göstererek: $\vec{I} = \rho \vec{v}$ olur. Ayrıca $\operatorname{div} \vec{I} = \frac{dI_x}{dx} = 0$ olacağından $\vec{I}$ nın $|I|$ modülünün de $x$ e bağlı olmayacağı aşikârdır. Bunlar göz önünde tutularak bir elektronun hızının sıfır olduğu K katodu ile P noktası arasında kazandığı kinetik

(55) enerji, tâbi olduğu elektrostatik kuvvetin işine eşittir. Elektronun kütlesi m

~~$(-e)(-\Phi) = e.\Phi(x)$~~

~~Burada m ile elektronun kütlesi ve (−e) ile de yükü gösterilmektedir.~~

ve yükü de $-e$ olmak üzere üzerine etkiyen kuvvet

$$-eE_x = (-e)\left(-\frac{d\Phi}{dx}\right)$$

dır. Buna göre

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\int_0^x \frac{d\Phi}{dx'}\,dx' = e.\Phi(x) - e.\Phi(0) = e.\Phi(x) \quad (1)$$

olur. $\Phi(0) = \Phi_K = 0$ olduğu problemin verileri arasındadır.

Diğer taraftan her iki levha arasındaki potansiyel alan d

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho \qquad (2)$$

POISSON denklemiyle belirtilecektir. Burada $\rho$ yerine I nın tanımından ve (1) bağıntısından ötürü

$$\rho = \frac{I}{v} = I\sqrt{\frac{m}{2e\Phi(x)}} \qquad (3)$$

vaz olunabilir. Problem tek boyutlu olduğundan, (3) vaz'ı altında (2) denklemi

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -4\pi I\sqrt{\frac{m}{2e}}\ \Phi^{-1/2}(x) \qquad (4)$$

şekline girer. (4) ün her iki yanını da $2.d\Phi/dx$ ile çarpalım

$$2\,\frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -8\pi I\sqrt{\frac{m}{2e}}\ \Phi^{-1/2}\frac{d\Phi}{dx}\,. \qquad (5)$$

$x=0$ da $\Phi(0) = \Phi_K = 0$ ve $d\Phi/dx = 0$ dır; zira $x=0$ da $v=0$ varsayılmaktadır. Bu husus göz önünde tutularak (5) in her iki yanı bir kere integre edilirse

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = -16\pi I\sqrt{\frac{m}{2e}}\ \Phi^{1/2}$$

ya da

$$dx = \Phi^{-1/4}.d\Phi.\sqrt{\frac{1}{-16\pi I}\sqrt{\frac{2e}{m}}}$$

ve ikinci bir integrasyonla da

$$x = \frac{4}{3}\Phi^{3/4}\sqrt{\frac{1}{-16\pi I}\sqrt{\frac{2e}{m}}} \qquad (6)$$

bulunur. Anod üzerinde, yani $x=L$ için $\Phi(L) = \Phi_0$ olduğunu hatırlayarak (6) dan

$$L = \frac{1}{3}\Phi_0^{3/4}\sqrt{\frac{1}{-\pi I}}\sqrt{\frac{2e}{m}}$$

ve buradan da her iki yanı kareye kaldırarak akım yoğunluğu için

$$I = -\frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{\Phi_0^{3/2}}{L^2} \qquad (7)$$

ifâdesi bulunmuş olur. Negatif yüklü tâneciklerin hâsıl ettikleri akımın yönü tâneciklerin gerçek hızlarının yönlerine karşıt olduğundan I nın (7) deki işâretinin eksi olması tabiîdir.

PROBLEM: 35 – Kendisi z-ekseni boyunca sonsuz uzun varsayılan; dik kesiti ise, kenarları a ve b uzunluğunda bir dikdörtgen olan içi boş mâdenî düz bir boru içinde teşekkül etmiş elektromagnetik alanın bütün alan büyüklükleri zamanın $e^{-i\omega t}$ şeklinde değişen fonksiyonu olarak aynı bir $\omega$ frekansıyla değişmektedirler. Elektrik alanın z-ekseni boyunca bileşeninin her yerde sıfır olması özel hâlinde boru içindeki elektromagnetik dalgaların oluşturduğu alanı tâyin ediniz. (Bu özelliği haiz bir boruya "TE tipinden" ya da "dikine elektrik dalgalı" dalga kılavuzu adı verilir).

ÇÖZÜM – Borunun içi boş olduğundan $\varepsilon = \mu = 1$ dir. Böyle bir boşlukta MAXWELL denklemleri, alan büyüklüklerinin zamana $e^{-i\omega t}$ şeklinde bağımlılıkları dolayısıyla,

$$\left.\begin{aligned}
\vec\nabla \times \vec H &= -\frac{i\omega}{c}\vec E \\
\vec\nabla \times \vec E &= +\frac{i\omega}{c}\vec H \\
\vec\nabla \cdot \vec H &= 0 \\
\vec\nabla \cdot \vec E &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

şeklini alırlar. Sınır şartları ise: 1) $\vec E$ nin borunun cidârlarına dik olduğu ve 2) $\vec H$ nın cidarlar üzerindeki dik bileşenlerinin ise sıfır old ~~...~~ şeklinde vaz olunacaktır. (1) den

$$\vec\nabla \times \vec\nabla \times \vec H = -\nabla^2 \vec H = -\frac{i\omega}{c}\left(\frac{i\omega}{c}\vec H\right)$$

$$\vec\nabla \times \vec\nabla \times \vec E = -\nabla^2 \vec E = \frac{i\omega}{c}\left(-\frac{i\omega}{c}\vec E\right)$$

ve, $k = \omega/c$ vaz ederek, buradan da

$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0 \quad , \quad \nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \qquad (2)$$

dalga yayılım denklemleri elde edilir. Bunların boş boru boyunca bir dalga yayılımına delâlet etmeleri ancak $\vec{E}$ ve $\vec{H}$ vektörlerinin $z$ ye $e^{\pm ihz}$ şeklinde periyodik bir bağlılığı olması hâlinde mümkündür. Buna göre

$$\vec{E}=\vec{\mathcal{E}}e^{\pm ihz} \quad , \quad \vec{H}=\vec{\mathcal{H}}e^{\pm ihz}$$

yaz ederek (2) denklemleri, problemin verilerine göre elektrik alanın $z$-bileşeninin her yerde sıfır olması yâni

$$E_z=0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_z=0 \qquad (3)$$

olması hasebiyle

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\mathcal{E}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathcal{E}_x}{\partial y^2}+(k^2-h^2)\mathcal{E}_x=0 \\ &\frac{\partial^2\mathcal{E}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathcal{E}_y}{\partial y^2}+(k^2-h^2)\mathcal{E}_y=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

şekline bürünürler. Ayrıca $\operatorname{div}\vec{E}=0$ ve (3) den de

$$\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial y}=0 \qquad (5)$$

bağıntısının geçerli olacağı kolayca görülmektedir. (4) ve (5) den oluşan diferansiyel denklem sistemini $0\leq x\leq a$ , $0\leq y\leq b$ aralığında ve

$$\mathcal{E}_x(x,0)=\mathcal{E}_x(x,b)=\mathcal{E}_y(0,y)=\mathcal{E}_y(a,y)=0 \qquad (6)$$

sınır şartlarına göre çözmemiz gerekmektedir. (3), (4), (5) ve (6) ifadelerinin oluşturduğu sınır-değer problemi bir kere çözüldü müydü (1) den çekilen

$$\vec{H}=\frac{c}{i\omega}\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

bağıntısı yâni

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_x&=\frac{c}{i\omega}\left(\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z}\right)=\frac{c}{i\omega}\left(-ih\mathcal{E}_y\right)=-\frac{ch}{\omega}\mathcal{E}_y \\ \mathcal{H}_y&=\frac{c}{i\omega}\left(\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x}\right)=\frac{c}{i\omega}\left(+ih\mathcal{E}_x\right)=+\frac{ch}{\omega}\mathcal{E}_x \\ \mathcal{H}_z&=\frac{c}{i\omega}\left(\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

bağıntıları aracılığıyla magnetik alan da tâyin edilmiş olur.

(4) denklemlerine değişkenlere ayrışım yöntemi uygulanırsa $m$ ve $n$ tamsayılar olmak üzere

$$\mathcal{E}_y(x,y)=f(y)\sin\frac{n\pi x}{a}\;,\quad \mathcal{E}_x(x,y)=g(x)\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad (8)$$

olacağı kolayca tesbit edilir. (8) eğer (5) e vaz edilirse, bu sefer de

$$\frac{dg}{dx}\sin\frac{m\pi y}{b}+\frac{df}{dy}\sin\frac{n\pi x}{a}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sin\frac{n\pi x}{a}}\frac{dg}{dx}=-\frac{1}{\sin\frac{m\pi y}{b}}\frac{df}{dy}=C \qquad (9)$$

olur. $C$ ile ayrışım parametresi gösterilmektedir. (9) dan kolaylıkla

$$\left.\begin{aligned} g(x)&=-\frac{aC}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\\ f(y)&=+\frac{bC}{m\pi}\cos\frac{m\pi y}{b}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

bulunur. (8) ve (10) u göz önünde tutarak (4) dalga denklemlerinden

$$k^2-h^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \qquad (11)$$

olması gerektiği de tesbit edilir. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x\cancel{(x,y)}&=-\frac{aC}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(hz-\omega t)}\\ \mathcal{E}_y\cancel{(x,y)}&=+\frac{bC}{m\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(hz-\omega t)}\\ \mathcal{E}_z\cancel{(x,y)}&=0\\ \mathcal{H}_x\cancel{(x,y)}&=-\frac{ch}{\omega}\cdot\frac{bC}{m\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(hz-\omega t)}\\ \mathcal{H}_y\cancel{(x,y)}&=-\frac{ch}{\omega}\cdot\frac{aC}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}e^{i(hz-\omega t)}\\ \mathcal{H}_z\cancel{(x,y)}&=\frac{c}{i\omega}C\left(\frac{nb}{ma}+\frac{ma}{nb}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}e^{i(hz-\omega t)}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Burada $\vec{\mathcal{H}}$ alanı doğrudan doğruya (7) den elde edilmiştir. Bununla beraber

$$\mathcal{H}_x(0,y,z)=\mathcal{H}_x(a,y,z)=\mathcal{H}_y(x,0,z)=\mathcal{H}_y(x,b,z)=0$$

sınır şartlarını otomatik olarak tahkik etmektedirler.

(11) şartına bağlı olarak (12) ile verilmiş olan dikine elektrik dalgalarının ifâdesinde $h$ nın, dalganın boru boyunca sönmeden yayılması için, reel bir sayı olması gereklidir. Bunun için de $\omega$ nın sınır frekansı denilen ve değeri

$$\omega_s = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \tag{13}$$

ile verilen frekanstan büyük olması gereklidir. $\omega > \omega_s$ için borunun boyunca hiç sönüme uğramadan yayılan bir dalga elde edilir; $\omega < \omega_s$ için $h$ sanal olacağından boru boyunca artan bir sönüm ortaya çıkacaktır. Her bir $(m,n)$ değer çifti için, (13) uyarınca, bir başka sınır frekansı olacağı âşikârdır. Dik kesiti bir kare olan $(b=a)$ bir boru söz konusu olduğunda en küçük sınır frekansı $m=n=1$ için elde edilecektir:

$$Min(\omega_s) = \frac{c\pi\sqrt{2}}{a}.$$

Buna tekaabül eden dalgaboyu ise

$$Max(\lambda_s) = \frac{2\pi c}{Min(\omega_s)} = \sqrt{2}\, a$$

olur. Buna binâen bir dalga kılavuzunun elektromagnetik dalgaları sönümsüz bir şekilde sevkedebilmesi için bu dalgaların yüksek frekans bölgesine ait dalgalar olmaları gerektiği anlaşılmaktadır.