T. C.
İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANESİ
Sayı: 795

Çağdaş Fiziğe Giriş Çözümlü Problem Kitabı

AHMED YÜKSEL ÖZEMRE *ŞEHSUVAR ZEBİTAY*

MATBAA TEKNİSYENLERİ KOLL. ŞTİ. — İSTANBUL 1970

Azîz ve muhterem

ANNELERİMİZE, BABALARIMIZA ve KARDEŞLERİMİZE

hörmet ve muhabbetlerimizle...

ÖNSÖZ

Bu kitap İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik Fakültesi 3. ve 4. yarıyıl öğrencilerine okutulan Modern Fizik dersinin tatbikat saatlerinde öğrenciye sunulan problemlerin derlenip toparlanmasıyla ortaya çıkmış bulunmaktadır.

164 çözümlü problemden müteşekkil bu kitabın İTÜ Makine Fakültesi son sınıf optatif Modern Fizik dersi öğrencilerine de ve diğer Üniversitelerimizdeki Fizik-Matematik öğrencilerine de faydalı olacağını ümid etmekteyiz.

Bu kitap aynı zamanda ikimizden birinin (AYÖ) kaleme almış olduğu ve hâlen baskıda olan Çağdaş Fiziğe Giriş ders kitabının da tamamlayıcısı mâhiyetindedir.

İstanbul, 1970 Yazı

Ahmed Yüksel Özemre

Şehsuvar Zebitay

Özel Rölâtivite Teorisi

PROBLEM : 1.— Biribirlerine göre x_1x_2 doğrultusu boyunca sâbit ivmeli hareket yapan, eksenleri biribirlerine paralel (S_1) ve (S_2) gibi iki dik referans üçlüsü için geçerli olan dönüşüm ve ters dönüşüm formüllerini bulunuz.

ÇÖZÜM :

$\vec{r}_2$ ile (S_2) deki bir $P(x_2, y_2, z_2)$ noktasının O_2 ye göre, $\vec{r}_1$ ile de aynı noktanın O_1 e göre yervektörlerini gösterelim. $\vec{R}$ de O_2 nin O_1 e göre yervektörü olsun. Buna göre

$$\vec{r}_1=\vec{r}_2+\vec{R} \tag{1}$$

olur. (S_2) sistemi (S_1) e nazaran $\vec{R}$ doğrultusunda sâbit γ ivmesiyle hareket ediyorsa

$$O_1O_2=|\vec{R}|=\frac{1}{2}\gamma t^2+vt$$

şeklinde artıyor demektir. O hâlde (1) i (S_1) de bileşenlere ayıracak olursak

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_2+\frac{1}{2}\gamma t^2+vt \\ y_1&=y_2 \\ z_1&=z_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

olur. (1) den

$$\vec{r}_2=\vec{r}_1-\vec{R}$$

yazılır ve bunun (S_2) eksenleri üzerine izdüşümü de

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \left(\frac{1}{2}\gamma\, t^2 + vt\right) \\ y_2 &= y_1 \\ z_2 &= z_1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

verir.

PROBLEM: 2.— Biribirlerine göre x_1x_2 doğrultusu boyunca sâbit ivmeli hareket yapan, eksenleri biribirine paralel (S_1) ve (S_2) gibi iki dik referans üçlüsü göz önüne alındığında klâsik mekaniğin temel kanununun bu sistemlerde invaryant olmadığını yâni bu şartlar altında klâsik mekaniğin temel kanununun (S_1) ve (S_2) deki gözlemcilere göre objektiflik niteliğini taşımadığını gösteriniz.

ÇOZÜM:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

denklemi meselâ (S_1) de geçerli olsun. Bunun eksenlere izdüşümü

$$F_{x_1} = m \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad F_{y_1} = m \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \quad F_{z_1} = m \frac{d^2 z_1}{dt^2}$$

şeklindedir. (S_1) $\longrightarrow$ (S_2) dönüşümünü (1.2) formüllerine göre yaparsak sonuç olarak x bileşeni için

$$F_{x_1} = m \frac{d^2}{dt^2} \left\{ x_2 + \frac{1}{2} \gamma t^2 + vt \right\}$$

$$= F_{x_2} + m\gamma$$

veyâ

$$F_{x_2} = F_{x_1} - m\gamma$$

bulunur ki bu da (S_2) de (1) in şeklini muhafaza etmediğini ve $-m\gamma$ şeklinde fiktif eylemsizlik kuvvetlerinin ortaya çıktığını göstermektedir.

PROBLEM: 3.— Biribirlerine göre sâbit ivmeli doğrusal bir hareket yapan referans sistemlerinde, klâsik mekaniğin çerçevesi içinde, impuls ve enerji korunumu kanunlarının invaryant kalmadıkla-

rını yâni bu şartlar altında bu kanunların bu referans sistemlerindeki tüm gözlemciler için objektiflik niteliğini haiz olmadıklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Formalizmi ağırlaştırmamak amacıyla impuls ve enerji korunumu kanunlarını (S_1) de x_1 doğrultusunda aralarında merkezî çarpışmaya mâruz m ve M kütlesini haiz iki katı bilârdo topuna uygulayalım. Üslü büyüklükler çarpışma sonrası ortaya çıkan yeni değerlere delâlet etmek üzere

$$\left.\begin{aligned} m\dot{x}_1+M\dot{X}_1&=m\dot{x}'_1+M\dot{X}'_1 \\ \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{X}_1^2&=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1')^2+\frac{1}{2}M(\dot{X}_1')^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

olur.

PROBLEM : 1 de ortaya konmuş olan, sâbit ivmeli doğrusal hareketli raferans sistemlerinin dönüşüm formüllerinden yararlanarak (1) ifâdelerinin (S_2) den gözlendiğinde, sırasıyla

$$(m\dot{x}_2+M\dot{X}_2)-(m\dot{x}_2'+M\dot{X}_2')=(m+M)\gamma(t'-t)$$

$$\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}M\dot{X}_2^2\right)-\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}_2')^2+\frac{1}{2}M(\dot{X}_2')^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\gamma(t'-t)\,[2(m\dot{x}_2+M\dot{X}_2)-(m+M)\gamma(t'-t)]$$

şekline girdikleri bulunur. Burada t çarpışmadan önceki ve t' de çarpışmadan sonraki bir ânı göstermektedir.

Bu ifadeler impuls ve enerji korunumu kanunlarının ivmeli sistemlerde invaryant kalmadıklarını açık olarak ortaya koymaktadırlar.

PROBLEM : 4.— Herbirinin uzay içindeki durumu diğerine göre tamamen keyfî (S) ve (S′) diye iki dik eksenli referans sistemi biribirlerine nazaran $\vec{v}$ sâbit hızı ile düzgün doğrusal harekette bulunsunlar.

(S) de belirli bir t ânında ortaya çıkan bir olaya tekaabül eden yervektörü $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, aynı olaya (S') de tekaabül eden zaman ve yervektörü de sırasıyla t' ve $\vec{r}'=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}'$ olsun.

a) Lorentz dönüşümleri çerçevesi içinde $\vec{r}'$ yü $\vec{r}$ ye ve t' yü de t ye bağlayan genel dönüşüm formüllerini kurunuz.

b) $\vec{r}'$ yü $\vec{r}$ ye bağlayan genel vektörel denklemin bileşenlerinin dönüşüm formüllerini yazınız.

c) $\vec{r}$ ve t koordinatları (S) de $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{u}$ hızı ve $\vec{a}$ ivmesi ile hareket eden bir tâneciğe tekaabül ediyorsa $\vec{u}$ ile $\vec{u}'$ arasındaki ve $\vec{a}$ ile $\vec{a}'$ arasındaki bağıntıları ayrıntıları ile kurunuz.

ÇÖZÜM:

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, t ânında (S) referans sistemindeki bir olaya ve $\vec{r}'=x'\vec{i}'+y\vec{j}'+z'\vec{k}'$ de, (S) sistemine nazaran $\vec{v}$ hızı ile düzgün doğrusal hareket yapan (S') referans sisteminde t' ânındaki bir olaya tekaabül eden yervektörüdür. Sistemlerin orijinleri $t=t'=0$ ânında çakışmış olsun.

$\vec{r}$ ve $\vec{r}'$ vektörlerini $\vec{v}$ hızı doğrultusunda ve buna dik doğrultuda iki bileşene ayıralım.

$$\vec{r}=\vec{r}_{//}+\vec{r}_{\perp}, \quad \vec{r}'=\vec{r}_{//}'+\vec{r}'_{\perp}$$

Âdî Lorentz dönüşüm formüllerine göre

$$\vec{r}_{//}'=\gamma.(\vec{r}_{//}-\vec{v}\,t) \qquad ; \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{r}'_{\perp}=\vec{r}_{\perp}$$

$$t'=\gamma.\left(t-\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c^2}\right)$$

dir. Buradan,

$$\vec{r}\,' = \gamma\,(\vec{r}_{//} - \vec{v}\,t) + \vec{r}\,'_{\perp},$$

diğer taraftan

$$\vec{r}_{//} = \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\,\vec{v}}{v^2}$$

ve

$$\vec{r}\,'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{//} = \vec{r} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r})\,\vec{v}}{v^2}$$

olduğundan, bu ifâdeler $(\vec{r}\,')$ ifâdesinde yerlerine konursa

$$\vec{r}\,' = \gamma\left[\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\,\vec{v}}{v^2} - \vec{v}\,t\right] + \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\,\vec{v}}{v^2}$$

ve böylece, Genel Lorentz Dönüşüm Formülleri de

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}\left[(\gamma - 1)\,\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{v^2} - \gamma t\right]$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r})}{c^2}\right)$$

olurlar. Eğer

$$\vec{r}^{\,+} = \frac{\vec{r}}{\gamma} - \frac{(1 - \gamma)\,\vec{v}\,(\vec{v} \cdot \vec{r})}{\gamma\,v^2}$$

dersek

$$\vec{r}\,' = \gamma\,(\vec{r}^{\,+} + \vec{v}\,t)$$

şekline girer.

Eğer, (S) ve (S') sistemlerinin eksenleri aynı doğrultuda ise ve sistemler biribirlerine göre

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

hızıyla hareket ediyorlarsa, genel Lorentz dönüşüm formüllerinin bileşenleri olarak

$$x' = x + v_x \left[(\gamma - 1) \frac{x v_x + y v_y + z v_z}{v^2} - \gamma t \right]$$

$$= x \left[1 + (\gamma - 1) \frac{v_x^2}{v^2} \right] + \frac{v_x v_y}{v^2} (\gamma - 1) y + \frac{v_x v_z}{v^2} (\gamma - 1) z - \gamma v_x t$$

$$y' = (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} x + \left[1 + (\gamma - 1) \frac{v_y^2}{v^2} \right] y + \frac{v_y v_z}{v^2} (\gamma - 1) z - \gamma v_y t$$

$$z' = (\gamma - 1) \frac{v_x v_z}{v^2} x + (\gamma - 1) \frac{v_y v_z}{v^2} y + \left[1 + (\gamma - 1) \frac{v_z^2}{v^2} \right] z - \gamma v_z t$$

$$t' = \gamma \left[t - \frac{v_x x}{c^2} - \frac{v_y y}{c^2} - \frac{v_z z}{c^2} \right]$$

bulunur.

LORENTZ DÖNÜŞÜMÜNE GÖRE HIZ VE İVMENİN İFADESİ :

(S) sisteminde t ânında $\vec{r}$ yervektörünü haiz bir tânecik $t+dt$ ânında $\vec{r} + d\vec{r}$ yervektörünü haiz olsun. Buna göre

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}$$

(S) sisteminde parçacığın, (S) referans sistemine göre hızı olur. (S') de buna tekaabül eden hız,

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

olsun; bu takdirde

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} \left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right]$$

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \frac{\vec{v}}{v^2} [d\vec{r} \cdot \vec{v}] (\gamma - 1) - \gamma \vec{v}\, dt$$

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{\vec{v} \cdot d\vec{r}}{c^2} \right)$$

olacağından buradan

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r} + \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot d\vec{r}) (\gamma - 1) - \vec{v}\, \gamma\, dt}{\gamma \left(dt - \frac{\vec{v} \cdot d\vec{r}}{c^2} \right)}$$

$$= \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\vec{v}}{v^2} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) (\gamma - 1) - \gamma \vec{v} \frac{dt}{dt}}{\gamma \left(\frac{dt}{dt} - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}$$

$$= \frac{\vec{u} + \vec{v} \left[\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2} \right)}$$

bulunur. (S) ve (S') referans sistemleri özel bir hâl olarak xx' doğrultusunda $\vec{v}$ hızı ile düzgün doğrusal bir hareket yapıyorlarsa, yâni

$$\vec{v} = v_x \vec{i}$$

ise, $\vec{u}'$ nün bileşenleri için

$$u_x' = \frac{u_x + v_x \left[(\gamma - 1) \frac{u_x v_x}{v^2} - \gamma \right]}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2} \right)}$$

$$= \frac{u_x - v_x}{\left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2} \right)} = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}$$

ve benzer şekilde,

$$u_y' = \frac{u_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

$$u_z' = \frac{u_z \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}$$

ifâdeleri bulunur.

(S) referans sisteminde parçacığın $\vec{a}$ ivmesi

$$a_x = \frac{du_x}{dt}, \quad a_y = \frac{du_y}{dt}, \quad a_z = \frac{du_z}{dt}$$

bileşenleri ile verilir. Bunlara (S') referans sisteminde tekaabül eden bileşenler de

$$a_x' = \frac{du_x'}{dt}, \quad a_y' = \frac{du_y'}{dt}, \quad a_z' = \frac{du_z'}{dt}$$

şeklinde olacak, ve $\vec{a}'$ de bu bileşenlerle târif edilecektir. Buna binâen

$$a_x' = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\right) = \frac{a_x\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2},$$

ve benzer şekilde,

$$a_y' = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[a_y + \frac{\frac{u_y v}{c^2}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\, a_x\right]$$

ve

$$a_z' = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[a_z + \frac{\frac{u_z v}{c^2}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\, a_x\right]$$

bulunur.

PROBLEM: 5.— (S_1), (S_2) ve (S_3) diye biribirlerine nazaran düzgün doğrusal hareketler icrâ eden üç referans sistemi $t=0$ ânında çakışmaktadırlar. (S_1) den bakıldığında (S_2) nin O_1x_1 e paralel olarak u hızı ile, (S_2) den bakıldığında da (S_3) ün O_2y_2 ye paralel olarak v hızıyla hereket etmekte oldukları görülmektedir. Eğer (S_1) den bakıldığında (S_3) ün hareket doğrultusu O_1x_1 ile bir θ açısı ve (S_3) den bakıldığında da (S_1) in hareket doğrultusu O_3x_3 ile bir φ açısı yapıyorsa

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{u}{v}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{v}{u}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

olduğunu ve $u \ll c$, $v \ll c$ özel hâli için de

$$\varphi-\theta \backsimeq \frac{uv}{2c^2}$$

olacağını gösteriniz.

PROBLEM: 6.— Bir (S_1) referans sisteminde $\cos A_1$, $\cos B_1$, $\cos C_1$ doğrultman kosinüsleri ile belirlenmiş bir doğrultu boyunca yayılan dalgasal bir hareket

$$\psi_1=\psi_{01}\cos 2\pi\nu_1\left[t_1-\frac{x_1\cos A_1+y_1\cos B_1+z_1\cos C_1}{c}\right]=\psi_{01}\cos 2\pi\nu_1\,\tau_1 \quad (1)$$

ifâdesiyle gösterilir.

1) Bu dalgasal hareketin τ_1 zaman süresi içinde yaptığı $\Phi_1=\nu_1\tau_1$ titreşim sayısının invaryant bir büyüklük olduğunu gösteriniz.

2) Bu özelliği göz öünde tutarak (S_1) e göre izâfi v hızıyla düzgün doğrusal bir hareket yapan ψ_1 in ν_1 frekansının (S_2) sisteminde gözlenen ν_2 değerini bulunuz.

3) Eğer ψ_1

a) x—ekseni boyunca yayılan bir dalga ise, ve

b) x—eksenine dik bir doğrultu boyunca yayılan bir dalga ise o hâlde ν_1 ile ν_2 arasındaki bağıntı ne olur? (Döppler olayı).

ÇÖZÜM:

1) $\Phi_1 = \nu_1 \tau_1$ büyüklüğüne dalgasal hareketin fazı adı verilir. Faz belirli bir zaman süresi içinde, meselâ burada τ_1 süresinde, ilgili (1) dalgasal hareketinin yaptığı titreşim sayısını göstermektedir. Her bir titreşim (S_1) de vukuu bulan bir olaydır. Lorentz dönüşümleri olayların sayısını değiştirmediğinden (S_2) den de aynı sayıda titreşim gözleneceği âşikârdır. Bu ise

$$\Phi_1 = \nu_1 \tau_1 = \nu_2 \tau_2 = \Phi_2 \tag{2}$$

demektir.

2) (2) bağıntısını açıkça yazarsak

$$\nu_1 \left[t_1 - \frac{1}{c} (x_1 \cos A_1 + y_1 \cos B_1 + z_1 \cos C_1) \right] =$$
$$= \nu_2 \left[t_2 - \frac{1}{c} (x_2 \cos A_2 + y_2 \cos B_2 + z_2 \cos C_2) \right]$$

olur. Eşitliğin sol yanındaki x_1, y_1, z_1 ve t_1 LORENTZ dönüşüm formülleri ile x_2, y_2, z_2 ve t_2 nin fonksiyonu olarak ifâde edilirse, $\beta = v/c$ olmak üzere,

$$\nu_1 \left[\gamma t_2 (1 - \beta \cos A_1) - \frac{\gamma x_2}{c} (\cos A_1 - \beta) - \frac{1}{c} (y_1 \cos B_1 + z_1 \cos C_2) \right] =$$
$$= \nu_2 \left[t_2 - \frac{1}{c} (x_2 \cos A_2 + y_2 \cos B_2 + z_2 \cos C_2) \right]$$

olur. Her iki yan birbiriyle karşılaştırılırsa

$$\left.\begin{aligned} \nu_2 \cos A_2 &= \nu_1 \gamma (\cos A_1 - \beta) \\ \nu_2 \cos B_2 &= \nu_1 \cos B_1 \\ \nu_2 \cos C_2 &= \nu_1 \cos C_1 \\ \nu_2 &= \nu_1 \gamma (1 - \beta \cos A_1) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

bağıntıları bulunur.

3) a. (3) bağıntılarından sonuncusunu göz önüne alırsak dalganın x—ekseni boyunca yayılması hâlinde $A_1 = 0$ olur ve böylece

$$\nu_2 = \nu_1 \gamma (1 - \beta) = \nu_1 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \tag{4}$$

bulunur.

b) Eğer dalga x—eksenine dik yayılıyorsa $A_1=\frac{\pi}{2}$ olur ve bu takdirde de (3) bağıntılarının sonuncusundan

$$\nu_2=\frac{\nu_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

bağıntısı elde edilir.

PROBLEM: 7.— 1000 MeV lik kinetik enerjiyi haiz bir protonun impulsu ne kadardır?

(Cevap: 1700 MeV/c)

PROBLEM: 8.— Kozmik ışınlardaki tâneciklerin 10^{19} eV ve hattâ daha da yüksek enerjileri haiz olabildikleri bilinmektedir. Buna göre:

a) Böyle bir tâneceğin zahirî kütlesi takriben ne kadar olur?

b) İmpulsu ne kadar olur?

(Cevap: $m=1{,}8\times10^{-17}$ kg, $p=5\times10^{-9}$ kgm/sec)

PROBLEM: 9.= $_{36}K^{88}$ maksimum enerjisi 2,4 MeV olan β ışınları yayınlayarak $_{37}Rb^{88}$ e dönüşür. Bu çekirdek bozulması esnâsında yayınlanan elektronların $B=0{,}1$ weber/m² lik bir magnetik alanda $R=6{,}1$ cm lik bir eğriliği haiz bir yörünge çizdiklerini göz önünde tutarak

a) böyle bir elektronun ve buna refâkat eden nötrinonun enerjilerini eV cinsinden hesaplayınız, ve

b) geri tepen çekirdeğin haiz olduğu, mümkün olan maksimum kinetik enerjisini tâyin ediniz.

ÇÖZÜM:

a) Yüksek hızlar bahis konusu olduğundan Özel Rölâtivite formüllerinden faydalanacağız.

Elektronun impulsu için şu eşitlik cârî olacaktır:

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=BeR$$

veyâ

$$m^2v^2=B^2e^2R^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

ya da bu ifâdeyi yeniden düzenleyerek, sırasıyla,

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{B^2e^2R^2}{m^2c^2+B^2e^2R^2}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{BeR}{\sqrt{m^2c^2+B^2e^2R^2}} \qquad (1)$$

bulunur. Öte yandan elektronun kinetik enerjisi için (1) den de yararlanarak

$$T=mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]=mc^2\left[\frac{\sqrt{m^2c^2+B^2e^2R^2}}{mc}-1\right]=$$

$$=9{,}11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2\left[\frac{\sqrt{(9{,}11\times10^{-31}\times3\times10^8)^2+(0{,}1\times1{,}602\times10^{-19}\times0{,}061)^2}}{9{,}11\times10^{-31}\times3\times10^8}-1\right]$$

$$=22{,}25\times10^{-15}\text{ Joule}=\frac{22{,}25\times10^{-15}\text{ Joule}}{1{,}602\times10^{-19}\text{ Joule/eV}}=1{,}389\text{ MeV}$$

bulunur. Şu hâlde nötrinonun yüklendiği enerji

$$E_\nu=(2{,}4-1{,}389)\text{ MeV}=1{,}01\text{ MeV}$$

olur.

b) Geri tepen çekirdeğin yüklenebileceği maksimum enerji çekirdekten fırlayan elektron eğer maksimum enerji ile fırlıyor, fakat buna karşılık nötrino hiç bir enerji yüklenmiyorsa vukuu bulur.

Elektronun kütle ve impulsunu m ve p ile, çekirdeğinkilerini de M ve P ile gösterirsek impuls korunumu kanunu, nötrinonun bu hâl için kinetik enerjisinin ve dolayısiyle hızının sıfır olması yüzünden

$$P=p \qquad (2)$$

olarak yazılacaktır. Öte yandan elektronun kinetik enerjisi

$$T=E-E_0=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}-mc^2=2{,}4\,\text{MeV} \qquad (3)$$

dir. Elektron için $mc^2=0{,}511$ MeV olduğu kolayca hesaplanır. Şu hâlde (3) den

$$\sqrt{(0{,}511)^2+p^2c^2}=(2{,}4+0{,}511)\,\text{MeV}==2{,}911\,\text{MeV}$$

bulunur. Bu ifâde p ye göre çözülürse

$$p=\frac{2{,}866}{c}\text{MeV/c} \qquad (4)$$

değeri elde edilir.

Çekirdeğin geri tepmesi esnâsındaki hızı büyük kütlesi dolayısiyle çok yüksek olamıyacağından bu geri tepmeye ait kinetik enerji hesabında Özel Rölâtivite Teorisinin formüllerini kullanmak fuzûlî olur. Bu takdirde çekirdeğin $T_ç$ kinetik enerjisi (2) eşitliğinden ötürü

$$T_ç=\frac{P^2}{2M}=\frac{p^2}{2M}=\frac{p^2c^2}{2Mc^2} \qquad (5)$$

olacaktır. $M=86$ $AKB=86\times1840$ $m_e=86\times1840\times0{,}511$ MeV$=80806{,}64$ MeV olduğundan (4) ve (5) den

$$T_ç=\frac{(pc)^2}{2(Mc^2)}=\frac{(2{,}866)^2}{2\times80860{,}64}\,\text{MeV}=50{,}8\times10^{-6}\,\text{MeV}=50{,}8\,\text{eV}$$

bulunur.

PROBLEM : 10.— q elektrik yükünü ve x ekseni boyunca yüksek bir p_0 impulsunu haiz bir tânecik L uzunluğunda ve içinde ~~x~~ y doğrultusuna dik birbiçim bir elektrik alanı uygulanmış bir bölgeye girmektedir. Elektrik alanın şiddeti $\mathcal{E}$ olduğuna göre alanın tâneciği sapmaya uğrattığı açıyı tesbit ediniz.

ÇÖZÜM :

Hareketin denklemleri

$$\frac{dp_x}{dt}=0 \qquad \frac{dp_y}{dt}=q\,\mathcal{E} \qquad (1)$$

olup $p_x(0)=p_0$ başlangıç şartını göz önünde tutarak

$$p_x = p_0 \quad \text{ve} \quad p_y = q\mathcal{E}t$$

bulunur;

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{ve} \quad E = mc^2$$

olduğundan

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p} \tag{2}$$

bağıntısı geçerlidir. Öte yandan E_0 ile ilk enerjiyi göstermek üzere enerji

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = m^2c^4 + p_0^2c^2 + (q\mathcal{E}tc)^2 = E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2$$

şeklinde yazılabileceğinden (1) ve (2) bağıntılarından

$$v_x = \frac{p_0c^2}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2}} \tag{3}$$

$$v_y = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2}} \tag{4}$$

bulunur. Burada dikkat edilecek olan husus t arttıkça v_x in azalmasıdır.

Bir t ânında tâneciğin yörüngesinin x ekseni ile yaptığı θ açısı

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{p_0c^2} = \frac{q\mathcal{E}}{p_0}t$$

olarak bulunur. Eğer t_L ile taneciğin L uzunluğunu katetmesi için gerekli zaman gösterilirse (3) den

$$L = \int_0^L dx = p_0c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}tc)^2}} = \frac{p_0c}{q\mathcal{E}} \sinh^{-1}\left(\frac{q\mathcal{E}t_Lc}{E_0}\right)$$

bulunur. Buradan da t_L için

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathcal{E}c} \sinh \frac{q\mathcal{E}L}{p_0c}$$

bulunur.

PROBLEM : 11.— q **elektrik yükünü ve** m_0 **sükûnet kütlesini haiz bir tânecik sâbit bir** $\vec{\mathcal{E}}=\mathcal{E}\vec{e},(\vec{e}\,\vec{e}=1)$**, elektrik alanına alan vektörü boyunca girecek olursa hızının Özel Rölâtivite Teorisi çerçevesi içinde haiz olacağı ifâdeyi ve** $\vec{e}$ **boyunca katedeceği** x **uzaklığını hesaplayınız.**

ÇÖZÜM :

Hareketin denklemi

$$\frac{dp}{dt}\vec{e}=q\,\mathcal{E}\,\vec{e}$$

veyâ

$$m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=q\,\mathcal{E}$$

olur. Bu diferansiyel denklem değişkenlere ayrışabilir olduğundan derhâl integre edilir ve $v(0)=0$ olmak üzere

$$m_0\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=q\,\mathcal{E}\,t$$

ve buradan da

$$v^2=\frac{\left(\frac{q\,\mathcal{E}\,t}{m_0c}\right)^2}{1+\left(\frac{q\,\mathcal{E}\,t}{m_0c}\right)^2}c^2 \tag{1}$$

bulunur.

$t<m_0c/q\,\mathcal{E}$ gibi kısa zamanlar için payda 1 e eşit alınabilir ve

$$v^2\approx\left(\frac{q\,\mathcal{E}}{m_0}t\right)^2$$

bulunur. $t\gg m_0c/q\,\mathcal{E}$ gibi uzun zamanlar için de payı paydaya bölüp $(q\,\mathcal{E}\,t/m_0c)$ nin 4. kuvvetini ihmâl ederek

$$v^2 \backsimeq \left[1-\left(\frac{m_0 c}{q \mathfrak{E} t}\right)^2\right] c^2$$

bulunur ki bu ifâde $t \to \infty$ için $v \to c$ olduğuna işâret etmektedir.

(1) formülünde

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\left(\frac{q \mathfrak{E} t}{m_0 c}\right)^2}{1+\left(\frac{q \mathfrak{E} t}{m_0 c}\right)^2} c^2$$

yazılabileceğinden buradan da derhâl

$$dx = \frac{c\left(\frac{q \mathfrak{E} t}{m_0 c}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{q \mathfrak{E} t}{m_0 c}\right)^2}} dt$$

ve 0 ile t arasında integrâl alarak ve $x(0)=0$ ve $v(0)=0$ varsayarak

$$x = \frac{m_0 c^2}{q \mathfrak{E}} \left[\sqrt{1+\left(\frac{q \mathfrak{E} t}{m_0 c}\right)^2} - 1\right]$$

bulunur. $t \to \infty$ için taneciğin $x \backsimeq ct$ gibi hareket ettiği görülür.

PROBLEM: 12.— Güneş sâbiti diye arzın güneşten olan uzaklığında 1 cm^2 yi 1 saniyede kateden güneşin enerji akımına denir. Bu sâbitin değerinin 0,14 Joule/sec$\times$$cm^2$ olduğu tesbit edilmiştir.

Güneşin toplam enerji üretiminin yaklaşık olarak 4×10^{26} Joule/sec olduğunu gösteriniz.

b) Güneşteki enerji üretimi BETHE çevrimi denilen bir çevrim sonucu hidrojenin helyuma dönüşmesi esnâsında vukuu bulmaktadır. 1 gram ${}_1H^1$ nın ${}_2He^4$ ye dönüşmesi sonucu açığa çıkan enerji 6×10^{11} Joule olduğuna göre eğer güneşin kütlesinin 1/3 ü hidrojen olsaydı da çekirdek reaksiyonları hiç değişmeksizin sürüp gitseydi güneşin bugünkü enerji neşretme hızıyla 3×10^{10} sene enerji neşrine devam edebileceğini gösteriniz.

PROBLEM: 13.— 940 MeV lik kinetik enerjiyi haiz bir proton

sükûnet hâlindeki bir başka protonla esnek bir çarpısma yapmaktadır. Çarpışmadan sonra her iki protonun da çarpan protonun geliş doğrultusunun her iki yanında ve bu doğrultu ile eşit θ açıları yaparak hareket etmeleri hâlinde acaba ikisi arasındaki açının değeri ne olacaktır?

ÇÖZÜM:

Çarpan protonun impulsu $\vec{p}$ olsun. İmpuls korunumu kanunundan yararlanarak ve çarpışma sonrası impulslarını $\vec{p}$ ye dik bir eksen üzerine izdüşürmek sûretiyle çarpışmadan sonra her iki protonun haiz oldukları impulsların biribirlerine eşit olmaları gerektiği derhâl görülür. Bu ortak impulsu $\vec{p}_2$ ile gösterelim. Buna göre

$$\vec{p}=\vec{p}_2+\vec{p}_2$$

veyâ

$$p=2p_2\cos\theta$$

yâni

$$\cos\theta=\frac{p}{2p_2} \tag{1}$$

yazılır. Mermi rolü oynayan protonun kinetik enerjisi bunun rölâtiviteye göre haiz olduğu toplam enerjisinden sükûnet enerjisini çıkartarak bulunur; şu halde:

$$\sqrt{m_P{}^2c^4+p^2c^2}-m_Pc^2=940 \text{ MeV} \tag{2}$$

Bir protonun sükûnet kütlesi MeV cinsinden ifâde edildiğinde zâten 940 MeV dir. Buna göre (2) den

$$(940)^2+p^2c^2=(2\times940)^2$$

veyâ

$$pc=940\sqrt{3} \text{ MeV} \tag{3}$$

bulunur. Çarpışmadan önce her iki protondan müteşekkil sistemin toplam enerjisi: 3×940 MeV dir. Çarpışmadan sonra ise her bir protonun toplam enerjisi

$$E_P=\sqrt{(940)^2+p_2{}^2c^2}$$

dir. Enerjinin sakımı ilkesine binâen

$$2\times\sqrt{(940)^2+p_2^2c^2}=3\times940$$

veyâ

$$4\times(940)^2+4p_2^2c^2=9\times(940)^2$$

ve buradan da

$$p_2c=940\times\frac{\sqrt{5}}{2}\ \mathrm{MeV} \qquad (4)$$

bulunur. Şu hâlde (1) den, (3) ve (4) de göz önünde tutularak,

$$\cos\theta=\frac{p}{2p_2}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{0,6}$$

ya da

$$\theta=39,2^\circ$$

olması gerektiği bulunur. Şu hâlde çarpışmadan sonraki iki proton arasındaki açı

$$2\theta=78,4^\circ$$

olacaktır.

PROBLEM: 14.— İmpuls ve enerji sakımı ilkelerinden hareket ederek sükûnetteki elektronlar üzerine gönderilmiş olan yüksek enerjili başka elektronların çarpışmada elektron-pozitron çifti meydana getirmeleri için mermi rolü oynayan elektronların $6m_ec^2$ lik bir minimum kinetik enerjiye sahip olmaları gerektiğini gösterip bu enerjiyi hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

Elektron-pozitron çifti üretilmesi ancak mermi çekirdeğin hem bu çifti doğuracak ve hem de böylece sayıları dörde yükselen tâneciklere bir hız verebilecek kadar kinetik enerjiyi haiz olmasıyla mümkün olur.

Şimdi mermi elektronun çarpışma öncesi impulsunu $\vec{p}$ ve çarpışma sonucu ortada bulunan dört taneciğin toplam impulslarını da $\vec{p}_1$ ile gösterelim. İmpuls sakımı ilkesine göre

$$\vec{p}=\vec{p}_1$$

dir. Enerji sakımı ilkesine göre ise, sistemin çarpışma öncesi toplam enerjisi

$$E=\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}+m_ec^2,$$

ve çarpışma sonrası toplam enerjisi de

$$E'=\sqrt{(4m_ec^2)^2+p_1^2c^2}=\sqrt{16m_e^2c^4+p^2c^2}$$

olduğundan

$$E=E'$$

dür ; yâni

$$\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}+m_ec^2=\sqrt{16m_e^2c^4+p^2c^2}$$

olur. Her iki yanı da kareye kaldırarak

$$\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}=7m_ec^2$$

bulunur.

Buradan mermi elektronun T kinetik enerjisi olarak

$$T=\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}—m_ec^2=6m_ec^2$$

çıkar ki bu da zâten gösterilmek istenen sonuçtur. Ayrıca,

$$T=6m_ec^2=\frac{6\times 9{,}108\times 10^{-31}\,(\mathrm{kg})\times[3\times 10^8\,(\mathrm{m/sec})]^2}{1{,}602\times 10^{-19}\,(\mathrm{Joule/eV})}=3{,}06\ \mathrm{MeV}$$

bulunur.

PROBLEM : 15.— 2 MeV luk bir elektronun hızını ve kütlesini bulunuz.

ÇÖZÜM :

Rölâtivistik kinetik enerji

$$T=mc^2—m_0c^2$$

olduğundan

$$m=m_0+\frac{T}{c^2}$$

ve

$$m=9{,}108\cdot 10^{-31}\,(\mathrm{kg})+\frac{2\times 1{,}602\cdot 10^{-13}\,(\mathrm{Joule})}{[3\cdot 10^8\,(m/\mathrm{sec})]^2}=44{,}608\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

bulunur.

Kinetik enerji için,

$$T=m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right]$$

yazabileceğimizden

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{T+m_0c^2}\right)^2}$$

bulunur ve

$$v=3\cdot10^8\,(\text{m/sec})\times\sqrt{1-\left[\frac{9{,}108\times10^{-31}\,(\text{kg})\times9\times10^{16}\,(\text{m}^2/\text{sec}^2)}{(2\times1{,}602\times10^{-13}\,\text{Joule})+\left(9{,}108\times10^{-31}\,\text{kg}\times9\times10^{16}\,\frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}\right)}\right]^2}$$

$$=2{,}9367\cdot10^8\ \text{m/sec}$$

bulunur.

PROBLEM: 16.— Bir proton 500 MeV luk kinetik enerjiye kadar hızlandırılırşa ne kadar kütle kazanır ?

ÇÖZÜM:

Rölâtivistik kinetik enerji

$$T=mc^2-m_0c^2=(m-m_0)\,c^2$$

ile belirlendiğine göre

$$\Delta m=\frac{T}{c^2}=\frac{500\times1{,}602\times10^{-13}\,(\text{Joule})}{[3\times10^8\,(\text{m/sec})]^2}=0{,}88\times10^{-27}\ \text{kg}$$

bulunur.

PPOBLEM: 17.— 0,1 MeV luk bir elektronun önce Rölâtivite Teorisine göre ve sonra da klâsik mekaniğe göre hızını bulunuz.

ÇÖZÜM:

Rölâtivite Teorisine göre bir tâneciğin enerjisi

$$T=mc^2-m_0c^2=m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right]$$

ile belirlendiğinden, bu ifâdeden,

$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{T}{m_0c^2}\right)^2}}$$

bulunur. Buradan,

$$v=3\cdot10^8\times\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}1\times1{,}602\cdot10^{-13}}{9{,}108\cdot10^{-31}\times9\cdot10^{16}}\right)^2}}=1{,}643\times10^8\ \text{m/sec}$$

hesaplanır. Klâsik mekaniğe göre,

$$T=\frac{1}{2}m\,v^2$$

dir. Buradan

$$v=\sqrt{\frac{2T}{m}}$$

olur. Ve

$$v=\sqrt{\frac{2\times0{,}1\times1{,}602\cdot10^{-13}}{9{,}108\cdot10^{-31}}}=1{,}874\cdot10^8\ \text{m/sec}$$

bulunur.

PROBLEM : 18.— Bir elektronun kütlesi protonun sükûnet kütlesine eşit olabilmesi için ne olmalıdır ?

hızı

ÇÖZÜM :

Kütlenin hıza bağlı olarak değişimi

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ile belirlendiğine göre

$$m_P=\frac{m_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ve

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_e}{m_P}\right)^2}$$

olacaktır. Buradan

$$v=3\cdot10^8\times\sqrt{1-\left(\frac{9,108\times10^{-31}}{1,672\times10^{-27}}\right)^2}=0,999\times10^8\ \text{m/sec}$$

bulunur.

PROBLEM: 19.— 200 000 km/sec lik bir hızı olan bir elektronun kütlesi nedir?

ÇÖZÜM:

$$m_0=9,108\times10^{-31}\ \text{kg olduğuna göre}$$

$$m=\frac{9,108\times10^{-31}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=12,08\times10^{-31}\ \text{kg}$$

bulunur. Bu

$$\frac{12,08-9}{9}=\%34$$

lük bir kütle artışına tekaabül etmektedir.

PROBLEM: 20.— $H_2+\frac{1}{2}O_2 \longrightarrow H_2O+69$ **kcal reaksiyonundaki kütle kaybını mg cinsinden ifâde ediniz.**

ÇÖZÜM:

Bu reaksiyonda 69 kcal=69000 kalorilik bir ısı açığa çıktığına göre ve 1 kalori=4,18 joule olduğuna göre Δm kütle kaybı

$$\Delta m=\frac{E}{c^2}=\frac{69\times10^3\times4,18}{9\times10^{16}}\text{kg}=3,2\times10^{-12}\ \text{kg}=3,2\times10^{-6}\ \text{mg}$$

olur.

PROBLEM: 21.— Gerek NEWTON mekaniği ve gerekse Rölâtivite mekaniği nokta-i nazarından, hareket hâlindeki M kütleli bir tânecikle sükûnetteki aynı cins bir başka tâneciğin çarpışmasında (L) lâboratuvar sistemi ve (KM) kütle merkezi sistemlerinde ortaya çıkan enerjinin ne kadar olduğunu tesbit ediniz.

ÇÖZÜM:

Önce M kütleli tâneciğin kinetik enerjisinin Mc^2 den çok küçük olduğunu varsayalım (klâsik hâl). Eğer bu tânecik (L) de $\vec{v}$ hızını haiz ise kinetik enerjisi

$$T_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} M v^2 \tag{1}$$

olur; bu takdirde (KM) de tâneciğin birisi $\frac{1}{2}\vec{v}$, diğeri ise $-\frac{1}{2}\vec{v}$ hızını haiz olacaktır. O hâlde (KM) deki toplam kinetik enerji

$$T_{\mathrm{KM}} = \frac{1}{2} M \left(\frac{1}{2} v\right)^2 + \frac{1}{2} M \left(-\frac{1}{2} v\right)^2 = \frac{1}{4} M v^2 \tag{2}$$

olur. (1) ve (2) den

$$\frac{T_{\mathrm{KM}}}{T_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

bulunur.

Yeni tâneciklerin yaratıldığı çarpışmalarda impuls korunumu şartı (L) de başlangıçtaki kinetik enerjinin tümünün çarpışmada oluşan yeni tâneciklerin sükûnet kütlelerine dönüşmesini imkânsız kılar. Zırâ eğer çarpışmadan önce sıfırdan farklı bir toplam impuls varsa çarpışmadan sonraki toplam impulsun buna eşit olması gerekir, Bu itibarla da bu şartlar altında çarpışma sonucu ortada kalan tâneciklerin sükûnette olmaları imkânsızdır; başlangıçtaki toplam kinetik enerjinin bir kısmı ister istemez çarpışma sonrası tâneciklerine intikâl eder.

Eğer başlangıç hâline tekaabül eden toplam impuls sıfır ise, ancak bu takdirde başlangıçtaki toplam kinetik enerjinin tümü yeni tâneciklerin oluşum reaksiyonunda kullanılabilir. Hâlbuki çarpışmayı (KM) kütle merkezi sistemine nisbet etmekle toplam impuls daima sıfır kılınabilir. Bu itibarla eğer meselâ bir proton 100 MeV e hızlandırılırsa (3) e göre bunun, ancak, yarısı olan 50 MeV i sükûnette bulunan başka bir protonla çarpışıp yeni tâneciklerin oluşumu için kullanılabilecektir.

Rölâtivite dışı hâller için gerekli olan (3) etkinliği Rölâtivite için daha da düşük değerdedir.

Şimdi Rölâtivite hâlini yâni tâneciklerin izâfi hızlarının ışık hızının ihmâl edilemeyen bir kesri olduğu hâli göz önüne alalım. Bu takdirde (L) ve (KM) sistemleri iki eylemsizlik sistemi meydana getirirler. Bunlarda toplam enerji LORENTZ dönüşümlerine göre invaryanttır. Buna göre ve 1 ve 2 ile tâneciklerin numaralarını göstererek

$$\left[(E_1+E_2)^2-(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2 c^2\right]_{(L)}=\left[(E_1+E_2)^2-(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2 c^2\right]_{(KM)} \tag{4}$$

olur. Tanım üzere (KM) de toplam impuls sıfırdır:

$$(\vec{p}_1+\vec{p}_2)_{(KM)}=0$$

Eğer 2 numaralı tânecik (L) de sükûnette ise

$$E_{2(L)}=Mc^2 \qquad \text{ve} \qquad \vec{p}_{2(L)}=0$$

dır.

$$E^2_{1(L)}-p^2_{1(L)}c^2=M^2c^4$$

bağıntısını kullanırsak, (4) ifâdesi

$$2E_{1(L)}Mc^2+2M^2c^4=\left[(E_1+E_2)^2\right]_{(KM)}=E^2_{top(KM)} \tag{5}$$

ifâdesine indirgenmiş olur.

$$E_1+Mc^2=E_{top(L)}$$

vazederek (5) den

$$\frac{E_{top(KM)}}{E_{top(L)}}=\frac{2Mc^2}{E_{top(KM)}} \tag{6}$$

bulunur.

PROBLEM: 22.— Sükûnetteki bir protonu çok yüksek enerjili bir başka protonla bombardıman ederek

$$p+p \longrightarrow p+p+(p+\bar{p})$$

reaksiyonu gerçekleştirilir. $\bar{p}$ ile, p ile aynı kütleyi fakat $-e$ yükünü haiz olan antiproton gösterilmektedir.

Bu reaksiyonun gerçekleşebilmesi için mermi protonun eşik enerjisi ne olmalıdır?

ÇÖZÜM:

Bir protonla bir antipronun sükûnet enerjileri $2Mc^2$ den ibârettir.

(KM) deki toplam enerji en az $4Mc^2$ olmalıdır ki yukarıdaki reaksiyon sonucu ortada $3p$ ve bir de $\bar{p}$ bulunabilsin. Buna göre, (L) deki toplam enerjinin bir önceki problemin (6) bağıntısı gereğince

$$E_{\text{top(L)}} = \frac{E^2_{\text{top(KM)}}}{2Mc^2} \approx \frac{16M^2c^4}{2Mc^2} = 8Mc^2$$

olduğu bulunur. Bu $8Mc^2$ lik toplam enerjinin $2Mc^2$ kadarı iki protonun sükûnet enerjisini ve $6Mc^2$ kadarı da kinetik enerjiyi göstermektedir. Bu itibarla yukarıdaki reaksiyonun gerçekleşebilmesi için eşik enerjisinin

$$6Mc^2 = 6 \times 0{,}938 \text{ BeV} = 5{,}63 \text{ BeV} = 5{,}63 \times 10^9 \text{ eV}$$

olması gerektiği bulunur.

PROBLEM : 23.— Özel Rölâtivite Teorisi çerçevesi içinde birbiçim sâbit bir $\vec{B}$ magnetik alanı içinde q yükünü haiz bir tâneciğin hareketini inceleyiniz.

ÇÖZÜM :

Hareketin denklemi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c}\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{1}$$

dir. Öte yandan $\vec{p} = m_0 v\gamma = m_0 v/\sqrt{1-\beta^2}$ olduğundan, $\vec{p}$ daima $\vec{v} \wedge \vec{B}$ ye dik olacağından

$$\frac{d}{dt}(p^2) = 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 2\frac{q}{c}\vec{p} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

dır. Bu ise impulsun ve dolayısiyle hızın mutlak değerinin sâbit bir magnetik alanda sâbit kaldığını gösterir. Şu hâlde $\vec{p}$ nin magnetik alan tarafından yalnız doğrultusu değiştiriliyorsa, o hâlde $\vec{p}$ nin tanımındaki

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

çarpanı da sâbit kalır. (1) hareket denklemi şimdi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}$$

yazılabilir. (2) büyüklüğünün sâbit olması dolayısiyle bu denklem tâneciğin bir daire üzerinde döndüğü çözümleri haizdir. ρ ile dairenin yarıçapını ve ω ile de hareketin açısal frekansını gösterelim. (3) de $d\vec{v}/dt$ yerine $\rho\omega^2$ merkezkaç ivmesini ve v yerine de $\rho\omega$ açısal hızını yerleştirirsek

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rho\omega^2 = \frac{q}{c}\rho\omega B$$

olur ki buradan da

$$\omega = \frac{qB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0 c}$$

bulunur. Buradan görüldüğü gibi hareketin frekansı hızlı tânecikler için azalmakta ve tersine yavaş tânecikler için ise artmaktadır. Eğer her devirde vukuu bulan v artışı dolayısiyle $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ nin azalması B dış magnetik alanının uygun bir artışı ile telâfi edilecek olursa bu sûretle tânecikleri çok yüksek hızlara ivmelendirmek mümkün olur. Bu ilkeye dayanarak işleyen tânecik hızlandırıcıya siklotron adı verilir.

PROBLEM: 24. — Bir (S) referans sisteminde elektromagnetizmanın temel denklemleri

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (1) \quad ; \quad \vec{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \quad (2) \quad ; \quad \text{div}\,\vec{D} = \rho \quad (4)$$

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \quad (5)$$

şeklindedir. Özel Rölâtivite ilkesi uyarınca bu denklemlerin (S) ye göre bir sâbit V hızı ile ve xx' boyunca düzgün doğrusal bir hareket icrâ eden bir (S') referans sisteminde de geçerli olabilmeleri için $\vec{E}$ elektrik alan vektörünün, $\vec{B}$ magnetik indüksiyon vektörünün bileşenlerinin ve ρ elektrik yoğunluğunun bir LORENTZ dönüşümünde nasıl değişmeleri gerektiğini tesis ediniz

ÇÖZÜM :

(S) de bileşenleri cinsinden yazıldıkları takdirde (1-4) denklemleri, (5) denklemi de göz önünde tutularak,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\\
\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&=-\frac{\partial B_y}{\partial t}\\
\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}&=-\frac{\partial B_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\}\ (6)
\qquad
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}&=\rho v_x+\frac{\partial D_x}{\partial t}\\
\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}&=\rho v_y+\frac{\partial D_y}{\partial t}\\
\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}&=\rho v_z+\frac{\partial D_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\}\ (7)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho \tag{9}$$

şeklini alırlar.

$(S) \longrightarrow (S')$ ve $(S') \longrightarrow (S)$ geçişlerini sağlayan LORENTZ dönüşümleri

$$\left.\begin{array}{l|l}
x=\dfrac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}=\gamma\,(x'+Vt') & x'=\gamma\,(x-Vt)\\[2ex]
y=y' & y'=y\\[1ex]
z=z' & z'=z\\[1ex]
t=\dfrac{t'+\dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1+\dfrac{V^2}{c^2}}}=\gamma\left(t'+\dfrac{V}{c^2}x'\right) & t'=\gamma\left(t-\dfrac{V}{c^2}x\right)
\end{array}\right\} \quad (10)$$

olduğundan türevlerin bunların ışığındaki dönüşümleri de

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'}=\gamma\frac{\partial}{\partial x}+\gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\\
&\frac{\partial}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial z'}=\frac{\partial}{\partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'}=\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\gamma V\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\\
&\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'}\\
&\frac{\partial}{\partial z}=\frac{z}{\partial z'}\\
&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}=\gamma\frac{\partial}{\partial t'}-\gamma V\frac{\partial}{\partial x'}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

şeklinde olacaktır. Buna göre

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial B_x}{\partial t'}&=-\left[\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\gamma V\frac{\partial}{\partial x}\right]B_x=\gamma\left(-\frac{\partial B_x}{\partial t}-V\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)\\
&=\gamma\left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+V\left(\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\right]\\
&=\frac{\partial}{\partial y'}[\gamma(E_z+VB_y)]-\frac{\partial}{\partial z'}[\gamma(E_y-VB_z)]
\end{aligned} \tag{13}$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t'}=-\left[\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\gamma V\frac{\partial}{\partial x}\right]B_y=\gamma\left(-\frac{\partial B_y}{\partial t}-V\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)$$

$$=\gamma\left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)-V\frac{\partial B_y}{\partial x}\right]$$

$$=\gamma\frac{\partial E_x}{\partial z}-\gamma\left[\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right]E_z-\gamma V\left[\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right]B_y$$

$$=\gamma\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}\right)-\gamma V\left(\gamma\frac{\partial B_y}{\partial x'}-\gamma\frac{V}{c^2}\frac{\partial B_y}{\partial t'}\right) \quad (14)$$

bulunur. (14) den

$$-\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y+\gamma^2\frac{V}{c^2}E_z+\gamma^2\frac{V^2}{c^2}B_y\right)=\gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\gamma V\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right)$$

yâhut da

$$-\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma B_y+\gamma\frac{V}{c^2}E_z\right)=\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}(\gamma E_z+\gamma V B_y) \quad (15)$$

bulunur; kezâ benzer şekilde $-\partial B_z/\partial t'$ nün hesabından

$$-\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma B_z-\gamma\frac{V}{c^2}E_y\right)=\frac{\partial}{\partial x'}(\gamma E_y-\gamma V B_z)-\frac{\partial E_x}{\partial y'} \quad (16)$$

ifâdesi elde edilir.

(13), (15) ve (16) ifâdelerinin MAXWELL denklemleriyle şekil itibariyle aynı olabilmeleri ve dolayısiyle (S') de, meselâ,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'}-\frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'}&=-\frac{\partial B'_{x'}}{\partial t'}\\[2ex]\frac{\partial E'_{x'}}{\partial z'}-\frac{\partial E'_{z'}}{\partial x'}&=-\frac{\partial B'_{y'}}{\partial t'}\\[2ex]\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'}-\frac{\partial E'_{x'}}{\partial y'}&=-\frac{\partial B'_{z'}}{\partial t'}\end{aligned}\right\}$$

olabilmesi için $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ nin $\vec{E'}$ ve $\vec{B'}$ ye dönüşümlerinde bileşenlerin

$E'_{x'}=E_x$	$B'_{x'}=B_x$
$E'_{y'}=\gamma(E_y-VB_z)$	$B'_{y'}=\gamma\left(B_y+\frac{V}{c^2}E_z\right)$
$E'_{z'}=\gamma(E_z+VB_y)$	$B'_{z'}=\gamma\left(B_z-\frac{V}{c^2}E_y\right)$

gibi değişmeleri gerektiği görülmektedir. Ters dönüşüm formüllerini elde etmek üzere $V \to -V$ dönüşümü yapmak ve üslülerle üssüz terimlerin yerlerini değiş tokuş etmek gereklidir.

Benzer şekilde, diğer MAXWELL denklemlerinin de invaryant kalabilmeleri için

$$\rho' = \gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right) \rho$$

$$\rho = \gamma \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_{x'}\right) \rho'$$

olması gerektiği de kolayca gösterilebilir.

PROBLEM: 25. — Elektrik yükünün LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Bir (S) sisteminde sükûnet hâlinde bulunan (şu hâlde: $v_x = v_y = v_z = 0$) bir q elektrik yükü bir $dV = dx\,dy\,dz$ hacım elemanında bulunuyorsa ρ ile yük yoğunluğunu göstermek sûretiyle

$$q = \rho\, dx\, dy\, dz$$

olur. (S) ye göre $V = Sâbit$ hızıyla ve xx' doğrultusunda düzgün doğrusal bir hareket yapan bir (S') sisteminde

$$\rho' = \gamma \rho$$

$$dx' = \frac{dx}{\gamma}$$ (xx' doğrultusunda FİTZGERALD - LORENTZ büzülmesi)

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

olduğundan

$$q' = \rho'\, dx'\, dy'\, dz' = \gamma \rho \frac{dx}{\gamma} dy\, dz$$
$$= \rho\, dx\, dy\, dz = q$$

bulunur ki bu sonuç da elektrik yükünün LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant olduğunu göstermektedir.

PROBLEM : 26.— Bir (S) referans sisteminde bir q elektrik yükü üzerine etki yapan elektrik kuvvetinin LORENTZ dönüşümüne göre dönüşüm formüllerini tesis ederek bu formüllerin mâhiyeti ne olursa olsun bütün kuvvetler için geçerli olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

(S) deki q yükü salt bir $\vec{E}$ elektrik alanında bulunduğunda bunun üzerine etki yapan elektrik kuvveti

$$\vec{F}=q\vec{E} \qquad (1)$$

ya da dik kartezyen bileşenleri cinsinden

$$F_x=qE_x \; ; \qquad F_y=qE_y \; ; \qquad F_z=qE_z \qquad (1)$$

ile verilir. Özel Rölâtivite ilkesi mûcibince (1) ya da (2) ile belirlenen kanun (S) ye nazaran V hızıyla, ve meselâ xx' doğrultusunda, düzgün doğrusal hareket yapan bir (S') referans sisteminde de invaryant kalacağından

$$\vec{F'}=q'\vec{E'} \qquad (3)$$

veyâ

$$F'_{x'} = q'E'_{x'} \; ; \qquad F'_{y'} = q'E'_{y'} \; ; \qquad F'_{z'} = q'E'_{z'} \qquad (4)$$

olacaktır. Hâlbuki Problem: 25 de tesbit edilmiş olduğu vechile $(S) \longrightarrow (S')$ geçişini temin eden LORENTZ dönüşümleri çerçevesi içinde

$$q=q' \qquad (5)$$

ve ayrıca da Problem: 24 e göre

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= E_x \\ E'_{y'} &= \gamma(E_y-VB_z) \\ E'_{z'} &= \gamma(E_z+VB_y) \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

dir. Göz önüne aldığımız hâl için $\vec{B}=0$ olduğuna da dikkat ederek (5) ve (6) aracılığıyla (4) ifâdelerinden

$$F'_{x'} = q'E'_{x'} = qE_x = F_x$$

$$F'_{y'} = q'E'_{y'} = q\gamma E_y = \gamma F_y$$

$$F'_{z'} = q'E'_{z'} = q\gamma E_z = \gamma F_z$$

yâni

$$F_x = F'_{x'}$$

$$F_y = \frac{F'_{y'}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (7)$$

$$F_z = \frac{F'_{z'}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

dönüşüm formülleri elde edilir.

Bu dönüşüm formülleri her ne kadar bir elektrik kuvveti için elde edilmişse de herhangi başka mâhiyetli bir kuvvete de uygulanabilir. Filhakika bunun için bir elektrik kuvveti ile başka mâhiyetli herhangi bir kuvvet arasındaki dengeyi göz önüne almak kâfidir. Bu dengenin seçilen referans sisteminden bağımsız olması (7) dönüşüm formüllerinin bütün kuvvetler için geçerli olmasının garantisidir.

PROBLEM : 27.— İki evrensel vektörün skaler çarpımının LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$$\vec{P} = (p_1, p_2, p_3, p_4) \text{ ve } \vec{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

bir (S) eylemsizlik sisteminde tanımlanmış iki evrensel vektör olsun.

Bileşenleri

$$p_1' = p_1 \cos\psi + p_4 \sin\psi$$
$$p_2' = p_2$$
$$p_3' = p_3$$
$$p_4' = -p_1 \sin\psi + p_4 \cos\psi$$

$$q'_1 = -q_1 \cos\psi + q_4 \sin\psi$$
$$q'_2 = q_2$$
$$q'_3 = q_3$$
$$q'_4 = -q_1 \sin\psi + q_4 \cos\psi$$

ile verilmiş olan $\vec{P'}$ ve $\vec{Q'}$ evrensel vektörleri de bunların bir LORENTZ dönüşümündeki dönüşmüşleri olsun. Buna göre yukarıdaki dönüşüm formüllerinden faydalanarak

$$\vec{P'} \cdot \vec{Q'} = p'_1 q'_1 + p_2' q_2' + p_3' q_3' + p_4' q_4' =$$
$$= (p_1 \cos\psi + p_4 \sin\psi)(q_1 \cos\psi + q_4 \sin\psi) + p_2 q_2 + p_3 q_3 +$$
$$+ (-p_1 \sin\psi + p_3 \cos\psi)(-q_1 \sin\psi + q_4 \cos\psi)$$
$$= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 = \vec{P} \cdot \vec{Q}$$

bulunur ki bu sonuç iki evrensel vektörün skaler çarpımlarının LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant kaldığına delâlet eder.

PROBLEM : 28.— Bir $\vec{P}$ evrensel vektörüyle, dört bileşeni haiz bir $\vec{Q}$ vektörünün skalar çarpımı LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant ise $\vec{Q}$ nun da mecbûren evrensel bir vektör olacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Eğer $\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{P'} \cdot \vec{Q'}$ ise bu

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 = p_1' q_1' + p_2' q_2' + p_3' q_3' + p_4' q_4'$$

veyâhut da, $\vec{P}$ nin evrensel bir vektör olması hasebiyle LORENTZ dönüşüm formüllerinden,

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 = (p_1 \cos\psi + p_4 \sin\psi) q_1' + p_2 q_2'$$
$$+ p_3 q_3' + (-p_1 \sin\psi + p_4 \cos\psi) q_4'$$

demektir. Buradan da

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 = (q_1' \cos\psi - q_4' \sin\psi) p_1 + p_2 q_2' + p_3 q_3' + (q_1' \sin\psi + q_4' \cos\psi) p_4$$

bulunur. Bu son bağıntıdan katsayıların eşitliği kuralına binâen

$$q_1 = q_1' \cos\psi - q_4' \sin\psi$$

$$q_2 = q_2'$$

$$q_3 = q_3'$$

$$q_4 = q_1' \sin\psi + q_4' \cos\psi$$

olması gerektiği bulunur. Hâlbuki bu ifâdeler

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \; ; \qquad \sin\psi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

olmak üzere, $\vec{Q}$ nun bileşenlerinin LORENTZ dönüşüm formülleri uyarınca değişmesi gerektiğini göstermektedir. Şu hâlde $\vec{Q}$ mecbûren evrensel bir vektördür.

PROBLEM : 29.— Işığın yayılmasına tekaabül eden dörtlü vektörün tekil bir evrensel vektör olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Işığın yayılmasına tekaabül eden dörtlü vektörün tekil bir evrensel vektör teşkil ettiğini göstermek için bir referans sisteminin orijininde $t=0$ ânında çakan bir ışık göz önüne alalım. Bu olay, (0, 0, 0, 0) koordinatlarını haiz bir uzay-zaman noktasına tekaabül etmektedir. Uzayda sâbit c hızıyla yayılan bir ışık t ânında ($x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$) noktasına erişmiş olsun; bu olay da (x_1, x_2, x_3, $x_4=ict$) koordinatlarını haiz bir uzay-zaman noktasına tekaabül eder. Bu itibarla (x_1, x_2, x_3, $x_4=ict$) uzay-zaman noktasını gösteren yervektörünün normu

$$S^2 = \vec{R} \cdot \vec{R} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = r^2 - c^2t^2 \qquad (1)$$

olur. Fakat $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$ ışığın 0 ve t ânları arasında katetmiş olduğu uzaysal uzaklığın karesini göstermektedir. Işığın hızı c olduğuna göre

$$r=ct \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) karşılaştırılınca

$$S_2=|\vec{R}|^2=0$$

yâni ışığın yayılmasına tekaabül eden dörtlü vektörün tekil bir evrensel vektör olduğu ortaya çıkar.

PROBLEM : 30.— 6. problemde LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant bir büyüklük olduğunu gördüğümüz

$$\Phi=\nu\left[t-\frac{1}{c}(x\cos A+y\cos B+z\cos C)\right] \tag{1}$$

fazının bu özelliğinden faydalanarak

$$\vec{\varkappa}=(\cos A,\ \cos B,\ \cos C) \tag{2}$$

olmak üzere

$$\vec{K}=-\left(\frac{\vec{\varkappa}}{\lambda},\ i\frac{\nu}{c}\right) \tag{3}$$

diye tanımlanan dört bileşenli vektörün evrensel ve tekil bir vektör olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$$\vec{R}=(x,\ y,\ z,\ ict)=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(\vec{r},\ ict)$$

evrensel yervektörü ile (3) aracılığıyla tanımlanmış olan $\vec{K}$ vektörünün skaler çarpımını teşkil ettiğimizde :

$$\vec{R}\cdot\vec{K}=-\frac{\vec{r}\cdot\vec{\varkappa}}{\lambda}+\nu t=\nu t-\frac{\nu}{c}\vec{r}\cdot\vec{\varkappa}$$

$$=\nu\left[t-\frac{1}{c}(x\cos A+y\cos B+\cos C)\right]=\Phi$$

bulunur. Φ fazı invaryant ve $\vec{R}$ de evrensel bir vektör olduğundan *evrensel vektörlük kriteryumundan* ötürü $\vec{K}$ nın da evrensel bir vektör olduğu yâni bir LORENTZ dönüşümünde bileşenlerinin tıpkı $\vec{R}$ evrensel yervektörünün bileşenleri gibi değişeceği anlaşılmış olur. $\vec{K}$ vektörüne evrensel yayılım vektörü adı verilir.

$\vec{K}$ nın normunu teşkil edelim:

$$\vec{K}\cdot\vec{K}=\frac{\vec{\varkappa}\cdot\vec{\varkappa}}{\lambda^2}-\frac{\nu^2}{c^2}=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=0$$

bulunur ki bu da evrensel yayılım vektörünün tekil bir dörtlü vektör olduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca, h ile PLANCK sâbitini göstererek,

$$\vec{Q}=h\cdot\vec{K}=h\left(\frac{\varkappa}{\lambda},\,i\frac{\nu}{c}\right)=\left(\frac{h}{\lambda}\vec{\varkappa},\,i\frac{E}{c}\right)$$

ile tanımlanan evrensel vektöre de foton için enerji - impuls vektörü adı verildiğini de ilâve edelim. $\vec{K}$ tekil bir vektör olduğuna göre $\vec{Q}=h\vec{K}$ nın da tekil bir vektör olacağı âşikârdır.

PROBLEM : 31.— Maddesel bir tânecik için tanımlanan evrensel enerji-impuls vektörü

$$\vec{P}=(p,\ imc)=(\gamma m_0\vec{u},\ i\gamma m_0 c)$$

şeklindedir.

İmpuls korunumu ilkesinden hareketle, sükûnetteki bir elektron üzerine gelen bir pozitronun biribirlerini yok etmeleri sonucu ortaya en aşağı iki foton çıkacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Sükûnetteki bir elektron üzerine gelen bir pozitronun yok olmasıyla ortaya tek bir foton çıkmış olduğunu varsayalım.

$$\vec{P}_e = (0,\ im_0 c)$$

sükûnetteki elektrona,

$$\vec{P}_p = (\vec{p},\ imc)$$

hareket hâlindeki pozitrona ve

$$\vec{Q} = h\vec{K} = \frac{h\nu}{c}(\vec{\varkappa},\ i)$$

de çarpışma sonucu ortaya çıkan fotona ait evrensel enerji-impuls vektörleri olsunlar.

İmpuls korunumu ilkesine göre

$$\vec{P}_e + \vec{P}_p = \vec{Q} \tag{1}$$

olmalıdır. Bu ifâdenin her iki yanının normunu teşkil eder ve $\vec{Q}$ nun da tekil bir evrensel vektör olduğunu göz önünde tutarsak

$$(\vec{P}_e + \vec{P}_p) \cdot (\vec{P}_e + \vec{P}_p) = (m_0 + m)^2 = 0$$

yâni

$$m_0 + m = 0 \tag{2}$$

bulunur. Öte yandan (1) in zamansal bileşeni

$$c(m_0 + m) = \frac{h\nu}{c}$$

veyâ

$$m_0 + m = \frac{h\nu}{c^2} \tag{3}$$

bağıntısını verir ki eğer $\nu \neq 0$ ise yâni yukarıda kabul ettiğimiz gibi iki tâneciğin yok olmasıyla ortaya tek bir foton çıkıyorsa, (2) ile (3) birbirleri ile bağdaşamazlar.

Bu takdirde elektronla pozitronun birbirlerini yok etmeleri esnâsında ortaya hiç değilse iki fotonun birden çıktığını varsayalım. Buna göre impuls korunumu gereğince

$$\vec{P}_e+\vec{P}_p=\vec{Q}_1+\vec{Q}_2 \tag{4}$$

olmalıdır.

(4) ün normu

$$m_0(m_0+m)=\frac{h^2}{c^2}\nu_1\nu_2\,(1-\vec{\varkappa}_1\cdot\vec{\varkappa}_2) \tag{5}$$

ve zaman bileşeni de

$$m_0+m=\frac{h\nu_1}{c^2}+\frac{h\nu_2}{c^2} \tag{6}$$

verir ki $\vec{\varkappa}_1$ ve $\vec{\varkappa}_2$ nin uygun tarzda seçilmesi sonucu (5) ve (6) bağıntıları aynı anda gerçeklenebilir. (5) ve (6) nın gerçekleşmesini sağlayan üç boyutlu $\vec{\varkappa}_1$ ve $\vec{\varkappa}_2$ birim vektörleri ortaya çıkan fotonların yönlerini göstermektedir.

PROBLEM : 32.—

$$\vec{D}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$ **ile belirlenen**

dört bileşeni haiz vektörün evrensel bir vektör olduğunu ve

$$\Box^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

D'ALEMBERT operatörünün LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$$\vec{R}=(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)$$

evrensel vektörünü göz önüne alarak $\vec{D}\cdot\vec{R}$ skaler çarpımını hesaplayalım:

$$\vec{D} \cdot \vec{R} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x_4} = 4 = \text{Sâbit} \qquad (1)$$

bulunur. Bu ise âşikâr olarak LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant bir büyüklüktür. Bir önceki problemde tesbit etmiş olduğumuza binâen bir evrensel vektörle bir vektörün skaler çarpımı eğer LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant ise bu ikinci vektörün de mecbûren evrensel bir vektör olacağı keyfiyetinden ötürü (1) ifâdesi $\vec{D}$ nin de evrensel bir vektör olduğuna delildir.

Öte yandan, evrensel bir vektör olduğunu böylece göstermiş olduğumuz $\vec{D}$ nin normu da $\vec{D}$ nin kendisiyle skaler çarpımı olduğu ve iki vektörün skaler çarpımlarının da LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant olmaları dolayısıyla invaryattır:

$$\begin{aligned}\vec{D} \cdot \vec{D} = \vec{D}' \cdot \vec{D}' &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4'^2} \qquad (2)\end{aligned}$$

Fakat

$$\begin{array}{ll} x_1 = x & x_1' = x' \\ x_2 = y & x_2' = y' \\ x_3 = z & x_3' = z' \\ x_4 = ict & x_4' = ict' \end{array}$$

olduğu göz önünde tutulursa (2) ifâdesinden

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

veyâhut da

$$\square^2 = \square'^2$$

olduğu tesbit edilmiş olur ki bu sonuç da D'ALEMBERT operatörünün LORENTZ dönüşümlerine göre invaryant olduğunu göstermektedir.

Klâsik Kuvantum Teorisi ve Elektronlar

PROBLEM : 33.— 1) Bir kara cismin 1327 °C da ve 27 °C da yayınladığı ışıma enerjilerinin oranı nedir?

2) Bir kara cismin $\lambda = 5\,\mu$ maksimum dalgaboyunu haiz ışın yayınlaması için ısıtılması gereken sıcaklık ne olmalıdır?

ÇÖZÜM :

1) Burada S ile kara cismin yüzeyinin alanını, E_1 ile $T_1 = 1327\,°C = (1327+273)\,°K = 1500\,°K$ de yayınladığı toplam enerjiyi ve E ile de $T_2 = 27\,°C = (27+273)\,°K = 300\,°K$ de yayınladığı toplam enerjiyi gösterelim. STEPHAN kanunu uyarınca

$$E_1 = S\sigma T_1^4, \qquad E_2 = S\sigma T_2^4$$

veyâ

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \left(\frac{1500}{300}\right)^4 = 5^4$$

ve dolayısıyla da

$$\frac{E_1}{E_2} = 625$$

bulunur.

2) WİEN kanunu uyarınca

$$\lambda_{max} = 2{,}898 \cdot 10^{-3} (m \times °K) = 2898\,(\mu \times °K)$$

olduğundan

$$T = \frac{2898}{5} = 579{,}3\,°K$$

ve dolayısıyla

$$T = 579{,}3 - 273 = 306{,}3\,°C$$

bulunur.

PROBLEM : 34.— a) Bir kara cismin yayınladığı ışıma enerjisinin maksimumuna tekaabül eden λ_{max} dalgaboyu ile kara cismin T sıcaklığı arasında

$$\lambda_{max} T = 2.898 \cdot 10^{-3} (m \times {}^{\circ}K)$$

şeklinde bir bağıntı olduğunu gösteriniz (WİEN öteleme kanunu)

b) Güneşin yüzey sıcaklığının 6000 °K olduğu ölçülmüştür. Eğer güneş mükemmel bir kara cisim olsaydı yayınladığı ışıma enerjisinin maksimumu hangi dalgaboyuna tekaabül edecekti?

ÇÖZÜM :

a) Kara cismin ışıma enerjisinin yoğunluğu PLANCK formülüne göre

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

dir. Buradan λ ya göre türev alıp bunu sıfıra eşitliyerek

$$e^{\frac{hc}{k\lambda_{max} T}} \left(1 - \frac{hc}{5k\lambda_{max} T}\right) = 1$$

bağıntısı bulunur. Bunun iki kökü olup birincisi olan $hc/\lambda_{max} kT = 0$, T nin ya da λ nın sonsuz değerine tekaabül ettiğinden bu kök fiziksel anlamı haiz değildir.

İkinci kökün ise

$$\frac{hc}{k\lambda_{max} T} = 4{,}965$$

değerlerine tekaabül etiği hesaplanır. Şu hâlde

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4{,}965\, k} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \times 2{,}999 \cdot 10^{8} \text{ m/sec}}{4{,}965 \cdot 1{,}38 \times 10^{-23} \text{ Joule}/{}^{\circ}K}$$

$$= 2{,}898 \cdot 10^{-3}\, m \cdot {}^{\circ}K$$

bulunur.

b) Güneş için WİEN öteleme kanunundan

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{6000} = 4830 \ \mathring{A}$$

bulunur.

PROBLEM : 35.— T=1000 °K sâbit sıcaklığındaki bir kara cismin ışıma enerjisi yoğunluğu (= ışıma gücü) WİEN öteleme kanunu uyarınca λ=2,898 μ için bir maksimumdan geçmektedir. Bu sıcaklıkta yayınladığı toplam enerji de U dur.

1) Acaba bu kara cisim hangi T′ sıcaklığında T sıcaklığında yayınladığının iki misli daha fazla bir toplam enerji yayınlar?

2) Bu T′ sıcaklığındaki ışıma gücünün maksimum dalgaboyu ne olur?

3) T=1000°K ve T′=1190°K sıcaklıklarına tekaabül eden maksimum ışıma güçlerinin oranı nedir?

4) Kara cisim, tanımı uyarınca, üzerine düşen her radyasyonu soğuran cisme denir. Buna paralel olarak, üzerine düşen radyasyonlardan ancak bir kısmını soğuran cisimlere de gri cisimler adı verilir. Buna göre T′ sıcaklığında toplam U enerjisini yayınlayan gri cismin soğurma katsayısının ne olacağını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

1) Bu soru STEPHAN kanununun doğrudan doğruya uygulanmasıyla kolayca çözülür. σ STEPHAN - BOLTZMANN sâbiti, U toplam radyasyon enerjisi, T mutlak sıcaklık ve S de ışıma yüzeyi olduğuna göre

$$U = \sigma T^4 S$$

dir. Eğer ışıma enerjisi aynı S yüzeyi için iki misli olursa, buna tekaabül eden sıcaklığı T' ile göstermek üzere,

$$U' = 2U = \sigma T'^4 S$$

yâni

$$T'^4 = 2T^4$$

olur. Buradan

$$4 \log T' = \log 2 + 4 \log T = \log 2 + 4 \log 1000$$

$$= 0{,}30103 + 12 = 12{,}30103$$

$$\log T' = 3{,}07525$$

ve

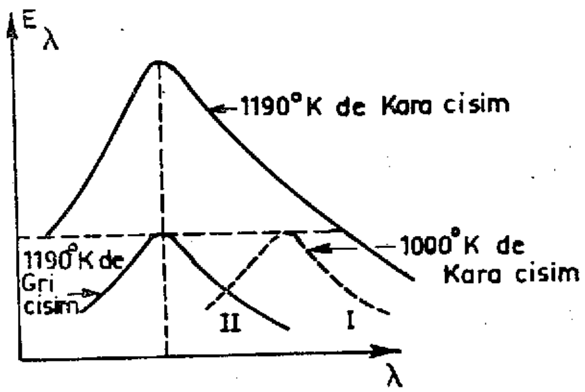
$$T' = 1109\,°K$$

bulunur.

2) $T' = 1190°K$ sıcaklığındaki kara cismin ışıma gücünün maksimumuna tekaabül eden λ_{max} dalgaboyu WİEN öteleme kanunundan bulunur:

$$\lambda_{max}\, T' = 2898$$

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}898 + 10^{-3}}{1190} = 2{,}4373 \times 10^{-6}\, m = 2{,}437\ \mu.$$



3) $T = 1000\,°K$ ve $T' = 1190\,°K$ sıcaklıklarına tekaabül eden maksimum ışıma güçlerinin oranını tesbit etmek için maksimum ışıma gücünün PLANCK formülüne WİEN öteleme kanunundan elde edilen λ_{max} değerini yerleştirmek sûretiyle elde edileceğine dikkat çekelim. Buna göre

$$u(\lambda_{max}) = u_{max} = \frac{8\pi hc}{\left(\frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{T}\right)^5} \frac{1}{e^{4{,}965} - 1} = b\, T^5$$

olur; yâni ışıma gücünün maksimum değeri kara cismin sıcaklığının 5. kuvveti ile orantılıdır. Buna göre

$$\frac{u'_{max}}{u_{max}} = \left(\frac{T'}{T}\right)^5 = \frac{T'}{T} \times \left(\frac{T'}{T}\right)^4$$

dir . Fakat problemin 1. şıkkında $(T'/T)^4 = 2$ olduğuna göre

$$\frac{u'_{max}}{u_{max}} = 2\,\frac{T'}{T} = 2 \times \frac{1190}{1000} = 2{,}38$$

sonucuna varılır.

4) Soğurma katsayısını hesaplarken cisimlerin ışıma güçlerini değil fakat toplam ışıma enerjilerini göz önüne almamız gerektiği âşikârdır.

$T' = 1190\,°K$ sıcaklığında yayınladığı toplam ışıma enerjisinin $T = 1000\,°K$ sıcaklığındaki bir kara cismin yayınladığı U toplam ışıma enerjisine eşit olması istenen bir gri cisim göz önüne alındığında, a ile soğurma katsayısı gösterilmek üzere, STEPHAN kanununa göre

$$U = \sigma T^4 = a\sigma T'^4$$

olur. Buradan, 1. şıkka göre,

$$a = \left(\frac{T}{T'}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

olması hasebiyle

$$a = 0{,}5$$

bulunur.

PROBLEM : 36.— Dalgaboyu $\lambda = 5000\ \mathring{A}$ olan yeşil ışık, bir termometrenin 2 gr. cıva ihtivâ eden haznesi tarafından (bütün ısı kayıplarının ihmâl edilebilir olduğunu farzederek) tamamen soğurulmaktadır. Haznenin sıcaklığının 3 °C yükselebilmesini temin için kaç fotonun soğurulması gerektiğini hesaplayınız.

(CEVAP: $2{,}13 \cdot 10^{18}$ foton)

PROBLEM : 37. $\lambda = 5900\ \mathring{A}$ lük ışık yayınlayan bir sarı ışık kaynağının 1 mum şiddetinde olduğu farzedilmektedir. Bu demektir ki

kaynaktan 1 m. mesafede 1 cm^2 lik yüzeyden 1 saniyede geçen enerji $1{,}5 . 10^{-7}$ Joule dür. Buna göre 1 cm^2 den kaç tane fotonun geçmekte olduğunu bulunuz.

(CEVAP: $4{,}5 \cdot 10^{11}$ foton/$cm^2 \cdot$ sec)

PROBLEM : 38.—

a) 50 MeV luk bir elektronun haiz olduğu impulsun aynısına sâhip olan bir fotonun enerjisini hesaplayınız.

b) Bu radyasyon, elektromagnetik spektrumların neresinde bulunur?

(CEVAP: a) 51 MeV
b) γ ışını)

PROBLEM : 39.— $2{,}5 . 10^{-6}$ watt/m^2 şiddetinde bir radyasyon 1 cm^2 lik bir yüzeye düşüyor,

a) Yüzeyin mükemmel soğuran bir yüzey olduğunu kabul ederek yüzey üzerinde hâsıl olan ortalama radyasyon kuvvetini hesaplayınız.

b) Yüzeyi, şimdi de, mükemmel yansıtan bir yüzey kabul ederek, yüzeydeki kuvveti hesaplayınız.

(CEVAP: a) $8{,}3 \cdot 10^{-19}$ newton
b) $16{,}6 \cdot 10^{-19}$ newton)

PROBLEM : 40.— $1{,}0 . 10^{-10}$ watt/m^2 kadar düşük şiddetli radyasyonları gözlemek mümkün olabilmektedir. (Bu hemen hemen gözün seçilebileceği en düşük ışık şiddetidir.)

a) Bu şiddet için 1 mm^2 lik yüzeyden her saniye geçen 4000 Å dalgaboyuna sahip fotonların sayısını bulunuz.

b) Aynı şiddet için 1 mm^2 lik yüzeyden her saniye geçen ve frekansları 1 MHz/sec olan radyofotonlar ne kadardır?

c) Aynı şiddet için aynı delikten aynı şartlar altında geçen 10^{-4} Å dalgaboylu γ ışını fotonları ne kadardır?

(CEVAP: a) $2 \cdot 10^2$
b) $1{,}5 \cdot 10^{11}$
c) $5 \cdot 10^{-6}$)

PROBLEM : 41.— Bir su yüzeyi üzerine gelen 0,1 MeV luk foton huzmesinin geliş şiddeti I_0 dır. 10 cm. kalınlığındaki bir su tabakasının içinden geçtikten sonra huzmenin şiddeti $I_0/5$ değerine düşmektedir. Bu foton enerjisi için suyun absorbsiyon katsayısını hesaplayınız.

(CEVAP: $16{,}1\ m^{-1}$)

PROBLEM : 42.— Çıplak gözle 6. kadirden bir yıldız ancak görülebilmektedir. Bu da 1 m mesafede 10^{-8} mum şiddetindeki bir ışık kaynağına eşdeğerdir. Gözbebeğinin çapı yaklaşık olarak 3 mm olduğuna göre gözbebeğinden saniye başına kaç foton geçtiğini hesaplayınız. λ dalgaboyu ve dönüştürme katsayısı 37. problemdekinin aynı farzedilecektir.

(CEVAP: 320 foton/Sec)

PROBLEM : 43.— a) ν frenkanslı bir ışık, şiddeti I Joule/m^2. sec olan paralel bir huzme hâlinde yayılmaktadır. 1 m^3 teki foton sayısını I ve ν cinsinden hesaplayınız.

b) Sâdece görülebilen sarı ışık için (n) yoğunluğunu problem: 38 de târif edildiği gibi hesaplayınız.

$\left(\text{CEVAP: a) } n = \dfrac{I}{hc\nu} \text{ ve } 0{,}15 \text{ foton/m}^2\right)$

PROBLEM : 44.— K metali için $\Phi=2$ eV olduğuna göre 3500 Å luk (1 Å$=10^{-10}$ m) monokromatik bir mor ışığın K yüzeyinden kopardığı elektronların enerjisini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Foton - elektron çarpışması fotonların soğurulmaları ile sonuçlandığından

$$h\nu = T + \phi = \frac{1}{2} m v^2 + \phi$$

$$\frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{1}{2} m v^2 = T$$

olur. Dolayısiyle de

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{2{,}99\cdot 10^8\ \text{m/sec}\times 6{,}625\cdot 10^{-34}\ \text{Joule. sec}}{3500\cdot 10^{-10}\ \text{m}}-(2\times 1{,}602\cdot 10^{-19})$$

$$=56{,}77\times 10^{-16}\ \text{Joule}=\frac{56{,}77\times 10^{-16}\ \text{Joule}}{1{,}602\times 10^{-19}\ \text{Joule/eV}}$$

$$=35{,}4\times 10^3\ \text{eV}=35{,}4\ \text{keV}$$

bulunur.

PROBLEM : 45.— Bir sodyum yüzeyinden elektronlar kopabilmesi için eşik dalgaboyu 5400 Å dür.

a) Sodyumun yüzeyinde bulunan bir elektronun bağ enerjisini, yâni Φ iş fonksiyonunu hesaplayınız.

b) Bu yüzeye 2000 Å lük dalgaboyu ışık çarptığı zaman yayınlanan fotoelektronların maksimum kinetik enerjileri eV cinsinden ne kadardır?

(CEVAP : a) 2,3 eV
b) 3,9 eV)

PROBLEM : 46.— a) İş fonksiyonu $\Phi=4{,}53$ e V olan bir tungsten yüzeyinden maksimum hızları ışık hızının ondabirine eşit olan fotoelektronlar kopartabilmek için gerekli elektromagnetik radyasyonun dalgaboyu ne kadardır?

b) Maksimum hızları 0,98 c olan fotoelektronlar hâsıl eden fotonların dalgaboyu nedir?

(CEVAP : a) 4,85 Å
b) 0,0061 Å)

PROBLEM : 47.— Başlangıçta sükûnette bulunan bir hidrojen atomu üzerine 1 Å lük bir foton çarparak atomun tek elektronuna bütün enerjisini intikal ettirmektedir. Böylece serbest kalan elektron (Bağ enerjisi = 13,6 eV dur) gelen fotonla aynı doğrultuda hareket eder.

a) Fotoelektronun hızını ve kinetik enerjisini bulunuz.

b) Geri saçılan pozitif iyonun impulsu ve enerjisi nedir?

(CEVAP: a) 12,4 KeV ; $6{,}4 \cdot 10^7$ m/sec

b) $5{,}1 \cdot 10^{-23}$ kg.m/sec ; 5,7 eV)

PROBLEM : 48.— Üst atmosferdeki O_2 moleküler oksijeni güneşten gelen fotonlar vâsıtasıyla 2 atoma ayrışır. Bu ameliyenin meydana gelmesine sebeb olan fotonun maksimum dalgaboyu 1750 Å olduğuna göre molekülü teşkil eden 2 oksijen atomu arasındaki bağ enerjisi acaba eV cinsinden ne kadar olur? (Bu olay yüksek uçuşlar için mümkün enerji kaynakları olabilir. Güneşten gelen radyasyon moleküler oksijeni atomik oksijene ayırır ve atomlar molekül hâlinde tekrar birleştikleri zaman enerji serbest kalır.)

(CEVAP: 7,1 eV)

PROBLEM : 49.— Enerji ve impuls korunumu kanunlarını uygulayarak fotoelektrik olayın serbest bir elektron üzerinde vukuu bulmasının imkânsız olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

1) Eğer fotoelektrik olay bağlı bir elektron üzerinde değil de serbest bir elektron üzerinde vukuu bulsaydı bu takdirde foton ile elektrondan oluşan sistemin çarpışma öncesi ve çarpışma sonrası toplam enerjisinin korunduğunu, klâsik mekanik bakımından,

$$h\nu + m_e c^2 = m_e c^2 + \frac{1}{2} m_e v^2$$

şeklinde yazmamız gerekecekti. Bu denklemden

$$h\nu = \frac{1}{2} m_e v^2 \qquad (1)$$

sonucu elde edilir. Öte yandan sistemin impulsunun korunması

$$\frac{h\nu}{c} = m_e v \qquad (2)$$

denklemini verecekti. (1) ve (2) denklemlerinden

$$v\,(v - 2c) = 0$$

olması gerektiği çıkar. Şu hâlde ya

$$v = 0$$

dır ki bu (1) *i* gerçeklemediği için kabul edilebilir bir çözüm olamaz; ya da

$$v = 2c$$

dir ki bu da imkânsızdır.

2) Diğer taraftan eğer Rölâtivite Mekaniği açısından mesele incelenecek ve foton — serbest elektron sistemine enerjinin korunumu ilkesi uygulanacak olursa

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

olmak üzere

$$h\nu + m_e c^2 = mc^2 = m_e \gamma c^2$$

yâni

$$h\nu = m_e c^2(\gamma - 1) \qquad (1)$$

ve impuls korunumu ilkesi de uygulanırsa

$$\frac{h\nu}{c} = p = \sqrt{m^2c^2 - m_e^2c^2} = m_e c\sqrt{\gamma^2 - 1} \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) denklemlerinden

$$m_e c^2(\gamma - 1) = m_e c^2 \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

veyâ

$$\gamma - 1 = \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$(\gamma - 1)^2 = \gamma^2 - 1$$

$$\gamma^2 - 2\gamma - 1 = \gamma^2 - 1$$

$$2\gamma = 2$$

$$\gamma = 1$$

bulunur; bu da $v=0$ demek olduğundan ve bu sonuç (1) bağıntısını gerçeklemediğinden mümkün değildir.

PROBLEM : 50.— Bir metal yüzeyine gelen bütün fotonların sâdece küçük bir kesri elektronları serbest bırakır. Bir fotonun metalden bir elektron koparması ihtimâline «fotoelektrik verim» denir. 5 cm^2 lik bir sodyum yüzeyinin $1{,}26 \cdot 10^{-8}$ amperlik bir satürasyon akımına sebep olduğunu kabul ederek problem 37 de tarif edilmiş olan ışık için verimi hesaplayınız.

(CEVAP: % 3,5)

PROBLEM : 51.— Bir sodyum arkından çıkan sarı ışık ($\lambda = 5890$ Å) ile cıva arkından çıkan morötesi ışığın ($\lambda = 2535$ Å) bir potasyum levhasından kopardıkları elektronların frenleme potansiyelleri, sırasiyle, 0,36 V ve 3,14 V dur. Elektronun yükü bilindiğine göre,

a) Planck sâbitini,

b) Potasyumun Φ iş fonksiyonunu ve

c) Potasyumda fotoelektrik olayın uzun dalgaboyu sınırını hesaplayınız.

(CEVAP: a) $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Joule · sec
b) 1,74 eV
c) 7110 Å)

PROBLEM : 52.— Tantaldan yapılmış bir levhadan fotoelektrik olay aracılığıyla elektron koparmak için gerekli iş 4,19 volttur. Bir fotoselülün tantaldan yapılmış fotokatoduna $\lambda = 2536$ Å lük bir morötesi ışık düşürülecek olursa ortaya çıkan fotoelektronları durdurabilmek için kaç voltluk bir zıt potansiyel uygulamak gerekir?

$\lambda' = 3650$ Å lük bir ışık için bu frenleme potansiyeli ne olur? Bu iki sonucu karşılaştırarak yorumlayınız.

ÇÖZÜM :

Fotoelektrik olayın temel kuralına göre

$$h\nu = T + \phi$$

dir. Buradan çıkan fotoelektronların kinetik enerjisi olarak

$$T=h\nu-\phi=\frac{hc}{\lambda}-\phi=\frac{6{,}625\times10^{-34}(\text{Joule}\times\text{sec})\times3\times10^{8}(\text{m/sec})}{2{,}536\times10^{-7}(m)\times1{,}602\times10^{-19}(\text{Joule/eV})}-4{,}19\text{ eV}$$

$$=(4{,}89-4{,}19)\text{ eV}=0{,}70\text{ eV}$$

bulunur.

Uygulanan frenleme potansiyelinin fotoelektronun kinetik enerjisini sıfıra indirgemesi için onu, hızı sıfır olacak şekilde yavaşlatması gerekir. Eğer fotoelektronun hızını $T=0{,}70$ eV olacak şekilde arttırmak için yapılan hızlandırma işi 0,70 eV ise, âşikâr olarak zıt yönde aynı işi yapmak gerekir ki fotoelektronun hızı sıfır olsun. Bu itibarla frenleme potansiyeli 0,70 volt olur.

$\lambda'=3650\ \mathring{A}$ lük ışık için ise

$$T=\frac{hc}{\lambda'}-\phi=\frac{6{,}625\times10^{-34}(\text{Joule}\cdot\text{sec})\times3\times10^{8}(\text{m/sec})}{3{,}650\times10^{-7}(m)+1{,}602\times10^{-19}(\text{Joule/eV})}-4{,}19(\text{eV})$$

$$=(3{,}49-4{,}19)=-0{,}70\text{ eV}$$

olur.

Bu ikinci hâlde fotoelektronun kinetik enerjisinin negatif çıkması elektronun metalden kopmamış olduğuna, ona bağlı olduğuna ve onu metalden koparabilmek için üstüne +70 eV luk bir enerji intikal ettirmenin gerekliliğine delâlet etmektedir.

PROBLEM : 53.— Bir tungsten yüzeyine $\lambda_1=1800\ \mathring{A}$ luk bir radyasyon düştüğünde, açığa çıkan fotoelektronların maksimum enerjilerinin 1,5 eV olduğu tesbit edilmiştir. Eğer tungsten yüzeyine gelen radyasyonun dalgaboyu $\lambda_0=2300\ \mathring{A}$ u aşarsa fotoelektron yayımı durmaktadır. Bu verilere dayanarak h Planck sâbitinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Problemin verilerine göre

$$\begin{cases} h\nu_1=T+\phi \\ h\nu_0=\phi \end{cases}$$

denklemleri geçerlidir. Buradan

$$h\nu_1 T+h\nu_0$$

$$h(\nu_1 - \nu_0) = T \quad \text{ya da} \quad h = \frac{T}{\nu_1 - \nu_0}$$

ve dolayısiyle de

$$h = \frac{1{,}5 \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,(\text{Joule})}{\dfrac{3 \times 10^{8}(\text{m/sec})}{10^{-10}(m)}\left[\dfrac{1}{1800} - \dfrac{1}{2300}\right]} = 6{,}625 \times 10^{-34}\,(\text{Joule} \cdot \text{sec})$$

bulunur.

PROBLEM : 54.— Cıvanın $\lambda = 2537$ Å lük çizgisinin bir metalin yüzeyinden kopardığı elektronlar 2,60 volt luk bir potansiyel altında frenlenebilmektedirler.

Cıvanın $\lambda = 1849$ Å lük çizgisi için aynı metalden kopacak elektronların ne kadarlık bir potansiyel farkıyla durdurulabileceklerini hesaplayınız.

(CEVAP: 4,42 eV)

PROBLEM : 55.— 1. Sodyumlu bir fotoelektrik selülün katot yüzeyi 13 cm² dir. Selül, 32 mum şiddetindeki noktasal bir ışık kaynağından 50 cm uzaklığa yerleştirilmiştir.

a) Kaynaktan itibaren katodun görüldüğü katı açının değeri nedir?

b) Selülün ortalama duyarlığı 12 μA/lümen olduğuna göre bu şartlar altında selülün sağladığı akım ne olur?

2. Fotoelektrik eşiğin $\lambda = 0{,}583\,\mu$ olduğu bilindiğine göre

a) Bu elektronun katottan koparabilmek için kaç erg'lik enerji gerektiğini, ve

b) Bu enerjiyi kazanabilmesi için elektronu ne gibi bir potansiyel farkına tâbi tutmak gerektiğini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

1. a) Tepesi merkezde bulunan Ω tepe açılı bir koninin birim yarıçaplı bir küre üzerinde sınırladığı S yüzey parçası, tanımı gereğince, steradyan cinsinden Ω *katı açısını* temsil eder ve:

$$\Omega_{\text{sterad}} = \frac{S}{R^2} = S$$

dir. Buna göre $S=13$ cm² lik bir yüzeyi 0,5 m uzaklıktan gören katı açı

$$\Omega = \frac{0{,}0013\,(\mathrm{m}^2)}{(0{,}5)^2\,(\mathrm{m}^2)} = 0{,}52\times 10^{-2} \text{ steradyan}$$

olur.

b) Lümen Φ ışık akısının birimi olup I ışık şiddetine

$$\Phi_{\text{lümen}} = I_{\text{mum}} \times \Omega_{\text{steradyan}}$$

bağıntısıyla bağlıdır. Buna göre

$$\Phi = 32\times 0{,}52\times 10^{-2}\ (\text{mum}\times\text{steradyan}) = 0{,}166 \text{ lümen}$$

bulunur. Selülün duyarlığı 12 μA/lümen olduğuna göre selülün sağladığı i elektrik akımı

$$i = 12\times 10^{-6}\,(A/\text{lümen})\times 0{,}166\ (\text{lümen}) = 2\times 10^{-6}\,A = 2\mu A$$

olacaktır.

2. a) Fotoelektrik olayın temel kanununa göre bu olay metal üzerine gelen belirli bir ν_0 frekansından daha büyükse vukuu bulur.

$h\nu_0/e=\phi/e$ ye de metalin iş fonksiyonu denir. Şu hâlde bu eşikteki elektronun enerjisi

$$eV = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6{,}625\times 10^{-34}\,(\text{Joule}\cdot\text{sec})\times 3\times 10^{8}\,(\text{m/sec})}{5{,}83\times 10^{-7}\,(\text{m})}$$

$$= 34{,}1\times 10^{-20}\,(\text{Joule}) = 34{,}1\times^{-13}(\text{erg})$$

dir.

b) Bu sonuca göre bu elektronun bu enerjiyi kazanabilmesi için tâbi tutulması gereken potansiyel farkı da

$$V = \frac{h\nu_0}{e} = \frac{34{,}1\times 10^{-20}\,(\text{Joule})}{1{,}602\times 10^{-19}\,(\text{Coulomb})} = 2{,}1\,V$$

olacaktır.

PROBLEM : 56.— Bir metal yüzeyi $\nu_1=0{,}9\,.\,10^{15}$ sec^{-1} frekansını haiz bir ışıkla aydınlatıldığı zaman 0,6 voltluk durdurucu bir potansiyel uygulandığında durdurulabilen elektronlar yayınlamaktadır. Aynı yüzey $\nu_2=1{,}26\,.\,10^{15}$ sec^{-1} frekansını haiz bir ışıkla aydınlatılırsa çıkan elek-

tronları durdurmak için gerekli potansiyelin 2,1 volt olduğu tesbit edilmektedir. Bu verilerden yararlanarak h PLANCK sâbitinin değerini ve metalin iş fonksiyonunu tesbit ediniz.

ÇÖZÜM :

ν_1 ve ν_2 frekansları

$$h\nu_1 = T_1 + \phi$$

$$h\nu_2 = T_2 + \phi$$

denklem sistemini gerçeklerler. Buradan

$$h(\nu_2 - \nu_1) = T_2 - T_1$$

veyâ

$$h = \frac{T_2 - T_1}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{(2{,}1 - 0{,}6) \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{Joule}}{(1{,}26 - 0{,}9) \times 10^{15}\,\text{sec}^{-1}} = 6{,}625 \times 10^{-34}\,\text{Joule} \cdot \text{sec}$$

bulunur.

Metalin iş fonksiyonunu bulmak için

$$h\nu_1 = T_1 + \phi$$

ifâdesinden

$$h\nu_1 - T_1 = \phi = (6{,}625 \times 10^{-34} \times 0{,}9 \times 10^{15}) - (0{,}6 \times 1{,}602 \times 10^{-19})$$
$$= 5{,}0013 \times 10^{-19}\,\text{Joule}$$

olduğu görülür. Şu hâlde iş fonksiyonunun değeri olarak

$$\frac{\phi}{e} = \frac{5{,}0013 \times 10^{-19}\,\text{Joule}}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{Coulomb}} = 3{,}1\ \text{Volt}$$

bulunur.

PROBLEM : 57.— Bir metal yüzeyinin iş fonksiyonu 4,5 volt ise fotoelektronların yayını için kritik dalgaboyunu hesaplayınız. Bu yüzeye 2000 Å luk bir ışın düştüğü takdirde yayınlanacak olan fotoelektronların enerji ve hızlarını hesabediniz.

ÇÖZÜM :

Eşik enerjisi

$$\phi = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

olduğuna göre

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\frac{\phi}{e}\, e} = \frac{6,625\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{4,5\times1,602\times10^{-19}} = 2744\times10^{-10}\, m = 2744\ \mathring{A}$$

dür.

Fotoelektrik olayın temel denklemi olan

$$\frac{hc}{\lambda} = h\nu = T + \phi$$

ifâdesinden

$$T = \frac{6,625\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{2000\times10^{-10}} - (4,5\times1,602\times10^{-19}) = 2,679\times10^{-19}\ \text{Joule}$$

bulunur.

Kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2}\, mv^2$$

ile verildiğine göre

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\times2,697\times10^{-19}\ \text{Joule}}{9,108\times10^{-31}\ \text{kg}}} = 76,95\times10^{4}\ \text{m/sec}$$

bulunur.

PROBLEM : 58.— $\lambda = 4560\ \mathring{A}$ luk bir ışıktan 1 mwatt lık kadarı bir sezyum yüzeyi üzerine düşüyor. Bunun ancak % 0,5 inin fotoelektron koparmağa yaradığını varsayarak açığa çıkan i fotoelektron akımını ve bunu sıfıra indirgemek için gerekli durdurucu potansiyeli hesaplayınız (sezyumun iş fonksiyonu = 1,93 volttur).

ÇÖZÜM :

Genel ışığın herbir fotonunun enerjisi

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,625\times10^{-34}\ (\text{Joule}\cdot\text{sec})\times3\times10^{8}\ (\text{m/sec})}{4560\times10^{-10}\ (m)}$$

$$= 4,32\times10^{-19}\ \text{Joule/foton}$$

dur.

Buna göre her saniye metal yüzeyine gelen foton adedi

$$n = \frac{10^{-3}\,(\text{Watt})}{4{,}32\times10^{-19}\,(\text{Joule/foton})} = 2{,}32\times10^{15}\,(\text{foton/sec})$$

olur. 1 saniyedeki elektron sayısının da

$$n_e = 2{,}35\times10^{15}\times\frac{0{,}5}{100} = 1{,}16\times10^{13}\,(\text{elektron/sec})$$

olduğu görülür. Buna göre elektron akımı da

$$i = e\,n_e = 1{,}602\times10^{-19}\,(\text{Coulomb})\times1{,}16\times10^{13}\,(\text{elektron/sec})$$
$$= 1{,}86\times10^{-6}\ \text{Amper} = 1{,}86\,\mu A$$

dir.

PROBLEM : 59.— Bir selülün fotokatodundan bir elektron koparmak için $W_0 = 1{,}8$ eV lik bir iş yapmak gerekmektedir.

1. İlk bir deneyde fotokatot fotoelektrik eşiğe tekaabül eden monokromatik bir ışıkla aydınlatılmaktadır. Bunun dalgaboyunu Å cinsinden veriniz.

2. İkinci bir deneyde katot üzerine $\lambda = 8000$ Å lük manokromatik bir ışık gönderilmektedir. Bu takdirde ne olur? Ve niçin olur?

3. Üçüncü bir deneyde ise katot $\lambda = 3000$ Å lük monokromatik bir ışıkla aydınlatılmaktadır. Bu takdirde

a) fotokatottan çıkan elektronların kinetik enerjilerini ve maksimum hızlarını, ve

b) fotoelektrik akımı durdurmak amacıyla fotokatoda uygulanması gereken durdurma gerilimini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

1. ϕ ile elektronu metalden koparabilmek için gerek enerjiyi ve $T = \frac{1}{2}mv^2$ ile de koparılan elektronun kinetik enerjisini gösterirsek fotonun $h\nu$ enerjisi, enerjinin korunumu ilkesine göre,

$$h\nu = T + \phi$$

şeklinde yazılacaktır.

Fotoelektrik eşik, elektronu metalden koparmak için gerekli minimum enerjiye tekaabül etmektedir; buna göre $T=0$ ve

$$h\nu = \phi = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

olacaktır. λ_0 fotoelektrik eşiğe tekaabül eden ışının dalgaboyunu göstermektedir.

Şu hâlde MKS sisteminde

$$\phi = 1{,}8 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ Joule} = 28{,}83 \times 10^{-19} \text{ Joule}$$

olacağına göre

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\phi} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ (Joule} \cdot \text{sec)} \times 3 \cdot 10^{8} \text{(m/sec)}}{28{,}83 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}}$$

$$= 6{,}894 \cdot 10^{-7}\, m = 6894\ \mathring{A}$$

olur.

2. Katot üzerine 8000 $\mathring{A}$ lük bir ışın gönderildiğinde ne olduğunu anlıyabilmek için bu ışının enerjisini hesaplayalım:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ (Joule} \cdot \text{sec)} \times 3 \cdot 10^{8} \text{ (m/sec)}}{8 \cdot 10^{-7}\, (m)}$$

$$= 2{,}484 \cdot 10^{-19} \text{ (Joule)} = \frac{2{,}484 \cdot 10^{-19} \text{ (Joule)}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ (Joule/eV)}} = 1{,}55 \text{ eV}$$

bulunur. Oysaki göz önüne alınan metalden elektron koparmak için eşik enerjisinin 1,8 eV olduğu söylenmişti. Bu duruma göre $\lambda = 8000\ \mathring{A}$ lük bir ışınla fotoelektrik olayın zuhur etmiyeceği anlaşılmış olmaktadır.

3. a) Yukarıda, $\lambda_0 = 6894\ \mathring{A}$ lük dalgaboyunu haiz ışınlarından daha yüksek dalgaboylarını haiz olanların fotoelektronlar koparmıyacağını ve daha düşük dalgaboylarını haiz olanların ise kopardık-

ları fotoelektronlara üstelik bir de kinetik enerji vereceklerine şâhit olduk.

$\lambda = 3000\,\mathring{A}$ lük ışın da demek ki elektrona bir

$$T = h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{-7}} - (1{,}8 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19})$$

$$= 3{,}741 \cdot 10^{-19}\ \text{Joule} = \frac{3{,}741 \cdot 10^{-19}\ (\text{Joule})}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ (\text{Joule/eV})}$$

$$= 2{,}33\ \text{eV}$$

lik bir kinetik enerji vermektedir. Buna göre bu fotoelektronun hızı da

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 3{,}741 \cdot 10^{-19}}{9{,}108 \cdot 10^{-31}}} = 0{,}905 \cdot 10^{6}\ \text{m/sec} = 905\ \text{km/sec}$$

olur.

b) Bu fotoelektronları durdurmak için fotokatoda uygulanması gerekli durdurma gerilimi de

$$T = 3{,}741 \cdot 10^{-19} = \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \times \text{V}$$

den

$$\text{V} = \frac{3{,}741 \cdot 10^{-19}\ (\text{Joule})}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ (\text{Coulomb})} = 2{,}33\ \text{Volt}$$

olarak tesbit edilir.

PROBLEM : 60.— $\lambda = 0{,}708\,\mathring{A}$ dalgaboylu bir ışın bir karbon bloku tarafından saçılmaya mâruz kalmaktadır. Bu takdirde 180° lik bir açı içine saçılan ışının dalgaboyundaki değişimi ve bu olay esnâsında ortaya çıkan geri tepiş elektronlarının eV cinsinden maksimum kinetik enerjilerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Bu bir COMPTON saçılması olduğundan, φ saçılma açısı olmak üzere

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$$

dir. $\varphi = \pi$ olduğundan

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{mc}$$

olur. Şu hâlde

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{mc} = \frac{2 \times 6{,}625 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \times 3 \cdot 10^{8}} = 0{,}484 \cdot 10^{-11}\, m = 0{,}048\,\mathring{A}$$

olur. Buna göre saçılmış ışığın dalgaboyu

$$\lambda = 0{,}7080 + 0{,}048 = 0{,}756\,\mathring{A}$$

olur. Göz önüne alınan ışının fotonunun kaybettiği enerji elektrona intikâl ederek onu geri teptirir. Şu hâlde ν ve ν' ile çarpışma öncesi ve sonrası frekansları, λ ve λ' ile de dalgaboylarını göstermek üzere elektronun enerjisi olarak

$$h(\nu - \nu') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'}(\lambda' - \lambda)$$

$$= \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{8}}{0{,}708 \cdot 10^{-10} \times 0{,}756 \cdot 10^{-10}}(0{,}484 \cdot 10^{-11}) = 17{,}96 \cdot 10^{-17}\,\text{Joule}$$

$$= \frac{17{,}96 \cdot 10^{-17}\,(\text{Joule})}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,(\text{Joule/eV})} = 11{,}22 \cdot 10^{2}\,\text{eV} = 1{,}122\,\text{keV}$$

bulunur.

PROBLEM : 61.— 0,015 $\mathring{A}$ dalgaboylu fotonların serbest elektronlar tarafından saçılmaya uğradıklarını farzederek

a) 45° ve

b) 135° lik açılar altında saçılan fotonların dalgaboylarını, ve her iki hâlde de bunların serbest elektronlara intikâl ettirdikleri enerjinin değerlerini hesaplayınız.

(CEVAP: a) 0,022 $\mathring{A}$; b) 0,056 $\mathring{A}$
c) 0,27 MeV; d) 0,61 MeV)

PROBLEM : 62.— $\varphi = 90°$ lik bir açı ile saçılan X-ışınlarının λ' dalgaboylarını

a) $\lambda = 2\ \mathring{A}$ olan «yumuşak X ışınları» için

b) $\lambda = 0{,}200\ \mathring{A}$ olan «sert X ışınları» için ve

c) $\lambda = 0{,}00400\ \mathring{A}$ olan «sert gamma ışınları» için

hesaplayınız.

(CEVAP : $2{,}024\ \mathring{A}$; $0{,}224\ \mathring{A}$ $0{,}0282\ \mathring{A}$)

PROBLEM : 63.— Dalgaboyu $\lambda = 0{,}707\ \mathring{A}$ olan molibdenin ilk çizgisi olan K_α için Compton olayı tarafından öngörülen $(\lambda' - \lambda)$ dalgaboyu farkını $\varphi = 0°$, $45°$, $90°$, $135°$ ve $180°$ açıları için hesaplayınız. Bir kalkit kristali ile mücehhez bir Bragg spektrometresiyle, birinci mertebeden gözlenen tâdil edilmiş λ' dalgaboylarını ve bunlara tekaabül eden θ açılarını hesaplayınız. ($d = 3{,}029\ \mathring{A}$.).

(CEVAP :

$\lambda' - \lambda = 0\ \mathring{A}$; $0{,}00709\ \mathring{A}$; $0{,}0242\ \mathring{A}$; $0{,}0413\ \mathring{A}$; $0.0484\ \mathring{A}$

$\theta = 6°\,43'$; $6°\,46'$; $6°\,56'$; $7°\,6'$; $7°\,10'$)

PROBLEM : 64.— Bir X-ışınları hüzmesi serbest elektronlar tarafından 60° lik bir açı ile saptırılmaktadır. Sapmaya mâruz kaldıktan sonra X-ışınlarının dalgaboylarının $0{,}0220\ \mathring{A}$ olduğu bilindiğine göre elektronlar üzerine düşen X-ışınlarının dalgaboyları ne kadardır?

ÇÖZÜM :

COMPTON formülü

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$

olduğuna göre

$$\lambda = \lambda' - \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$

dir; ve λ için

$$\lambda = 0{,}0220 - \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{9{,}108 \cdot 10^{-31} \times 3 \cdot 10^{8}}\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}0988\ \mathring{A}$$

bulunur.

PROBLEM : 65.— $\varphi=90°$ **lik açı altında saçılan X-ışınları için Comptan olayı gözlenmektedir. Geri tepen elektronlara tekaabül eden** θ **açısını** λ **ve** λ' **cinsinden ve** λ **ile** θ **ya tâbî elektronun** v **hızı cinsinden ifâde ediniz.** λ **için bakırın** K_α **çizgisini** ($\lambda=1{,}541$ Å) **göz önüne alınız.**

(CEVAP: $\operatorname{tg}\theta=-\lambda/\lambda'=-0{,}985$

$$v=\frac{h}{\lambda m_e\cos\theta}=6{,}62\cdot10^6\ \text{m/sec}\Big)$$

PROBLEM : 66.— $\lambda=0{,}708$ Å **lük bir X ışınları hüzmesi bir karbon bloku tarafından saptırılmaktadır. Bu hüzmeden 180° içine saptırılmış olan ışınlardaki** $\Delta\lambda$ **dalgaboyu değişimini ve bu saptırılma sırasında geri tepen elektronların maksimum kinetik enerjisini eV cinsinden hesaplayınız.**

ÇÖZÜM :

COMPTON formülü

$$\lambda'-\lambda=\Delta\lambda=\frac{h}{m_ec}(1-\cos\varphi)$$

olduğuna göre

$$\Delta\lambda=\frac{6{,}625\cdot10^{-34}}{9{,}108\cdot10^{-31}\times3\cdot10^8}\times2=0{,}0485\cdot10^{-10}\,m=0{,}0485\,\text{Å}$$

olur.

Foton - elektron çarpışmasında saçılan elektronun kinetik enerjisi

$$h\nu-h\nu'=T=\frac{1}{2}m_ev^2$$

ile belirlendiğine ve

$$\lambda'=\Delta\lambda+\lambda=0{,}708\,\text{Å}+0{,}0485\,\text{Å}=0{,}7565\,\text{Å}$$

olduğuna göre, sonuç olarak

$$T = \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'} (\lambda' - \lambda)$$

$$= \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{8}}{0{,}708 \cdot 10^{10} \times 0{,}7565 \cdot 10^{-10}} \times (0{,}0485 \cdot 10^{-10})$$

$$= 1{,}8 \cdot 10^{-16} \text{ Joule} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-16} \text{ Joule}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ (Joule/eV)}}$$

$$= 1{,}123 \text{ eV}$$

bulunur.

PROBLEM : 67.— COMPTON'un, fotonların impulsu haiz olduklarına dair fikrinden hareketle, yansıtıcı bir yüzeye dik doğrultuda gelen radyasyonun hâsıl ettiği basıncı radyasyon şiddeti cinsinden hesaplayınız. (Enerji şiddeti = Saniyede, cm^2 başına gelen enerjidir)

1000 mum şiddetinde bir kaynaktan çıkan sarı ışığın, yüzeyi A=5 cm^2 olan ve kaynaktan 1 m mesafede ışınlara dik durumda yerleştirilmiş bir ayna üzerinde hâsıl ettiği kuvveti Problem: 37 deki verileri kullanarak hesaplayınız. (N=cm^2 de saniye başına gelen foton sayısıdır)

(CEVAP :

$$\text{Basınç} = \frac{2 N h\nu}{c}$$

Kuvvet = $5 \cdot 10^{-15}$ newton)

PROBLEM : 68.— Geliş şiddeti I_0 olan bir ışık, kalınlığı Δl olan ince bir soğurucu tabakadan geçerken şiddetinde bir ΔI kaybı vâki olur. Bu ΔI kaybı yaklaşık olarak Δl kalınlığı ve I_0 geliş şiddeti ile orantılıdır. Orantı katsayısı olan ve soğurucu maddeyi karakterize eden μ ye soğurma katsayısı denir. (μ ışığın dalgaboyuna sıkı sıkıya bağlı olabilir.)

Bu yaklaşıklık soğurucu tabakanın daha küçük Δl kalınlıkları için daha doğru olur. Buna göre üzerine gelen ışığın şiddeti I_0 ve kalınlığı l_1 olan kalın bir soğurucu tabakayı kateden ışığın nihâi I_1 şiddetini hesaplayınız.

(CEVAP: $\Delta I = -\mu \Delta l \cdot I$

$I_1 = I_0 e^{-\mu l_1}$)

PROBLEM : 69.— Havası boşaltılmış bir tüpte anot ile katot arasındaki sürekli gerilim 250 volttur. Bu takdirde anoda gelen elektronların kinetik enerjilerini eV cinsinden değerlendiriniz. Anot akımının şiddeti 6,4 mA olduğu takdirde anoda yığılan gücü bulunuz.

ÇÖZÜM :

$$E = \mathrm{eV} = \frac{1}{2} mv^2$$

olduğuna göre anoda gelen elektronların kinetik enerjilerinin

$$E = 1 \times 250 = 250 \text{ eV}$$

olduğu anlaşılır.

Bir elektrik akımı vukuu bulduğu zaman bu akımın şiddeti bir saniyede anot üzerine ulaşan elektronların n sayısının fonksiyonudur :

$$I = n \cdot e$$

Akımın doğurduğu güç ise bir elektronun kinetik enerjisi ile bir saniyede anoda varan elektronların sayısının çarpımına eşittir :

$$P = \frac{1}{2} mv^2 \times n = \mathrm{eV} \cdot n = V \cdot I$$

ya da

$$P = V \cdot I = 250 \times 6{,}4 \cdot 10^{-3} \; (V \times A) = 1{,}6 \text{ watt}$$

olur.

Bu verilerden hareketle bir saniyede anoda varan elektronların sayısını da bulmak mümkündür. Gerçekten de

$$n = \frac{I}{e} = \frac{6{,}4 \cdot 10^{-3}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 4 \cdot 10^{16} \text{ elektron/sec}$$

bulunur.

PROBLEM : 70.— İçinde mükemmel bir boşluk gerçekleştirilmiş olan elektronik bir tüpte elektronlar ısıtılmış filamanı ilk hızsız terketmekte ve sonra filamanla plâk arasında uygulanmış 150 voltluk bir potansiyel farkı aracılığıyla hızlandırılmaktadırlar.

1. Elektronların plâğa eriştiklerindeki hızları nedir? Filâmanın saniyede 10^{15} elektron yayınladığı bilindiğine göre tübü kateden elektron akımı ne olur?

Çarpan elektronların bütün enerjilerinin plâğa intikal etmiş olduğunu varsayarak plâğa yüklenmiş enerji ne olur?

2. Plâkta bir delik deliniyor. Bu delikten geçen ince bir elektron hüzmesi B=10 gauss luk birbiçim bir magnetik alanının hüküm sürdüğü bir bölgeye giriyor. Bu takdirde, indüksiyonun elektronların ilk hızlarına dik olduğunu varsayarak, bu elektronların alan içindeki yörüngelerinin şeklini ve niteliklerini belirtiniz.

ÇÖZÜM :

1. Elektronlar filâmanı ilk hızsız terkettikleri için bütün kinetik enerjilerini filâmanla plâk arasında uygulanmış olan gerilimden kazanacaklardır. Buna göre

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{eV}$$

ve

$$v = \sqrt{\frac{2\,\text{eV}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times1{,}602\cdot10^{-19}\times150}{9{,}108\cdot10^{-31}}} \# 10^6\sqrt{\frac{160}{3}} = 7300\ \text{km/sec}$$

öte yandan akımın şiddeti de

$$I = en = 1{,}602\cdot10^{-19}\times10^{15} = 1{,}602\cdot10^{-4}\,A = 0{,}16\,mA$$

dir.

Plâğa intikâl eden güce gelince, bunu iki şekilde hesaplamak mümkündür :

— ya $P=V\cdot I$ bağıntısı aracılığıyla :

$$P=V\cdot I=150\times0{,}16\cdot10^{-3}=24\cdot10^{-3}\ \text{watt}$$

— ya da $P=\frac{1}{2}m_ev^2\cdot n=\text{eV}\times n$

aracılığıyla :

$$P=\text{eV}\times n=1{,}6\cdot10^{-19}\times150\times10^{15}=24\cdot10^{-3}\ \text{watt}$$

2. Bu şartlar altında elektronun yörüngesinin dairesel olduğu ve yarıçapının da

$$R = \frac{m_e v}{eB}$$

ile verildiği bilinmektedir. Şu hâlde, ve 1 gauss $= 10^{-4}$ Wb/m^2 olduğundan,

$$R = \frac{0{,}108 \cdot 10^{-31} \times 10^6 \sqrt{\frac{160}{3}}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \times 10^{-3}} = 41 \cdot 10^{-3}\, m = 4{,}1 \text{ cm}$$

bulunur.

PROBLEM : 71.— Hızları 20 km/s olan elektronlardan oluşmuş I=1 mA şiddetinde bir elektron hüzmesi metal bir levhaya çarparsa saniye başına buna kaç watt lık enerji iletmiş olur?

ÇÖZÜM :

1 saniyede levhaya çarpan elektronların sayısı

$$n = \frac{I}{e} = \frac{10^{-3}\,(A)}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,(\text{Coulomb})} = \frac{1}{1{,}6} \cdot 10^{16}\ (\text{elektron/sec})$$

dir. Buna göre levhaya iletilen P gücü

$$P = \frac{1}{2} m_e v^2 \cdot n = \frac{1}{2} \times 9{,}108 \cdot 10^{-31}\,(\text{kg}) \times \left[\,2{,}10^4\,(\text{m/sec})\,\right]^2 \times \frac{1}{1{,}6} 10^{16} (\text{sec}^{-1})$$

$$= 1{,}14 \cdot 10^{-6} \text{ watt}$$

olur.

PROBLEM : 72.— Dalgaboyu 0,012 Å olan bir foton, atom ağırlığı 197 olan bir altın çekirdeği civarından geçerken yok olarak bir elektron-pozitron çifti meydana getirmektedir.

a) MeV cinsinden fotonun enerjisini hesaplayınız ve bunu meydana gelen elektron-pozitron çiftinin toplam sükûnet enerjisi ile mukayese ediniz.

b) Elektron ve pozitronun meydana gelmelerinden sonra sükûnette olmaları hâlinde (yâni; fotonun frekansının bu reaksiyonun vukuu için

gerekli eşik frekansına eşit olması hâlinde) fotonun enerjisinin küçük bir kısmının altın çekirdeğine aktarılması gereklidir; çünkü çekirdek fotonun başlangıçta haiz olduğu impulsu yüklenmek zorundadır. Altın çekirdeğine intikâl eden enerjiyi bulunuz ve bunu fotonun ilk enerjisi ile mukayese ediniz.

(CEVAP: a) 1 MeV

b) $5{,}4 \cdot 10^{-22}$ kg . m/sec)

PROBLEM : 73.— Bir madde üzerine 130 MeV luk bir foton geliyor. Bu foton tarafından hâsıl edilen pozitronların sayısı en fazla ne kadar olur?

(CEVAP: 127)

PROBLEM : 74.— Bir elektron-pozitron çifti, ağır bir çekirdekten 0,01 Å mesafede meydana geliyor. Meydana geldikleri anda elektron-pozitron çiftinin kinetik enerjileri biribirlerine eşit ise, ağır çekirdekten sonsuz uzaklığa kadar ayrıldıktan sonra kinetik enerjileri arasındaki ($K^+ - K^-$) farkı acaba ne olacaktır? Çekirdeğin ortalama pozitif yükünün 40 elementer yüke eşit olduğu farzedilecektir.

(CEVAP: 115 keV)

PROBLEM : 75.— 500 MeV luk bir foton bir elektron-pozitron çifti meydana getirmektedir. Elektron ve pozitronun eşit hızlarla zıt yönlerde hareket ettikleri farzedilmektedir.

a) Elektronun (veyâ pozitronun) kinetik enerjisi ne kadardır?

b) Elektronun hızı ne kadardır?

c) Elektronla birlikte hareket eden bir gözlemciye nazaran pozitronun hızı ne kadardır?

(CEVAP: a) 1,99 MeV

b) 0,98 c

c) 0,9998 c)

PROBLEM : 76.— Yarıçapı 10^{-3} cm olan bir yağ damlacığı bir kondansatörün biribirlerinden $d=1$ cm uzaklıktaki yatay paralel levhaları arasında bulunmaktadır. Bunlar arasına 3000 voltluk bir potansiyel farkı uygulandığında q yüklü olan damlacık $v=0{,}245$ mm/s lik bir hız kazanmaktadır.

Elektrik alanı olmadığında damlacığın hızının 0,1 mm/s olduğunu hesaba katarak damlacığın q yükünü değerlendirip bunu elektronun yüküyle mukayese ediniz.

(Havanın viskozluk katsayısı $\eta=17{,}5 \,.\, 10^{-6}$ MKSA)

ÇÖZÜM :

Eğer havanın damlacık üzerindeki Arşimed itkisi ihmâl edilirse, üzerine başka hiç bir kuvvet tesir etmediği zaman damlacığın ağırlığı ile Stokes viskozite kuvveti biribirlerini dengelerler. μ ile damlacığın yoğunluğu, R ile yarıçapı ve g ile de yerçekimi ivmesi gösterilmek üzere

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \mu\right) g = 6\pi R\eta v \tag{1}$$

olur.

Damlacık q yükünü haiz iken bir E elektrik alanında bulunuyorsa bir de bir Coulomb kuvvetine mâruz kalır. Bu itibarla da $f=q \cdot E$ kuvvetinin ağırlık kuvvetine karşıt olup olmamasına göre (kondansatörün üst levhasının hangi kutup olduğuna göre) v den küçük ya da büyük bir v' hızına sâhip olur.

Buna göre:

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\mu\right) g + qE = 6\pi R\eta v' \tag{2}$$

olur. (1) ile (2) arasında $\frac{4}{3}\pi R^3\mu g$ yi yok ederek

$$6\pi R\eta v + qE = 6\pi R\eta v'$$

ve dolayısıyla da

$$qE = 6\pi R\eta(v' - v) \tag{3}$$

bulunur. Öte yandan $E = -V/d$ olduğundan

$$E = -\frac{3 \cdot 10^3 \,(\text{volt})}{10^{-2}\,(m)} = -3 \cdot 10^5 \,(V/m)$$

bulunur. Bu itibarla (3) den

$$q = \frac{6\pi R\eta}{E}\,(v'-v)$$

$$= -\frac{6\pi}{3 \cdot 10^5} \times 10^{-5} \times 17{,}5 \cdot 10^{-6} \times (2{,}45 \cdot 10^{-3} - 10^{-3})$$

$$= -1{,}6 \cdot 10^{-18} \text{ Coulomb}$$

bulunur. Şu hâlde damlacığın yükü elektronun yükünün 10 katıdır.

PROBLEM : 77.— 1. Yarıçapı 10^{-4} cm olan bir yağ damlacığı aralarındaki açıklık $d=16$ mm olan iki levha arasına püskürtülmektedir. Damlacık düşerken iki levha arasındaki uzaklığı 2 dak 24 s de katetmektedir.

Püskürtme sonucu damlacıklar elektriklenmektedirler. q, hareketi izlenen damlacığın yükü olsun. Üst levhaya alt levhanınkinden 10 000 volt daha yüksek bir potansiyel uygulanmaktadır. Bu takdirde damlacığın yukarı çıktığı gözlenmektedir. Bu olayı izah ediniz.

a) Damlacığın hızıyla yükü arasındaki bağıntıyı tesis ediniz.

b) Damlacık iki levha arasındaki uzaklığı yükselerek 11,8 saniyede katetmektedir. O hâlde yükü nedir? Potansiyel farkının hangi değerleri için damlacık hareketsiz kalır?

2. Uygulanan gerilim 10 000 volt olduğunda, çok sayıda damlacık gözleyerek hızların, terimleri arasındaki sâbit farkın 0,29 mm/s olduğu ve bir aritmetik dizi teşkil edecek şekilde dağıldıkları gözlenmektedir.

Bu gözlemden bir damlanın taşıdığı çeşitli yükler yönünden ne gibi bir sonuç çıkarılabilir?

Havanın viskozluk katsayısı : $18 \cdot 10^{-6}$ MKSA

Yağın özgül kütlesi : 920 kg/m^3

ÇÖZÜM :

1. Damlacık, üzerine etki yapan kuvvetlerden Coulomb kuvvetinin ona zıt yöndeki kendi ağırlık kuvvetinden çok daha büyük olması sonucu yükselmeğe başlar.

Her iki levha arasındaki alanın değeri

$$E = -\frac{V}{d} = -\frac{10^4}{16 \cdot 10^{-3}} = -6{,}25 \cdot 10^5\ V/m$$

dir. a) Eğer elektrik alanı olmasaydı

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \mu g = 6\pi R \eta v \tag{1}$$

olacaktı. Alan var olduğu zaman ise

$$qE - \frac{4}{3}\pi R^3 \mu g = 6\pi R \eta v' \tag{2}$$

olacaktır. (1) ve (2) den

$$q = \frac{6\pi R\eta(v+v')}{E} \tag{3}$$

olduğu bulunur.

b) Alan olmadığı zaman v düşme hızı

$$v = \frac{d}{t} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-2}}{2\text{ dak } 24\text{ sec}} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-2}}{144}\ \text{m/sec}$$

ve alan olduğu zamanki v' hızı da

$$v' = \frac{d}{t'} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-2}}{11{,}8}\ \text{m/sec}$$

dir.

Buna göre

$$q = -\frac{6\pi \times 10^{-6} + 18 \cdot 10^{-6} \times 1{,}6 \cdot 10^{-2}}{6{,}25 \cdot 10^5}\left(\frac{1}{144} + \frac{1}{11{,}8}\right)$$

$$= -8 \cdot 10^{-19}\ \text{Coulomb} = -5 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Coulomb}$$

olur. Bu ise elektronun yükünün 5 katı bir yük demektir.

Eğer damlacık hareketsiz kalırsa bu, Coulomb kuvveti ile damlacığın ağırlık kuvvetinin biribirlerini dengelediklerini gösterir:

$$qE = -q\frac{V}{d} = \frac{4}{3}\pi R^3\mu g$$

bağıntısından

$$V = -\frac{4}{3}\frac{\pi R^3\mu g d}{q}$$

$$= -\frac{4}{3}\frac{\pi \times 10^{-18} \times 920 \times 9{,}8 \times 1{,}6 \cdot 10^{-2}}{-5 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 755 \text{ volt}$$

bulunur.

2. q_1 ile bir damlacığın yükü gösterilsin. Bu takdirde (3) e göre

$$q_1 = \frac{6\pi R\eta(v+v')}{E}$$

dir. q_2 ile de 0,29 mm/s$=2{,}9 \cdot 10^{-4}$ m/s kadar daha yüksek bir hıza sahip olan damlacığın yükünü gösterelim. Bu takdirde

$$q_2 = \frac{6\pi R\eta(v' + 2{,}9 \cdot 10^{-4} + v)}{E}$$

ve dolayısiyle de

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{6\pi R\eta}{E} \times 2{,}9 \cdot 10^{-4} =$$

$$= \frac{6\pi \times 10^{-6} \times 18 \cdot 10^{-6}}{-6{,}25 \cdot 10^{5}} \times 2{,}9 \cdot 10^{-4} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

bulunur. Yâni damlacığın hızında 0,029 cm/s lik bir artış, yükünün $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb'luk bir değişimine ya da başka bir deyimle, yükünün bir elektron yükü kadar bir artışına tekaabül etmektedir.

Klâsik Atom Modelleri

PROBLEM : 78.— RUTHERFORD'un α tâneciklerinin ince altın varaklarla saptırılması ile ilgili incelemelerinde bir tâneciğin θ sapma açısının

$$\cot g \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 M v^2}{ZZ' e^2} p$$

bağıntısı ile verildiği tesbit edilmiştir. Burada ε_0 boşluğun dielektrik sâbitini, M tâneciğin kütlesini ve v hızını, Z' yük sayısını Z altın atomunun yükünü, e elemanter yük birimini, p de çarpışma parametresini göstermektedir. Bu ifâdeden faydalanarak tâneciğin ince varağı katederken θ dan daha büyük bir açı içine saçılmış olmasının ihtimâli için bir bağıntı tesis ediniz. Eğer bu ihtimâl 10 MeV lik α tânecikleri için 10^{-3} ise acaba aynı varağı kateden 5 MeV lik protonlar için ne olacaktır?

ÇÖZÜM :

p çarpışma parametresinin eğer α tâneciği çekirdek tarafından saptırılmasaydı tâneciğin çekirdek yanından geçerken ona olacak uzaklığını gösterdiği mâlûmdur. Şu hâlde eğer α tâneciği θ dan daha büyük bir açı içine saptırılacaksa çekirdeğe bu p uzaklığından daha yakın olarak yâni çekirdeğin etrafında alanı πp^2 olan bir dairenin içinden geçmelidir.

n ile birim hacım başına çekirdek sayısını ve d ile de varağın kalınlığını göstermek üzere $n \cdot d$ birim alan başına çekirdek sayısını verir. Buna binâen bir α tâneciğinin θ dan daha büyük bir açı içine saptırılması ihtimâli

$$P = \frac{(n \cdot d) \text{ çekirdeğin etrafında } \pi p^2 \text{ alanı içinden geçen } \alpha \text{ ların sayısı}}{(n \cdot d) \text{ çekirdek ihtivâ eden varak alanı içinden geçen } \alpha \text{ ların sayısı}} =$$

$$= \frac{\pi p^2 \times nd}{1} = nd \left(\frac{ZZ' e^2}{4\pi\varepsilon_0 M v^2} \right)^2 \cot g^2 \frac{\theta}{2}$$

olur. Aynı varak tarafından saptırılan çeşitli tânecikler için, aynı θ açısı göz önüne alındığında,

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{Z'_1}{M_1 v_1^2}\right)^2 \left(\frac{M_2 v_2^2}{Z_2'}\right)^2$$

bulunur. Burada 2 indisi meselâ protona ve 1 indisi de α ya ait olsun. Bu takdirde bu son bağıntıdan

$$P_2 = P_1 \left(\frac{Z'_2}{Z'_1}\right)^2 \left(\frac{M_1 v_1^2}{M_2 v_2^2}\right)^2 = P_1 \left(\frac{Z'_2}{Z'_1}\right)^2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

olur; T_1 ye T_2 sırasıyla α tâneciğinin ve protonun kinetik enerjilerini göstermektedir. Şu hâlde sonuç olarak

$$P_2 = 10^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 10^{-3}$$

bulunur ki bu da bize her iki tâneciğin de verilen şartlar altında θ dan daha büyük bir açı içine sapmaları ihtimâllerinin aynı olduğunu göstermektedir.

PROBLEM : 79.— Mâdenî bir hedef hızlı elektronlarla bombardıman edilerek X ışınları elde edilmektedir. $\lambda = 0{,}5$ Å dalgaboyunu haiz bir K $_\alpha$ çizgisi elde etmek için elektronların hızlanmalarını sağlayan potansiyel farkının ne olması gerektiğini BOHR atom modeline dayanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Bir K_α çizgisi K yörüngesinden yâni en iç yörüngeden $(n=1)$,L yörüngesine $(n=2)$ geçiş esnâsında zuhur eder. Buna tekaabül eden enerji değişimi ise BOHR atom modeline göre

$$\Delta E = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} E_K$$

olur. Bu takdirde zuhur edecek olan X ışınının dalgaboyu için de,

$$\Delta E = h\nu$$

den

$$\lambda_{K\alpha} = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{4hc}{3E_K}$$

bulunur. Şu hâlde bir K elektronunu yörüngesinden koparmak için gerekli minimum enerji

$$E_K = \frac{4hc}{3\lambda_{K\alpha}}$$

dır. Buradan

$$E_K = \frac{4\times 6,625 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{8}}{3\times 0,5 \cdot 10^{-10}} = 5,29 \cdot 10^{-15} \text{ Joule}$$

$$= \frac{5,29 \cdot 10^{-15}\,(\text{Joule})}{1,602 \cdot 10^{-19}\,(\text{Joule/eV})} = 3,31 \cdot 10^{4} \text{ eV}$$

bulunur. Bu ise K yörüngesinden elektronu yerinden koparacak olan mermi elektronun 33,1 kV (kilovolt) değerinde bir potansiyel farkında hızlandırılmış olması gerektiğine delâlet etmektedir.

PROBLEM : 80.— Bir hidrojen atomundaki elektronun Bohr modeline göre $n=1, 2, 3, 4$ kuvantum değerlerine tekaabül eden enerjileri hesaplayınız.

Bunlardan hareketle hidrojen atomunun spekturumundaki emisyon çizgilerinin dalgaboylarını tâyin ediniz.

ÇÖZÜM :

Bohr'un hidrojen atomu modelinde elektronun enerji seviyelerinin

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

bağıntısıyla verildiği bilinmektedir. Buna göre

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$$

$$E_2 = -\frac{1}{4} \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \frac{E_1}{4}$$

$$E_3 = -\frac{1}{9}\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \frac{E_1}{9}$$

$$E_4 = -\frac{1}{16}\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \frac{E_1}{16}$$

olacaktır. Öte yandan

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{9{,}108 \cdot 10^{-31} \times (1{,}602 \cdot 10^{-19})^4}{8 \times (8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \times (6{,}625 \cdot 10^{-34})^2} =$$

$$= -21{,}78 \cdot 10^{-19}\ \text{Joule} = -13{,}59\ \text{eV}$$

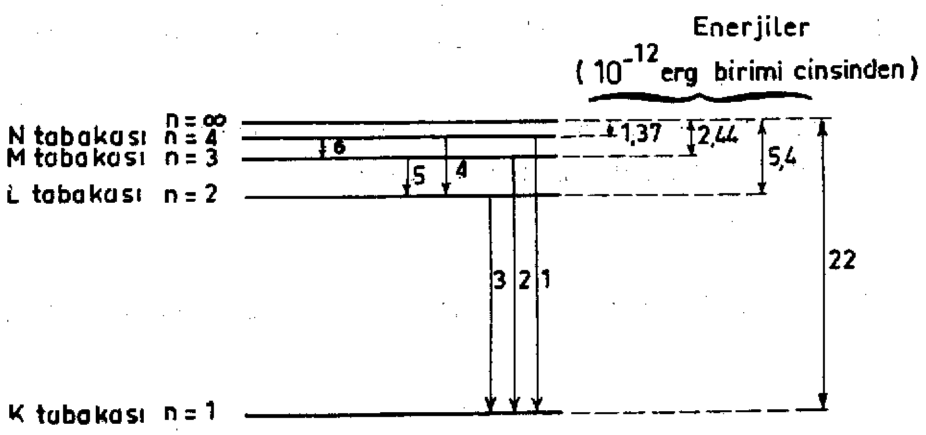
olduğundan

$$E_2 = -3{,}4\ \text{eV}$$

$$E_3 = -1{,}51\ \text{eV}$$

$$E_4 = -0{,}85\ \text{eV}$$

bulunur. Bu sonuçları şu şekilde şematik olarak göstermek kaabildir:



Bune göre derhâl 6 mümkün geçişin var olduğu görülmektir.

1 no. lu geçiş		$E_1 - E_4$	geçişine
2 »	»	$E_1 - E_3$	»
3 »	»	$E_1 - E_2$	»

4 » » $E_2 - E_4$ »

5 » » $E_2 - E_3$ » , ve

6 » » de $E_3 - E_4$ » tekaabül etmektedir.

Bu geçişlerde açığa çıkan fotonlara tekaabül eden dalga boyları

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_m - E_n$$

bağıntısıyla belirlendiğine göre

$$\lambda = \frac{hc}{E_m - E_n}$$

olur. Şu hâlde MKS birimlerine göre

$$\lambda_1 = \frac{hc}{E_1 - E_4} = \frac{6{,}525 \,.\, 10^{-34} \times 3.10^8}{(13{,}59 - 0{,}85) \times 1{,}602 \,.\, 10^{-19}} = 0{,}907 \,.\, 10^{-7}\,\text{m} =$$
$$= 907\ \mathring{A}\ \text{(moretesinde)}$$

$\lambda_2 = 1026\ \mathring{A}$ (morötesinde)

$\lambda_3 = 1216\ \mathring{A}$ (morötesinde)

$\lambda_4 = 4851\ \mathring{A}$ (mavi)

$\lambda_5 = 6581\ \mathring{A}$ (kırmızı)

$\lambda_6 = 18750\ \mathring{A}$ (kızılaltıda)

bulunur.

PROBLEM : 81.— Balmer formülünden hareketle Paschen serisinin ilk iki çizgisinin dalga uzunluğunu hesaplayınız.

(CEVAP : 18780 $\mathring{A}$ ve 12800 $\mathring{A}$)

PROBLEM : 82.— İki kararlı hâl arasındaki enerji farkı, tam tamına yayınlanan fotonun enerjisi ile, atomun geri tepmesi esnâsında kazandığı kinetik enerjiye eşittir.

a) Atomun geri tepmesi göz önüne alındığında, M ile atomun kütlesini göstermek üzere, yayınlanan fotonun frekansının $h\nu/2Mc^2$ kesri kadar azaldığını gösteriniz.

b) Bu kesir hesaba katıldığından H $_\alpha$ çizgisinin frekansındaki izâfî tashihi bulunuz.

PROBLEM : 83— a) Bir hidrojen atomunun $n=10$ kuvantum hâlinden $n=1$ kuvantum hâline geçişi esnâsında yayınlanan fotonun enerjisini, impulsunu ve dalgaboyunu hesaplayınız.

b) Foton neşredildiği anda hidrojen atomu ne büyüklükte bir hızla geri teper.

(CEVAP : a) 13,4 eV ; $7{,}2 \cdot 10^{-27}$ kg · m/sec ; 920 Å
b) 4,3 m/sec)

PROBLEM : 84.— Bir hidrojen atomunda $n=2$ hâlinde bulunan bir elektron $n=1$ hâline düşmeden önce kaç devir yapar? (Uyartılmış bir hâlin ortalama ömrü aşağı yukarı 10^{-8} sec dir).

ÇÖZÜM :

Toplam açısal impuls

$$m_e vr = \frac{nh}{2\pi}$$

şeklinde kuvantalaştırılmıştı; bu ifâdeden $n=2$ kuvantum hâli için v çizgisel hızını bulalım:

$$v = \frac{h}{\pi m_e r_2}$$

olacaktır; diğer taraftan

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = n^2 r_1 = n^2 \times 5{,}295 \cdot 10^{-11}\ m$$

$$r_2 = 4 \times 5{,}295 \cdot 10^{-11}\ m = 21{,}2 \cdot 10^{-11}\ m$$

olduğu bulunur. Buradan da

$$v=\frac{6{,}625\cdot 10^{-34}}{3{,}14\times 9{,}108\cdot 10^{-31}\times 21{,}2\cdot 10^{-11}}=1{,}118\cdot 10^{6}\ \text{m/sec}$$

bulunur. Yörünge çevresi

$$S_2=2\pi r_2=2\times 3{,}14\times 21{,}2\cdot 10^{-11}=133{,}1\cdot 10^{-11}\ m$$

olduğundan bir devir için geçen zaman

$$t_2=\frac{133{,}1\cdot 10^{-11}}{1{,}118\cdot 10^{-6}}=1{,}19\cdot 10^{-15}\ \text{sec/devir}$$

dir. Uyartılmış hâlin ortalama ömrü 10^{-8} sec olduğuna göre devir sayısı olarak

$$f_2=\frac{10^{-8}\ (\text{sec})}{1{,}19\cdot 10^{-15}\ (\text{sec/devir})}=8{,}397\cdot 10^{6}\ \text{devir}$$

bulunur.

PROBLEM : 85.— Hidrojen çekirdeği etrafında dönen elektron için E toplam enerjisini, U potansiyel enerjisini ve T kinetik enerjisini n kuvantum sayısının 1, 2, 10 ve ∞ değeri için eV cinsinden hesaplayınız.

(CEVAP: $n=1$ için; —13,58 eV, —27,16 eV, +13,58 eV
$n=2$ için; — 3,39 eV, — 6,78 eV, + 3,39 eV
$n=10$ için; — 0,136 eV, — 0,272 eV, +0,136 eV
$n=\infty$ için; 0 , 0 , 0 .)

PROBLEM : 86.— a) Hidrojenin ilk Lyman çizgisine bir kere iyonlaşmış helyum atomunun spektrumundaki hangi geçiş uyar? (Basitliği sağlamak bakımından, her iki spektrumda da Rydberg sâbitinin aynı R değerini haiz olduğunu farzediniz.)

b) Rydberg sâbiti için R_H ve R_{He} has değerlerini kullanarak yukarıdaki iki çizginin dalgaboyları arasındaki farkı Å cinsinden bulunuz ve iyonlaşmış helyum çizgisinin, hidrojen çizgisinden daha uzun mu yoksa, daha kısa mı, dalgaboyuna sâhip olduğunu tesbit ediniz.

(CEVAP: a) $4\rightarrow 2$
b) 0,49 Å)

PROBLEM : 87.— **İçindeki atomların ortalama kinetik enerjileri H atomlarını temel hâlin üzerindeki ilk seviyeye uyartmak için yeterli olan, bir atomik H gazının sıcaklığını hesaplayınız. Niçin termik radyasyon çok daha düşük sıcaklıklarda gözlenir?**

(CEVAP: 79 000 °K; Hız dağılımı sebebiyle)

PROBLEM : 88.— **Bohr teorisinde elektron ile çekirdekteki protonun Coulomb kuvveti vâsıtasiyle biribirlerine bağlı oldukları farzedilmektedir. Hâlbuki buna ilâveten ikisi arasında bir de gravitasyon kuvveti vardır. Bu kuvvetin, Coulomb kuvveti ile mukayese edildiği takdirde büyüklüğünün ne olacağını hesaplayınız.**

$$\left(\text{CEVAP:} \quad \text{Gravitasyon kuvveti} = \frac{\text{Coulomb kuvveti}}{2{,}28 \cdot 10^{39}}\right)$$

PROBLEM : 89.— **$T = 3300°K$ sıcaklıkta ve içinde denge hâlinde 10^{20} hidrojen atomunun bulunduğu bir alevde hidrojenin ilk uyartılmış ($n=2$) hâlinin E_2 enerjisiyle temel hâlinin E_1 enerjisi arasındaki farkı hesaplayınız. Uyartılmış bir hâl ortalama 10^{-8} sec sürdüğünden bir saniyede yayınlanan fotonların ortalama sayısı, n_2 ile E_2 enerjisini haiz yâni $n=2$ hâlinde bulunan atomların sayısını göstermek üzere, $10^8\, n_2$ olduğuna göre n_2 ne olacaktır?**

$$\frac{n_2}{n_1} \cong e^{\frac{-(E_2-E_1)}{kT}}$$

farzedilecektir.

(CEVAP: $\Delta E = 10{,}20$ eV; $n_2 = 3 \,.\, 10^4$; 4,5 μ watt.)

PROBLEM : 90.— **Monoatomik bir gaz, meselâ, morötesi ışınlarla kısmen iyonlaştırılmaktadır. Işık kesildiğinde elektronlar ve pozitif iyonlar hacım içinde birbiçim bir şekilde dağılarak, tedricen rökombinasyon yolu ile tekrar nötr atomlar teşkil ederler. Elektronların ve pozitif iyonların cm^3 başına n sayıları her anda biribirine eşittir. Bunların ilk sayısına n_0 diyelim. dt zaman aralığında rekombine olan elektron ve protonların dn sayısı dt ile ve hem elektronlar ve hem de iyonların sayıları ile orantılıdır; dolayısıyla bu n^2 ile orantılı olur. Bu ameliyeyi karakterize eden orantı katsayısına da α denir. α bir sâbittir. Buna göre n yi n_0, α ve t nin fonksiyonu olarak hesaplayınız.**

$$\left(\text{CEVAP:} \quad dn = -\alpha n^2\, dt\,; \quad n = \frac{n_0}{(1 + n_0 \alpha t)}\right)$$

PROBLEM : 91.— Bir hidrojen atomunda çekirdeğin de elektronun da, ortak kütle merkezleri etrafında dairesel yörüngelere çizdiği varsayımı altında BOHR kuvantalaştırma şartını kullanarak hidrojenin enerji seviyelerini hesaplayınız. Bu şemaya göre Rydberg sâbitinin değeri ne olur? Spektrum çizgileri klâsik BOHR modelinin öngördüğü spektrum çizgilerine nazaran ne mikdarda değişmiş olurlar?

ÇÖZÜM :

Elektronun kütlesi m, sistemin G kütle merkezine uzaklığı r_e; protonunkiler ise sırasıyla M ve r_p olsun. Bu takdirde sistemin G ye göre toplam açısal momenti :

$$\text{Toplam açısal moment} = m\omega r_e^2 + M\omega r_p^2$$

olur. Bohr kuvantalaştırma şartına göre bu ifâdenin $h/2\pi$ nin $nh/2\pi$ gibi bir tam katı olması gerekir:

$$m\omega r_e^2 + M\omega r_p^2 = n\frac{h}{2\pi} \cdot \tag{1}$$

Öte yandan elektronla proton arasındaki uzaklığın

$$r = r_e + r_p \tag{2}$$

olması ve kütle merkezine göre momentin de

$$mr_e = Mr_p \tag{3}$$

bağıntısını geçerli kılması hasebiyle (1) den (2) ve (3) aracılığıyla

$$r_e = \left(\frac{M}{M+m}\right) r \tag{4}$$

ve

$$r_p = \left(\frac{m}{M+m}\right) r \tag{5}$$

bulunur. Buna göre (1) yerine

$$\left(\frac{mM}{M+m}\right) \omega r^2 = n\frac{h}{2\pi} \tag{6}$$

yazılabilir.

Elektronun dairesel yörüngesi üzerindeki denge durumu üzerine etki yapan merkezkaç kuvvetiyle Coulomb kuvvetinin biribirlerini dengelemeleri yüzündendir. Fakat merkezkaç kuvveti elektronun dairesel yörüngesinin r_e yarıçapına, hâlbuki Coulomb kuvveti ise elektronla proton arasındaki r uzaklığına bağlıdır. Buna göre kuvvetlerin denge şartı :

$$m\omega^2 r_e = m\frac{v^2}{r_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{7}$$

veyâ (4) ü de göz önünde tutarak

$$\left(\frac{mM}{M+m}\right)\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{8}$$

olur. Eğer $\mu = mM/(M+m)$ vazedilirse (8)

$$\mu\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{9}$$

ve (6) da

$$\mu\omega r^2 = n\frac{h}{2\pi} \tag{10}$$

olur. Bu takdirde (9) ve (10) dan

$$r = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0^2}{\pi\mu e^2_0} \tag{11}$$

bulunur. Öte yandan sistemin toplam enerjisini de (3), (4) ve (7) yardımıyla

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + U = \frac{1}{2}m\omega^2 r_e^2 + \frac{1}{2}M\omega^2 r_p^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 r_e^2 + \frac{\omega^2}{2M}(M^2 r_p^2) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}m\omega^2 r_e^2 + \frac{\omega^2}{2M}(m^2 r_e^2) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} =$$

$$= \left(\frac{M}{M+m}\right)\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + \frac{m}{M}\left(\frac{M}{M+m}\right)\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\left[-\frac{M}{M+m} - \frac{mM}{M(M+m)} + 2\right] = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \tag{12}$$

ile verileceği tesbit olunur. (11) eğer (12) ye vazedilecek olursa çekirdeğin hareketinin de göz önüne alındığı hâldeki hidrojen atomunun enerji seviyelerinin

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\,\frac{\mu e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \qquad (n=1,2,\ldots.) \qquad (13)$$

bağıntısıyla belirlendiği anlaşılır.

Bu bağıntı ile klâsik BOHR teorisinin vermiş olduğu arasındaki yegâne fark BOHR teorisindeki bağıntıda $\mu = mM/(M+m)$ indirgenmiş kütlesi yerine sâdece elektronun m kütlesinin bulunmasıdır. Buna binâen hidrojenin bütün enerji seviyeleri klâsik BOHR teorisinin verdiklerinden

$$1-\frac{\mu}{m} = 1-\frac{M}{M+m} = 1-\frac{1836}{1837} = 1-0{,}99945 = \%\,0{,}055$$

daha büyük olacaktır.

Kezâ klâsik BOHR atomunda $R = 10973731\,m^{-1}$ olarak bulunan RYDBERG sâbitinin de artık

$$R = \frac{\mu e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} = \frac{(0{,}99945\times 9{,}108\cdot 10^{-31})\times(1{,}602\cdot 10^{-19})^4}{8\times(8{,}854\cdot 10^{-12})^2\times 3\cdot 10^8\times(6{,}625\cdot 10^{-34})^3} = 10967758\,m^{-1}$$

değerini aldığı görülmektedir.

PROBLEM : 92.— Kütle merkezini işgâl eden çekirdeğinin sükûnette olduğu bir hidrojen atomunda $r = 0{,}53$ Å yarıçaplı dairesel bir yörünge üzerinde dolanan elektronun hızını ve sistemin toplam mekanik enerjisini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

BOHR'un atom modeline göre hidrojen atomunda $+e$ yüklü çekirdekle $-e$ yüklü elektron arasındaki kuvvet $f = e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$ şeklindeki Coulomb kuvvetidir. Elektronun kararlı bir dairesel yörünge üzerinde bulunması bu kuvvetin, elektron üzerine tesir eden merkezkaç kuvveti ile dengelenmesinden ötürüdür. Şu hâlde

$$\frac{e^2}{4\pi_0\varepsilon r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

veyâ

$$v=\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}=\frac{1{,}602\cdot 10^{-19}\,(C)}{\sqrt{4\pi\times 8{,}854\cdot 10^{-12}(C^2/\text{new}\cdot\text{m}^2)\times 9{,}108\cdot 10^{-31}(\text{kg})\times 0{,}53\cdot 10^{-10}\text{m}}}$$

$$=2{,}18\cdot 10^6\ \text{m/sec}=2180\ \text{km/sec}$$

olur.

Sistemin toplam mekanik enerjisi kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisinin toplamından ibârettir. Çekirdeğin atomun kütle merkezini işgâl ettiği ve sükûnette olduğu varsayıldığından, sistemdeki kinetik enerji de çekirdekle elektron arasındaki Coulomb kuvvetinden ileri gelmektedir. Buna göre

$$E_{\text{top}}=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{2}\times 9{,}108\cdot 10^{-31}\times(2{,}18\cdot 10^6)^2-$$

$$-\frac{(1{,}602\cdot 10^{-19})^2}{4\pi\times 8{,}854\cdot 10^{12}\times 0{,}53\cdot 10^{-10}}=21{,}64\cdot 10^{-19}-43{,}59\cdot 10^{-19}$$

$$=-21{,}95\cdot 10^{-19}\ \text{Joule}=-21{,}95\cdot 10^{-12}\ \text{erg}=$$

$$=-\frac{21{,}05\cdot 10^{-12}\,(\text{erg})}{1{,}602\,.\,10^{-12}\,(\text{erg/eV})}=-13{,}7\ \text{eV}$$

olduğu tesbit edilmiş olur.

PROBLEM : 93.— Bir pozitron (=pozitif elektron) ile bir elektronun oluşturdukları atomsal sisteme pozitronyum atomu adı verilir. Buna göre, pozitronyum için 1) Rydberg sâbitini, ve 2) Balmer serisinin ilk çizgisi olan H_α çizgisine tekaabül eden dalgaboyunu Bohr teorisine göre hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

1) BOHR teorisine göre pozitif bir elektrik etrafında dönen negatif bir tâneciğin kuvantalaştırma şartlarına uygun n-inci ve p-ninci yörüngeleri arasında yaptığı sıçramada yayınladığı fotona tekaabül eden dalgaboyu

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\mu e^4}{8\varepsilon_0^2 ch^3}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

ile verilir.

μ ile burada, çekirdeğin sürüklenmesini de hesaba katmak üzere vazedilen

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

indirgenmiş kütlesi gösterilmektedir.

Pozitronyum bahis konusu olduğuna göre

$$M = m = 9{,}108 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

ve

$$\mu = 4{,}554 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

bulunur. Buna göre pozitronyum için R_P Rydberg sâbitinin değeri olarak da

$$R_P = \frac{4{,}554 \cdot 10^{-31} \times (1{,}602 \cdot 10^{-19})^4}{8 \times (8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \times 3 \cdot 10^8 \times (6{,}625 \cdot 10^{-34})^3} = 0{,}548065 \cdot 10^7\, m^{-1}$$

bulunur.

2) Pozitronyumun H_α çizgisine tekaabül eden dalgaboyu $p=2$ ve $n=3$ değerlerine tekaabül ettiğinden

$$\frac{1}{\lambda_{H_\alpha}} = 5480650 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 761200\, m^{-1}$$

ve dolayısıyla

$$\lambda_{H_\alpha} = 13{,}137 \cdot 10^{-7}\, m = 13137\, \mathring{A}$$

bulunur. Böylelikle bu çizginin kızılaltı bölgede bulunduğu da anlaşılmış olur.

PROBLEM : 94.— BOHR atom modeli göz önüne alındığında klâsik mekaniğin impuls ve enerji korunumu kanunları tam tamına uygulanacak olursa, kararlı iki yörünge arasındaki enerji farkı, yayınlanan fotonun enerjisi ile atomun geri tepme enerjisinin toplamıdır.

M hidrojen atomunun toplam kütlesi olmak üzere bu geri tepme olayı hesaba katıldığı takdirde yayınlanan fotonun $\bar{\nu}$ frekansının, M nin sonsuz addedildiği zaman yayınlanacak olan fotonun ν frekansına olan oranının

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \frac{1}{1 + \dfrac{h\bar{\nu}}{2Mc^2}}$$

şeklinde olduğunu gösteriniz ve $\bar{\lambda}$ yi λ cinsinden ifâde ediniz.

ÇÖZÜM :

BOHR atom modeline göre bir hidrojen atomunda n - inci ve p - ninci kuvantalaştırılmış yörüngeler arasındaki ΔE enerji farkı

$$\Delta E = E_n - E_p = h\nu = Rch\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

ile verilmiştir. Ancak bu formül çıkarılırken, elektronun bu yörüngeler arasında sıçraması dolayısıyla yayınlanan fotonun atoma aksi yönde bir impuls veremiyecek kadar atomun toplam kütlesinin sonsuz olduğu zımnen farzedilmiştir.

Aslında ise atomun kütlesi sonludur ve klâsik mekaniğin impuls ve enerji korunumu kanunları da geçerlidir. Eğer E_G ile geri tepme enerjisini, V ile de atomun geri tepme dolayısıyla kazandığı hızı gösterecek olursak

$$\Delta E = h\bar{\nu} + E_G = h\bar{\nu} + \frac{1}{2} MV^2 \quad \text{(enerji korunumu)} \tag{1}$$

olur. Öte yandan, yayınlanan fotonun impulsu olan $h\bar{\nu}/c$ de atomun bu sûretle kazandığı MV impulsuna eşit olacaktır:

$$\frac{h\bar{\nu}}{c} = MV \tag{2}$$

(1) ve (2) yardımıyla

$$\Delta E = h\bar{\nu}\left(1 + \frac{h\bar{\nu}}{2Mc^2}\right) = Rch\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) = h\nu$$

ya da

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \frac{1}{1 + \dfrac{h\bar{\nu}}{2Mc^2}} \tag{3}$$

olduğu bulunur.

(3) den hareketle

$$\frac{h}{2Mc^2}\bar{\nu}^2+\bar{\nu}-\nu=0 \tag{4}$$

veyâ

$$\bar{\nu}=\frac{Mc^2}{h}\left(\sqrt{1+\frac{2h\nu}{Mc^2}}-1\right) \tag{5}$$

bağıntıları elde edilir. (5) bağıntısı bulunurken (4) ün yalnız fiziksel anlamı haiz olan kökü göz önünde tutulmuştur. (5) den hareketle bu ifâdedeki karekökü $2h\nu/Mc^2$ ye göre TAYLOR serisine açıp bu seriyi 3. teriminde keselim:

$$\bar{\nu}=\frac{Mc^2}{h}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{2h\nu}{Mc^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{2h\nu}{Mc^2}\right)^2+\mathcal{O}(3)-1\right) \tag{6}$$

olur. $\mathcal{O}(3)$ ile burada $2h\nu/Mc^2$ nin küpü cinsinden olan ihmâl edilmiş terimler gösterilmiştir. Eğer karekökün TAYLOR açılımını 2. terimde kesseydik, bu takdirde kaba bir yaklaşıklık yapmış olacaktık; zirâ elde edeceğimiz bağıntı, yukarıdan da kolayca görüldüğü üzere sâdece $\bar{\nu}=\nu$ olacaktı.

(6) dan

$$\bar{\nu}=\nu\left(1-\frac{h\nu}{Mc^2}\right)$$

ve dolayısıyla

$$\bar{\lambda}\neq\lambda\left(1+\frac{h\nu}{Mc^2}\right)=\lambda\left(1+\frac{h}{Mc\lambda}\right)$$

bulunur.

PROBLEM : 95.— Âdi hidrojen ve hidrojenin bir izotopu olan trityum ${}_1H^3$ karışımı uyartılıp bunun spektrumu gözlenmektedir. Bu iki çeşit hidrojenin H_α çizgileri arasındaki fark ne olacaktır? (Trityum çekirdeği âdi hidrojen çekirdeğinden yaklaşık olarak 3 kare daha kütlelidir.)

ÇÖZÜM :

Dalgaboyları arasındaki farkı, dalgaboylarını veren formülde indirgenmiş kütleyi göz önüne alarak görebiliriz.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\mu Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 ch^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

formülündeki indirgenmiş kütle

$$\mu = \frac{Mm}{M + m}$$

idi. Protonun kütlesi. elektronun kütlesinin 1836 katı olduğundan, hidrojen için

$$\mu_H = \frac{Mm_e}{M + m_e} = 0{,}9994\ m_e$$

ye trityum için

$$\mu_T = \frac{3M\,m_e}{3M + m_e} = 0{,}9998\ m_e$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{1}{\lambda_H} = \frac{\mu_H Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 ch^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 0{,}9994\ \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 ch^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

olacaktır.

$$A = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 ch^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

dersek

$$\lambda_H = \frac{1}{0{,}9994 \cdot A} \quad \text{ve} \quad \lambda_T = \frac{1}{0{,}9998 \cdot A}$$

olacak ve dalgaboyları arasındaki fark da

$$\lambda_H - \lambda_T = \Delta\lambda = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{0{,}9994} - \frac{1}{0{,}9998}\right)$$

bulunacaktır. Diğer taraftan

$$A = \frac{9{,}108 \cdot 10^{-31} \times (1{,}602 \cdot 10^{-19})^4}{8 \times (8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \times 3 \cdot 10^8 \times (6{,}625 \cdot 10^{-34})^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{6566} \times \frac{5}{36} \cdot 10^{10}\, m$$

olduğundan

$$\Delta\lambda = \frac{36 \times 6566}{5} \times \frac{0{,}0004}{0{,}998} \cdot 10^{-10}\, m = 19{,}01\ \AA$$

bulunur.

PROBLEM : 96.— Bir μ mezonu bir proton tarafından yakalanır da proton etrafında dairesel bir yörünge üzerinde dönerse mezonlu (= mezik) bir atom meydana gelir. Böyle bir atomun 1. Bohr yörüngesinin yarıçapını bulunuz. (m_μ = 207 m_e)

ÇÖZÜM :

Hidrojen atomunun yarıçapı

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_n e^2}$$

formülü ile verilir. Burada m_e ile elektronun kütlesi gösterilmektedir. Buna göre mezik atom için $n=1$ kuvantum hâline tekaabül eden yarıçap

$$r_1 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_\mu e^2} = \frac{(6{,}625 \cdot 10^{-34})^2 \times 8{,}854 \cdot 10^{-12}}{3{,}1416 \times (207 \times 9{,}108 \cdot 10^{-31}) \times (1{,}602 \cdot 10^{\ 19})^2}$$

$$= \frac{5{,}295}{207} \cdot 10^{-11}\, m$$

$$= 2{,}558 \cdot 10^{-13}\, m = 0{,}002558\ \AA$$

olarak bulunur.

PROBLEM : 97.— 12 000 gausluk bir magnetik alan içindeki 6 000 Å lük dalgaboyuna ait spektrum çizgisinin normal ZEEMAN bileşenleri arasındaki dalgaboyu farkı 0,4 Å dür. Bu verilerden hareketle bir elektron için e/m oranını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Bir magnetik alana daldırılan atomun enerjisi

$$\Delta E = m_l\, \mu_B\, B$$

kadar farkedecektir. μ_B ye BOHR magnetonu adı verilir, ve

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

dir. E_1 ve E_2, $B=0$ hâlinde atomun sâhip olduğu iki farklı enerji durumu olduğuna göre, $B \neq 0$ için

$$E'_1 = E_1 + m_{l1}\mu_B \cdot B$$

$$E'_2 = E_2 + m_{l2}\mu_B \cdot B$$

yazılır. Buradan,

$$E'_1 - E'_2 = E_1 - E_2 + (m_{l1} - m_{l2})\mu_B \cdot B$$

ve

$$h\nu' = h\nu + \Delta m_l \cdot \mu_B \cdot B$$

bulunur.

Enerji geçişleri ve foton yayınlanması spektroskopik seçim kurallarına göre, m_l magnetik kuvantum sayısı farkı olan Δm_l in -1, 0, $+1$ değerleri için mümkündür. $\Delta m_l = 0$ değeri ν_0 a (esas çizgiye) tekaabül ettiğinden;

$$\Delta m_l = \pm 1$$

$$h\nu' - h\nu = \pm \mu_B \cdot B$$

bulunur. Bu ifâdeden

$$\nu'_1 = \nu^0 + \frac{\mu_B \cdot B}{h}$$

$$\nu'_2 = \nu_0 + \frac{\mu_B \cdot B}{h}$$

yazılabilir. ν'_1 ve ν'_2 atom B alanı içinde iken ortaya çıkan simetrik iki çizgiye ait frekanslardır. Böylece

$$d\nu = \nu'_1 - \nu'_2 = \frac{2\mu_B \cdot B}{h}$$

olduğu bulunur.

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

ve

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

dır; buradan

$$-\frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\mu_B \cdot B}{h}$$

ve

$$d\lambda = \frac{2\mu_B \cdot B\lambda^2}{hc}$$

olduğu görülür. μ_B, BOHR magnetonu

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

yukarıdaki yerine konursa

$$d\lambda = \frac{eB\lambda^2}{mc2\pi}$$

ve (e/m) oranı için ise

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi c\, d\lambda}{B\lambda^2}$$

bulunur. Buradan 12000 gausss=1,2 weber/m² olduğundan MKS'ye göre

$$\frac{e}{m} = \frac{2\times3{,}14\times3 \cdot 10^8\times0{,}4 \cdot 10^{-10}}{1{,}2\times(6000 \cdot 10^{-10})^2} = 1{,}74 \cdot 10^{11} \frac{\text{Coulomb}}{\text{kg}}$$

olarak hesaplanır.

PROBLEM : 98.— Bir miktar hidrojen gazı bir elektron hüzmesi ile bombardıman edilmektedir. Hidrojenin bu bombardımanın etkisi altında Balmer serisinin ilk çizgisini yayınlaması için bu elektronlar acaba ne gibi bir potansiyel farkında hızlandırılmış olmalıdırlar?

ÇÖZÜM :

Hidrojenin Balmer serisinin ilk elemanı olan H_α çizgisi $n=3$ asal kuvantum sayısına tekaabül eden yörüngeden $n=2$ asal kuvantum sayısına tekaabül eden yörüngeye geçiş esnâsında yayınlanan fotonun dalgaboyu (veyâ frekansına; veyâ enerjisine) tekaabül etmektedir.

Hidrojen atomunda bir elektron ($p<n$ olmak üzere) n - ninci yörüngeden p - ninci yörüngeye geçti miydi BOHR modeline göre yayınladığı fotonun enerjisinin

$$E_n - E_p = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

bağıntısıyla verildiği bilinmektedir.

H_α çizgisine tekaabül eden böyle bir fotonun yayınlanması da ancak $p=2$ deki bir elektronun dış bir etken aracılığıyla $n=3$ ile $p=2$ arasındaki enerjiyi soğurarak $n=3$ hâline geçmesi ve burada yaklaşık olarak 10^{-8} saniye kaldıktan sonra $n=3$ e geçmesini sağlamış olan fazla enerjiyi bir foton hâlinde yayınlayarak tekrar $p=2$ ye avdet etmesiyle olur. Şu hâlde H_α çizgisinin doğabilmesi için hüzmedeki elektronların enerjilerinin

$$eV = E_3 - E_2 = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$$

a eşit olması ve bunların $p=2$ hâlindeki elektronlara bu enerjiyi çarpışma yoluyla intikâl ettirmeleridir.

Buna binâen bu hüzme elektronlarına bu enerjiyi temin eden hızı sağlayan potansiyel farkı olarak

$$V = \frac{E_3 - E_2}{e} = \frac{5}{36}\,\frac{m_e e^3}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \frac{5}{36} \times \frac{9{,}108 \cdot 10^{-31} \times (1{,}602 \cdot 10^{-19})^3}{8 \times (8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \times (6{,}625 \cdot 10^{-34})^2}$$

$$= 1{,}89 \text{ volt}$$

bulunur.

PROBLEM : 99.— Bir titanyum $_{22}Ti^{49}$ atomunun çekirdeği etrafında tek bir μ mezonu dolanmaktadır ($m_\mu = 207\, m_e$). Eğer bu μ mezonu $n=2$ hâlinde bulunuyorsa temel hâle geçtiği takdirde yayınlanacak olan enerjiyi hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

BOHR atom modeline göre hidrojenimsi bir atom için iki enerji hâli arasındaki enerji farkı

$$E_p - E_n = \frac{m_\mu Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

ile verilmiştir. Buna göre

$$E_2 - E_1 = \frac{207 \times 9{,}108 \cdot 10^{-31} \times (22)^2 \times (1{,}602 \cdot 10^{-19})^4}{8 \times (8{,}854 \cdot 10^{-12})^2 \times (6{,}625 \cdot 10^{-34})^2} \times \frac{3}{4}$$

$$= 169{,}6 \cdot 10^{-15} \text{ Joule} = \frac{169{,}6 \cdot 10^{-15} \text{ (Joule)}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ (Joule/eV)}} = 1{,}046 \text{ eV}$$

bulunur.

PROBLEM : 100.— Lâlettâyin bir eleman $B=0{,}3$ w/m^2 lik bir magnetik alana daldırılmıştır. Acaba $\lambda_0=4500$ Å lük çizgiye tekaabül eden normâl ZEEMAN bileşenlerinin bu çizgiden uzaklıkları ne kadar olur.?

ÇÖZÜM :

Normâl ZEEMAN bileşenlerinin frekanslarının ν_0 frekanslı ana çizgiye nisbetle

$$\nu_1 = \nu_0 - \frac{eB}{4\pi m_e}$$

ve

$$\nu_2 = \nu_0 + \frac{eB}{4\pi m_e}$$

bağıntısıyla verilmiş oldukları mâlûmdur.

Buna binâen

$$\nu_{1,2} = \nu_0 \pm \frac{eB}{4\pi m_e}$$

veyâ $c=\lambda\nu$ olması hasebiyle

$$\frac{1}{\lambda_{1,2}} = \frac{1}{\lambda_0}\left(1 \mp \frac{eB}{4\pi m_e \nu_0}\right)$$

ya da

$$\lambda_{1,2}=\frac{\lambda_0}{1\mp\frac{eB}{4\pi m_e \nu_0}} \# \lambda_0\left(1\pm\frac{eB\,\lambda_0}{4\pi m_e c}\right)$$

olur. Buradan da

$$|\lambda_{1,2}-\lambda_0| = \frac{eB\,\lambda_0^2}{4\pi m_e c}$$

$$= \frac{1{,}602\,.\,10^{-19}\times 0{,}3\times(4500\,.\,10^{-10})}{4\times 3{,}1416\times 9{,}108\,.\,10^{-31}\times 3.10^{8}}\, m$$

$$= 0{,}0284\,.\,10^{-10}\, m = 0{,}0284\ \mathring{A}$$

bulunur.

PROBLEM : 101.— Bir serbest elektronlar hüzmesi $6\cdot 10^{-1}$ weber/m^2 lik birbiçim bir B magnetik alanını, bu alana dik olarak katetmektedir. Magnetik alan çizgileri boyunca yönlenen elektronlarla yönlenmiyen elektronların enerjileri arasındaki farkı hesaplayınız.

(CEVAP: $6{,}95\cdot 10^{-5}$ eV)

PROBLEM : 102.— Muayyen bir spektrometrenin spektrum çizgilerini, görülebilir bölgedeki (meselâ 6000 $\mathring{A}$ civarındaki), rezolüsyonu 0,1 $\mathring{A}$ olsun. Bu takdirde normâl ZEEMAN olayı rezolüsyonunu mümkün kılacak olan gerekli B magnetik alan yoğunluğu acaba ne olur?

PROBLEM : 103.— Atom çekirdeği içindeki nükleonlar arasındaki etkileşme potansiyel enerjisi olarak genellikle

$$U(r) = -C\,\frac{1}{r}\,e^{-r/r_0}$$

ile verilen YUKAWA potansiyel fonksiyonu alınır. Burada

$$C = 10^{-26}\,(\text{Joule}\cdot m) \quad \text{ve} \quad r_0 = 1{,}2\cdot 10^{-15}\ \text{m}$$

dir.

1) $U(r)$ den bir protonun nükleer kuvvetler alanında başka bir proton üzerine etkilediği $F(r)$ kuvvetinin ifâdesini çıkarınız.

2) $F(r_0)$ ile $F(4r_0)$ ın değerlerini hesaplayarak nükleer kuvvetlerin kısa ulaşımlı kuvvetler olduklarını gösteriniz.

3) Biribirlerinden sırasiyle önce r_0, sonra da $4r_0$ uzaklıkta bulunan iki proton arasındaki Coulomb etkileşme kuvvetini hesaplayınız. Elektromagnetik kuvvetlerin ulaşımıyla nükleer kuvvetlerinkini mukayese ediniz ve r_0 uzaklığı için

$$\frac{\textbf{Elektrik kuvvetler}}{\textbf{Nükleer kuvvetler}}$$

oranını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

1) Kuvvetle potansiyel enerji arasındaki genel bağıntı

$$F = -\frac{dU}{dr}$$

şeklindedir. Buna göre

$$F = -\frac{Ce^{-r/r_0}}{r^2}\left[1 + \frac{r}{r_0}\right]$$

bulunur.

2) $$F(r_0) = -\frac{2C}{r_0^2}\frac{1}{e} = -5300 \text{ Newton } (N)$$

ve

$$F(4r_0) = -\frac{5C}{16\, r_0^2}\frac{1}{e^4} = -42 \text{ Newton } (N)$$

bulunur.

Nükleer kuvvetlerin uzaklığın fonksiyonu olarak zayıflamalarını tesbit etmek üzere $F(4r_0)/F(r_0)$ oranını teşkil edelim:

$$\frac{F(4\,r_0)}{F(r_0)} = \frac{42}{5300} = \frac{1}{126}$$

Bu bize nükleer kuvvetlerin $r = 4r_0$ da, $r = r_0$ dakinin yüzde birinden de düşük bir değeri haiz olduğunu göstermektedir.

3) Biribirlerinden $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-15}$ m uzaklıkta bulunan iki proton arasındaki Coulomb etkileşme kuvveti

$$F(r_0) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = 164\,(N)$$

ve $r = 4r_0$ için de

$$F(4r_0) = \frac{e^2}{64\pi\varepsilon_0 r^2} = 10\,(N)$$

olur. Buna göre COULOMB kuvvetlerinin oranı

$$\frac{F(4r_0)}{F(r_0)} = \frac{10}{164} \neq \frac{1}{16}$$

olur.

COULOMB etkileşme kuvvetleriyle nükleer (şiddetli) etkileşmeler arasındaki oran, bu misâlde,

$$\frac{\text{COULOMB kuvvetleri}}{\text{Nükleer kuvveeler}} = \frac{164}{5300} = 0{,}032$$

olur.

PROBLEM : 104.— Üç defa iyonlanmış titanyum atomunun ($_{22}Ti^{+++}$) 5S ve 4P seviyeleri arasındaki geçişte yayınlanan fotonun dalgaboyunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

SOMMERFELD modeline göre hidrojenimsi bir atomun muhtelif seviyelerine tekaabül eden enerjiler,

$$E_{n,l} = -\frac{RhcZ^2}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

formülü ile hesaplanır. Titanyum atomunun son yörüngesinde dört elektron bulunduğundan üç kere iyonlaşmış titanyuma yukardaki formülü uygulayabiliriz.

$_{22}Ti^{+++}$ atomunun 5S seviyesine tekaabül eden enerji

$$E_{5,0} = -\frac{1{,}097 \cdot 10^7 \times 6{,}625 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 \times (22)^2}{25}\left[1 + \frac{(22)^2}{(137)^2 \times 25}\left(\frac{5}{1} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

$$= 422{,}1 \cdot 10^{-19} \times (1{,}004384) \text{ Joule}$$

veyâ

$$E_{5,0} = 423{,}8 \cdot 10^{-19} \text{ Joule.}$$

$4P$ seviyesine tekaabül eden enerji ise;

$$E_{4,1} = -\frac{1{,}097 \cdot 10^7 \times 6{,}625 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 \times (22)^2}{15}\left[1 + \frac{(22)^2}{(137)^2 \times 16}\left(\frac{4}{2} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

$$= 659{,}6 \cdot 10^{-19} \times (1{,}002015) \text{ Joule}$$

veyâ

$$E_{4,1} = 661 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$$

olur. Bu iki seviye arasındaki geçişte ortaya çıkan fotonun enerjisi:

$$\Delta E = E_{4,1} - E_{5,0} = (661 - 423{,}8) \cdot 10^{-19} = 273,\ 2 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$$

olacaktır. Buradan fotonun dalgaboyu için de

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$$

formülünden

$$\lambda = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{237{,}2 \cdot 10^{-19}} = 83{,}73 \cdot 10^{-10}\, m = 83{,}73\ \mathring{A}$$

bulunur.

PROBLEM : 105.— Sodyum atomu için ilk uyartılma potansiyeli 2,093 volt olup bu $3^2 S_{\frac{1}{2}} \longrightarrow 3^2 P_{\frac{1}{2}}$ geçişine tekaabül eder. 1000°C daki sodyum buharı için birinci uyartılmış hâldeki sodyum atomlarının sayısının temel hâldekilerin sayısına olan oranını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

$3^2 P_{\frac{1}{2}}$ hâli esasında şu altı alt hâlden müteşekkil olan bileşik bir enerji hâlidir:

n	l	j	m_j
3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$
3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$

Benzer şekilde $3^2S_{\frac{1}{2}}$ hâli de iki alt hâlden oluşur:

n	l	j	m_j
3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$

BOLTZMANN'ın dağılım kanunu, T ile mutlak sıcaklığı göstermek üzere, ılık denge hâlinde E_i enerjisiyle belirlenmiş bir kuvantum hâlindeki atomların N_i sayısının

$$e^{-E_i/kT}$$

ile orantılı olduğunu beyân eder. Eğer i ve k gibi farklı iki kuvantum hâli göz önüne alacak olursak bu hâldeki atomların sayılarının biribirlerine oranı şu hâlde, $E_i > E_k$ olmak üzere ve $\Delta E = E_i - E_k$ vazederek,

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{e^{-E_i/kT}}{e^{-E_k/ET}} = e^{-\Delta E/kT}$$

olur.

Bu problemde yüksek enerji seviyesi 6 kuvantum hâlini ve düşük enerji seviyesi de 2 kuvantum hâlini ihtivâ etmektedirler. Buna göre bu hâllerdeki atomların oranı olarak

$$\frac{6}{2} e^{-\Delta E/kT} = 3 \cdot \exp\left\{-\frac{2{,}093 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \times 1273}\right\} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$$

bulunur.

PROBLEM : 106.— Magnetik alan 0,5 weber/m^2 olmak üzere *5F* ile *4D* hâlleri arasındaki geçiş için normal ZEEMAN bileşenleri arasındaki enerji aralığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Normal ZEEMAN olayında enerji farkları

$$\Delta E = m_l \cdot \mu_B \cdot B$$

ile belirlenir, (m_l, magnetik kuvantum sayısı, μ_B Bohr magnetonudur.)

Aşağıdaki cetvelde $5F$ ve $4D$ hâllerinin B alanında kaç alt hâle ayrışacağını görmek mümkündür:

	l	m_l
$5F$	3	3, 2, 1, 0, —1, —2, —3
$4D$	2	2, 1, 0, —1, —2

Öte yandan

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

idi; μ_B yerine konursa

$$\Delta E = m_l \cdot \frac{e}{m_e} \cdot B \frac{h}{4\pi}$$

olur. Buradan

$$\Delta E = \mp 1{,}76 \cdot 10^{11} \times 0{,}5 \times \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{4 \times 3{,}1416}$$

$$= \mp 0{,}467 \cdot 10^{-23} \text{ Joule} = \mp 2{,}915 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

bulunur.

PROBLEM : 107.— $\mu_l = \sqrt{L(L+1)}\, h/4\pi m_e$ ve $\mu_s = \sqrt{S(S+1)} \times h/2\pi m_e$ olduğunu göz önünde tutarak $\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$ toplam magnetik momentinin toplam açısal momenti doğrultusundaki bileşeninin

$$\mu_j = \sqrt{J(J+1)}\, \frac{eh}{4\pi m_e} \left[1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}\right]$$

şeklinde olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{L}} + \vec{\mathcal{S}} = \sum_i \vec{L}_i + \sum_i \vec{S}_i$$

bağıntısının teşkil ettiği üçgeni göz önüne alalım. Derhâl

$$\mathcal{J} = \mathcal{S} \cos \varphi + \mathcal{L} \cos \psi = \sqrt{S(S+1)}\frac{h}{2\pi} \cos \varphi + \sqrt{L(L+1)}\frac{h}{2\pi} \cos \psi \tag{1}$$

ve

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{J}^2 + \mathcal{S}^2 - 2\mathcal{J}\mathcal{S} \cos \varphi \tag{2}$$

yazılabilir. Burada

$$\mathcal{S} = \sqrt{S(S+1)}\frac{h}{2\pi} \quad \text{ve} \quad \mathcal{L} = \sqrt{L(L+1)}\, \frac{h}{2\pi} \tag{3}$$

olduğu göz önünde tutulmuştur. Diğer taraftan $|\vec{\mathcal{J}}| = \mathcal{J}$ nin de

$$\mathcal{J} = \sqrt{J(J+1)}\frac{h}{2\pi} \tag{4}$$

şeklinde kuvantalaştırılmış olduğunu unutmamak lâzımdır.

Buna binâen eğer $\vec{\mu}_j$ yi $\vec{\mathcal{J}}$ üzerine izdüşürecek olursak $\vec{\mu}_j$ ile $\vec{\mu}_j$ nin $\vec{\mathcal{J}}$ doğrultusundaki izdüşümünü göstermek üzere

$$\mu_j = \sqrt{L(L+1)}\,\frac{eh}{4\pi m_e}\cos\psi + \sqrt{S(S+1)}\,\frac{eh}{2\pi m_e}\cos\varphi \tag{5}$$

olur. Buradan hareketle ve (1) nazar-ı itibâra alınarak

$$\frac{\mu_j}{\mathcal{J}} = \frac{\dfrac{eh}{4\pi m_e}\left[\sqrt{L(L+1)}\cos\psi + 2\sqrt{S(S+1)}\cos\varphi\right]}{\dfrac{h}{2\pi}\left[\sqrt{L(L+1)}\cos\psi + \sqrt{S(S+1)}\cos\varphi\right]}$$

$$= \frac{e}{2m}\left[1 + \frac{\sqrt{S(S+1)}\cos\varphi}{\dfrac{2\pi}{h}\mathcal{J}}\right] \tag{6}$$

bulunur. (6) daki $\cos\varphi$, (2) bağıntısı vâsıtasıyla elenir ve

$$\frac{\mu_j}{\mathcal{J}} = \frac{e}{2m_e}\left[1 + \frac{\sqrt{S(S+1)}(\mathcal{J}^2+\mathcal{S}^2-\mathcal{L}^2)}{2\mathcal{J}^2\mathcal{S}}\right]$$

olur. (3) ve (4) bağıntıları yardımıyla da buradan

$$\mu_j = \sqrt{J(J+1)}\,\frac{eh}{4\pi m_e}\left[1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}\right]$$

bağıntısı elde edilir. Köşeli parantez içindeki ifâdeye LANDÉ çarpanı adı verilir ve genellikle g harfi ile gösterilir:

$$\mu_j = \sqrt{J(J+1)}\,\frac{eh}{4\pi m_e}\,g$$

ve

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

olduğu anlaşılır.

PROBLEM : 108.— Bir atomdaki açısal momentlerin $(L - S)$ kuplâjı göz önüne alındığında θ ile $\vec{\mathcal{L}}$ toplam yörünge açısal momenti ile $\vec{\mathcal{S}}$ toplam spin momenti arasındaki açı gösterilecek olursa $\cos\theta$ nın

$$\cos\theta = \frac{J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)}{2\sqrt{L(L+1)S(S+1)}}$$

şeklinde kuvantalaştırılmış olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{L}} + \vec{\mathcal{S}} = \sum_i \vec{L}_i + \sum_i \vec{S}_i$$

bileşkesi göz önüne alındığında $\vec{\mathcal{J}}$, $\vec{\mathcal{L}}$ ve $\vec{\mathcal{S}}$ nin meydana getirdikleri üçgene kosinüs kuralı uygulanacak olursa

$$\mathcal{J}^2 = \mathcal{L}^2 + \mathcal{S}^2 + 2\,\mathcal{L}\mathcal{S}\cdot\cos\theta$$

veyâ

$$\cos\theta = \frac{\mathcal{J}^2 - \mathcal{L}^2 - \mathcal{S}^2}{2\,\mathcal{L}\mathcal{S}} \qquad (1)$$

bulunur. Öte yandan $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{S}$ uzunlukları

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sqrt{J(J+1)}\,\frac{h}{2\pi} \\ \mathcal{L} &= \sqrt{L(L+1)}\,\frac{h}{2\pi} \\ \mathcal{S} &= \sqrt{S(S+1)}\,\frac{h}{2\pi} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

şeklinde kuvantalaştırılmış olduklarından (2) bağıntılarını (1) bağıntısına yerleştirecek olursak

$$\cos\theta = \frac{J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)}{2\sqrt{L(L+1)S(S+1)}}$$

bulunur.

PROBLEM : 109.— Potasyumun temel serisinin dördüncü terimi bir dublettir. Bu dubleti teşkil eden spektrum çizgileri $4^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 7P_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$ geçişinden doğan 3217 $\mathring{A}$ ve 3218 $\mathring{A}$ lük dalga uzunluklarına sâhip bu-

lunurlar. Eğer potasyum atomları 2,14 weber/m² lik indüksiyonu haiz bir magnetik alan içinde bulunuyorlarsa $4^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 7P_{\frac{3}{2}}$ geçişinden ortaya çıkan çizginin, yüksek dispersiyonlu bir spektrograf aracılığıyla elde edilen görünüşünün ne olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM :

Enerji hâlleri,

$$j = l \mp s$$

$$m_j = m_l \mp m_s$$

$$s = +\frac{1}{2}$$

$$m_s = \mp s = \mp \frac{1}{2}$$

$$g = \left[1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}\right] \qquad (1)$$

$$m_l = l,\ l-1,\ l-2, \cdot \cdot \cdot \cdot,\ 0, \cdot \cdot \cdot \cdot,\ -l+2,\ -l+1,\ -l$$

formülleri yardımıyla kolayca tesbit olunur, ve böylece aşağıdaki cetvel elde edilmiş olur. Burada g ile LANDÉ çarpanı gösterilmektedir.

	l	j	s	m_j	g	$m_j g$
$7P_{3/2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$2,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -2$
$7P_{1/2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}$
$4^2S_{1/2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$	2	$1,\ -1$

Normal ZEEMAN olayında enerji seviyelerinin B indüksiyonuyla karakterize edilen magnetik alanda

$$\Delta E = m_l \mu_B \cdot B$$

kadar değiştikleri mâlûmdur. Buradan m_l magnetik kuvantum sayısını ve μ_B de Bohr magnetonu göstermektedir.

Yukardaki cetvelden de kolayca görüleceği üzere, uyartılmış potasyum atomları, B alanı içinde iken $7P_{\frac{3}{2}}$ hâli dört alt hâle ve $4^2S_{\frac{1}{2}}$ hâli de iki alt hâle ayrışmaktadır. $B = 0$ iken, bunlar arasında vukuu bulan geçişte neşredilen fotonun frekansını ν_0 ile gösterelim; $B \neq 0$ durumunda $7P_{\frac{3}{2}}$ nin dört alt hâli ve $4^2S_{\frac{1}{2}}$ nin iki alt hâli arasındaki geçişler, spektroskopinin seçim kuralları uyarınca ancak bu seviyelere tekaabül eden toplam magnetik kuvantum sayıları arasındaki Δm_j farklarının

$$\Delta m_j = \mp 1 \quad \text{ya da} \quad \Delta m_j = 0$$

olduğu hâller için mümkündür; aksi hâlde herhangi bir geçiş ve dolayısıyla foton neşri olmaz.

Elektronun spini göz önüne alındığında anormal ZEEMAN olayı ile karşılaşılır ve enerji farklarını veren ifâde de artık

$$\Delta E = m_j g \, \mu_B \cdot B \tag{2}$$

şeklini alır. g katsayısı yukarıda (1) ile verilmiş olan LANDÉ çarpanıdır. Böylece anormal ZEEMAN olayında $7P_{\frac{3}{2}}$ ye tekaabül eden seviye farklarını (2) uyarınca hesaplamak için, sırasıyla

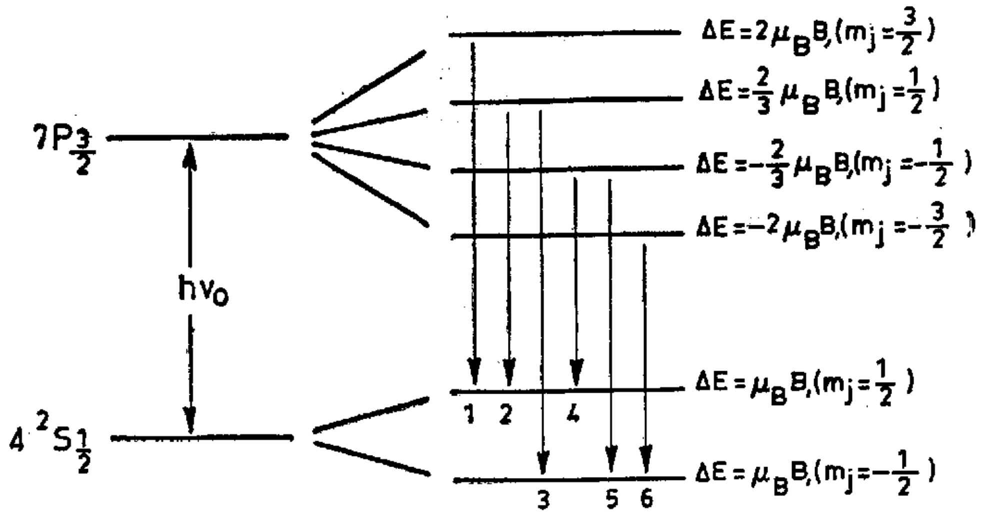
$$m_j g = 2 \,, \ \frac{3}{2} \,, \ -\frac{3}{2} \,, \ -2$$

ve $4^2S_{\frac{1}{2}}$ ye tekaabül eden seviye farklarını hesaplamak için de, sırasıyla

$$m_j g = 1, \ -1$$

olacaktır.

Enerji geçişlerini gösteren diyagram şöyledir:



Böylece yayınlanan çizgilerin esas merkezî çizgiye nisbetle enerji farkları

1. çizgi için $\Delta(h\nu) = 2\mu_B \cdot B - \mu_B B = \mu_B B$

2. çizgi için $\Delta(h\nu) = \frac{2}{3}\mu_B \cdot B + \mu_B B = \frac{5}{3}\mu_B B$

3. çizgi için $\Delta(h\nu) = \frac{2}{3}\mu_B \cdot B - \mu_B B = -\frac{1}{3}\mu_B B$

4. çizgi için $\Delta(h\nu) = -\frac{2}{3}\mu_B \cdot B + \mu_B B = \frac{1}{3}\mu_B B$

5. çizgi için $\Delta(h\nu) = -\frac{2}{3}\mu_B \cdot B - \mu_B B = -\frac{5}{3}\mu_B B$

6. çizgi için $\Delta(h\nu) = -2\mu_B \cdot B + \mu_B B = -\mu_B B$

olur. Buradan

$$\frac{\Delta(h\nu)}{\mu_B \cdot B} = K = \mp 1, \mp\frac{1}{3}, \mp\frac{5}{3} \tag{3}$$

olduğu görülür. μ_B Bohr magnetonunun

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} \tag{4}$$

ile verilmiş olduğu göz önünde tutularak ve $K = \mp 1,\ \mp\frac{1}{3},\ \mp\frac{5}{3}$ vazetmek sûretiyle (3) ve (4) den

$$\Delta\nu = K \frac{e}{m_e} \frac{B}{4\pi} \tag{5}$$

bağıntısı elde edilir.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{ve} \quad \Delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu \tag{6}$$

olduğundan (5) ve (6) ifâdelerinden de dalga uzunluğundaki değişme olarak

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{c} K \frac{e}{m_e} \frac{B}{4\pi} \tag{7}$$

bulunur. Böylece meselâ $K=1$ için

$$\Delta\lambda = -\frac{(3217 \cdot 10^{-10})^2}{3 \cdot 10^8} \times 1{,}76 \cdot 10^{11} \times \frac{2{,}14}{4 \times 3{,}1416}$$

$$= -0{,}103 \cdot 10^{-10}\, m = -0{,}103\, \mathring{A}$$

ve K nın alacağı değerlere göre dalgaboyu farkları için sırasıyla (7) den

$$\Delta\lambda = \pm 0{,}172\, \mathring{A};\ \pm 0{,}103\, \mathring{A};\ \pm 0{,}034\, \mathring{A}$$

değerleri bulunur.

PROBLEM : 110.— Yörünge kuvantum sayısı $l=20$ olan bir elektron için bir spin - yörünge etkileşmesi vardır. Spin kuvantum sayısının $s = \frac{1}{2}$ olduğu bilindiğine göre

a) $\vec{S}$ spin vektörü ile $\vec{J}$ yörünge açısal impuls vektörünün j nin mümkün her iki değeri için de birbirlerine aşağı yukarı dik olduklarını gösteriniz.

b) Toplam magnetik moment vektörünün, toplam açısal moment vektörü doğrultusunda olduğunu gösteriniz.

PROBLEM : 111.— $^2D_{\frac{2}{3}}$ hâli için toplam açısal impuls vektörü ile yörünge açısal impuls vektörü arasındaki açıyı bulunuz.

(CEVAP: $18° 27'$)

PROBLEM : 112.— Üç valânslı bir atomun en düşük enerjili elektronik durumunun $3P$ hâli olduğu bilindiğine göre bu atomun hangi atom olduğunu bulunuz.

(CEVAP: $_{15}P$)

PROBLEM : 113.— Dış magnetik alan yok iken kadmiyumun 2^1P_1 ve 3^1D_2 hâlleri tek çizgili hâllerdir.

$3^1D_2 \rightarrow 2^1P_1$ geçişinde ise kadmiyum 6439 Å lük dalgaboyunu haiz bir ışık yayınlanmaktadır. Eğer, kadmiyuma 1 weber/m^2 lik magnetik bir alan uygulansaydı, acaba yayınlanacak olan radyasyonun dalgaboyu ne olurdu?

Kuvantum Mekaniği

PROBLEM : 114.— Bir X ışınları tübü göz önüne alındığında bunun katodu ile antikatodu arasına uygulanan V gerilimini kilovolt (kV) ve meydana gelen X ışınlarının minimum dalgaboylarını da angström (Å) cinsinden ifâde ederek

$$\lambda = \frac{12,4}{V}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Eğer V gerilimi altında hızlandırılarak $E = eV$ enerjisini kazanan elektronların bütün bu enerjisi X ışınlarının fotonlarına intikal edecek olsa

$$eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

veyâ

$$\lambda V = \frac{hc}{e} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}\,(\text{Joule} \times \text{sec}) \times 3 \cdot 10^{8}\,(\text{m/sec})}{1,602 \cdot 10^{-19}\,(\text{Coulomb})} = 12,4 \cdot 10^{-7} (\text{m} \times \text{V})$$

bulunur. λ yı $\mathring{A}$ ve V yi de kV cinsinden ifâde edersek de

$$\lambda V = 12,4 \cdot 10^{-7}\,(10^{10}\,\mathring{A} \times 10^{-3}\,kV) = 12,4\,(\mathring{A} \times kV)$$

ya da

$$\lambda = \frac{12,4}{V}$$

olur.

PROBLEM : 115.— Bir röntgen tübüne uygulanan yüksek gerilimin 47700 volt olması hâlinde, antikatot tarafından yayınlanan X ışınlarının minimum dalgaboylarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

X ışınlarını doğuran elektronlar katotla antikatot arasındaki bölgede gerilimin etkisi altında $E = \mathrm{eV}$ enerjisini kazanırlar. Bu enerjiyle antikatoda çarptıkları zaman bütün bu enerjiyi X ışını fotonu çıkarmağa harcarlarsa

$$\mathrm{eV} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{1}$$

olur. Gerçekte bu eV enerjisinin bir kısmı antikatot tarafından soğurulur ve çıkan X fotonlarının λ dalgaboyları (1) in belirttiği

$$\lambda_{\mathrm{Min}} = \frac{hc}{\mathrm{eV}} \tag{2}$$

minimum dalgaboyundan daha büyük olur.

Problemin verilerine göre (2) de λ_{Min} un

$$\lambda_{\mathrm{Min}} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}\,(\mathrm{Joule} \times \mathrm{sec}) \times 3 \cdot 10^{8}\,(m/s)}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,(\mathrm{Coulomb}) \times 47700\,(V)} = 2{,}60 \cdot 10^{-11}\, m = 0{,}260\, \mathring{A}$$

olduğu bulunur.

PROBLEM : 116.— 250 eV enerjili elektronlardan müteşekkil bir hüzme plâtin bir varak üzerine 30° lik bir geliş açısıyla düşmektedir. Metale nüfûz eden bir elektronun potansiyel enerjisinde vukuu bulan değişimin 12 eV olduğunu göz önünde tutarak

1) plâtinin bu enerjideki elektronlara karşı haiz olduğu kırılma indisini,

2) metaldeki elektronların hızını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

1) Elektronların plâtin varağın dışındaki hızlarını v_1, içindeki hızlarını da v_2 ile ve elektronların karşılaştıkları potansiyel engelini de V ile gösterelim. Enerjinin korunumu ilkesine göre

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - V$$

ya da

$$v_1^2 = v_2^2 - \frac{2V}{m}$$

ve

$$v_2 = v_1 \sqrt{1 + \frac{V}{\frac{1}{2} m v_1^2}}$$

bulunur. Buna göre μ kırılma indisi; tanımı gereğince,

$$\mu = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{V}{\frac{1}{2} m v_1^2}} \tag{1}$$

dir. Elektronun kinetik enerjisi ile potansiyel eV cinsinden verilmiş bulunmaktadır; yâni $V = 12$ eV ve $(1/2)\, m v_1^2 = 250$ eV dir. Şu hâlde

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{12}{250}} = 1{,}023$$

olur.

2) Elektronların metaldeki hızları (1) e göre

$$v_2 = \mu v_1 = 1{,}023\ v_1$$

dir. Eğer $eV_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ ile elektronların plâtinin dışında haiz oldukları enerji gösterilecek olursa

$$v_2 = \mu v_1 = 1{,}023\ v_1 = 1{,}023 \sqrt{\frac{2\,eV_1}{m}} =$$

$$= 1{,}023 \sqrt{\frac{2 \times 250\ (\text{eV})}{9.11 \cdot 10^{-31}\ (\text{kg})}} = 1{,}023 \sqrt{\frac{2 \times 250\ (\text{eV}) \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} (\text{Joule/eV})}{9{,}11 \cdot 10^{-19}\ (\text{kg})}}$$

$$= 0{,}947 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

bulunur.

PROBLEM : 117.— Dar bir elektron hüzmesi, elektrik alan kuvveti $\mathfrak{E} = 5{,}5 \cdot 10^5$ watt/m olan yatay ve paralel bir şekilde yerleştirilmiş olan dar iki levha arasından geçmektedir. 0,10 weber/m² lik üniform

bir magnetik alan levhalara dik olarak elektrik alan üzerine bindirilmiştir. Paralel levhaların arasından geçen elektronlar ince metalik kristallerden müteşekkil bir varağı katetmektedirler;

a) aralarındaki açıklık 4,07 Å olan Bragg düzlemlerinden dolayı meydana gelen birinci mertebeden Bragg yansımasına sebeb olan açı nedir?

b) *B* magnetik akı yoğunluğu iki misli olsaydı bu açı ne olurdu?

c) yukardaki (*a*) ve (*b*), şıklarındaki elektronların dalgaboylarının oranı nedir?

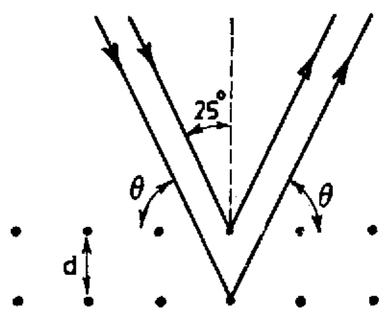
PROBLEM : 118.— 54 eV lik elektronlar $\varphi=25°$ lik bir geliş açısı altında, birbirlerinden 0,91 Å uzaklıkta bulunan şebeke düzlemlerinden müteşekkil bir kristale vâsıl olarak birinci mertebeden BRAGG yansımasına uğramaktadırlar.

Söz konusu geometrik şartlar altında yansıyacak bir dalganın dalgaboyu ile, dinamik şarta göre elektrona eşlik etmesi gereken DE BROGLİE dalgasının dalgaboyunu mukayese ediniz.

ÇÖZÜM :

θ ile, gelen ışının BRAGG düzlemiyle yaptığı açıyı göstererek birinci mertebeden BRAGG yansımasının vukuu için gerekli şart

$$\lambda=2d \sin \theta$$



olmasıdır; burada λ ışının dalgaboyunu ve d de peşpeşe iki BRAGG düzlemi arasındaki uzaklığı göstermektedir. Buna göre

$$\lambda = 2d \sin\theta = 2d \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2d \cos\varphi = 2\times 0{,}91\times 0{,}911 = 1{,}65\ \mathring{A}$$

olmalıdır. Öte yandan elektrona eşlik eden DE BROGLİE dalgasının uzunluğu için de, MKS sisteminde,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\times 9{,}11 \cdot 10^{-31}\times 54\times 1{,}602 \cdot 10^{-19}}}$$

$$= 1{,}66 \cdot 10^{-10}\, m = 1{,}66\ \mathring{A}$$

bulunur.

PROBLEM : 119.— Bakır hedefli bir X ışınları tübünden çıkan ışınlar ağırlık itibariyle % 30 u bakır ve % 70 i de nikel olan $2{,}00 \cdot 10^{-3}$ cm kalınlığında bir levhayı katetmektedirler. Bu ışınların K_α ve K_β bileşenlerinin şiddetlerinin $I_{0\alpha}/I_{0\beta}$ oranının 5 olduğu bilindiğine göre levhayı kateden K_α ve K_β bileşenlerinin şiddetlerinin I_α/I_β oranının ne olacağını hesaplayınız.

Bakır için Cu K_α radyasyonunun kütlesel soğurulma katsayısı = 52,9 cm^{2}g^{-1}

Bakır için Cu K_β radyasyonunun kütlesel soğurulma katsayısı = 39,3 cm^{2}g^{-1}

Nikel için Cu K_α radyasyonunun kütlesel soğurulma katsayısı = 45,7 cm^{2}g^{-1}

Nikel için Cu K_β radyasyonunun kütlesel soğurulma katsayısı = 275,0 cm^{2}g^{-1}

Bakır - nikel alaşımının özgül kütlesi = 8,91 g . cm^{-3}

ÇÖZÜM :

I_0 şiddetindeki bir X ışını hüzmesi bir alan başına m gram kütleli ye μ_m soğurma katsayılı bir mâdenî levhayı katederse şiddeti

$$I = I_0\, e^{-\mu_m m}$$

ye düşer. Eğer X ışının hüzmesi 1 ve 2 indisleriyle gösterilen iki farklı maddeden yapılmış bir levhayı katederse şiddeti

$$I=I_0\, e^{-(\mu_1 m_1+\mu_2 m_2)}$$

ye indirgenmiş olur.

Soğurucu levhanın özgül kütlesi $\rho=8{,}91$ g $\cdot$ cm^{-3} olduğu vechile bu, t ile levhanın kalınlığını göstermek üzere,

$$\rho_y=\rho t=8{,}91\times 2\cdot 10^{-3}=1{,}782\cdot 10^{-2}\ \mathrm{g/cm^2}$$

lik bir yüzeysel özgül kütlesine denktir.

Levhadaki bakırın yüzeysel özgül kütlesi,

$$\rho_{Cu,y}=\frac{1{,}782\cdot 10^{-2}\times 30}{100}=0{,}5346\cdot 10^{-2}\ \mathrm{g/cm^2}$$

ve levhadaki nikelin yüzeysel özgül kütlesi de

$$\rho_{Ni,y}=\frac{1{,}782\cdot 10^{-2}\times 70}{100}=1{,}247\cdot 10^{-2}\ \mathrm{g/cm^2}$$

dir. Bunlara binâen CuK_α nın levhayı katettikten sonraki şiddeti olarak

$$I_\alpha=I_{0\alpha}\cdot \exp\left[-\left\{(0{,}5346\times 52{,}9)+(1{,}247\times 45{,}7)\right\}\cdot 10^{-2}\right]=I_{0\alpha}\, e^{-0{,}8527}$$

ve buradan da

$$\frac{I_\alpha}{I_{0\alpha}}=0{,}4263 \qquad (1)$$

bulunur.

Benzer şekilde CuK_β çizgisi için de

$$I_\beta=I_{0\beta}\exp\left[-\left\{(0{,}5346\times 39{,}3)+(1{,}247\times 275)\right\}\cdot 10^{-2}\right]=I_{0\beta}\cdot e^{-3{,}64}$$

veyâ

$$\frac{I_\beta}{I_\alpha}=0{,}02627 \qquad (2)$$

bulunur. Şu hâlde (1) ve (2) den, zayıflamış K_α çizgisinin şiddetinin zayıflamış K_β çizgisinin şiddetine oranının

$$\frac{I_\alpha}{I_\beta} = \frac{I_{0\alpha}}{I_{0\beta}} \times \frac{0,4263}{0,02627} = 5 \times \frac{0,4263}{0,02627} = 81$$

olduğu görülmüş olur.

PROBLEM : 120.— Alüminyumun soğurma tesir kesidi biri Compton olayı ile, diğeri ise fotoelektrik olayı ile ilgili olmak üzere iki kısımdan müteşekkildir. 0,06 MeV lik enerjiyi haiz fotonlar göz önüne alındığında, Compton olayı ile ilgili soğurma tesir kesidinin değeri $8,1 \cdot 10^{-24}$ cm^2 ve fotoelektrik olayla ilgili soğurma tesir kesiti de $4,0 \cdot 10^{-24}$ cm^2 dir. Bu enerjiyi haiz fotonlardan müteşekkil bir hüzmenin şiddetinin 3,7 gram . cm^{-2} lik alüminyum bir levhayı katederken ne kadar azaldığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Birim yüzey elemanı başına kütlesi dm olan bir levhadaki atomların sayısı, n_m ile birim kütle elemanındaki atom sayısını gösterecek olursak, $n_m\, dm$ olur. σ_C ile COMPTON olayı ile ilgili, σ_F ile de fotoelektrik olayı ile ilgili soğurmaya tekaabül eden tesir kesitlerini gösterecek olursak bu levhayı katederken fotonların tâbî olacağı kısmî soğurulmalar, N ile foton sayısını göstermek sûretiyle, COMPTON olayı için

$$\frac{dN_c}{N} = -\, n_m \sigma_c\, dm$$

ve fotoelektrik olayı için de

$$\frac{dN_F}{N} = -\, n_m \sigma_F\, dm$$

ifâdesiyle verilir. Her iki olaydan ileri gelen soğurulma ise

$$\frac{dN}{N} = \frac{dN_c}{N} + \frac{dN_F}{N} = -\, n_m (\sigma_c + \sigma_F)\, dm$$

ile ifâde olunacaktır. N_0 ile alüminyum levhaya gelen fotonların sayısını ve N ile de birim alan başına m gram kadar bir kütle katedildikten sonraki foton sayısını gösterecek olursak bu son ifâdenin integrasyonu sonucu

$$N = N_0\, e^{-n_m(\sigma_c+\sigma_F)\,.\,m} \qquad (1)$$

bulunur. Alüminyumun atom ağırlığı 27 dir; buna binâen 1 gram alüminyumdaki atomların sayısı

$$n_m = \frac{6{,}025 \cdot 10^{23}}{27}$$

dir. Şu hâlde (1) den

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left[-\frac{6{,}025 \cdot 10^{23}}{27} \times (4{,}0+8{,}1)\cdot 10^{-24} \times 3{,}7\right] = 0{,}368$$

bulunur. Buna göre: soğurulan miktar$=1-0{,}368=\%63{,}2$ olur.

PROBLEM : 121.— Isıtılmış bir filâmandan çıkan elektronlar 30 kV luk bir potansiyelde hızlandırıldıktan sonra ince bir alüminyum varağı üzerine yönlendirilmektedirler. Alüminyumun kristal şebekesi sâbitinin 4,05 Å olduğu bilindiğine göre birinci mertebeden difraksiyon açısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

E enerjili bir elektron hüzmesine tekaabül eden DE BROGLİE dalgasının dalgaboyu

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \mathrm{eV}}}$$

olduğundan buradan

$$\lambda = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9{,}11 \cdot 10^{-31} \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} \times 3 \cdot 10^{4}}} = 0{,}708 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}0708\ \text{Å}$$

bulunur.

Birinci mertebeden difraksiyon

$$\lambda = 2d \sin\theta$$

şartı gerçeklendiğinde vukuu bulur. Burada: $d=4{,}05$ Å$=$kristal şebekesindeki düzlemler arasındaki uzaklık$=$şebeke sâbitidir. θ ise gelen hüzmenin bu düzlemlerle yaptığı açıdır. Buna göre gelen hüzmeyle çıkan hüzme arasındaki difraksiyon açısı 2θ olur. Şu hâlde

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0{,}0708}{2\times 4{,}05} = 0{,}00874 \# \theta_{rad}$$

ve

$$\theta = \frac{180\times\theta_{rad}}{\pi} = \frac{180\times 0{,}00874}{3{,}1416} = 30'02''$$

yâni difraksiyon açısı da

$$2\theta = 2\times 30'\,02'' = 1^\circ\,00'\,04''$$

olur.

PROBLEM : 122.— Bir atomun uyartılmasıyla fazla uyartılma enerjisini bir foton yayınlayarak üzerinden atması arasında takriben $t=10^{8}$ *sec* lik bir zaman geçtiğine göre foton enerjisini ve frekansının üzerindeki belirsizlikleri hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

$$\Delta E\cdot\Delta t \geqq \frac{h}{2\pi}$$

şeklindeki HEİSENBERG belirsizlik bağıntısından

$$\Delta E \geqq \frac{h}{2\pi\cdot\Delta t} = \frac{6{,}625\cdot 10^{-34}\,(\text{Joule}\times\text{sec})}{6{,}2832\times 10^{-8}\,(\text{sec})} = 1{,}1\cdot 10^{-26}(\text{Joule})$$

$$= \frac{1{,}1\cdot 10^{-26}\,(\text{Joule})}{1{,}6\cdot 10^{-19}(\text{Joule/eV})} = 0{,}69\cdot 10^{-7}\,\text{eV}$$

ve

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1{,}1\cdot 10^{-26}\,(\text{Joule})}{6{,}625\cdot 10^{-34}\,(\text{Joule}\times\text{sec})} = 1{,}6\cdot 10^{7}\,Hz/\text{sec}$$

bulunur.

PROBLEM : 123.— HEİSENBERG'in belirsizlik bağıntılarından faydalanarak bir elektronun bir atomun içinde kalabilmesi için kinetik enerjisinin ne mertebede olması gerektiğini tâyin ediniz.

ÇÖZÜM :

Atomun çapı $5\cdot 10^{-11}$ m mertebesinde olduğundan bir elektronun atom içindeki yeri üzerinde yapılacak olan hatâ $\Delta x=5\cdot 10^{-11}$ m yi geçemez; ve atomun içindeki elektronların da hızlarının ışık hızına nisbetle küçük olmaları dolayısıyla Özel Rölâtivite Teorisinin formüllerinin kullanmak zorunlu olmadığından

$$\Delta p \cdot \Delta x \geqq \frac{h}{2\pi}$$

HEİSENBERG bağıntısından

$$\Delta p \geqq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,(\text{Joule} \times \text{sec})}{6{,}28 \times 5 \cdot 10^{-11}\,(m)} = 2{,}2 \cdot 10^{-24}\,(\text{Newton} \times \text{sec})$$

bulunur. İmpulsu üzerinde $\Delta p = 2{,}2 \cdot 10^{-24}\,(N \times s)$ lik bir hâta yapılan elektronun haiz olacağı minimum impuls, en kötü ihtimalle, hiç değilse Δp mertebesinde olacaktır. Şu hâlde $p = \Delta p$ alarak atomdaki elektronun kinetik enerjisinin

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{(2{,}2 \cdot 10^{-24})^2\,(N^2 \times s^2)}{2 \times 0{,}1 \cdot 10^{-31}\,(\text{kg}) \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,(J/\text{eV})} \# 17 \text{ eV}$$

mertebesinde olması gerektiği bulunur.

PROBLEM : 124.— x doğrultusunda $E = (1/2)$ mv^2 kinetik enerjisi ile hareket eden bir tâneciğin, hareket doğrultusu olan x ekseni üzerindeki konumunda bir Δx belirsizliği mevcuttur. Bu takdirde, $\Delta p \cdot \Delta x \geqq h$ olduğuna ve $\Delta t = \Delta x / v$ olduğu bilindiğine göre $\Delta E \cdot \Delta t \geqq h$ olduğunu gösteriniz.

PROBLEM : 125.— Bir fotonun dalgaboyu milyondabir bir doğrulukla ölçülüyor. ($\Delta\lambda/\lambda = 10^{-6}$). Bu takdirde

a) dalgaboyu $\lambda = 5000$ Å olan bir foton için,

b) dalgaboyu $\lambda = 1$ Å olan X ışını fotonları için ve

c) dalgaboyu $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ Å olan gamma ışını fotonları için fotonun yeri üzerindeki Δx belirsizliğinin ne olduğunu hesaplayınız.

PROBLEM : 126.— Bir atom çekirdeğinde serbest hâlde elektron bulunamıyacağını HEİSENBERG'in belirsizlik bağıntıları aracılığıyla gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Bir atom çekirdeğinin çapı $10^{-14}\,m$ mertebesindedir. Bunu bir elektronun yeri üzerindeki maksimum belirsizlik olarak telâkkî edersek

$$\Delta p \geqq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,(\text{Joule}\times\text{sec})}{6{,}28\times10^{-14}\,(m)} = 1{,}1 \cdot 10^{-20}\,(\text{Newton}\times\text{sec})$$

olur.

Bir elektronun kinetik enerjisi Özel Rölâtivite Teorisine göre

$$T = \sqrt{m_e^2\, c^4 + p^2\, c^2}$$

dir. Eğer elektronun $E = m_e c^2$ sükûnet enerjisi pc yanında ihmâl edilebilir gibi ise

$$T \backsimeq pc$$

olur. İmpulsu üzerinde $\Delta p = 1{,}1 \cdot 10^{-20}\,(N\times s)$ lik bir hatâ yapılan elektronun haiz olacağı minimum impuls, en kötü ihtimalle, hiç değilse Δp mertebesinde olacaktır. Şu hâlde $p = \Delta p$ alarak çekirdekteki elektronun kinetik enerjisinin

$$T = pc = \Delta p \cdot c = 1{,}1 \cdot 10^{-20}\,(\text{N}\times\text{sec})\times 3 \cdot 10^{8}\,(m/s) = 3{,}3 \cdot 10^{-12}\,(\text{Joule})$$

$$= \frac{3{,}3 \cdot 10^{-12}\,(\text{Joule})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,(\text{Joule/eV})} \# 20\ \text{MeV}$$

olması gerektiği bulunur. Bu çok yüksek bir enerjidir. Eğer gerçekten de çekirdekte bir elektron bulunsaydı onu bu enerjiyi haiz olarak çekirdekte tutmak imkânsız olurdu. Zâten çekirdek bozulmalarında da bu kadar yüksek enerjili elektronlar hiç bir zaman açığa çıkmamaktadırlar.

PROBLEM : 127.— Proton ve nötronlardan meydana gelen bir atom çekirdeğinin çapı 10^{-14} m mertebesindedir.

a) Bu küçük bölge içine hapsedilmiş bulunan protonun (veya nötronun) impulsu üzerindeki belirsizlik nedir?

b) Tâneciğin impulsu, hiç değilse, bir impuls üzerindeki belirsizlik kadar olmalıdır. İmpulsun, impuls üzerindeki belirsizliğe eşit olduğunu farzederek, çekirdek içinde hareket eden protonun hızını ve kinetik enerjisini hesaplayınız.

(CEVAP: a) $6{,}6 \cdot 10^{-20}$ kg $\cdot$ m/sec
b) 8,2 MeV; $4 \cdot 10^{7}$ m/sec)

PROBLEM : 128— a) 10^{-14} m mertebesinde olan nükleer boyutlar içinde mahfuz bir elektronun minimum kinetik enerjisi ve hızı ne olacaktır?

b) Aynı bölgede sınırlanmış olan bir fotonun minimum enerjisi ne olurdu?

PROBLEM: 129.— 0,10 kg kütleli bir sarkaç 3 m/s lik bir hızla hareket etmektedir. p_x impulsunun üzerindeki belirsizliğin $\Delta p_x = 10^{-6}\, p_x$ ile verilmiş olduğunu farzederek sarkaç kütlesinin x konumu üzerinde yapılan eşzaman bir ölçümdeki belirsizliğin ne olacağını tesbit ediniz.

(CEVAP: $\Delta x > 2{,}2 \cdot 10^{-27}\, m$)

PROBLEM : 130.— Bir atomun uyartılmış bir hâlde bulunma süresi 10^{-8} mertebesindedir; atom, her ne kadar, uyartıldıktan sonra $t=0$ ile t arasında herhangi bir anda bir ışın yayınlıyarak eski hâline avdet edebilirse de ortalama zaman 10^{-8} s mertebesindedir. Bir fotonun neşri için bu Δt zamanından faydalanarak Belirsizlik İlkesinin müsaade ettiği en küçük $\Delta \nu$ yü hesaplayınız. Eğer yayınlanan ışığın dalgaboyu 5000 Å ise buna tekaabül eden $\Delta \nu$ acaba ν nün kaçta kaçıdır? (Bu hesap, Doppler olayı vs... gibi spekrum çizgisinin genişlemesine sebep olan başka sebepler olmadığı takdirde, çizginin en küçük genişliğini verir.)

$$\left(\text{CEVAP:} \quad \Delta\nu = 10^{8}\, s^{-1}\,; \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = 1{,}67 \cdot 10^{-7}\right)$$

PROBLEM : 131.— Bir elektromagnetik dalgaya eşlik eden fotonların n sayısı üzerindeki Δn belirsizliği ile bu dalganın $\varphi = 2\pi\nu t$ fazı üzerindeki $\Delta\varphi$ belirsizliği arasında

$$\Delta n \,.\, \Delta\varphi \geqq 1$$

şeklinde bir belirsizlik bağıntısı bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Elektromagnetik dalganın enerjisi

$$E=n \cdot h\nu$$

ve bu enerji üzerindeki belirsizlik de n üzerindeki Δn belirsizliğinden ötürü

$$\Delta E=\Delta n \cdot h\nu \tag{1}$$

dir. Diğer yandan $\varphi=2\pi\nu t$ olduğuna göre

$$\Delta\varphi=2\pi\nu\Delta t \tag{2}$$

olur. Oysaki HEİSENBERG'in belirsizlik bağıntılarına göre

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqq \frac{h}{2\pi} \tag{3}$$

dir. Buna binâen (1) ve (2) den ΔE ve Δt nin değerlerini çekerek (3),

$$\Delta E \cdot \Delta t=\Delta n \cdot h\nu \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi\nu} \geqq \frac{h}{2\pi}$$

şekline girer. Buradan ise

$$\Delta n \cdot \Delta\varphi \geqq 1$$

olduğu görülür.

PROBLEM : 132.— Bir tânecik L genişliğinde fakat sonsuz yükseklikte duvarları haiz bir potansiyel kuyusu içinde bulunursa kuyu içinde haiz olacağı enerjinin en alt seviyesi ne mertebede olur, tâyin ediniz.

ÇÖZÜM :

Belirsizlik ilkesi

$$\Delta x \cdot \Delta p \backsim h \tag{1}$$

olduğunu yâni bir tâneciğin durumu hakkındaki Δx belirsizliği ile aynı andaki impulsu hakkındaki Δp belirsizliğinin çarpımının mertebesinin PLANCK sâbiti mertebesinde olduğunu beyân etmektedir.

Göz önüne alınan hâlde tâneciğin sonsuz derin potansiyel kuyusundan çıkma ihtimâli sıfır olacağından tânecik $\Delta x = L$ içinde lokalize edilmiştir demektir. Buna göre (1) den ötürü

$$\Delta p \backsim \frac{h}{L}$$

olur. Buna binâen de tâneciğin kinetik enerjisinin hiç değilse

$$E \backsim \frac{(\Delta p)^2}{2m}$$

yâni

$$E \backsim \frac{h^2}{2mL^2}$$

mertebesinde olacağı anlaşılır.

PROBLEM : 133.— Bir harmonik osilâtörün toplam enerjisi

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

ile verilmiştir. Harmonik osilâtörün impulsu ve durumu üzerindeki belirsizliklerin kendileri mertebesinde yâni $\Delta p \sim p$ ve $\Delta x \sim x$ olduğu takdirde enerjinin minimum değerinin $h\sqrt{k/m}$ mertebesinde olacağını gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$\Delta p \backsim p$ ve $\Delta x \backsim x$ olduğuna göre göz önüne alınan harmonik osilâtörün enerjisinin mertebesinin

$$E \backsim \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{k(\Delta x)^2}{2} \tag{1}$$

olduğu anlaşılmaktadır. Hâlbuki belirsizlik ilkesine göre $\Delta x \cdot \Delta p \backsim h$ olduğundan (1) için

$$E \backsim \frac{h^2}{2m(\Delta x)^2} + \frac{k(\Delta x)^2}{2} \tag{2}$$

olacaktır. Enerjinin minimum değeri ise E nin (Δx) e göre türevi sıfır olduğu zaman vukuu bulacağından (2) yi (Δx) e göre türetip sıfıra eşitliyerek

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} \backsim -\frac{h^2}{m(\Delta x)^3}+k(\Delta x)=0$$

veyâ

$$(\Delta x)^2 = \frac{h}{\sqrt{km}} \tag{3}$$

bulunur. (3) ü (2) ye yerleştirerek de

$$E_{\text{Min}} \backsim \frac{h^2}{2m}\,\frac{\sqrt{km}}{h} + \frac{k}{2}\,\frac{h}{\sqrt{km}} = \frac{h}{2\sqrt{km}}\left(\frac{km}{m}+k\right)$$

yâni

$$E_{\text{Min}} \backsim h\sqrt{\frac{k}{m}}$$

bulunur.

PROBLEM : 134.— Eğer bir harmonik osilâtör $\Delta n = \pm 1$ şeklinde bir seçim kuralına tâbî ise buna klâsik fizikte tekaabül eden osilâtörün harmoniği olmayan bir hareket yaptığını gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Kuvantum mekaniğinde üç boyutlu bir harmonik osilâtörün kuvantalaştırılmış enerji seviyelerinin genel olarak, göz önüne alınan harmonik osilâtöre klâsik hâlde tekaabül eden frekansı ν_0 ile göstererek,

$$E_n = \left(n+\frac{3}{2}\right)h\nu_0$$

verildiği mâlûmdur. (Bk. PROBLEM : 135). Buradan E_n ve E_m enerji seviyeleri arasındaki geçişte soğurulan ya da yayınlanan fotonun frekansı olarak

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} = (n-m)\nu_0$$

bulunur. Eğer $\Delta n = \pm 1$ olmasını öngören seçim kuralı geçerliyse

$$\Delta n=(n-m)=\pm 1 \tag{1}$$

olduğundan

$$\nu=\nu_0$$

olur ki bu da hareketin frekansının (1) şartı altında ν_0 klâsik frekansının katlarına değil fakat daima bizzat ν_0 a eşit olacağını ve dolayısıyla da hiçbir harmoniği bulunmadığını gösterir.

PROBLEM : 135.— Uzaysal ve eşyönsel bir harmonik osilâtöre tekaabül eden SCHRÖDİNGER denkleminden hareketle bunun kuvantalaştırılmış enerji seviyelerinin

$$E_n=\left(n+\frac{3}{2}\right)h\nu_0$$

formülüyle verildiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Bir harmonik osilâtör orijinden itibâren üzerine

$$\vec{F}=-k\vec{r} \tag{1}$$

şeklinde bir çekim kuvvetinin tesir ettiği bir m kütlesidir. (1) kuvveti

$$V(r)=\frac{1}{2}kr^2=\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2) \tag{2}$$

potansiyelinden türemektedir. Buna göre SCHRÖDİNGER dalga denklemi, $\psi=\psi(x, y, z)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E-\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)\right]\psi=0 \tag{3}$$

şekline girer.

Bunu çözmek için bir değişkenlere ayrışım yaparak

$$\psi=\psi(x, y, z)=X(x)Y(y)Z(z) \tag{4}$$

vazedelim. (4) ü (3) e vazedip (3) ün her iki yanını $\psi=XYZ$ ile böldükten sonra

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\right]=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\frac{k}{2}z^2 \tag{5}$$

yazılabilir. Sol taraf x ve y ye, sağ taraf ise z ye tâbî olduklarından ve x, y, z nin de bağımsız değişkenler olması dolayısıyla bunlar ancak bir sâbit iseler biribirlerine eşit olurlar. Bu ortak sâbite $\frac{8\pi^2 m}{h^2}C$ dersek (5) den

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(C-\frac{k}{2}z^2\right)Z=0 \tag{6}$$

ve

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E-C-\frac{k}{2}x^2\right)=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{8\pi^2 m}{h^2}\frac{k}{2}y^2 \tag{7}$$

elde edilir. (7) bağıntısı da tıpkı yukarıda olduğu gibi her iki taraf da aynı bir $\frac{8\pi^2 m}{h^2}B$ sâbitine eşitse mümkün ve geçerli olabilir. Eğer

$$E=A+B+C \tag{8}$$

vazederek (7) den

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(B-\frac{k}{2}y^2\right)Y=0 \tag{9}$$

ve

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(A-\frac{k}{2}x^2\right)X=0 \tag{10}$$

denklemleri elde edilir.

Hâlbuki (6), (9) ve (10) denklemlerinin her biri tek boyutlu harmonik osilâtörün SCHRÖDİNGER denkleminden başka bir şey değildir. Bilindiği gibi tek boyutlu harmonik osilâtör için SCHRÖDİNGER denkleminin özdeğerleri enerji boyutunu haizdirler. Bu üç denklemdeki özdeğerler şu hâlde A, B ve C ayrışım sâbitlerinin mümkün değerleri olacaktır. Tek boyutlu harmonik osilâtör denkleminde harmonik osilâtörün enerjisi, ν_0 ile bu harmonik osilâtöre klâsik dinamiğe göre tekaabül etmesi gereken frekansı göstermek üzere,

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$$

bağıntısıyla verileceğinden bu göz önüne alınmış olan hâlde de (6), (9) ve (10) gibi her bir harmonik osilâtör denklemine tekaabül eden özdeğerlerin

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \left(m + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 \\ B_r &= \left(r + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 \\ C_q &= \left(q + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

şeklinde olacağı âşikârdır. Bu itibarla üç boyuttaki harmonik osilâtörün enerji seviyelerinin de,

$$n = m + r + q = \text{tamsayı}$$

olmak üzere, (11) in (8) bağıntısına vazı ile

$$E_{mrq} = E_n = A_m + B_r + C_q = \left(m + r + q + \frac{3}{2}\right) h\nu_0$$

veyâ

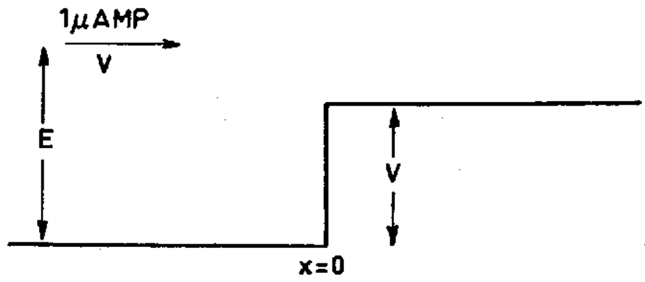
$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) h\nu_0$$

olduğu anlaşılır.

PROBLEM : 136.— Aynı bir v hızına sahip elektronlardan müteşekkil 1μA lik bir elektron akımı x eksenine paralel olarak hareket etmektedir. $x=0$ noktasından itibâren mevcut olan $V<E$ şeklindeki bir potansiyel duvarı bunu aşan elektronların hızını 0,25 . v ye indirgemektedir. Bu takdirde SCHRÖDİNGER denkleminden yararlanarak potansiyel duvarının arkasındaki elektrik akımının değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Elektronların E enerjisini haiz olduklarını farzedelim. $x=0$ daki potansiyel dağının yüksekliği de V olsun.



Tek bir elektron için SCHRÖDİNGER denklemi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi=0 \qquad (1)$$

şeklindedir. $V=0$ ile karakterize edilen I numaralı bölgede (1)

$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} + \frac{8\pi^2 mE}{h^2}\psi_I = 0 \qquad (2)$$

veyâ

$$k^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2} \qquad (3)$$

vazederek

$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} + k^2\psi_I = 0$$

olur. Bunun genel çözümü

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad (4)$$

şeklinde olup birinci terim $+x$ ler yönünde yayınlanan ve ikinci terimi de $-x$ ler yönünde yayılan kısmî dalgalara delâlet etmektedir. Öte yandan $x>0$ yâni II numaralı bölge için $V\neq 0$ olduğundan SCHRÖDİNGER denklemi

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi_{II}=0$$

veyâ

$$K^2 = \frac{8\pi^2 m(E-V)}{h^2} \qquad (6)$$

vazederek

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}+K^2\psi_{II}=0$$

olur. Bunun genel çözümü de

$$\psi_{II}(x)=Ce^{iKx}+De^{-iKx}$$

şeklindedir. Fakat II bölgesi sonsuza kadar uzandığından bu bölgede yansımış yâni $-x$ ler yönünde yayılan dalga bulunamaz. Bu itibarla bu genel çözümün fiziksel bir gerçeği aksettirebilmesi için $D=0$ olmalıdır. Şu hâlde $x>0$ için

$$\psi_{II}(x)=Ce^{iKx} \tag{7}$$

şeklindedir.

I ve II bölgelerindeki ihtimâliyet dalgalarının ifâdelerini bulduktan sonra her iki bölgenin sınırındaki sınır şartlarını uygulamak sûretiyle (4) ve (7) dalga fonksiyonu ifâdelerindeki integrasyon sâbitlerini tâyin etmemiz lâzımdır.

I ve II bölgelerinin sınırında ψ ve $d\psi/dx$ in sürekli değişmeleri gerekir; yâni

$$\left.\begin{aligned}\psi_I(0)&=\psi_{II}(0)\\ \left(\frac{d\psi_I(x)}{dx}\right)_{x=0}&=\left(\frac{d\psi_{II}(x)}{dx}\right)_{x=0}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

olmalıdır. Bu sınır şartları (4) ve (7) ifâdeleri göz önüne alındığında

$$A+B=C \tag{9}$$

$$k(A-B)=KC \tag{10}$$

verir. Bu iki denklemden

$$A=\frac{1}{2}\left(1+\frac{K}{k}\right)C \tag{11}$$

bulunur. Yukarda, $\psi_I(x)$ göz önüne alındığında, bunun bir $+x$ ler ve bir de $-x$ ler yönünde yayılan iki kısmî dalgadan müteşekkil olduğuna işâret etmiştik. $-x$ ler yönünde yayılan dalga âşikâr olarak

$x=0$ daki potansiyel duvarı üzerinde yansımış olan dalgadır. Şu hâlde (4) ifâdesi genellikle

$$\psi_{\mathrm{I}}(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}=\psi_{\mathrm{I}}^{(+)}(x)+\psi_{\mathrm{I}}^{(-)}(x)$$

şeklinde yazılabilecektir. Bir elektronun $x=0$ daki potansiyel duvarına çarpması ihtimâli

$$\left[\psi_{\mathrm{I}}^{(+)}(x)\right]\left[\psi_{\mathrm{I}}^{(+)}(x)\right]^{*}=AA^{*}\,e^{ikx}\,e^{-ikx}=AA^{*}=|A|^{2} \tag{12}$$

ve $x=0$ potansiyel duvarı üzerinden yansıması ihtimâli de

$$\left[\psi_{\mathrm{I}}^{(-)}(x)\right]\left[\psi_{\mathrm{I}}^{(-)}(x)\right]^{*}=BB^{*}e^{-ikx}\,e^{ikx}=BB^{*}=|B|^{2} \tag{13}$$

dir. Diğer taraftan bir elektronun potansiyel duvarını geçmiş olması ihtimâli de âşikâr olarak

$$\psi_{\mathrm{II}}(x)\psi_{\mathrm{II}}^{*}(x)=CC^{*}\,e^{iKx}\,e^{-iKx}=CC^{*}=|C|^{2} \tag{14}$$

dir.

Dalga mekaniğinde j akımı, tek boyutta,

$$j=-\frac{hi}{4\pi m}\left(\psi^{*}\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\psi^{*}}{dx}\right) \tag{15}$$

ile verildiğinden $x=0$ daki potansiyel duvarına çarpan $j_{\text{çar}}(0)$ ihtimâliyet akımı

$$j_{\text{çar}}(0)=-\frac{hi}{4\pi m}\left[A^{*}e^{-ikx}\cdot ikAe^{ikx}-Ae^{ikx}(-ik)A^{*}e^{-ikx}\right]_{x=0}=\frac{hk}{2\pi m}|A|^{2} \tag{16}$$

ve $x>0$ bölgesine aktarılmış olan elektronların $x=0$ daki j_{akt} ihtimâliyet akımı da (15) genel formülüne binâen

$$j_{\text{akt}}(0)=-\frac{hi}{4\pi m}\left[C^{*}e^{-iKx}\cdot iKCe^{iKx}-Ce^{iKx}(-iK)C^{*}e^{-iKx}\right]_{x=0}=\frac{hK}{2\pi m}|C|^{2} \tag{17}$$

olur. Şu hâlde $x>0$ bölgesine aktarılan elektron akımının $x=0$ a ulaşan elektron akımına oranı (16), (17) ve (11) e göre

$$\frac{j_{akt}(0)}{j_{çar}(0)} = \frac{K}{k}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4kK}{(k+K)} \tag{18}$$

bulunur. Elektronların enerjisi E iken bunlara tekaabül eden hız v, ve $E-V$ iken de hız $0,25\,v$ olduğuna göre (18) formülünden

$$\frac{j_{akt}(0)}{j_{çar}(0)} = \frac{4kK}{(k+K)^2} = \frac{4\times v\times 0{,}25\cdot v}{(v+0{,}25\cdot v)^2} = 0{,}64 \tag{19}$$

bulunur.

Gelen elektronların hüzmesi $1\,\mu A$ lik bir akım meydana getirdiğinden $x>0$ bölgesindeki elektron akımı buna ve (19) ifâdesine binâen $0{,}64\,\mu A$ olacaktır.

PROBLEM : 137.— Orijine nazaran simetrik bir potansiyel fonksiyonu için tek boyutlu SCHRÖDİNGER denkleminin çözümlerinin, eğer enerji seviyeleri soysuzlaşmamışlarsa, ya çift ya da tek fonksiyonlardan ibâret olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

SCHRÖDİNGER denklemi tek boyutta

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E-V(x)\right]\psi(x)=0 \tag{1}$$

şeklindedir. Şimdi x yerine $-x$ ve $V(x)=-V(x)$ vazedecek olursak

$$\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E-V(-x)\right]\psi(-x)=0 \tag{2}$$

bulunur ki bu $\psi=\psi(-x)$ in de (1) denkleminin kabul edilebilir bir çözümünün olduğunu göstermektedir. Eğer enerji seviyeleri soysuzlaşmamışsa yâni (1) in özdeğerleri soysuzlaşmış değilse, yâni (1) in bir farklı özdeğerine farklı bir özfonksiyonu tekaabül ediyorsa (1) denklemi ancak tek bir müstakil çözümü haizdir; yâni (1) i tahkik eden iki fonksiyon biribirlerinden ancak bir sâbit katsayısıyla fark olmalıdır. Buna göre

$$\psi(x) = C\psi(-x)$$

olmalıdır. x yerine $-x$ vazederek

$$\psi(-x) = C\psi(x) = C^2\psi(-x)$$

yâni

$$C = \pm 1$$

bulunur ki bu

$$\psi(x) = +\psi(-x) \tag{2}$$

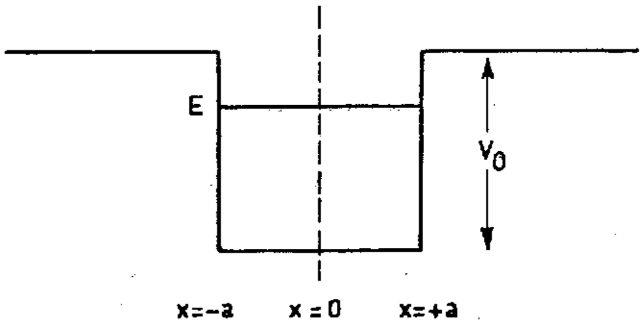
$$\psi(x) = -\psi(-x) \tag{3}$$

şeklinde iki tip çözümün varlığına delâlet eder. (2) özelliğine *pozitif çiftlik (parite)* ve (3) özelliğine de *negatif çiftlik (parite)* denir.

PROBLEM : 138.— m kütleli bir tanecik $2a$ eninde ve V_0 derinliğinde tek boyutlu bir kuyuda hapsedilmiş bulunmaktadır. Eğer $V_0a^2 = \dfrac{h^2}{8\pi^2 m}$ ise tek bir bağımlı enerji seviyesi olduğunu gösteriniz. V_0a^2 nin bu değerini haiz olan bir potansiyel kuyusu için enerji seviyesi kuyunun dibinden 0,57 V_0 üstünde bulunduğu takdirde, bu taneciğin klâsik mekanik bakımından bulunması imkânsız olan bölgede kuvantum mekaniğine göre bulunması ihtimâlinin yaklaşık olarak % 34 olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Şekilde gösterilen potansiyel kuyusu $-V_0$ derinliği ve 2a eniyle karakterize edilmiştir. Bu özel hâl için $E < 0$ ve $V = -V_0$ olup SCHRÖDİNGER denklemi de $|x| < a$ için



$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[V_0 - E]\psi_1 = 0 \tag{1}$$

şeklini alır. Bunun çözümü, $k^2=8\pi^2 m\,(V_0-E)/h^2$ vazederek,

$$\psi_1(x)=A\sin kx+B\cos kx \tag{2}$$

şeklindedir.

$|x|>a$ için ise SCHRÖDİNGER denklemi

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{8\pi^2 mE}{h^2}\psi_2=0 \tag{3}$$

şeklini alır ve $K^2=8\pi^2 mE/h^2$ vazederek bunun fiziksel anlamı haiz çözümünün de

$$\psi_2(x)=Ce^{-K|x|} \tag{4}$$

den ibâret olduğu görülür. Bundan önceki problemde eğer V potansiyel fonksiyonu x e göre simetrik ise çözümlerin tek ve çift diye sınıflandırılabileceklerini gördüktü.

Şimdi çift çözümleri nazar-ı itibâra alalım:

Bu takdirde $\psi(x)=\psi(-x)$ olacağından $|x|<a$ için geçerli olan (2) genel çözümü

$$\psi_1(x)=B\cos kx \tag{5}$$

den ibâret kalır. $x=0$ sınırı için ψ nin ve $d\psi/dx$ in sürekli olmalarına dair sınır şartlarını yazacak olursak, (4) ve (5) aracılığıyla

$$Ce^{-Ka}=B\cos ka$$

$$-KCe^{-Ka}=-kB\sin ka$$

ve buradan da çift çözümler için

$$\operatorname{tg} ka=\frac{K}{k}$$

olması gerektiği bulunur.

Şimdi tek çözümleri göz önüne alalım; bu takdirde:

$$\psi(x)=-\psi(-x)$$

ve dolayısıyla $|x| < a$ için de

$$\psi_1(x) = A \sin kx$$

bulunur. Gene $x = a$ için sözü geçen sınır şartlarını uygulayacak olursak, bu sefer de tek çözümler için

$$\text{cotg}\, ka = \frac{K}{k}$$

olması gerektiği bulunur.

$$ka = \alpha$$

vazederek

$$\frac{8\pi^2(V_0 - E)a^2}{h^2} = \alpha^2$$

ve dolayısıyla

$$K = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{8\pi^2 m V_0 a^2}{h^2} - \alpha^2}$$

olur. Problemin özel şartları altında

$$\frac{8\pi^2 m V_0 a^2}{h^2} = 1$$

$$Ka = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

$$\frac{K}{k} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 - \alpha^2}$$

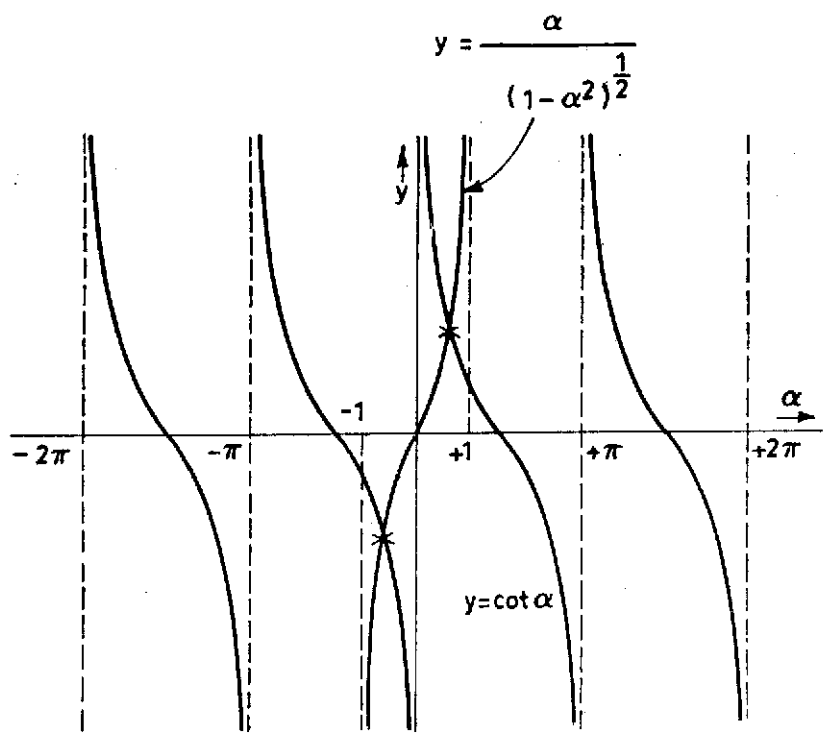
olduğundan çift çözümler için gerekli şart

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 - \alpha^2} \quad \text{veyâ} \quad \text{cotg}\, \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \tag{6}$$

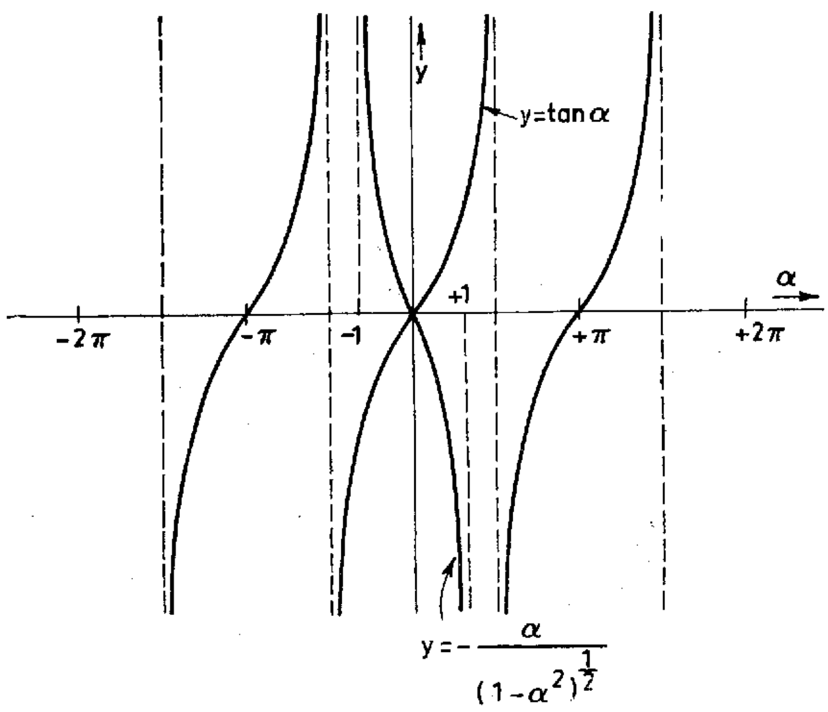
ve tek çözümler için gerekli şart da

$$\text{cotg}\, \alpha = -\frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \quad \text{veyâ} \quad \text{tg}\, \alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \tag{7}$$

olur ki gerek (6) ve gerekse (7) grafik olak çözülebilirler. Bu gra-



PROBLEM : 138 deki (6) denkleminin grafik çözülmesi



PROBLEM : 138 deki (7) denkleminin grafik çözülmesi fik çözüm sonucunda çift çözümler için her ne kadar α için iki çözüm elde edilirse de her ikisi de aynı enerji seviyesine tekaabül ettiğinden gerçekte çözüm birdir. Grafik çözüm tek çözümler için $\alpha=0$ trivyâl çözümünden başka çözüm vermez. Bu itibarla tek bir bağımlı hâl var demektir; ve bu da tek bir fonksiyonla temsil edilir.

Bu hâl için dalga fonksiyonları

$$|x|<a \quad \text{için} \quad \psi_1(x)=B\cos kx$$

$$|x|>a \quad \text{için} \quad \psi_2(x)=Ce^{-K|x|}$$

dir. Dalga fonksiyonları $x=0$ a göre simetrik olup

$$2\int_0^a BB^* \cos^2 kx\, dx + 2\int_a^\infty CC^* e^{-2Kx}\, dx = 1 \tag{8}$$

yazmak sûretiyle dalga fonksiyonları normalize edilmiş ve böylece bütün uzayda tâneciği bulmak ihtimâli de 1 e eşit olmuş olur. Dalga fonksiyonu $x=a$ da sürekli olmak zorunda olacağından

$$B\cos ka = Ce^{-Ka}$$

$$B^*\cos ka = C^*e^{-Ka}$$

ve dolayısıyla

$$BB^*\cos^2 ka = CC^*e^{-2Ka}$$

bulunur. Bunu (8) normalizasyon şartına vazedecek olursak

$$\frac{2CC^*e^{-2Ka}}{\cos^2 ka}\int_a^a \cos^2 kx\, dx + 2CC^*\int_0^\infty e^{-2Ka}dx = 1$$

$$\frac{CC^*e^{-2Ka}}{\cos^2 ka}\left[a+\frac{\sin ka}{2k}\right]+\frac{CC^*e^{-2Ka}}{K}=1$$

$$\frac{CC^*e^{-2Ka}}{K}\left[\frac{Ka}{\cos^2 ka}+\frac{K}{k}\frac{\sin 2ka}{\cos^2 ka}+1\right]=1$$

$$\frac{CC^* e^{-2Ka}}{K}\left[Ka(1+\mathrm{tg}^2\, ka)+\frac{K}{k}\,\mathrm{tg}\, ka + 1\right]=1 \qquad (9)$$

bulunur. *Klâsik mekanik bakımından* tâneciğin bulunmıyacağı yerde tâneciği bulmaya tekaabül eden P ihtimâli

$$P=2\int_a^\infty CC^* e^{-2Kx}\, dx = \frac{CC^* e^{-2Ka}}{K} \qquad (10)$$

olur.

(9) ve (10) ifâdelerinden bu ihtimâlin açık ifâdesi olarak, çözüm şartının $\mathrm{tg}\, ka = K/k$ olduğunu da göz önünde tutarak,

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{K^2}{k^2}\right)(1+Ka)}$$

bulunur. P yi α cinsinden yazarak

$$P = \frac{\alpha^2}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}$$

elde edilir. Hâlbuki bağlı enerji seviyesi kuyunun dibinin $0{,}57\ V_0$ kadar üstünde olduğu için

$$\alpha^2 = \frac{8\pi^2 m(V_0-E)a^2}{h^2} = \frac{8\pi^2 m\, V_0\, a^2}{h^2}\times 0{,}57$$

ve fakat $8\pi^2 m V_0 a^2/h^2=1$ olduğundan $\alpha^2=0{,}57$ olur ve böylece

$$P = \frac{0{,}57}{1+\sqrt{0{,}43}} = 0{,}34$$

yâni $P = \%34$ olur.

PROBLEM : 139.— Her biri E enerjisini haiz tâneciklerden müteşekkil birbiçim bir hüzme

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -\infty < x < 0 \quad \text{ise} \\ V_0 & : \quad 0 < x < L \quad \text{ise} \\ 0 & : \quad L < x < +\infty \quad \text{ise} \end{cases}$$

şartlarıyla belirlenmiş tek boyutlu dikdörtgen bir potansiyel engeli üzerine çarpmaktadır.

a) $E = 4V_0/5$ ve çarpan DE BROGLİE dalgasının dalgaboyu $2L$ olması hâlinde ve

b) $E = 9V_0/5$ olması hâlinde

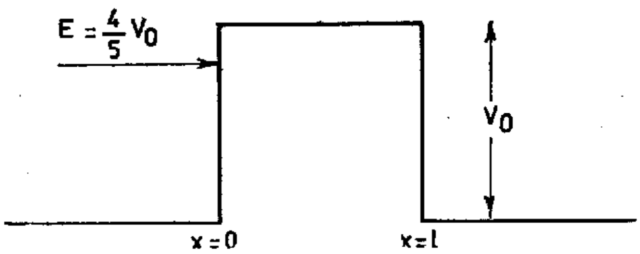
potansiyel engelinin ötesine intikaal eden hüzme ile çarpan hüzmenin akım yoğunluklarının biribirlerine oranlarını teorik ve sayısal olarak hesaplayınız. (sinh $\pi/2 = 2,30$ alınacaktır).

ÇÖZÜM :

Tek boyutlu SCHRÖDİNGER denklemi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0 \tag{1}$$

şeklinde olup $x > L$, $V = 0$ için ve $k^2 = 8\pi^2 mE/h^2$ vazederek, bu



$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k^2\psi_3 = 0 \tag{2}$$

şekline girer. Bunun fiziksel anlamı haiz yegâne çözümü

$$\psi_3(x) = Ae^{ikx}$$

dir. (2) nin diğer bir özel çözümü olan $\psi_3(x) \sim e^{-ikx}$, $+\infty$ dan $x=L$ ye doğru gelen yansımış bir dalgaya delâlet edeceğinden ötürü atılır.

$0<x<L$, $V=V_0$ için ise (1) denklemi $K^2=8\pi^2m(V_0-E)/h^2$ vazederek

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - K^2\psi_2 = 0$$

şekline girer ki bunun genel çözümü

$$\psi_2(x) = Be^{-Kx} + Ce^{Kx} \tag{3}$$

şeklindedir. Burada e^{-Kx} özel çözümü fiziksel bir anlamı haizdir, çünkü $x=L$ deki potansiyel değişiminde ψ_2 dalgasının bir kısmı yansıyabilir.

Ve nihâyet $x<0$, $V=0$ için (1) in çözümü

$$\psi_1(x) = De^{ikx} + \text{H}e^{-ikx} \tag{4}$$

şeklindedir ve $x=0$ daki potansiyel değişimi dolayısıyla ψ_1 kısmen bir yansımaya uğrayabileceğinden e^{-ikx} li özel çözümün (4) genel çözümüne ithâl edilmiş olmasının fiziksel bir anlamı vardır.

$x=0$ daki ψ nin ve $d\psi/dx$ in sürekli olduklarına dair sınır şartlarını uygulamak sûretiyle (3) ve (4) denklemlerinden

$$D+H=B+C \tag{5}$$

$$ik(D-H)=K(C-B) \tag{6}$$

bulunur.

ψ ile $d\psi/dx$ in $x=L$ de de sürekli olduklarını ifâde etmek sûretiyle (2) ve (3) den de

$$Ae^{ikL} = Be^{-KL} + Ce^{KL} \tag{7}$$

$$ik\,Ae^{ikL} = -K[Be^{-KL} - Ce^{KL}] \tag{8}$$

bulunur.

Potansiyel engelinin ötesine yâni 3. bölgeye intikaal eden akım yoğunluğunun 1. bölgeden potansiyel engeli üzerine gelen akım yoğunluğuna olan oranı, yâni başka bir deyişle intikaal oranı

$$T = \frac{|A|^2}{|D|^2} \tag{9}$$

dir.

Şimdi (5) ve (6) dan

$$D = \frac{B}{2}\left(1+\frac{iK}{k}\right)+\frac{C}{2}\left(1-\frac{iK}{k}\right) \tag{10}$$

ve (7) ile (8) den de, taraf tarafa toplayarak,

$$C = \frac{A}{2}\, e^{ikL}\, e^{-KL}\left(1+\frac{ik}{K}\right) \tag{11}$$

ve (8) i (7) den çıkartarak da

$$B = \frac{A}{2}\, e^{ikL}\, e^{KL}\left(1-\frac{ik}{K}\right) \tag{12}$$

bulunur. (10) ifâdesine (11) ve (12) vazedilecek olursa

$$D = \frac{A}{4}\, e^{ikL}\left[e^{KL}\left(1-\frac{ik}{K}\right)\left(1+\frac{iK}{k}\right)+e^{-KL}\left(1-\frac{iK}{k}\right)\left(1+\frac{ik}{K}\right)\right]$$

$$= \frac{A}{4}\, e^{ikL}\left[2(e^{KL}+e^{-KL})-i\left(\frac{k}{K}-\frac{K}{k}\right)(e^{KL}-e^{-KL})\right]$$

bulunur ki buradan da

$$|D|^2 = \frac{|A|^2}{16}\left[4(e^{KL}+e^{-KL})^2+\left(\frac{k}{K}-\frac{K}{k}\right)^2(e^{KL}-e^{-KL})^2\right]$$

$$= \frac{|A|^2}{16}\left[16\cosh^2 KL+4\left(\frac{k}{K}-\frac{K}{k}\right)^2\sinh^2 KL\right] \tag{13}$$

ifâdesi elde edilir. (13) ü (9) a vazedecek olursak, intikaal oranı olarak

$$T = \frac{|A|^2}{|D|^2} = \frac{1}{1+\sinh^2 KL + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{K} - \frac{K}{k}\right)^2 \sinh^2 KL}$$

$$= \frac{1}{\left[1+\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{k}{K} - \frac{K}{k}\right)^2\right\} \sinh^2 KL\right]} \tag{14}$$

ifâdesi elde edilir.

a) $E=4/5\, V_0$ hâli için

$$K = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(V_0 - E)}{h^2}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 m V_0}{5h^2}} = \frac{2\pi}{h}\sqrt{\frac{2mV_0}{5}}$$

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 mE}{h^2}} = \sqrt{\frac{32\,\pi^2\, m V_0}{5h^2}} = \frac{4\pi}{h}\sqrt{\frac{2mV_0}{5}}$$

$$\frac{k}{K} = 2$$

olduğu görülmektedir. Potansiyel engeline çarpan hüzmedeki tâneciklere refâkat eden DE BROGLİE dalgasının dalgaboyu, k nın tanımını da göz önünde tutarak

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi}{k}$$

dır. Göz önüne almış olduğumuz hâlde ise $\lambda = 2L$ olduğundan

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k = 2K = \frac{2\pi}{2L}$$

yâni

$$KL = \frac{\pi}{2}$$

olur. Bunu (14) ifâdesine vazederek

$$T = \frac{1}{\left[1 + \left\{1 + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 \left\{\sinh^2 \frac{\pi}{2}\right]} = \frac{1}{1 + \left(\frac{25}{16}\right)(2,3)^2} = 0,108$$

bulunur.

b) $E = 9V_0/5$ yâni $E > V_0$ olduğu takdirde T oranının

$$T = \frac{1}{1 + \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{K} + \frac{K}{k}\right)^2\right] \sin^2 KL} \tag{15}$$

ye eşit olacağını göstermek okuyucuya bırakılmıştır. Bu hâl için

$$K = \frac{4\pi}{h} \sqrt{\frac{2m V_0}{5}}$$

$$k = \frac{6\pi}{h} \sqrt{\frac{2m V_0}{5}}$$

$$\frac{K}{k} = \frac{3}{2}$$

olur.

Ayrıca $E = 9V_0/5$ hâli için $\lambda = 2L$ olacak olursa

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{8mV_0}{5}}} = \frac{2\pi}{K} = 2L$$

olur; ve dolayisıyla da $KL = \pi$, $\sin KL = \sin \pi = 0$ olacağından bu değerlerin (15) e vazı ile

$$T = 1$$

bulunur.

PROBLEM : 140.— Kuvantum mekaniğinde m kütleli bir tâneciğe tekaabül eden ihtimâliyet akım yoğunluğuna dayanarak,

$$\psi = a e^{\frac{2\pi i \varphi(x, y, z)}{h}} \quad ; \quad (a : \text{reel})$$

yazılabilmesi hâlinde, ihtimâliyet akımının hızının

$$\vec{v} = -\frac{1}{m}\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$$

ile verildiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM :

m kütleli bir tâneciğe takaabül eden $\vec{J}$ akım yoğunluğu, $\rho = \psi^*\psi$ ihtimâliyet yoğunluğu ile ihtimâliyet akım hızına

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \frac{h}{4\pi i m}(\psi\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \psi^* - \psi^*\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \psi) \tag{1}$$

bağıntısı aracılığıyla bağlıdır. Buna göre

$$\rho = \psi^*\psi = a^2 \tag{2}$$

ve

$$\rho\vec{v} = \frac{h}{4\pi i m}\left\{ae^{\frac{2\pi i\varphi}{h}}\left(-\frac{a2\pi i}{h}\right)e^{-\frac{2\pi i\varphi}{h}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi -\right.$$

$$\left.-ae^{-\frac{2\pi i\varphi}{h}}\ a\frac{2\pi i}{h}\ e^{\frac{2\pi i\varphi}{h}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi\right\} = -\frac{a^2}{m}\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$$

ve (2) bağıntısını da göz önünde tutarak

$$\vec{v} = -\frac{1}{m}\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$$

bulunur.

PROBLEM : 141.— m kütleli ve $F = -kx$ şeklinde bir kuvvetin etkisi altında harmonik bir osilâtör en düşük enerji hâlinde bulunduğu takdirde kendisine tekaabül eden dalga fonksiyonu, $\alpha^2 = \sqrt{2\pi mk/h}$ olmak üzere

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

şeklindedir. Bu takdirde harmonik osilâtörün koordinatının karesinin ortalama değeri ile potansiyel enerjisinin ortalama değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

x^2 nin ortalama değeri târif mûcibince

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x) x^2 \psi_0(x) dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x) \psi_0(x) dx}$$

dir. Göz önüne almış olduğumuz bu hâl için

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} A^* \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha^2 x^2\right) x^2 A \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha^2 x^2\right) dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} A^* \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha^2 x^3\right) \cdot A \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha^2 x^2\right) dx}$$

$$= \frac{A^* A \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\alpha^2 x^2) dx}{A^* A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) dx}$$

olur. Diğer taraftan bu kesirdeki her iki integrant da x in çift fonksiyonu olduklarından

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int\limits_{0}^{\infty} x^2 \cdot \exp(-\alpha^2 x^2)\, dx}{\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) dx}$$

yazılabilir. Bu integralleri hesaplıyabilmek için

$$\int_0^\infty \exp(-u^2)du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

olduğuna işâretle $u^2 = \alpha^2 x^2$ vazedelim:

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}$$

bulunur. Bu ifâdeyi α ya göre türetelim:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 x^2)dx = \int_0^\infty (-2\alpha)x^2 \exp(-\alpha^2 x^2)dx -$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\,\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\pi}\right) = \int_0^\infty x^2 \exp(-\alpha^2 x^2)dx$$

ve

$$\int_0^\infty x^2 \exp(-\alpha^2 x^2)dx = \frac{1}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}$$

bulunur. Buna binâen de

$$<x^2> = \frac{\frac{1}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

yâni

$$<x^2> = \frac{h}{4\pi\sqrt{mk}}$$

bulunur.

Ortalama potansiyel enerjiye gelince bunun değeri de

$$<V> = \frac{1}{2}k<x^2> = \frac{k}{2}\frac{h}{4\pi\sqrt{mk}} = \frac{h}{8\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

olur.

Çekirdek Fiziği

PROBLEM : 142.— Hidrojen atomunda çekirdeği teşkil eden protonla, onun etrafında dolanan elektron arasında 0,5 Å lük bir uzaklık bulunur. Bu takdirde bu iki tânecik arasındaki elektrik menşe'li çekim kuvvetini ve gravitasyon menşe'li çekim kuvvetini hesaplayınız.

Hidrojen atomu içindeki bu iki cins kuvvetin şiddetlerinin oranını bulunuz.

ÇÖZÜM :

Foton ile elektron arasındaki COULOMB kuvveti

$$\vec{F}_c = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\ ,\quad |\vec{F}_c| = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

veyâ

$$|\vec{F}_c| = \frac{9\cdot 10^9 (N\times m^2/C^2)\,[1{,}602\cdot 10^{-19}(C)]^2}{[0{,}5\cdot 10^{-10}(m)]^2} = 0{,}92\cdot 10^{-7}(N)$$

bulunur.

Proton ile elektron arasındaki gravitasyon kuvveti ise

$$\vec{F}_G = G\,\frac{M_P m_e}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\ ,\quad |\vec{F}_G| = G\,\frac{M_P m_e}{r^2}$$

veyâ

$$|\vec{F}_G| = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}(N\times m^2/\mathrm{kg}^2)\times 1{,}67\cdot 10^{-27}(\mathrm{kg})\times 9{,}1\cdot 10^{-31}(\mathrm{kg})}{[0{,}5\cdot 10^{-10}(m)]^2} =$$

$$= 0{,}49\cdot 10^{-46}(N)$$

bulunur. Buna binâen de

$$\frac{\text{Yükten doğan kuvvet}}{\text{Kütleden doğan kuvvet}} = \frac{0{,}92\cdot 10^{-7}(N)}{0{,}49\cdot 10^{-46}(N)} = 1{,}9\cdot 10^{39}$$

olur.

PROBLEM : 143.— $_{11}Na^{23}(n\,,\alpha)_9F^{20}$ reaksiyonu esnâsında hâsıl olan bileşik çekirdeğin ne olduğunu bulunuz ve bu reaksiyonun eşik enerjisini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

$_{11}Na^{23}$ çekirdeği içine bir nötronun girmesi sonucu ortaya çıkan bileşik çekirdek $_{11}Na^{24}$ dür:

$$_{11}Na^{23} + {_0n^1} \rightarrow {_{13}Na^{24}}$$

Öte yandan $_{11}Na^{23}$ ün kütlesi: 22,997050 (AKB); $_9F^{20}$ nin kütlesi 20,00688 (AKB); nötronun kütlesi: 1,008981 (AKB); α taneciğinin kütlesi ise: 4,003874 (AKB) dir. Buna binâen $_{11}Na^{23}$ (n, α) $_9F^{20}$ reaksiyonundan önceki kütlelerin toplamı:

$$22{,}997050 + 1{,}008981 = 24{,}006031 \text{ (AKB)}$$

ve reaksiyondan sonraki kütlelerin toplamı da:

$$20{,}00688 + 4{,}003874 = 24{,}010754 \text{ (AKB)}$$

dir. Aradaki kütle farkı:

$$\Delta m = -24{,}010754 + 24{,}006031 = -0{,}004723 \text{ (AKB)}$$

olup bu

$$Q = -931\,(\text{MeV/AKB}) \times 0{,}004723\,(\text{AKB}) = -4{,}4 \text{ MeV}$$

lik bir reaksiyon enerjisine tekaabül eder. Sonuç negatif olduğundan bu, reaksiyonun endotermik (= enerji - alan) bir reaksiyon olduğunu göstermektedir.

Bu $(-Q)$ enerji değerini, nötron kendi kinetik enerjisinden, bileşik çekirdeğe fazladan bir uyartılma enerjisi ya da bir bağ enerjisi olarak vermektedir. Mermi çekirdeğin yâni nötronun kinetik enerjisinin ancak bir kısmı bileşik çekirdeğin kinetik enerjisine dönüşeceğinden $E_{eş}$ eşik enerjisi

$$E_{eş} = \text{Max}(E_{kin}) - |Q| \tag{1}$$

olmalıdır.

Mermi vazifesi gören tânecik yâni nötron (m_n), sükûnetteki sodyum atomuna (m_s) çarpınca, b ile bileşik çekirdeğe işaret eden indisi göstermek üzere, impuls korunumu kanununa göre

$$m_n v_n = m_b v_b$$

olur. Buna binâen bileşik çekirdeğin kinetik enerjisi

$$E^b{}_{kin} = \frac{m_n{}^2}{2m_b} v_n{}^2$$

olur. Dolayısıyla bileşik çekirdek için bağ enerjisine eklenecek olan enerji fazlası

$$E^n{}_{kin} - E^b{}_{kin} = \frac{1}{2} m_n v_n{}^2 - \frac{1}{2} \frac{m_n{}^2}{m_b} v_n{}^2 = \frac{1}{2} m_n v_n{}^2 \left(1 - \frac{m_n}{m_b}\right)$$

$$= E^n{}_{kin} \left(\frac{m_b - m_n}{m_b}\right) = E^n{}_{kin} \left(\frac{m_s}{m_s + m_n}\right)$$

değerini haiz olacaktır. Böylece $E_{eş}$ eşik enerjisinin

$$E_{eş} = E^b{}_{kin} + |\,Q\,| = |\,Q\,| \cdot \frac{m_s + m_n}{m_s}$$

olduğu görülür. Bu formüle binâen

$$E_{eş} = 4{,}4 \times \frac{24}{23} = 4{,}6 \text{ MeV}$$

bulunur.

Yayınlanan α tâneciğinin Coulomb potansiyel engelini aşabilmesi için nötronun kinetik enerjisinin $E_{eş}$ enerjisinden biraz daha büyük olması gerekir. Nötronun $E^n{}_{kin}$ enerjisini hesaplamak için önce α tâneciğinin yenmesi gereken potansiyeli hesaplayalım; ρ ile α nın merkezi ile ${}_9F^{20}$ nin merkezi arasında, α nın çekirdeği terk ânındaki uzaklığı göstererek:

$$\text{Max}(E_{pot}) = \frac{Z_F Z_\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 \rho} = \frac{9 \times 2 \times (1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{4 \times 3{,}1416 \times 8{,}854 \cdot 10^{-12} \times 1{,}3 \cdot 10^{-15} (\sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{4})}$$

$$= \frac{46{,}188 \cdot 10^{-38}}{144{,}64 \times (2{,}72 + 1{,}59) \cdot 10^{-27}} = \frac{46{,}188}{623{,}298} \cdot 10^{-11} \text{ (Joule)} =$$

$$= 7{,}25 \cdot 10^{-13} \text{ (Joule)} = \frac{7{,}25 \cdot 10^{-13} \text{ (Joule)}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{(Joule/eV)}} = 4{,}52 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

$$= 4{,}52 \text{ MeV}$$

bulunur. Şu hâlde ${}_{11}Na^{23}\,(n,\alpha)_{9}F^{20}$ reaksiyonunun kâfî bir ihtimalle vukuu bulması için nötronun gerekli kinetik enerjisi

$$E^{n}_{kin}=4{,}52+4{,}6=9{,}12 \text{ MeV}$$

olarak tesbit edilmiş olur.

PROBLEM : 144.— Bir nötronun bir döteryum çekirdeğine etkisi ile bir trityum çekirdeğinin oluşumu ve bir de γ ışınının yayılmasını öngören çekirdek reaksiyonunda açığa çıkan çekirdek enerjisini hesaplayınız.

Döteryum çekirdeğinin kütlesi	**2,014740** *AKB*
Trityumun kütlesi	**1,008986** *AKB*
Nötronun kütlesi	**3,017005** *AKB*

ÇÖZÜM :

Sözü edilen reaksiyon

$${}_{1}D^{2}+{}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{1}T^{3}+\gamma$$

ya da kısaca

$${}_{1}D^{2}({}_{0}n^{1},\gamma){}_{1}T^{3}$$

şeklinde yazılır. Reaksiyon denkleminin solundaki tâneciklerin toplam kütlesi: 2,014740+1,008986=3,023726 AKB dir. Reaksiyon sonucu oluşan toplam kütle ise sâdece trityumunkinden ibârettir. Aradaki kütle farkı

$$\Delta m=3{,}023726-3{,}017005=0{,}006721 \text{ AKB}$$

ve buna tekaabül eden açığa çıkmış çekirdek enerjisi de, 1 AKB=931 MeV olması dolayısıyla,

$$E=0{,}006721\times 931=6{,}257 \text{ MeV}$$

dir.

PROBLEM : 145.— Nükleer kütle biriminin *eV* cinsinden eşdeğeri nedir?

ÇÖZÜM :

EİNSTEİN formülünden

$$E = mc^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,(\mathrm{kg}) \times 8{,}98 \cdot 10^{16}\,(m^2/s^2)$$

$$= 1{,}401 \cdot 10^{-10}\,(\mathrm{Joule}) = \frac{1{,}491 \cdot 10^{-10}\,(J)}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,(J/\mathrm{eV})}$$

$$= 0{,}931 \cdot 10^{9}\ \mathrm{eV} = 031\ \mathrm{MeV}$$

bulunur.

PROBLEM : 146.— Po^{210} un periyodunun 138 gün olduğu bilindiğine göre

1. λ bozulma sâbitini, ve

2. saniye ve gram başına bozulan Po çekirdeği sayısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

1. Bozulma sâbiti ile periyot arasında

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T}$$

bağıntısı olduğundan

$$\lambda = \frac{0{,}693}{138 \times 24 \times 3600} = 5{,}81 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

bulunur. Bu demektir ki herhangi bir Po^{210} çekirdeğinin bir saniye içinde parçalanması ihtimâli $5{,}81 \cdot 10^{-8}$ dir.

2. 210 gram Po^{210} da AVOGADRO sayısı kadar yâni $6{,}025 \cdot 10^{23}$ adet atom ve dolayısıyla da çekirdek vardır. Şu hâlde 1 gram Po^{210} daki çekirdek sayısı

$$N = \frac{6{,}025 \cdot 10^{23}}{210}\ \text{atom/gram}$$

olacaktır. 1 adet çekirdeğin bir saniye içinde parçalanması ihtimâli $\lambda = 5{,}81 \cdot 10^{-8}$ olduğuna göre 1 saniyede ve bir gram Po^{210} da vukuu bulacak olan bozulum sayısı λN den ibâret olacaktır ; böylece

$$\lambda N = 5{,}81 \cdot 10^{-8} \times \frac{6.025 \cdot 10^{23}}{210} = 1{,}64 \cdot 10^{14} \text{ bozulma/gram} \times \text{sec}$$

bulunur.

PROBLEM : 147.— Bir Geiger sayacı m_0 gramlık bir $_{53}I^{131}$ radyoaktif iyod kaynağı yakınına yerleştirilmiştir. Dakika başına darbe sayısı kaydedilmekte ve aynı ölçüm her 8 günde bir tekrarlanmaktadır. Bu türlü elde edilen sonuçlar sırasıyla :

400 darbe/dak., 199 darbe/dak., 99 darbe/dak., 49 darbe/dak. dır

1. $_{53}I^{131}$ izotopunun dönüşüm periyodunu ve bozulma sâbitini hesaplayınız.

2. İyodun kütlesini m_0 ın t zamanının fonksiyonu olarak veren bağıntıyı kurunuz. $m=f(t)$ fonksiyonundan radyoizotopun ortalama ömrünü hesaplayınız.

3. m_0 ve t nin fonksiyonu olarak saniye başına bozulan atomların dN sayısını tâyin ediniz. 1 kürilik bir aktifliğe tekaabül eden m_0 kaç gramdır?

(Avogadro sayısı $6{,}02 \cdot 10^{23}$ olarak alınacaktır.)

ÇÖZÜM :

$t=0$ ânında mevcut olan N_0 radyoaktif çekirdekten t saniye sonra elde kalanların N sayısını veren

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

bağıntısı

$$ln \frac{N_0}{N} = \lambda t$$

şeklinde yazılabilir. Buna binâen ve problemin verilerine dayanarak

$$ln \frac{N_0}{N} = ln \frac{400}{199} = 8\lambda$$

olur. Peryot, bilindiği gibi,

$$T = \frac{ln\,2}{\lambda}$$

ile belirlenmiştir. Son iki bağıntıdan

$$\frac{T}{8} = \frac{ln\,2}{ln\,\frac{400}{199}}$$

yazılır. Bu, logaritmaların bir oranı olduğundan ve bu oran logaritmalar hangi tabana göre ifâde edilmiş olurlarsa olsunlar sâbit olduğundan, ondalık logaritmaları gözönüne alarak

$$\frac{T}{8} = \frac{ln\,2}{ln\,\frac{400}{199}} = \frac{\log 2}{\log\frac{400}{199}} = \frac{\log 2}{\log 400 - \log 199}$$

$$= \frac{0{,}30103}{2{,}60206 - 2{,}29885} = \frac{0{,}30103}{0{,}30321}$$

yazılabilir ve buradan da peryodun

$$T = 7 \text{ gün, } 93$$

olduğu tesbit edilmiş olur.

Peryodla λ bozulma sâbitini bağlayan formülden

$$\lambda = \frac{ln\,2}{T} = \frac{0{,}693}{7{,}93} = \frac{0{,}693}{7{,}93 \times 24 \times 3600} = 1{,}01 \cdot 10^{-6}\ \text{sec}^{-1} \# 10^{-6}\ \text{sec}^{-1}$$

bulunur.

2. Kütle, henüz daha bozulmamış çekirdeklerin sayısı ile orantılıdır. Buna göre

$$m = m_0 e^{-\lambda t} = m_0 e^{-t/10^6}$$

olur. Bu üstel bir fonksiyondur. Öte yandan 7,93 gün sonra $m = m_0/2$ olacağı da bilinmektedir.

Ortalama ömür, henüz daha bozulmamış radyoaktif iyodun kütlesinin m_0/e ye eşit olduğu zaman süresi ile belirlendiğine göre yâni

$$\frac{m_0}{e}=m_0 e^{-\lambda t}$$

olduğuna göre buradan

$$1=e^{-\lambda t+1}$$

ya da her iki yanın *ln* ini alarak ortalama ömür için

$$\tau=\frac{1}{\lambda}\# 10^6 \text{ sec}$$

bulunur.

3. dt zaman aralığında bozulan çekirdek sayısı

$$dN=-N\lambda\, dt$$

yâni

$$dN=-\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$

dir. Eğer kaynak bir atom-gram yâni 131 gram iyot ihtivâ etseydi $6{,}02\cdot 10^{23}$ adet iyod atomu bulunacaktı. m_0 gram kütleye tekaabül eden iyot atomu sayısı ise

$$N_0=\frac{m_0}{131}\times 6{,}02\cdot 10^{23}$$

olur. Buna binâen

$$dN=-\lambda\frac{m_0}{131}\times 6{,}02\cdot 10^{23} e^{-\lambda t}$$

bulunur. Görüldüğü üzere bozulma sayısı t nin fonksiyonudur.

1 küri, 1 gram radyumun bozulma hızıyla bozulan radyoaktif eleman miktarıdır. Oysaki 1 gram radyumda saniyede $3{,}7\cdot 10^{10}$ çekirdek bozulmaya uğramaktadır.

$t=0$ da bir kürilik bir aktiflik veren iyot miktarını bulabilmek için son formülden, $t=0$ için

$$3{,}7\cdot 10^{10}=-\lambda\frac{m_0}{131}\times 6{,}02\cdot 10^{23}$$

yazılır. $\lambda=10^{-6}(s^{-1})$ olduğundan buradan da

$$m_0=\frac{131\times3{,}7\cdot10^{-10}}{10^{-6}\times6{,}02\cdot10^{23}}=8\cdot10^{-6}\text{ gram}$$

bulunur. hesabı yaparken tabiîdir ki (—) işâreti göz önüne alınmamıştır, çünki (—) işâreti kütlenin azalan bir kütle olduğuna delâlet etmektedir.

PROBLEM : 148.— 1. Bir sodyum iyodür kristali 9 kademeli bir fotomültiplikatörün fotokatoduna yerleştirilmiştir. Bu 9 kademeden her biri gelen bir elektrona karşı 4 elektron verdiğine göre fotomültiplikatörün çoğaltma gücü (amplifikasyonu) ne olur? Eğer fotokatot saniyede 3800 elektron temin ediyorsa fotomültiplikatörün çıkışındaki akım ne olur? Bu akım 10 MΩ luk bir direnci katederse bu direncin uçlarına uygulanmış olan gerilim ne olacaktır?

2. Bu düzen yardımıyla bir $_{72}Hf^{175}$ kaynağının radyoaktif bozulması inceleniyor. Bu takdirde 53 KeV lik bir X ışını gözlenirse bu ışının dalgaboyu ne olur?

3. $_{72}Hf^{715}$ kaynağının noktasal olduğu varsayılıyor. Bu 1 cm yarıçaplı silindirik kristalden 2 cm uzağa ve kristalin ekseni üzerine yerleştirildiğinde acaba kristali ne kadarlık bir katı açı altında görür? Kaynağın 1 mikroküriIik bir aktivitesi olduğunu göz önünde bulundurarak kristalin 1 saniyede tesbit ettiği bozulma sayısını hesaplayınız.

4. Kristalin üzerine yerleştirilmiş olan bir $_{72}Hf^{175}$ kaynağının bir dakikada 52000 bozulması tesbit ediliyor; 25 gün sonra tesbit edilen bozulma sayısı 40000 e ve ilk ölçümden 40 gün sonra da bu sayı 35000 e düşüyor. $_{72}Hf^{175}$ nin bozulma peryodu ve radyoaktif bozulma sâbitinin değerlerini hesaplayınız.

5. $_{72}Hf^{174}$ ve $_{70}Yb^{173}$ in kararlı izotoplar oldukları bilindikte α tâneciklerini veren bir siklotron ya da bir reaktör kullanmak sûretiyle acaba hangi reaksiyonlar aracılığıyla $_{72}Hf^{175}$ imâl etmek mümkün olur?

6. $_{72}Hf^{175}$ nin bozulması sırasında 280 KeV lik iç dönüşüm elektronları yayınlanmaktadır. Bu elektronların hızı nedir? Acaba bunlar için Rölâtivite Teorisinin formüllerini kullanmak gerekli midir?

7. Radyoaktif ürün izole edilmiş 1 cm² lik kare şeklindeki bir alüminyum levha üzerine düzgün bir şekilde yayılmıştır. Bu levhanın karşısına 1 mm uzaklığa bunun aynı izole edilmiş bir levha paralel olarak

yerleştiriliyor. Radyoaktif tozlu birinci levhadan ikinciye bir saniyede erişen elektronların sayısı 1000 olduğuna göre bu iki levha arasında niçin zamanla değişen bir potansiyel farkı olacağını izah ediniz. (Kaynağın yayınladığı bütün elektronların ikinci levhaya eriştikleri kabul edilmektedir). Ne kadar zaman sonra bu potansiyel farkı 1 volt olacaktır?

8. Bir önceki deneyde potansiyel farkı 1 volt olduğu zaman elektrik akımının değeri ne olur? Bir elektrona etki yapan kuvvet ne olur? Elektronun yaptığı iş ne olur? Bu işin değerini öngörmek mümkün müydü?

ÇÖZÜM :

1. Eğer fotokatot bir elektron verirse ilk kademede bu 4 elektron, 2. kademede 4^2, 3. kademede 4^3 ve 9. kademede de $4^9 = 262\,144$ elektron olur. Şu hâlde fotomültiplikatörün çoğaltma gücü 4^9 dur.

Böylece elde edilen akım saniye başına yük hesaplanarak bulunur:

$$I = 3800 \times 262\,144 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} \# 1{,}6 \cdot 10^{-10}\ A.$$

10 $M\Omega$ luk direncin uçlarındaki potansiyel farkı da

$$V = RI = 10^7 \times 1{,}6 \cdot 10^{-10} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{volt} = 1{,}6\ \text{mV}$$

olur.

2. $E = h\nu$ ve $1\ \text{keV} = 1{,}602 \cdot 10^{-16}$ Joule olduğuna göre

$$53 \times 1{,}602 \cdot 10^{-16} = 6{,}625 \cdot 10^{-34} \times \nu = 6.625 \cdot 10^{-34} \times \frac{c}{\lambda}$$

yâni

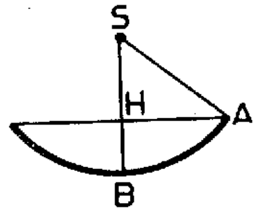
$$\lambda = \frac{6.625 \cdot 10^{-34} \times 3.10^8}{53 \times 1{,}602 \cdot 10^{-16}} = 0{,}234 \cdot 10^{10}\, m = 0{,}234\ \mathring{A}$$

bulunur.

3. Katı açının, tanımı gereğince, küre üzerinde belirlenen takkenin alanının kürenin yarıçapının karesine oranı olduğu mâlumdur :

$$\Omega = \frac{\text{takke alanı}}{\overline{SB}^2}$$

Fakat :



$\overline{SB}^2 = \overline{SA}^2 = \overline{SH}^2 + \overline{HA}^2 = 4+1 = 5\ \text{cm}^2$

dir. Diğer taraftan kürenin takkesinin S alanı da $S = 2\pi \cdot \overline{SA} \cdot \overline{HB}$ ile verilmiştir. Buradan

$$S = 2\pi\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-2) = (10\pi - 4\pi\sqrt{5})\ \text{cm}^2$$

çıkar. Şu hâlde, aranan katı açı :

$$\Omega = \frac{(10-4\sqrt{5})\pi}{5} = 0{,}21\,\pi \text{ steradyan}$$

olur.

Kaynağın aktivitesi 1 mikroküri olduğuna göre 4π steradyanlık açı içine $3{,}7 \cdot 10^4$ boz/s yayınlamaktadır ; buna göre kristal bunlardan ancak

$$\frac{0{,}21\pi}{4\pi} \times 3{,}7 \cdot 10^4 = 1950 \text{ boz/sec}$$

sine mâruz kalır.

4. $N = N_0 e^{-\lambda t}$ olduğuna göre her iki yanın ln ini alarak

$$ln \frac{N_0}{N} = \lambda t$$

veyâ

$$ln \frac{52\,000}{40\,000} = 25\,\lambda$$

bulunur. Burada uygunluk için zaman birimini gün olarak seçmiş bulunuyoruz.

Öte yandan λ ile T arasındaki bağıntı

$$\lambda = \frac{ln\,2}{T}$$

olduğundan son iki bağıntıdan

$$T = 25 \times \frac{ln\,2}{ln\,1{,}4} = 25 \times \frac{\log 2}{\log 1{,}4} = 70 \text{ gün}$$

bulunur. Bu değerin kezâ

$$ln\,\frac{52\,000}{35\,000} = 40\,\lambda$$

bağıntısıyla da uygun düştüğü kolaylıkla gerçeklenir.

5. Nükleer reaktör yardımıyla

$${}_{72}Hf^{174}\,(n, \gamma)\,{}_{72}Hf^{175}$$

ve siklôtron yardımıyla da

$${}_{70}Yb^{173}\,(\alpha, 2n)\,{}_{72}Hf^{175}$$

çekirdek reaksiyonları elde edilebilir.

6. 280 keV lik bir elektronun joule cinsinden enerjisi

$$E = 280 \times 1{,}602 \cdot 10^{-16} = 4{,}486 \cdot 10^{-14}\ J$$

dir. Eğer klâsik mekaniğin bağıntıları kullanılırsa

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = 4{,}486 \cdot 10^{-14}\ J$$

veyâ

$$v = \sqrt{\frac{8{,}972 \cdot 10^{-14}\,(J)}{9{,}108 \cdot 10^{-31}\,(\text{kg})}} = 314\,000 \text{ km/sec} > c$$

bulunur. Şu hâlde klâsik mekanik yerine Rölâtivite mekaniğini kullanmak gerekir. Buna göre

$$E = 4{,}486 \cdot 10^{-14} = m_0\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

veyâ

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1=\frac{4{,}486\cdot 10^{-14}}{9{,}108\cdot 10^{-31}\times 9\cdot 10^{16}}=0{,}547$$

bulunur. Bu da

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=(1{,}547)^2=2{,}393$$

ve

$$1-\frac{v^2}{c^2}=0{,}416\,,\quad \frac{v^2}{c^2}=0{,}584\,,\quad \frac{v}{c}=0{,}764$$

ve nihâyet

$$v=0{,}764\times 3\cdot 10^8\ m/\text{sec}=229\,200\ \text{km/sec}$$

bulunur.

7. Her iki levha beraberce bir kondansatör teşkil ederler. Elektronlar birinci levhayı terkettiklerinde bu, pozitif yüklenmiş olur. Buna karşılık elektronları toplayan ikinci levha da negatif yüklenmiş olur. Her saniyede yük

$$q=1000\times 1{,}602\cdot 10^{-19}=1{,}602\cdot 10^{-16}\,(C)$$

dur. t saniye sonra yük

$$q=1{,}602\cdot 10^{-16}\times t$$

olur. Bu ise yükün zamanın fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Öte yandan elektrostatikten $q=C\cdot V$ olduğu bilinmektedir. C de $C=\varepsilon_0 S/d$ ile verildiğinden

$$V=\frac{q}{C}=\frac{1{,}602\cdot 10^{-16}\times t\times d}{\varepsilon_0 S}$$

$$=\frac{1{,}602\cdot 10^{-16}\times 10^{-3}}{8{,}854\cdot 10^{-12}\times 10^{-4}}t=0{,}181\cdot 10^{-3}\times t\ \text{volt}$$

$$=0{,}181\times t\ (\text{mV})$$

olur. 1 voltluk bir potansiyel farkı olması için de

$$t=\frac{1}{0{,}181\cdot 10^{-3}}=5525\ \text{sec}=92\ \text{dak.}\ 09'$$

kadar bir zaman geçmesi gerektiği görülmektedir.

8. $V=1$ volt ise $E=-dV/dr$ bağıntısından

$$E=\frac{1}{10^{-3}}=10^{3}\ (V/m)$$

bulunur. Öte yandan $f=q\,E$ dir; buna göre

$$f=1{,}602\cdot 10^{-19}\times 10^{3}=1{,}602\cdot 10^{-16}\ (\text{Nevton})$$

olur. Şu hâlde elektronun yaptığı işin

$$W=f\times d=1{,}602\cdot 10^{-16}\times 10^{-3}=1{,}602\cdot 10^{-19}\ (J)=1\ (\text{eV})$$

olduğu bulunur.

Bu sonucu hiç hesap yapmadan da öngörmek mümkündü; zirâ bahis konusu olan 1 voltluk bir potansiyel farkına tâbi tutulan bir elektronun enerjisidir. Oysaki bu zâten eV un tanımından başka bir şey değildir.

PROBLEM : 149.— 1) $_{11}Na^{23}$ atomununun MKS birim sistemindeki M kütlesini tâyin ediniz. (MKS sisteminde Avogadro sayısının değeri $6{,}025.10^{26}$ dır).

2) 14 MeV lik bir nötron göz önüne alınıyor. Nötronun sükûnet kütlesi $m=1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg olduğuna göre v hızı ne olur? v yi hesaplarken Özel Rölâtivite teorisinin formüllerini kullanmak gerekir mi?

3) 14 MeV lik bir nötron bir $_{11}Na^{23}$ atomuyla merkezî bir çarpışma yapıyor. Atomun ve nötronun çarpışma sonrası hızlarını sırasıyla V ve v' ile göstererek

a) $v+v'$ değerini V nin fonksiyonu olarak hesaplayınız ;

b) $v-v'$ değerini M, m ve V nin fonksiyonu olarak hesaplayınız;

c) bundan v nin ve v' nün değerlerinin V, m ve M nin fonksiyonu olarak hesaplayınız ;

d) v ile v' nün birbirlerine ters yönlerde olduklarını gösteriniz;

e) V ile v nin sayısal değerlerini veriniz.

f) $_{11}Na^{23}$ atomuyla nötronun çarpışma sonrası enerjilerini MeV cinsinden veriniz;

4) Bir nötron önce bir $_{11}Na^{23}$ atomunun bir elektronuna çarpıyor; bunun üzerine elektron atomu terkediyor. Nötron ise yoluna devam ederek böylece meydana gelmiş olan Na^+ iyonuna çarpıp onu 4000 km/s lik bir hızla iyonun yörüngesine dik olan B=0,3 Wb/m^2 lik birbiçim bir magnetik indüksiyon alanına yollamaktadır. Bu alanda Na^+ iyonunun yörüngesinin yarıçapının ne olacağını bulunuz.

5) 0,025 eV luk bir ılık nötron 10 m uzunluğundaki yatay bir boruya yatay doğrultuda girmektedir. Borunun içinde tam bir boşluk bulunduğunu ve nötronun da yalnız yer çekimine tâbi olduğunu farzederek yörüngesinin bir parabol olduğunu gösteriniz ve nötronun borunun her iki ucu arasındaki seviye farkını hesaplayınız.

6) 14 MeV lik bir nötron $_{11}Na^{23}$ çekirdeğine giriyor. Elde edilen çekirdek ne olur?

14 MeV lik bir nötron $_{11}Na^{23}$ çekirdeğine girerek (n, p) reaksiyonuna sebeb oluyor. Elde edilen çekirdek ne olur?

Her iki hâlde de elde edilen çekirdeklerin β^- yayıcı oldukları bilindiğine göre, β^- bozulmasından elde edilen çekirdekler nelerdirler?

ÇÖZÜM :

1) $6{,}025 \cdot 10^{26}$ adet $_{11}Na^{23}$ atomun kütlesi 23 kg dır. Buna göre tek bir $_{11}Na^{23}$ atomunun kütlesi

$$M = \frac{23}{6{,}023} 10^{-26}\ \text{kg} = 3{,}82 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}$$

dır.

2) $1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-13} J$ olduğuna göre

$$14\ \text{MeV} = 14 \times 1{,}602 \cdot 10^{-13} J$$

olur. Buna göre

$$\frac{1}{2}mv^2 = 14 \times 1{,}602 \cdot 10^{-13}$$

ya da

$$v = \sqrt{\frac{28 \times 1{,}602 \cdot 10^{-13}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 5{,}2 \cdot 10^7 \, m/s = 52000 \mathrm{km}/s$$

bulunur. Bu takdirde

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{52}{300} = 0{,}17$$

ve

$$\beta^2 = 0{,}029$$

olacağından $\sqrt{1-\beta^2}$ çarpanı birden pek farklı değildir. Şu hâlde Özel Rölâtivite Teorisinin formülleri kullanılmayabilir.

3) İmpulsun korunduğunu yazalım :

$$mv = mv' + MV \quad \text{veyâ} \quad m(v - v') = MV$$

Çarpışma esnek olduğundan kinetik enerji de korunur; bu da

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv' + \frac{1}{2}MV^2 \quad \text{veyâ} \quad m(v^2 - v'^2) = MV^2$$

verir. Bu bağıntıların oranını alarak

$$\frac{m(v^2 - v'^2)}{m(v - v)} = v + v' = \frac{MV^2}{MV} = V.$$

a) Şu hâlde

$$v' + v = V$$

dir. b) Yukarıda $m(v - v') = MV$ bulunduğuna göre

$$v - v' = \frac{M}{m} V$$

olur.

c) Bulunan bağıntıları taraf tarafa toplamak sûretiyle

$$2v = V + V\frac{M}{m} \quad \text{veyâ} \quad v = \frac{V}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right)$$

yâni

$$v = \frac{V}{2m}(m + M)$$

bulunur. Bu *a*) ve *b*) bağıntılarını taraf tarafa çıkartmak sûretiyle de

$$v' = \frac{V}{2m}(m - M)$$

elde edilir.

d) $m < M$ olduğuna göre $m - M < 0$ olur; bu ise $v' < 0$ olması demektir. Oysaki $m + M > 0$ olduğundan $v > 0$ dır. Bu ise $\vec{v}$ ile $\vec{v'}$ nün ters yönlere doğru yönlenmiş olduklarını gösterir.

$$v = \frac{V}{2m}(m + M)$$

bağıntısından

$$V = \frac{2mv}{m + M} = \frac{2 \times 1{,}67 \cdot 10^{-27} \times 5{,}2 \cdot 10^{7}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} + 3{,}82 \cdot 10^{-26}} \text{ m/s} = 4{,}35 \cdot 10^{6} \text{ m/s}$$

yâni

$$V = 4350 \text{ km/s}$$

bulunur. Buna göre

$$v' = V - v = 4350 - 52\,000 = -47\,650 \text{ km/s}$$

olduğu anlaşılmış olur.

f) E ile çarpışmadan önce nötronun haiz olduğu kinetik enerjiyi ve E' ile de çarpışmadan sonraki kinetik enerjisini gösterirsek

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv'^2} = \frac{v^2}{v'^2}$$

olur. Çarpışmadan önceki nötron enerjisi 14 MeV olduğuna göre

$$E' = 14 \frac{v'^2}{v^2} = \left(\frac{47650}{52000}\right)^2 \times 14 \text{ MeV} = 11{,}57 \text{ MeV}$$

bulunur. Şu hâlde ${}_{11}Na^{23}$ atomunun E_R geri tepme enerjisi

$$E_R = 14 - 11{,}75 = 2{,}25 \text{ MeV}$$

dir.

4) Yüklü bir tâneciğin bir B magnetik alanındaki yörüngesinin bu şartlar altındaki yarıçapının

$$R = \frac{MV}{qB}$$

ile verildiği bilinmektedir. Burada Na^+ iyonunu yükü bir elektronun yükünün mutlak değerine eşittir. Buna göre

$$R = \frac{3{,}82 \cdot 10^{-26} \times 4{,}35 \cdot 10^6}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \times 0{,}3} = 3{,}18 \text{ m}$$

olur.

5) Bu bir hareket terkibi problemidir. OX ekseni üzerinde

$$x = vt \qquad (1)$$

olup, OY ekseni üzerinde ise

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg$$

ya da

$$\frac{dy}{dt} = gt \qquad \text{ve} \qquad y = \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

olur. t yi (1) ile (2) arasından elersek yörünge olarak

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v}$$

bulunur ki bu da yörüngenin bir parabol olduğunu gösterir.

Nötronun enerjisi $0{,}025\ eV = 1{,}6.10^{-19} \times 25.10^{-3}$ Joule

olduğuna göre

$$\frac{1}{2} mv^2 = 1{,}6 \times 25.10^{-22}$$

bağıntısından nötronun hızı olarak

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 25.10^{-22}}{1{,}67.10^{-27}}} = 2180 \text{ m/s}$$

bulunur. Bu takdirde borunun iki ucu arasında, nötronun boruya girdiği ve çıktığı yerler arasındaki seviye farkı

$$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v}\right)^2 = 4{,}9 \left(\frac{10}{2180}\right)^2 = 0{,}105 \text{ mm}$$

bulunur.

6) İlk hâlde bahis konusu olan bir ışınımlı yakalanma, yâni bir (n, γ) reaksiyonudur.

$${}_{11}Na^{23} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{11}Na^{24} + \gamma$$

${}_{11}Na^{24}$ atomu β^- yayınlayarak bozulduğuna göre

$${}_{11}Na^{24} \rightarrow \beta^- + {}_{12}Mg^{24}$$

olur. (n, p) reaksiyonu ile de

$${}_{11}Na^{23} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{1}p^{1} + {}_{10}Ne^{23}$$

elde edilir.

${}_{11}Ne^{23}$ atomu da β^- yayınlayarak bozulduğundan

$${}_{10}Ne^{23} \rightarrow \beta^- + {}_{11}Na^{23}$$

elde edilir.

PROBLEM : 150 — 120 000 voltluk bir elektrik alanındaki bir elektronun ve bir de α tâneciğinin kazandıkları enerjileri eV, erg, joule, kalori ve kWh cinsinden ifâde ediniz.

ÇÖZÜM :

120 000 voltluk bir potansiyel farkının etkisi altında hareket eden e yüklü bir elektronun kinetik enerjisi, tanımı gereğince

$$T_e = eV = 1{,}2.10^5 \text{ eV} = 1{,}2.10^2 \text{ keV} = 0{,}12 \text{ MeV}$$

dir. Öte yandan α tâneciklerinin ise iki kere iyonlaşmış $_2He^4$ atomu olduğu bilinmektedir; bu ise $_2He^4$ ün çekirdeğinden başka bir şey değildir. Buna göre aynı potansiyel farkında α nın kinetik enerjisi

$$T_\alpha = 2eV = 0{,}24 \text{ MeV}$$

olur. Buna göre bu enerjiler, 1 $eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Joule$=1{,}602 \cdot 10^{-12}$ erg olması dolayısıyla, sırasıyla

$$T_e = 1{,}2 \cdot 10^5 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 19{,}22 \cdot 10^{-15} \text{ Joule} = 19{,}22 \cdot 10^{-8} \text{ erg}$$

$$T_\alpha = 38{,}44 \times 10^{-15} \text{ Joule} = 38{,}44 \cdot 10^{-8} \text{ erg}$$

olur.

Öte yandan 1 cal$=4{,}18$ Joule olduğundan

$$T_e = \frac{19{,}22 \cdot 10^{-15} \text{ (Joule)}}{4{,}18 \text{ (Joule/cal)}} = 4{,}59 \cdot 10^{-15} \text{ cal}$$

ve nihâyet 1 wh$=3600\,J$ olduğu için de

$$T_e = \frac{19{,}22 \cdot 10^{-15}\,(J)}{3{,}6 \cdot 10^6\,(J/\text{kwh})} = 5{,}34 \cdot 10^{-21} \text{ kwh}$$

$$T_\alpha = 10{,}68 \cdot 10^{-21} \text{ kwh}$$

bulunur.

PROBLEM : 151.— 1 kg $_3Li^7$ çekirdeği ile aynı miktardaki protonun füzyonundan dolayı açığa çıkacak enerji ne kadardır?

1 kg kömürün yanmasıyla yaklaşık olarak 10 kWh lık bir enerji açığa çıktığına göre yukarda sözü geçen füzyon olayında açığa çıkan enerji kaç ton kömürün yanmasının verdiği enerjiye denk olacaktır?

ÇÖZÜM :

Göz önüne alınan reaksiyon

$$_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow 2\,{}_2He^4$$

reaksiyonudur. AKB cinsinden lityum ve helyum çekirdekleriyle protonun kütleleri sırasıyla : 7,01657 (AKB) ; 4,002777 (AKB) ; ve 1,007592 (AKB) dir.

Buna göre reaksiyonun ortaya koyduğu kütle farkı :

$$\Delta m = (7{,}016\,570 + 1{,}007\,592) - 2\,(4{,}002\,777) =$$
$$= 8{,}024\,162 - 8{,}005\,554 = 0{,}018\,608\,(\text{AKB})$$

dir. 1 AKB=931 MeV olduğundan bu kütle farkının tekaabül ettiği enerji

$$\Delta E = 931 \,.\, \Delta m = 931 \times 0{,}018\,608 = 17{,}33 \text{ MeV}$$

olur. Öte yandan 1 kg $_3Li^7$ deki çekirdek sayısı

$$n_{Li} = \frac{6{,}025 \,.\, 10^{26}}{7{,}018} = 8{,}59 \,.\, 10^{25}$$

dir. Bu itibarla bir kilo lityumun protonlarla füzyonu sonucu açığa çıkacak olan enerji

$$E = 17{,}3 \times 8{,}59 \,.\, 10^{25}\,\text{MeV} = 1{,}485 \,.\, 10^{33}\,(\text{eV}) \times 1{,}602 \,.\, 10^{-19}\,(J/eV)$$
$$= 2{,}38 \,.\, 10^{14}\,(w \times s) = 6{,}61 \,.\, 10^{7}\; kwh = 6{,}61 \,.\, 10^{4}\; Mwh$$

olur. Bu ise 6610 ton kömürün yanmasından elde edilecek olan enerjiye denktir.

PROBLEM : 152.— Bir protonun bir $_3Li^7$ çekirdeği içine girebilmesi için gerekli kinetik enerjisi ne olmalıdır? Bu enerjiye tekaabül eden sıcaklık nedir?

ÇÖZÜM :

Protonun lityum çekirdeğine girebilmesi için bunların arasındaki itici Coulomb kuvvetlerinin yenilmesi gerekir. Meseleyi basitleştirmek üzere lityum çekirdeğinin sükûnette olduğunu varsayalım. Protonun lityum çekirdeği içine girebilmesi için merkezinin lityum merkezine

$$\rho = r_{Li} + r_p$$

uzaklığı kadar yaklaşması gereklidir. Burada r_{Li} ile lityum çekirdeğinin ve r_p ile de protonun yarıçapı gösterilmektedir.

A atom kütlesini haiz olan bir çekirdeğin yarıçapı

$$r_A = 1,3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A} \quad \text{metre}$$

ile verildiğinden, her iki çekirdeğin kütle merkezleri biribirlerinden ρ kadar uzakta oldukları zamanki COULOMB potansiyeli,

$$E_{pot} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\rho} = \frac{3\times(1,602 \cdot 10^{-19})^2}{4\times 3,1416\times 8,854 \cdot 10^{-12}\times 1,3 \cdot 10^{-15}(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{1})} =$$

$$= 2,082 \cdot 10^{-13}\,(J) = \frac{2,082 \cdot 10^{-23}\,(J)}{1,602 \cdot 10^{-19}\,(J/eV)} = 1,29 \cdot 10^6\,\text{eV} = 1,29\ \text{MeV}$$

olur. Gerekli kinetik enerji ise hiç değilse bu potansiyel enerjiye eşit olmalıdır. Şu hâlde

$$E_{kin} \geqq 1,29\ \text{MeV}$$

dir.

Öte yandan gazların kinetik teorisine göre gaz hâli için

$$E_{kin} = \frac{3}{2} kT$$

dir ve burada $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\,(J/°K)$: BOLTZMANN sâbitini göstermektedir. Dolayısıyla

$$T = \frac{2}{3}\frac{E_{kin}}{k} = \frac{2}{3} \times \frac{2,082 . 10^{-13}\,(J)}{1,38 . 10^{-23}\,(J/_0K)} = 10,04 . 10^9\,{}^0K$$

bulunur.

Bu mertebeden sıcaklıklarda herhangi bir cisim ancak gaz hâlinde bulunabildiğinden gazların kinetik teorisinin formüllerini bu hâle uygulamak doğrudur.

Yüksek Enerji ve Temel Tânecikler Fiziği

PROBLEM : 153 — p sükûnette olmak kaydıyla

$$\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$$

reaksiyonunun çeşitli korunum kanunları çerçevesi içinde mümkün olup olmadığını ve bu reaksiyonun eşik enerjisini tartışınız.

ÇÖZÜM :

Göz önünde alınması gereken korunum kanunları şunlardır :

1) Spin korunumu,
2) Yük korunumu,
3) Baryon sayısı korunumu,
4) Yabancılık sayısı korunumu

Bunlardan spin korunumuna eğilecek olursak, π^- nin spini 0 ve p ninki ise 1/2 olduğundan reaksiyon sonrası ortaya çıkan tâneciklerin toplam spininin de 1/2 olması gereklidir. Gerçekten de K^+ nın spini 0 ve Σ^- ninki ise 1/2 olduğundan bu reaksiyonda spin korunuyor demektir.

p ve Σ^- baryon olduklarından reaksiyon öncesi ve sonrasına nisbetle baryon sayısının da korunmakta olduğu görülmektedir.

π^- için S yabancılık sayısı $S=0$, p için $S=0$, K^+ için $S=+1$ ve Σ^- için de $S=-1$ dir. Buna binâen reaksiyon öncesi toplam $S=0$ ve reaksiyon sonrası toplam $S=0$ olduğundan yabancılık sayısı da korunuyor demektir.

Bu itibarla göz önüne alınmış olan korunum kanunları çerçevesi içinde bu reaksiyon mümkündür.

Şimdi p ile impulsu, E ile toplam enerjiyi, T ile kinetik enerjiyi, v ile kütle merkezi sisteminin (KMS nin) lâboratuvar sistemine (LS ye) nazaran izafî hızını ve γ ile

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

büyüklüğünü göstermek; ayrıca üstleri çizgili büyüklüklerle de KMS ne taallûk eden büyüklüklere işâret etmek sûretiyle LORENTZ dönüşüm formüllerinin

$$\bar{p}_1 = \gamma\left[p_1 - \frac{v}{c}\frac{E_1}{c}\right] \tag{1}$$

$$\bar{p}_2 = \gamma\left[p_2 - \frac{v}{c}\frac{E_2}{c}\right] \tag{2}$$

$$\frac{\bar{E}_1}{c} = \gamma\left[\frac{E_1}{c} - \frac{v}{c}p_1\right] \tag{3}$$

$$\frac{\bar{E}_2}{c} = \gamma\left[\frac{E_2}{c} - \frac{v}{c}p_2\right] \tag{4}$$

şeklinde olduklarına işâret edelim.

A— Şimdi bu dönüşüm formüllerine dayanarak bilinen büyüklükler cinsinden v/c ve γ yı hesaplamak istiyoruz. Bu itibarla

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4$$

şeklinde bir reaksiyon göz önüne alalım. KMS, bu takdirde,

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0$$

bağıntısıyla nitelenir. Buna göre (1) ve (2) dolayısıyla

$$p_1 - \frac{v}{c}\frac{E_1}{c} + p_2 - \frac{v}{c}\frac{E_2}{c} = 0 \tag{5}$$

olur. Hâlbuki Özel Rölâtivite Teorisine göre

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4 \tag{6}$$

dür. Diğer taraftan ise tanımı dolayısıyla

$$E_1 = T_1 + m_1 c^2 \tag{7}$$

dir. (7) yi kareye kaldırıp (6) ile karşılaştırmak sûretiyle

$$p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{T_1 (T_1 + 2m_1 c^2)}$$

bulunur. Öte yandan protonun sükûnette olduğu kabul edilmiş olduğundan

$$p_2 = 0 \tag{9}$$

$$E_2 = m_2 c^2 \tag{10}$$

dir. Bunlara binâen (5) den

$$\frac{1}{c} \sqrt{T_1(T_1 + 2m_1c^2)} = \frac{v}{c^2} (T_1 + m_1 c^2 + m_2 c^2)$$

ve buradan da

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{T_1(T_1 + 2m_1c^2)}}{T_1 + m_1c^2 + m_2c^2} \tag{11}$$

ve

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T_1 + m_1c^2 + m_2c^2}{\sqrt{(T_1 + m_1 c^2 + m_2 c^2)^2 - T_1(T_1 + 2m_1 c^2)}} \tag{12}$$

ifâdeleri elde edilir.

B— KMS'nde tezâhür eden enerjiyi hesaplamak üzere (3) ve (4) ten

$$\frac{\overline{E}_1 + \overline{E}_2}{c} = \gamma \left[\frac{E_1}{c} - \frac{v}{c} p_1 + \frac{E_2}{c} - \frac{v}{c} p_2 \right] =$$

$$= \left[\frac{T_1 + m_1c^2 + m_2c^2}{c} - \frac{\sqrt{T_1(T_1 + 2m_1 c^2)}}{T_1 + m_1 c^2 + m_2 c^2} \frac{1}{c} \sqrt{T_1(T_1 + 2m_1c^2)} \right]$$

$$= \frac{\gamma}{c} \left[\frac{(T_1 + m_1 c^2 + m_2c^2)^2 - T_1(T_1 + 2m_1c^2)}{T_1 + m_1c^2 + m_2c^2} \right]$$

ve (12) yi de göz önünde tutarak

$$\overline{E}_1+\overline{E}_2=\sqrt{(T_1+m_1c^2+m_2c^2)^2-T_1\,(T_1+2m_1c^2)}$$
$$=\sqrt{(m_1c^2+m_2c^2)^2+2m_2c^2T_1}$$

bulunur.

C—T_E eşik enerjisinin hesabı.

KMS de reaksiyonun vukuu bulabilmesi için gerekli olan minimum enerji yâni eşik enerjisi reaksiyon ürünlerinin kütlesel enerjilerinin toplamına eşit olan enerjidir. Bu itibarla ve T_E ile m_1 in haiz olması gerekli bu minimum enerjiyi göstererek

$$\sqrt{(m_1c^2+m_2c^2)^2+2m_2c^2T_E}=(m_3+m_4)c^2$$

yâni

$$T_E=\frac{(m_3c^2+m_4c^2)^2-(m_1c^2+m_2c^2)^2}{2m_2c^2}$$

olur. Bu formüle göre verilen reaksiyonun T_E eşik enerjisi hesaplanacak olursa

π^- nin sükûnet enerjisi $=m_1c^2=139{,}63$ MeV

p nin sükûnet enerjisi $=m_2c^2=938{,}21$ MeV

K^+ nin sükûnet enerjisi $=m_3c^2=494$ MeV

Σ^- nin sükûnet enerjisi $=m_4c^2=1196{,}4$ MeV

olduğundan

$$T_E=\frac{(494+1196{,}4)^2-(139{,}63+938{,}21)^2}{2\times 938{,}21}=904\ \text{MeV}$$

bulunur.

PROBLEM : 154.— Sükûnetteki bir m_2 kütlesi üzerine çarpan bir m_1 kütlesinin doğurduğu bir reaksiyonda ortaya çıkan tâneciklerin kütleleri M_1, M_2, M_3,... ise genellikle bu reaksiyonun T_E eşik enerjisinin

$$T_E=\frac{\left(\sum_i M_i c^2\right)^2-(m_1c^2+m_2c^2)^2}{2m_2c^2}$$

ile verildiğini gösterdikten sonra çarpan tâneciğin bir γ fotonu olması hâlinde $T_E = E_\gamma$ olacağını hesaba katarak durumu tartışınız.

PROBLEM : 155.— Biribirine her bakımdan özdeş iki proton hızlandırıcının ürettiği iki proton hüzmesini karşı karşıya çarpıştırmak yoluyla bir proton - antiproton çifti teşkil edilmek isteniyor. Bu reaksiyonun vukuu bulabilmesi için eşik enerjisi nedir? hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Biribirlerine karşıt yönde hareket eden ve aynı şartlar altında üretilmiş 1 ve 2 numaralı protonlar için lâboratuvar sisteminde (LS'de)

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= -p_1 \\ E_2 &= E_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

yazılır. Bu reaksiyon mutlaka rölâtivite içi hızlarda vukuu bulacağından kütle merkezi sistemine (KMS'ye) geçerken LORENTZ dönüşümlerini uygulamak gereklidir. Üstü çizgili büyüklükler LORENTZ dönüşümlerine göre KMS'de tanımlanmış büyüklükleri gösterdiğinde, v ile protonların hızlarının mutlak değerini göstermek ve

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

olmak üzere (1) bağıntılarını da göz önünde tutarak

$$\bar{p}_1 = \gamma\left[p_1 - \frac{v}{c}\,\frac{E_1}{c}\right]$$

$$\bar{p}_2 = \gamma\left[p_2 - \frac{v}{c}\,\frac{E_2}{c}\right] = \gamma\left[-p_1 - \frac{v}{c}\,\frac{E_1}{c}\right]$$

olur. Her iki referans sisteminde de impuls ve enerji korunumu kurallarının geçerli olması nedeniyle

$$0 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = p_1 + p_2 = \gamma\left[p_1 - \frac{v}{c}\,\frac{E_1}{c} - p_1 - \frac{v}{c}\,\frac{E_1}{c}\right]$$

olur. Bu bağıntı $v/c = 0$, ve dolayısıyla $\gamma = 1$ olmasını âmirdir. Buna göre enerjilerin LS'den KMS'ye geçişiyle ilgili

$$\frac{\bar{E}_1}{c}=\gamma\left[\frac{E_1}{c}-\frac{v}{c}p_1\right]$$

$$\frac{\bar{E}_2}{c}=\gamma\left[\frac{E_2}{c}-\frac{v}{c}p_2\right]$$

LORENTZ formüllerine binâen

$$\bar{E}_1+\bar{E}_2=\gamma\,[E_1-vp_1+E_2-vp_2]=1\times[E_1-vp_1+E_1+vp_1]=2E_1$$

olması gerektiği bulunur.

Buna göre, etkileşen tâneciklerin sayısını muhafaza etmek sûretiyle herhangi bir M kütlesi yaratılmak istenirse öyle bir enerji eşiği lâzım gelir ki, $m_1=m_2$ olmak üzere,

$$2E_1=Mc^2+m_1c^2+m_2c^2=Mc^2+2m_1c^2$$

yâni, T_E ile gerekli eşik enerjisi gösterilmek üzere,

$$2\,(T_E+m_1c^2)=Mc^2+2m_1c^2$$

yâni

$$T_E=\frac{Mc^2}{2} \tag{2}$$

olsun.

Göz önüne alınan problemde söz konusu olan bir proton - antiproton çiftinin yaratılması, yâni 2 proton kütlesine bedel bir M kütlesinin zuhurudur. Bir protonun kütlesinin MeV cinsinden LS'deki değeri yaklaşık olarak 940 MeV olduğundan (2) formülüne binâen

$$T_E=940\ \text{MeV}$$

olması gerektiği anlaşılmış olur.

PROBLEM : 156 — π mezonlarının

$$\textbf{nükleon}+\textbf{nükleon}\rightarrow\pi+\textbf{nükleon}+\textbf{nükleon}$$

reaksiyonu uyarınca oluşumlarının eşik enerjisini hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

Problem: 153 de eşik enerjisi için tesis edilmiş olan ifâdeye binâen göz önüne alınan reaksiyon için eşik enerjisi

$$T_E = \frac{(2m_0c^2+m_\pi c^2)^2-(2m_0c^2)^2}{2m_0c^2} = m_\pi c^2\left(2+\frac{m_\pi c^2}{2m_0c^2}\right)$$

ifâdesiyle verilecektir.

$$m_\pi c^2 \cong 140 \text{ MeV}$$

$$m_0c^2 \cong 930 \text{ MeV}$$

olduğundan

$$T_E = 140\left(2+\frac{140}{2\times 930}\right) \cong 290 \text{ MeV}$$

bulunur.

PROBLEM : 157.— Sükûnetteki bir π^+ mezonun kendi kendine

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

reaksiyonu uyarınca bozulması esnâsında μ^+ mezonlarının 4,0 MeV lik bir kinetik enerjiyle ortaya çıktıkları gözlenmektedir. μ^+ mezonunun kütlesi 212 m_e ve ν nötrinosununki de sıfır olarak alınmak üzere mezonun sükûnet kütlesini m_e birimi cinsinden hesaplayınız.

ÇÖZÜM :

m_π, m_μ, m_ν ile pionun, mezonun, ve nötrinonun kütlelerini

p_π, p_μ, p_ν ile mütekaabil impulslarını,

E_π, E_μ, E_ν ile toplam enerjilerini, ve

T_π, T_μ, T_ν ile de kinetik enerjilerini gösterelim.

Bozulması sırasında π^+ pionu sükûnet hâlinde olduğundan

$$T_\pi = 0 \quad , \quad p_\pi = 0 \quad , \quad E_\pi = m_\pi c^2$$

dir. $p_\pi = 0$ olması hasebiyle sistemin kütle merkezi hareketsiz olacağından impuls korunumu dolayısıyla

$$\vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$$

dir. Öte yandan ise:

$$E_\mu^2 = p_\mu^2c^2 + m_\mu^2c^4$$

$$E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4 = p_\nu^2 c^2 = p_\pi^2 c^2$$

$$E_\nu = p_\mu c$$

μ

dir. Fakat

$$E_\mu = T_\mu + m_\mu c^2$$

olmasından dolayı

$$p_\mu c = \sqrt{T_\mu (T_\mu + 2m_\mu c^2)}$$

olur. Toplam enerjinin korunumu dolayısıyla da

$$m_\pi c^2 = m_\mu c^2 + T_\mu + \sqrt{T_\mu (T_\mu + 2m_\mu c^2)}$$

yazılır. Bu ifâdenin her iki yanı $m_e c^2$ ile bölünecek olursa

$$\frac{m_\pi}{m_e} = \frac{m_\mu}{m_e} + \frac{T_\mu}{m_e c^2} + \sqrt{\frac{T_\mu}{m_e c^2}\left(\frac{T_\mu}{m_e c^2} + 2\frac{m_\mu}{m_e}\right)}$$

olur. Hâlbuki

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 212$$

$$m_e c^2 = 0{,}511\ MeV$$

$$\frac{T_\mu}{m_e c^2} = \frac{4{,}0}{0{,}511} = 7{,}835$$

dir. Buna göre

$$\frac{m_\pi}{m_e} = 212 + 7{,}835 + \sqrt{7{,}835 \times (7{,}835 + 424)}$$

$$= 212 + 7{,}835 + 58{,}1$$

ve

$$m_\pi = 277{,}9\ m_e$$

bulunur.

PROBLEM : 158.— Sükûnet kütlesi m_0 olan bir nötr π° mezonu $\beta c = v$ hızıyla lâboratuvar sisteminde hareket etmekte ve bu sebepten ötürü de

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

toplam enerjisini haiz bulunmaktadır. Bu mezon

$$\pi^\circ \rightarrow 2h\nu$$

reaksiyonu uyarınca iki fotona bozulduğu takdirde

1) Enerji ve impuls korunumu bağıntıları yardımıyla lâboratuvar sisteminde θ doğrultusunda yayınlanan bir fotonun

$$h\nu = \frac{m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\beta\cos\theta)}$$

enerjisini haiz olacağını,

2) Fotonların maksimum ve minimum enerjilerinin

$\theta = 0$ **için** $h\nu_{max} = \frac{1}{2} mc^2(1+\beta)$

$\theta = 180^\circ$ **için** $h\nu_{min} = \frac{1}{2} mc^2(1-\beta)$

olduğunu ve

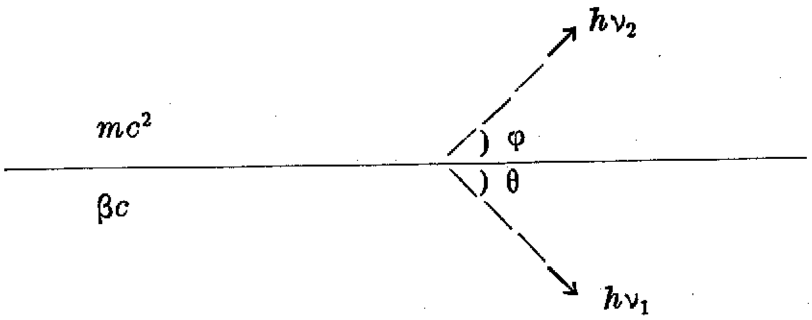
3) π° mezonlarının sükûnet hâlindeki bozulmalarının eşyönsel olduklarını kabul ederek, bunların lâboratuvar sisteminde βc hızını haiz olmaları hâlinde, θ doğrultusu boyunca birim katı açı içine düşen kuvantum sayısının, K ile bir sâbiti göstermek üzere.

$$I(\theta) = K\left[\frac{m_0}{m}\,\frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right]^2$$

formülüyle verileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM :

1) Göz önüne alınan reaksiyonun şeması şöyledir :



Toplam enerji ile impuls korunumu kanunları sırasıyla

$$mc^2 = h\nu_1 + h\nu_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{h\nu_1}{c}\sin\theta = \dfrac{h\nu_2}{c}\sin\varphi \\ mc^2\beta = h\nu_1\cos\theta + h\nu_2\cos\varphi \end{cases}$$

yerir. Son iki ifâdeyi kareye kaldırarak taraf tarafa toplamak sûretiyle $(h\nu_2)^2$ yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (h\nu_2)^2\sin^2\varphi &= (h\nu_1)^2\sin^2\theta \\ (h\nu_2)^2\cos^2\varphi &= (h\nu_1)^2\cos^2\theta + (mc^2)^2\beta^2 - 2mc^2 h\nu_1\beta\cos\theta \\ \hline (h\nu_2)^2 &= (h\nu_1)^2 + (mc^2)^2\beta^2 - 2mc^2 h\nu_1\beta\cos\theta \end{aligned}$$

Fakat öte yandan enerji korunumu dolayısıyla da

$$(h\nu_2)^2 = (mc^2)^2 + (h\nu_1)^2 - 2mc^2 h\nu_1$$

yazılabileceğinden bu son iki ifâdeyi eşitleyerek

$$(mc^2)^2(1-\beta^2) = 2mc^2(1-\beta\cos\theta)\,h\nu_1$$

bulunur ki buradan da

$$h\nu_1 = \frac{mc^2(1-\beta^2)}{2(1-\beta\cos\theta)} = \frac{mc^2\sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\beta\cos\theta)}$$

elde edilir.

2) Bu son ifâde, $(1-\beta\cos\theta)$ ifâdesi minimum değerine eriştiğinde yâni $\cos\theta=1$ veyâ $\theta=0$ için, maksimum olur. Bu takdirde ise

$$h\nu_1 = \frac{mc^2(1-\beta^2)}{2(1-\beta)} = \frac{mc^2}{2}(1+\beta)$$

olur.

Kezâ aynı şekilde $h\nu_1$, eğer $(1-\beta\cos\theta)$ maksimum ise yâni $\cos\theta = -1$ veyâ $\theta = 180°$ ise, minimum olur. Bu takdirde de

$$h\nu_1 = \frac{mc^2(1-\beta^2)}{2(1+\beta)} = \frac{mc^2}{2}(1-\beta)$$

olur.

3) Eğer foton yayınlanması π^0 ın sükûnette olduğu sistemde (yâni kütle merkezi sistemde) eşyönsel ise birim katı açı ve birim zaman başına yayınlanan fotonların sayısı bir sâbit olur (bu, KMS kütle merkezi sisteminde bu sayının τ intişâr doğrultusundan bağımsız olması demektir). Buna göre $d\Omega^*$ ile KMS deki katı açı elemanını göstermek üzere

$$\frac{dU}{d\Omega^*} = K$$

ve

$$dU = 2\pi K \sin\tau\, d\tau$$

yazılabilir.

KMS de τ doğrultusunda yayınlanan fotonlar LS lâboratuvar sisteminde $d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$ katı açı elemanı içinde kalan θ doğrultusunda yayınlanmış olacaklardır. Bu itibarla KMS de $d\Omega^*$ içindeki bütün fotonlar LS de $d\Omega$ içinde bulunacaklardır. Şu hâlde

$$I(\theta) = \frac{dU}{d\Omega} = \frac{dU}{2\pi\sin\theta\, d\theta} = \frac{2\pi K\sin\tau\, d\tau}{2\pi\sin\theta\, d\theta} = K\frac{\sin\tau}{\sin\theta}\frac{d\tau}{d\theta}$$

olur. Bu itibarla

$$\frac{\sin\tau\, d\tau}{\sin\theta\, d\theta}$$

oranını hesaplamak ve bunun için de τ ile θ arasında bağıntılar tesis etmek gerekmektedir.

Bunun için KMS deki toplam enerjinin m_0c^2 ve her bir fotonun gene KMS ye göre enerjisinin

$$\frac{m_0c^2}{2} = \overline{h\nu}$$

olduğuna dikkati çekelim (Bundan böyle KMS ye izâfe edilen bütün büyüklüklerin üstüne bir çizgi konacaktır). Fotonların KMS deki impulsları da

$$\bar{p} = \frac{\overline{h\nu}}{c} = \frac{m_0c}{2}$$

dir.

π^0 tarafından temsil olunan kütle merkezi lâboratuvara nazaran βc hızıyla hareket etmektedir. LORENTZ dönüşümleri LS den KMS ye geçmeyi mümkün kılarlar. Fotonların impuls bileşenleri için bu dönüşümler, p_x ile π^0 ın hareket yönüne paralel impuls bileşenini ve p_y ile de buna dik bileşeni göstermek; ve $\bar{p}_x$ ve $\bar{p}_y$ de bunlara KMS de tekaabül eden büyüklükler olmak üzere,

$$\bar{p}_x = \frac{p_x - \beta\frac{E}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{p}_y = p_y$$

dir. E fotonun toplam enerjisini göstermektedir.

Eğer τ ile θ sırasıyla KMS ve LS deki intişâr doğrultularıysa

$$\frac{\bar{p}_y}{\bar{p}_x} = \text{tg}\,\tau \quad \text{ve} \quad \frac{p_y}{p_x} = \text{tg}\,\theta$$

dır. LORENTZ dönüşümlerinden faydalanarak

$$\text{tg}\,\tau = \frac{\bar{p}_y}{\bar{p}_x} = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{p_y/p_x}{1-\beta\dfrac{E}{cp_x}}$$

olur. Fakat $p_x = p\cos\theta$ ve $E = pc$ olduğundan

$$\text{tg}\,\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\beta} = \frac{m_0}{m}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\beta}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sin\tau = \frac{\bar{p}_y}{\bar{p}}\,, \quad \sin\theta = \frac{p_y}{p}$$

olması hasebiyle

$$\frac{\sin\tau}{\sin\theta} = \frac{p}{\bar{p}} = \frac{mc(1-\beta^2)}{2(1-\beta\cos\theta)}\cdot\frac{2}{m_0 c} = \frac{m}{m_0}\,\frac{1-\beta^2}{1-\beta\cos\theta}$$

veyâ, $1-\beta^2=(m_0/m)^2$ olması dolayısıyla,

$$\sin\tau = \frac{m_0}{m}\,\frac{\sin\theta}{1-\beta\cos\theta} \tag{1}$$

bulunur. $\cos\tau$ nun değeri de

$$\frac{\sin\tau}{\operatorname{tg}\tau} = \cos\tau = \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$$

olarak tesbit edilir. Şimdi (1) in her iki yanının da diferansiyelini alalım:

$$\cos\tau\, d\tau = \frac{m_0}{m}\,\frac{(1-\beta\cos\theta)\cos\theta-\beta\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}\,d\theta$$

olur. Buradan da

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{m_0}{m}\,\frac{\cos\theta-\beta}{(1-\beta\cos\theta)^2}\,\frac{1}{\cos\tau} = \frac{m_0}{m}\,\frac{\cos\theta-\beta}{(1-\beta\cos\theta)^2}\,\frac{1-\beta\cos\theta}{\cos\theta-\beta} = \frac{m_0}{m}\,\frac{1}{1-\beta\cos\theta}$$

elde edilir. Fakat

$$\frac{\sin\tau}{\sin\theta} = \frac{m_0}{m}\,\frac{1}{1-\beta\cos\theta}$$

olması dolayısıyla nihâyet

$$I(\theta) = K\frac{\sin\tau}{\sin\theta}\,\frac{d\tau}{d\theta} = K\left[\frac{m_0}{m}\,\frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right]^2$$

bulunur.

PROBLEM : 159.— 1 GeV=1000 MeV lik enerjiyi haiz pionlardan mürekkep bir hüzmenin doğduğu yerden $l=20$ metre sonra uğramış olduğu zayiflamayı hesaplayınız.

(Sükûnetteki π lerin ortalama ömrü: $\theta = 2{,}56 \cdot 10^{-8}$sec, ve $m_\pi\, c^2 =$ 140 MeV)

ÇÖZÜM :

LS de pionların meydana gelişleriyle detekte oluşları arasında geçen zaman $l/c = \Delta t$ mertebesindedir. Tâneciğe bağlı sistemde ise buna tekaabül eden $\Delta t'$ zamanı LORENTZ dönüşümlerine göre

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

olacak şekildedir.

Pionun yarı ömrü pionun sükûnette olduğu sisteme göre tanımlanmış olduğundan hüzmenin zayıflaması

$$N = N_0 e^{-\Delta t'/\theta} = N_0 \exp\left(-\frac{l}{c\theta}\sqrt{1 - \beta^2}\right)$$

şeklindedir. Pionun kinetik enerjisi için

$$T_\pi = m_\pi c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right)$$

olduğundan buradan

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{m_\pi c^2}{m_\pi c^2 + T_\pi}$$

ve dolayısıyla da hüzmenin zayıflaması olarak nihâyet

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{l}{c\theta}\ \frac{m_\pi c^2}{m_\pi c^2 + T_\pi}\right)$$

bulunur. Buna binâen

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left[-\frac{20}{3.10^8 \times 2{,}56.10^{-8}}\ \frac{140}{1140}\right] = e^{-0.320} = 0{,}726$$

bulunur.

PROBLEM : 160.—

1) Bir fotodezentegrasyonun eşik enerjisini tesbit ediniz.

2) ^{66}Zn (γ, n) **^{66}Zn reaksiyonunun eşiğini tâyin ediniz; yâni bu reaksiyonu doğuran kuvantumun haiz olması gereken minimum enerjiyi hesaplayınız.**

Bunun için şu bilgiler verilmektedir :

a) Atomsal kütleler :

^{66}Zn	:	**65,94657 (AKB)**
^{65}Zn	:	**65,95520 (AKB)**
$_0n^1$	:	**1,00898 (AKB)**

b) ^{65}Zn radyoaktif olup K yakalanması ya da β^+ yayınlanması yoluyla bozulur; bu takdirde reaksiyon

$$^{65}\mathrm{Zn} \rightarrow \beta^+ + {}^{65}\mathrm{Cu} + 0{,}32\ \mathrm{MeV}$$

şeklindedir.

ÇÖZÜM :

1) Önce, kendisine ait büyüklükleri üzerileri çizilmiş harflerle göstereceğimiz kütle merkezi sisteminde (KMS de) ölçülen enerjiyi hesaplayalım. $\overline{p}_1$ ve $\overline{p}_2$ sırasıyla çarpan γ fotonu ile ^{66}Zn çekirdeğinin KMS deki impulsları olsun. E_1 ve E_2 de mütekaabil enerjileri gösterdiğinde bunlarla, bunların lâboratuvar sistemine (LS ye) nisbetle ölçülmüşleri arasındaki bağıntı LORENTZ dönüşüm formülleriyle temin edilir:

$$\overline{p}_1 = \gamma\left[p_1 - \beta\frac{E_1}{c}\right] \quad (1)\,, \qquad \frac{\overline{E}_1}{c} = \gamma\left[\frac{E_1}{c} = \beta p_1\right] \quad (3)$$

$$\overline{p}_2 = \gamma\left[p_2 - \beta\,\frac{E_2}{c}\right] \quad (2)\,, \qquad \frac{\overline{E}_2}{c} = \gamma\left[\frac{E_2}{c} - \beta p_2\right] \quad (4)$$

İmpuls korunumu kanununa göre KMS de

$$\overline{p}_1 + \overline{p}_2 = 0$$

olacağından, (1) ve (2) ye binâen,

$$\frac{p_1+p_2}{E_1+E_2}c=\beta \qquad \text{veyâ} \qquad \begin{cases} p_1=\dfrac{E_1}{c}, & E_1=E_\gamma \\ p_2=0, & E_2=m_2c^2 \end{cases}$$

dir. Şu hâlde

$$\beta=\frac{E_1}{E_1+m_2c^2}$$

olacaktır. Bu itibarla da KMS deki enerji olarak

$$\overline{E}_1+\overline{E}_2=\gamma\left[\frac{E_1}{c}-\beta\frac{E_1}{c}+\frac{m_2c^2}{c}\right]=\gamma\left[\frac{E_1+m_2c^2}{c}-\beta\frac{E_1}{c}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{E_1}{E_1+m_2c^2}\right)^2}}\left[\frac{E_1+m_2c^2}{c}-\frac{E_1}{c}\,\frac{E_1}{E_1+m_2c^2}\right]=$$

$$\frac{\overline{E}_1+\overline{E}_2}{c}=\frac{E_1+m_2c^2}{\sqrt{2E_1m_2c^2+m_2^2c^4}}\left[\frac{(E_1+m_2c^2)^2-E_1^2}{c(E_1+m_2c^2)}\right]=\frac{1}{c}\sqrt{2E_1m_2c^2+m_2^2c^4}$$

veyâ

$$\overline{E}_1+\overline{E}_2=\sqrt{m_2c^2(2E_1+m_2c^2)} \tag{5}$$

bulunur. Eşikte bu enerjinin, reaksiyonun doğurduğu kütlelerin sükûnetteki değerlerinin toplamına eşit olması gereklidir. m_3 ve m_4 ile reaksiyon sonrası ortaya çıkan kütlelerin sükûnet değerlerini gösterecek olursak:

$$\overline{E}_1+\overline{E}_2=(m_3+m_4)c^2 \tag{6}$$

olmalıdır. Buna göre E_1° ile fotonun göz önüne alınan reaksiyonu doğurabilmesi için gerekli minimum enerjisini (eşik enerjisini) göstetirsek (5) ve (6) dan

$$2E_1^0m_2c^2=(m_3+m_4)^2c^4-m_2^2c^4=(m_3+m_4-m_2)(m_3+m_4+m_2)c^4 \tag{7}$$

bulunur. Fotodezentegrasyon reaksiyonu

$$m_2+\gamma \rightarrow m_3+m_4-Q$$

yazılacağından ve Q enerjisi de

$$Q = -(m_3 + m_4 - m_2)\,c^2$$

olduğundan (7) denkleminden E°_1 eşik enerjisi için

$$E_1^\circ = -Q\,\frac{m_2+m_3+m_4}{2m_2} = -Q\,\frac{2m_2 - \frac{Q}{c^2}}{2m_2} = -Q\left(1 - \frac{Q}{2m_2c^2}\right) \qquad (8)$$

bulunur.

2) ^{65}Zn nin atomsal kütlesi

$$^{65}Zn \to \beta^+ + {}^{65}Cu + 0{,}32 \text{ MeV}$$

den kolaylıkla tâyin edilebilir. Gerçekten de bozulma bilânçosunu, kütleleri atomların kütleleri olarak almak sûretiyle

$$\frac{Q_1}{c^2} = M(^{65}Zn) - M(^{65}Cu) - 2m_e$$

olarak yazmak kaabildir. Buradan

$$M(^{65}Zn) = \frac{0{,}32+1{,}02}{931} + M(^{65}Cu) = \frac{1{,}34}{931} + 64{,}95520 = 64{,}95664$$

bulunur. Bu itibarla

$$^{66}Zn(\gamma\,,\,n)^{66}Zn$$

reaksiyonu için

$$\frac{Q_2}{c^2} = M(^{66}Zn) - M(Zn^{65}) - M(n) = 65{,}94667 - [64{,}95664 + 1{,}00898] = -0{,}01895$$

ve dolayısıyla da

$$Q_2 = -0{,}01895 \times 931 = -17{,}63 \text{ MeV}$$

bulunur. Şu hâlde bu reaksiyonun eşik enerjisi (8) formülüne göre

$$E_1^\circ = 17{,}63\left(1 + \frac{0{,}01895}{2\times 65{,}94667}\right) \cong 17{,}63 \text{ MeV}$$

dir.

Yanlış - Doğru Cetveli

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
17	1	çarpısma	çarpışma
20	10	hızlandırılırşa	hızlandırılırsa
89	9*	gausss	gauss
94	15	Nükleer kuveeler	Nükleer kuvvetler
94	17	iyonlanmış	iyonlaşmış
117	10*	spekrum	spektrum

* işâretli satırlar sayfanın altından itibâren sayılacaklardır.